KAPITOLA VI

ROZHODNUTELNOST, INTERPOLACE A NEDOKAZATELNOST

Hledejte, a naleznete
sv. Matouš, 7, 7

Závěrečná kapitola je věnována zkoumání vlastností teorií, zejména problematice rozhodnutelnosti a bezespornosti. Tyto výsledky jsou nejaplikovatelnější z celého textu, pokud aplikací rozumíme tvůrčí rozvíjení. Při budování jakékoli matematické teorie je totiž jednou z prvořadých otázek její bezespornost, a tedy pro každou novou matematickou teorii je potřeba hledat způsob prokázání její bezespornosti, což se obvykle činí buďto interpretací, nebo pomocí modelů. Analogicky, jestliže se nedaří dlouhou dobu nějakou formuli v teorii prokázat, je na místě se zamyslet nad problémem, zda formule je vůbec v té teorii dokazatelná. Navíc je vhodné také prozkoumat rozhodnutelnost vyšetřované teorie.

Druhý paragraf je věnován zkoumání významu jazyka vyšetřované teorie při konstrukci důkazů v této teorii. Užití výsledků předchozí kapitoly zjednoduší prokazování potřebných tvrzení.

*

Zkoumejme nejprve pojem rozhodnutelné teorie, který jsme zavedli ve čtvrté kapitole. Připomeňme, že na jedné straně jsme slíbili ukázat, že aritmetika pouze se sčítáním (a následovníkem) je rozhodnutelná, na druhé straně jsme však již ukázali (na základě první věty o neúplnosti), že jakékoli bezesporné rozšíření Robinsonovy aritmetiky je nerozhodnutelné. Daný slib splníme v prvním paragrafu této kapitoly[1)].

Než přikročíme k prokazování rozhodnutelnosti pro konkrétní teorie, uvědomme si několik obecných faktů.

Každá *úplná* rekurzivní teorie je rozhodnutelná. Algoritmus bude postupně probírat všechny důkazy a pro každou úplnou rekurzivní teorii a každou uzavřenou formuli jejího jazyka musí po konečně mnoha krocích nalézt buďto důkaz formule, nebo důkaz její negace — uzavřená formule je v úplné teorii nedokazatelná, jestliže existuje důkaz její negace.

V úvodu čtvrté kapitoly jsme podrobně rozebírali, že pro matematickou práci jsou vhodným rámcem pouze rekurzivní teorie. Pokud se tedy podaří ukázat, že zkoumaná teorie je úplná, víme již automaticky, že je také rozhodnutelná. Také z tohoto důvodu byla v teorii modelů věnována tak veliká pozornost metodám umožňujícím prokázat úplnost teorie (v našem textu viz poslední paragraf předchozí kapitoly).

[1)] Dalšími příklady rozhodnutelných teorií jsou teorie Booleových algeber nebo teorie algebraicky uzavřených těles či teorie reálně uzavřených těles. Naproti tomu nerozhodnutelné jsou např. teorie racionálních čísel, teorie okruhů a teorie těles. Těmito příklady se nebudeme v našem textu zabývat, abychom ho udrželi v přijatelném rozsahu (informace či konkrétní prokázání lze nalézt např. v kapitolách 16 a 21 [Mo]).

K prokázání existence nebo neexistence algoritmu rozhodujícího dokazatelnost formulí v té které teorii, je potřeba velice přesně rozlišovat vlastnosti jednotlivých teorií. Uveďme jediný příklad: teorie grup je nerozhodnutelná, ale teorie abelovských grup (tj. s jedním jediným axiomem komutativity navíc) je rozhodnutelná.

Je poměrně málo případů, kdy chování teorie je závislé na tom, na kolik objektů se vztahují základní vlastnosti a vztahy jejího jazyka, ale rozhodnutelnost je jednou z nich. Každá teorie, která má v jazyce pouze vlastnosti (tzn. jenom *unární* predikáty) a která má jen konečně mnoho axiomů, je rozhodnutelná[2]. Naproti tomu teorie s (byť) jediným binárním vztahem již mohou být jak rozhodnutelné (např. teorie s rovností a bez mimologických axiomů, což dokázal L. Löwenheim již r. 1915, v našem textu viz §1), tak i nerozhodnutelné[3].

Srovnáváme-li na jedné straně teorie, jejichž rozhodnutelnost se podařilo ukázat, a na druhé straně teorie, o kterých je známo, že jsou nerozhodnutelné, vidíme, že v první skupině jsou velmi často teorie neumožňující dokázat mnoho, a v druhé skupině naopak teorie „silné“. Toto pozorování vnuká představu, že čím je teorie slabší, tím spíše se podaří prokázat její rozhodnutelnost. Je tomu však právě naopak — každé oslabení axiomatického systému zachová nerozhodnutelnost teorie[4]. Příklad abelovských grup naopak ukazuje, že zesílení teorie může zajistit rozhodnutelnost (tedy teorii v jistém smyslu „zjednodušit“). Dále si uvědomme, že deklarovanovaná existence nerozhodnutelné teorie s jediným binárním predikátem a úvahy předvedené před okamžikem ukazují, že teorie bez mimologických axiomů, a jejíž jazyk obsahuje alespoň jeden binární predikát[5], je nerozhodnutelná (tedy „velice slabá“ teorie je v určitém smyslu „velmi složitá“).

Poznamenejme, že se může stát, že prokážeme, že existuje algoritmus rozhodující dokazatelnost formulí v nějaké teorii, aniž sestrojíme algoritmus prakticky použitelný. Ani v tomto případě nemůže stroj zcela zastoupit matematika při dokazování ve zkoumané teorii, protože (snad jenom dočasně) neumíme pro stroj napsat efektivně pracující program. Objasněme situaci na zcela jiném příkladu — na hře v šachy. K tomu účelu si v prvé řadě uvědomme, že všech možných postavení figurek na šachovnici je jen konečně mnoho. V šachu je přijato pravidlo o remíze v případě trojnásobného opakování postavení, a tedy existuje (velké, ale zcela jistě konečné) číslo n větší než počet tahů v kterékoli možné šachové hře. V důsledku toho musí existovat neprohrávající strategie pro jednoho z hráčů — návod na konstrukci strategie (řekněme pro bílého) je z teoretického hlediska velice jednoduchý, ale prakticky neproveditelný: zkoumej *všechny možné hry* a v prvním kroku označ všechna postavení, kdy jsi dostal mat, za „nepřijatelná“; dále v každém sudém kroku označ za „nepřijatelná“ všechna postavení, z kterých *existuje* tah protivníka vedoucí do „nepřijatelného“ postavení z některého předchozího lichého kroku, a v každém lichém kroku označ za „nepřijatelné“ každé postavení, ze kterého se *každým* svým tahem dostaneš do postavení prohlášeného za „nepřijatelné“ v nějakém předchozím sudém kroku. Toto opakuj $(2n+1)$-krát, a pokud jsi v některém kroku označil základní postavení za „nepřijatelné“, má vyhrávající strategii soupeř, v opačném případě máš ty neprohrávající strategii (při každém tahu táhnout do postavení, které

[2] viz cv. 2

[3] Například nerozhodnutelnost teorie množin plyne z toho, že teorie množin s jazykem rozšířeným o definice je rozšířením Peanovy aritmetiky (viz druhý příklad §3 této kapitoly), a teorii množin lze chápat jako teorii s jediným binárním predikátem $\in$ (při tomto pojetí je axiom extenzionality nahlížen jako definice rovnosