KLASICKÁ MATEMATICKÁ LOGIKA

A. Sochor

OBSAH

PŘEDMLUVA

Tento text pojednává o matematické logice na třech různě obtížných úrovních.

Úroveň I: Úvod celého textu a úvody jednotlivých kapitol se snaží objasnit, o co jde v matematické logice a v jednotlivých jejích částech. Při tomto popisu se snažíme co nejvíce omezit použití symboliky. Tyto části textu by tedy měly být přístupné pro všechny, kteří se chtějí seznámit alespoň v nejhrubších rysech s idejemi, výsledky a směřováním matematické logiky.

Snaze intuitivně vysvětlit základní ideje matematické logiky odpovídá neobvykle značný rozsah těchto neformálních částí našeho textu.

Mezi nejvýznamnější výsledky matematické logiky patří věty o neúplnosti. Úvod ke čtvrté kapitole je pokusem popsat tento velkolepý objev co nejintuitivněji. Přitom se snažíme dokonce o neformální prokázání vět o neúplnosti, nikoli o pouhé jejich vyslovení.

K nejzajímavějším výsledkům matematické logiky náleží prokazování toho, že nějaký důkaz neexistuje. Intuitivní objasnění metod, kterými lze takovéto výsledky získat, nalezne čtenář v druhé části úvodu k poslední kapitole.

Tyto úvody jsou pochopitelně psány i pro ty, kteří se chtějí s matematickou logikou seznámit podrobněji a budou pokračovat rovněž ve čtení dalšího textu. Těmto čtenářům však doporučuji, aby se později k úvodům jednotlivých kapitol znovu vrátili. Myšlenky úvodů se pochopitelně více objasní po projití příslušné kapitoly — po přečtení podrobnějšího a formálnějšího textu bude čtenář hlouběji chápat intuitivní výklad obsažený v úvodu.

V textu se snažím i o návaznost na historický vývoj pojetí logiky. Za zajímavé pokládám zejména případy, kdy přístup matematické logiky vyzdvihuje jako závažná přesně ta místa, která za důležitá pokládala i antická nebo scholastická logika. Chci zdůraznit ty principy, jejichž významnost je nahlížena jak z formálního, tak i z intuitivního hlediska.

Úroveň II: Kapitoly I a II jsou určeny pro všechny zájemce o základy logiky. Zde se již nevyhýbáme formálnímu zápisu, ale snažíme se ho zpřístupnit podrobným intuitivním popisem významu jednotlivých symbolů. Poměrně velkou pozornost také věnujeme vyzdvižení nejdůležitějších idejí. Tento přístup nás nutí nezachovat postup běžný v literatuře, tzn. nebudeme popisovat výsledky v řadě za sebou, v pořadí daném pouze vhodností formálního dovozování. Snaha o zvýraznění nejzávažnějších myšlenek je formálně naplněna tím, že v jednotlivých paragrafech našeho textu je poměrně málo vět (v průměru pouze tři); snad takovéto zvýraznění nejdůležitějších míst přispěje k přehlednosti textu.

K tomu, co by měl z logiky umět používat každý matematik, však patří i věty o zavádění nových symbolů (tedy alespoň *věty* z prvého paragrafu třetí kapitoly bez prokazování). Za povšimnutí stojí rovněž rozbor implicitně používaných výsledků matematické logiky v „normálním“ matematickém důkaze (viz počátek §1 kap. IV).

Úroveň III: Zbytek textu je určen zájemcům o hlubší studium matematické logiky a může být čten po jednotlivých partiích, které na sebe příliš neodkazují. Takovéto relativně samostatné oblasti jsou zejména:

(a) věty o neúplnosti aritmetiky (kap. IV); ve čtvrté kapitole jsou poměrně lehké první dva paragrafy, které mohou sloužit jako krásná cvičení pro dokazování v axiomatických teoriích,
(b) teorie modelů (kap. V);
(c) rozhodnutelnost teorií (viz §1 kap. VI);
(d) interpretace (viz §3 kap. VI);
(e) souvislost dokazatelnosti a výrokové dokazatelnosti (§2 a §3 kap. III); tato partie patří k obtížnějším.
(f) nedokazatelnost Goodsteinovy věty v Peanově aritmetice (dodatek k poslední kapitole); tato část náleží k těm partiím knihy, které dosud nebyly dostupné v česky psané literatuře.

S výjimkou páté kapitoly se v celé knize nepředpokládají *žádné* matematické znalosti. Naproti tomu (zejména pro čtení textů třetí úrovně) se předpokládá schopnost a zejména *ochota* myslet.

K teorii modelů je potřeba znát základy teorie množin. Aby se čtenář mohl zabývat pouze předloženým textem, jsou potřebné úvahy předvedeny ve cvičeních (zejména ve třetí kapitole). Tato cvičení mají poukazovat na *vše* potřebné z teorie množin, ale svou stručností jsou koncipována spíše jako připomínka toho, s čím se již čtenář někdy alespoň v minimální míře seznámil.

*

V době psaní tohoto textu byla autorova vědecká práce podporována z grantu 1019901 GA AV ČR. Kniha byla napsána v TEXu.

Autor je velmi vděčen recenzentům Prof. P. Hájkovi, DrSc. a RNDr. M. Matouškovi, CSc. za cenné připomínky a návrhy, které vedly ke zkvalitnění předkládané knihy. Poděkování náleží také kolegům K. Bendové, J. Krajíčkovi, P. Pudlákovi a J. Sgallovi za rady a diskuse nad textem.

Autor děkuje zejména L. Běhounkovi za pozorné přečtení textu a za připomínky, které značně přispěly ke zvýšení kvality knihy.

Poděkování patří rovněž J. Hanikovi, Z. Honzíkové-Hanikové, R. Honzíkovi a M. Rösslerovi, kteří přečetli rozsáhlé části této knihy a poskytli cenná upozornění a dále také M. Pelišovi a B. Sobotkové za připomínky k některým částem textu. Děkuji také J. Mazúrkové, která napomohla zlepšit jazykovou stránku textu velice podstatným způsobem.

Své ženě děkuji nejen za to, že přetrpěla mé zahledění na práci na tomto textu, avšak také za to, že přitom byla ještě schopna pomoci odbornou radou ke zkvalitnění knihy.

Přes to vše zůstává v knize mnoho nedopatření, nejasností a velice pravděpodobně i chyb. Prosím všechny, aby mě na tato místa upozornili; takováto pomoc mi případně umožní nabízet errata, a tím napomůže pozdějším studentům.

A. S.

ÚVOD

Jak užívá rozum sebe sama?
Neboť na tom záleží nejvíc!
Marcus Aurelius, Hovory k sobě

Většina příslušníků druhu homo *sapiens* si váží rozumu. Tato úcta k rozumu jde tak daleko, že pro (téměř všechny) středověké myslitele je dokonce i *všemohoucí* Bůh „podřízen“ rozumu (sv. Tomáš Akvinský v Teologické sumě: „Odpovídám: Musí se říci, že pod všemohoucnost Boží nespadá, co obsahuje odporování.“). Považujeme za samozřejmé, že umíme správně uvažovat, ale téměř nikdy si neklademe výslovně otázky typu: Nemůže nastat situace, kdy samo usuzování nás dovede do neřešitelných rozporů? Co to doopravdy znamená něco dokázat? V jakém rozsahu může být při dokazování (matematikova) intuice nahrazena mechanickým kalkulem? Existují meze našeho myšlení? Shodujeme se všichni v tom, co je správné usuzování? — Těmito a mnohými podobnými otázkami se zabývá matematická logika a alespoň v minimální míře budou předmětem i tohoto textu.

Již na začátku však zdůrazněme, že v logice jde o to, *jak* usuzujeme (jak máme správně vyvozovat důsledky), a nikoli *na podkladě čeho* k závěrům přicházíme, neboli není předmětem logiky zkoumat, jakým způsobem a proč volíme předpoklady. Ověřování předpokladů, z nichž vyvozujeme (odvozujeme) důsledky, je otázkou zkušenosti, jiné vědy, nebo víry (přijímané někdy vědomě, často však podvědomě). V matematické logice se dokonce nestaráme o to, zda a v jakém smyslu jsou předpoklady pravdivé, ale pouze o to, zda je správné *vyvození*, a to může být správné i v případě, že předpoklady nejsou správné. Logika formuluje explicitně ty zdůvodňovací (dokazovací) kroky, které pokládáme intuitivně za správné a zkoumá takto vzniklý systém.

Při takto vymezeném oboru zkoumání, matematické logice nepřísluší řešit otázku, zda postihuje celé lidské myšlení, tzn. jestli se rozum projevuje i jinými způsoby než vyvozováním důsledků z předpokladů. Naproti tomu ve vymezené oblasti — a je to oblast pokrývající podstatnou oblast lidského rozumu — dosahuje matematická logika hlubokého poznání.

*

Na základě středověkého chápání definujeme obvykle logiku jako vědu o správném uvažování, i když původní řecké chápání bylo poněkud širší (logos má více významů: řeč, slovo, myšlenka, rozum, smysl, etc.). Není účelem tohoto textu zkoumat dějiny logiky, učiňme jen několik poznámek.

Za zakladatele logiky je pokládán Aristotelés (384–322 př. Kr.), který v Organonu[1)] podává *systematický* popis některých typů uvažování a odděluje správné úvahy

[1)] viz [A]

od nesprávných. Aristotelés sice píše, že „v oboru tohoto našeho zkoumání … nebylo započato vůbec nic“, ale již u jeho předchůdců[2] lze doložit *užití* logických principů, souvisejících zejména s principem sporu (Zénón z Eleje asi 490–430), u Platóna (427–347) např. princip typu „jestliže z předpokladu $\mathcal{A}$ vyplývá negace $\mathcal{A}$, pak platí negace $\mathcal{A}$“. Doba rozkvětu logiky u Řeků trvala asi 150 let. Na Aristotela navazuje Theofrastos z Eresu (asi 371–286, pokládaný také za zakladatele botaniky). Současně se rozvíjí zkoumání v Megarské škole, kde vynikají zejména Eukleidés z Megar (lat. Euclides) (†360 př. Kr.)[3], Diodóros Kronos (†307 př. Kr.) a Filón z Megar (kol. 300 př. Kr.). Pokračovateli jsou stoikové Zénón z Kitia (asi 334–262, zakladatel stoické filozofie) a Chrýsippos ze Soloi (asi 281–208), který se udává jako poslední z velkých řeckých logiků[4]. Ze starověkých logiků je třeba ještě uvést Galéna (129–199, známého zejména jako lékaře) a Boethia (asi 480–524/5), který svými (komentovanými) překlady do latiny zprostředkoval antickou logiku pozdějším učencům.

Na antické výsledky navázali středověcí myslitelé, např. formulací dalších principů logiky. Vrchol scholastické logiky je kladen krátce po jejích začátcích, tzn. do 13. stol.; po 14. stol. nastává útlum. Jako představitele uveďme pouze Alberta Velikého (1193–1280), jehož výklad Aristotelových spisů měl veliký význam pro další rozvoj logiky, Petra Hispania (1210–1277, pozdějšího papeže Jana XXI), Dunse Scota (asi 1264–1308, tvůrce filozoficko-teologického směru, který dokázal soupeřit se směrem Tomáše Akvinského) a Wiliama Occama (1270–1347, známého formulací tzv. Occamovy břitvy). Scholastická systematičnost ovlivnila nejen následující pojetí logiky, ale i její výuku.

V minulém století začíná rozvoj *matematické* (symbolické) logiky, vyvolaný zejména potřebou upřesnit základy matematiky a zpřesnit pojmy matematické analýzy[5]. Logickými paradoxy se zabývali již antičtí myslitelé (viz dále), nicméně objevení paradoxů v teorii množin[6] přineslo další podnět k intenzivnímu zkoumání logiky. Uveďme alespoň krátký seznam význačných představitelů[7] matematické logiky: pražský rodák B. Bolzano (1781–1848), G. Boole (1815–1864), A. de Morgan (1806–1871) G. Frege (1848–1925), G. Peano (1858–1932), D. Hilbert (1862–1943), B. Russell (1872–1970), A. Tarski (1901–1983), Th. Skolem (1887–1963), A. Church (1903–1995), J. Herbrand (1908–1931), A. Turing (1912–1954), G. Gentzen (1909–1945, který v Praze přednášel, ale bohužel[8] i zemřel), a zejména brněnský rodák

[2] O antické logice se čtenář doví více např. v [Bo], [Be], [Kn-Kn] nebo v [So]. Ve dvou posledně citovaných knihách je také popsána historie středověké logiky a počátky matematické logiky. Životopisné údaje o logicích starší doby se v různých pramenech liší, jedná se však o minimální rozdíly.

[3] Eukleidés z Megar byl žákem Sókratovým, Aristotelés pak následovníkem Sókratova žáka Platóna, i to podpírá domněnky o vlivu Sókrata na vznik logiky.

[4] Výsledky stoicko-megarské školy je bohužel nutno rekonstruovat z pozdějších prací, původní práce jsou ztraceny.

[5] V r. 1879 publikoval Frege spis o predikátové logice [F] a v důsledku toho někdy bývá tento rok spojován se vznikem matematické logiky. Jiní spojují počátek matematické logiky s prací G. Boolea [Boo] z r. 1854. V každém případě je však zjednodušením koncentrovat déledobý proces vzniku této disciplíny na jediného představitele či na jedinou práci.

[6] Z paradoxů teorie množin se zmíníme v našem textu pouze o nejznámějším, tj. Russellově paradoxu, viz cv. 29 kap. III.

[7] Krátké poznámky shrnující životopisná data a nejvýznamnější publikace některých významných logiků nalezne čtenář např. v práci [J-V].

[8] viz P. Vihan, Zpráva o posledních měsících a dnech Gerharda Gentzena prožitých v Praze,

K. Gödel (1906–1978); ze starších autorů pak obzvláště G. W. Leibniz[9] (1646–1716). Jména některých matematiků, kteří měli podstatný vliv na rozvoj teorie modelů najde čtenář u jednotlivých výsledků v páté kapitole.

*

Slovní spojení „**matematická logika**“ má zdůraznit, že pro zkoumání našeho uvažování se často používají metody běžné v matematice. Význačným rysem matematické logiky jsou tedy *idealizace* a *formalizace našeho usuzování*. Zanedbáváme při tomto přístupu veškeré psychologické aspekty a zůstávají nám jen postupy, které je možno kdykoli znovu opakovat; dokonce ověřování, zda naše usuzování bylo korektní, je již natolik mechanické, že je lze svěřit stroji (při hledání cesty, která vede k prokázání tvrzení, se však uplatňuje lidská intuice). Aspekt formalizace je tak výrazný, že se často mluví i o *symbolické logice*. Formalizace usuzování (dokazování) jednak vede k přesnému vymezení, co usuzováním rozumíme, a jednak umožní myslet o myšlení, přesněji řečeno myslet o formalizovaném myšlení. Otázka, zda formalizace usuzování popsaná matematickou logikou skutečně vystihuje lidské usuzování, přísluší spíše do oblasti filozofie nebo psychologie a nebudeme ji soustavně diskutovat (i když později uvedené motivace základních odvozovacích principů matematické logiky lze také chápat jako argumentaci, že tyto principy skutečně popisují naše usuzování). Zdůrazněme ale, že právě formalizace umožnila ukázat řadu hlubokých vět o našem (takto vymezeném) usuzování.

*

Formalizace usuzování je podstatná i vzhledem k (logickým) paradoxům, ke kterým nyní obrátíme svou pozornost.

Jak byste rozhodli, kdyby někdo zkoušel vaši soudnost stejným způsobem, jako je zkoušen Sancho Panza v druhém dílu Cervantovy knihy Duchaplný rytíř Don Quijote de la Mancha? Před Sancha předstoupil jakýsi muž a řekl: „Pane, velká řeka dělila panství na dvě části, přes tu řeku vedl most a na jeho konci stála šibenice a pán té řeky, toho mostu a celého toho panství vydal zákon, který zněl takto: ‚Kdokoli chce přejít po tomto mostě, musí nejdříve odpřisáhnout, kam má namířeno a co tam hodlá dělat; a jestliže bude přísahat podle pravdy, budiž ihned propuštěn na druhou stranu, selže-li však, ať zemře na této šibenici, a nikomu nebudiž udělována milost!‘ Co se však jednou nestalo! Když vzali zase do přísahy jednoho člověka, prohlásil a odpřisáhl jim, že přišel jenom proto, aby skončil svou pozemskou pouť na té šibenici u mostu a za jinou záležitostí prý nepřišel. Soudcům byla ovšem ta přísaha divná a řekli si: ‚Pustíme-li toho muže svobodně na druhou stranu, pak nám tu právě křivě přísahal a podle zákona by měl skončit na šibenici, a jestliže ho dáme oběsit, sám přece přísahal, že sem přišel, aby zemřel na šibenici, a kdo podle pravdy přísahá, má být podle téhož zákona propuštěn bez překážek.‘ A teď je na vás, pane vladaři, abyste sám rozhodl, co by měli ti soudcové udělat s oním mužem, neboť

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 38 (1993), 291–296

[9] Leibnizův přínos spočívá zejména v ideji matematizace ostatních věd. Matematizace se stala jedním z nejdůležitějších rysů matematické logiky.

nevědí kudy kam a jde jim již z toho hlava kolem.“ Cervantův Sancho si uvědomil logický paradox a řekl: „Ten váš pocestný může zrovna tak lehce skončit na šibenici jako zůstat naživu, neboť pravda ho před smrtí ochrání a lež ho na smrt odsuzuje.“ Sancho proto doporučil onoho člověka propustit s (mimologickým) odůvodněním: „Když mají soudci stejně mnoho důvodů k tomu, aby jej na hrdle potrestali, jako k tomu, aby jej osvobodili, ať ho jen nechají přejít volnou nohou na druhý břeh, neboť chvályhodnější je přece vždycky konat dobro než rozmnožovat zlo. ... Je-li spravedlnost na váhách, je lépe upustit v oné věci od trestů a přiklonit se spíše k milosrdenství.“

Analogické paradoxy je možno nalézt již u starších autorů[10)] Nejznámější je **paradox lháře** (chápaného jako člověka, který nikdy nemluví pravdu) připisovaný[11)] Eubúlidu z Milétu (4. st. př. Kr.). Paradox je tradován ve dvou verzích: *„Kréťan Epimenidés řekl, že všichni Kréťané jsou lháři“* nebo *„V tomto okamžiku lžu“* — ozvěnou první verze je pravděpodobně i verš 1, 12 listu sv. Pavla Titovi: „Jeden z nich, jejich vlastní prorok, řekl: Kréťané jsou lháři ... “; druhá verze je citována Ciceronem (106–43 př. Kr): „Jestliže po pravdě řekneš, že lžeš, lžeš?“. Uvědomme si, že první verze není neřešitelným paradoxem: pokud Epimenidés mluví pravdu, pak každý Kréťan (a tedy i on sám) lže — spor; jestliže však Epimenidés lže, pak neplatí, že všichni Kréťané jsou lháři; za negaci výroku „všichni Kréťané jsou lháři“ však považujeme výrok, že existuje alespoň jeden Kréťan, který mluví pravdu (alespoň někdy), a tedy pokud existují nejméně dva Kréťané, tak spor nedostáváme. V druhé verzi dostáváme spor v obou případech úplně stejně, jako se do sporů dostal Sancho[12)].

Z novějších uveďme ještě **Berryho paradox.** Existuje přirozené číslo, které nelze v češtině popsat pomocí méně než třiceti slabik, neboť všech slabik, a tedy i všech jejich (uspořádaných) třicetic je jen konečně mnoho. *Nejmenší přirozené číslo, které nelze popsat pomocí méně než třiceti slabik,* je však popsáno méně než dvaceti sedmi slabikami[13)].

Předchozí paradoxy[14)] jsou založeny na tom, že výpověď se vztahuje sama na

---

[10)] Podobný předchozímu je např. stoický **paradox krokodýla,** který můžeme formulovat následovně: Krokodýl unesl dítě a slibuje matce, že ho vrátí, právě když odpoví po pravdě na otázku „Vrátím dítě?“ — pokud žena odpoví ANO, může krokodýl dítě vrátit i nevrátit a vždy dostojí svému slibu, odpoví-li žena NE, nedostojí krokodýl svému slibu nikdy. Do souvislosti s antickými paradoxy se sluší zasadit také známý Sókratův výrok, který je vybrán jako motto ke čtvrté kapitole.

[11)] dle Diogéna Laërtia

[12)] Snaha o řešení se výrazně objevuje již v antice, např. Aristotelés uvažuje některé věty jako pravdivé, ale lživé v nějakých aspektech. Filítás z Kou (340–285) se *prý* paradoxem tak zabýval, až „lhář ho zabil“.

[13)] Poznamenejme, že v češtině se podstata Berryho paradoxu krásně projevuje již při jeho formulaci, protože kdybychom v popisu čísla nahradili slovo „třiceti“ slovy „dvaceti sedmi“, tak by počet slabik v popisu vzrostl na 28, bylo by třeba tedy slova „dvaceti sedmi“ nahradit slovy „dvaceti devíti“, ale při tomto popisu počet slabik opět vzroste — na 29. Paradox byl publikován v knize [W-R].

[14)] Řadu dalších paradoxů je možno nalézt v roztomilé knize [Sm1]. Bude-li čtenář pozorný, jistě si povšimne, že volba mnohých paradoxů v citované knize směřuje k objasnění první věty o neúplnosti, kterou se v našem textu budeme zabývat v kap. IV.

sebe — např. výpověď „lžu“ aplikujeme na tuto větu samu, a z toho vyvozujeme, že není pravda, že lžu. Ve snaze odstranit paradoxy navrhl B. Russell[15)] rozdělovat myšlení do různých hladin (viz [W-R]), neboť tak se vyloučí vlastnosti, které lze aplikovat na sebe. Popisovat výpovědi z nějaké hladiny a rozhodovat o jejich pravdivosti je totiž v Russellově pojetí povoleno pouze z hladiny vyšší. V našem textu vystačíme se dvěma hladinami, k jejich přesnějšímu popisu se za okamžik vrátíme.

*

V prvních kapitolách textu zachováváme tradiční rozdělení na **výrokový** a **predikátový** počet, které se datuje již od antiky, neboť Aristotelés a jeho následovníci se zabývali predikátovým počtem, stoicko-megarská škola pak počtem výrokovým[16)]. Stoikové dokonce kladou základy axiomatického přístupu k výrokovému počtu[17)].

Vztah výrokového a predikátového počtu lze — s vědomím, že každé přirovnání je nepřesné — přirovnat ke vztahu chemie a fyziky. Chemie zkoumá jednu velikostní úroveň (molekulovou) hmotného světa a úrovně nižší (atomární a subatomární) i vyšší (fyziku těles) zkoumá fyzika; analogicky můžeme chápat, že výrokový počet vyděluje „střední“ úroveň matematické logiky. Výrokový počet totiž zkoumá vlastnosti logických spojek a základním pojmem je přitom pojem výroku (nebo pojem výrokové proměnné), jehož strukturu již tento počet dále neanalyzuje. Naproti tomu predikátový počet se zajímá o predikáty, proměnné a logické funkce, na jejichž základě se vytvářejí výpovědi, kterým je přiřaditelná pravdivostní hodnota (výroky). Zkoumání tohoto druhu se dá chápat jako práce na úrovni „nižší“, než je úroveň výrokového počtu. Dále predikátový počet pracuje s kvantifikací a formule se současně budují pomocí logických spojek a kvantifikátorů (v tomto směru jsou tedy logické spojky a kvantifikátory chápatelné na „stejné“ úrovni a jejich užití opakovaně alternuje). Nicméně věta o prenexním tvaru (viz §5 kap. II) ukazuje na možnost posunout kvantifikaci až na závěr tvorby formule, a tento výsledek lze chápat jako možnost odsunutí tohoto prostředku predikátového počtu až na úroveň „vyšší“, než je popis chování logických spojek.

Je zřejmé, že není třeba výrokový počet vydělovat a celou matematickou logiku je možno zkoumat najednou. Mnozí autoři takto postupují, neboť je to rychlejší a protože některé úvahy je možno provést najednou pro celou matematickou logiku. Při rozhodnutí, zda pojednat o celé matematické logice najednou, záleží tedy zejména na vkusu pisatele, dá-li přednost postupu od jednoduššího ke složitějšímu, anebo zvolí-li sevřenost výkladu. K oddělení zkoumání výrokového a predikátového počtu nás vedou zejména následující důvody:

1) Popis vlastností logických spojek je nutno v každém případě provést. Metodou celé matematiky je abstrakce, která umožňuje prozkoumání toho jevu, který je právě zkoumán, očistěného od jevů dalších. V případě výrokového počtu tuto abstrakci neprovádíme ve snaze proniknout hlouběji (stejně důkladný rozbor můžeme a většinou dokonce musíme provádět i v případě, že celou matematickou logiku zkoumáme najednou), ale snažíme se její pomocí více vyzvednout specifické vlastnosti implikace a negace (na rozdíl od kvantifikace).

2) Výrokový počet je podstatně jednodušší a je možno v něm ukázat mnohé metody, které jsou pak ve složitější formě popsány v počtu predikátovém, tedy zvolený přístup je méně náročný a usnadňuje pochopení podstaty mnohých technik.

15) Russell je znám také svým paradoxem v teorii množin; zopakujme citaci cv. 29 kap. III.

16) V textu připisujeme některá pravidla výrokového počtu Řekům mimo tuto školu. Avšak takovéto odkazy je možno učinit pouze s licencí, že se odkazujeme na pravidla, která používali v případech, které dnes formalizujeme formulemi s predikáty.

17) viz cvičení 7 k první kapitole

Např. sémantiku výrokového počtu je možno formulovat tak, že vystačíme s jediným modelem, sémantiku počtu predikátového nikoli; výrokový počet je rozhodnutelný (tedy v jistém směru „jednoduchý") a predikátový nikoli (podrobnosti viz dále).

3) O tom, v jakém smyslu lze omezit dokazování v predikátovém počtu na prostředky odpovídající počtu výrokovému, vypovídají poměrně hluboké věty uvedené v kap. III (zejména Hilbert-Ackermannova věta). Zdá se, že pochopení podstaty těchto vět usnadní předchozí samostatné zkoumání výrokového počtu.

*

Podle jiného hlediska dělíme logiku na **syntax** (zabývající se otázkou dokazatelnosti) a **sémantiku** (zkoumající pravdivost)[18]. Základním vztahem mezi sémantikou a syntaxí jsou věty o korektnosti a úplnosti (tzn. dokazatelné jsou právě všechny pravdivé formule, viz §3 kap. I a §5 kap. II).

*

Uvedli jsme, že při formalizaci myšlení je vhodné rozlišit dvě hladiny vyjadřování: hladinu („vyšší"), na které formalizaci provádíme, tzn. na které budujeme výrokový a predikátový počet, a hladinu výrokového a predikátového počtu (hladinu „formalizovaného myšlení"). Podstatné je, že obě hladiny by měly zachycovat náš způsob myšlení, každá ale v jiné podobě. Na hladině „vyšší", kterou nazýváme **metamatematikou,** provádíme intuitivní (neformalizované) úvahy a používáme běžného jazyka. Naproti tomu pro „nižší" hladinu (hladinu matematiky) budeme přesně definovat (z pozice metamatematiky) pojmy jazyka, formule, důkazu a dokazatelnosti (syntax) a pojmy modelu, splnitelnosti a pravdy (sémantika). Zopakujme, že rozlišením dvou hladin myšlení jsme schopni do značné míry (i když ne zcela) se vyvarovat „aplikace vlastnosti na sebe samu"; tímto způsobem odstraňujeme paradoxy výše uvedeného typu. V jakém smyslu zůstávají zbytky možnosti aplikovat vlastnost na sebe samu, budeme zkoumat ve čtvrté kapitole; v žádném případě však tyto úvahy už nevedou k paradoxům.

V souvislosti s představou zkoumání formalizovaného myšlení z pozice metamatematiky neodolám a uvedu: „Rozum, právě tak jako oko, zatímco nám umožňuje vidět a vnímat ostatní věci, nezaznamenává sám sebe; vyžaduje obratnost a úsilí poodsunout ho na jistou vzdálenost a učinit ho sobě samému objektem" (John Locke, Esej o lidském rozumu).

* * *

V celém textu se zabýváme pouze logikou prvního řádu. V logikách vyšších řádů je povolena nejen kvantifikace (individuových) proměnných, ale i kvantifikace formulí; v mnoha ohledech jsou složitější než běžná logika a v některých vlastnostech se od ní podstatně liší. Uvidíme, že celá „běžná" matematika je formulovatelná v jazyce prvního řádu. Dále se také omezujeme na dvouhodnotovou logiku, o možnosti vícehodnotové, modální a fuzzy logiky se zmíníme pouze ve cvičeních a v závěru textu. Z tohoto důvodu jsme zvolili jako název knihy slovní spojení **klasická matematická logika.**

---

[18] Syntax je možno popsat jako nauku o znacích jako takových a o vztazích mezi nimi. Sémantiku pak popíšeme jako nauku o významech znaků.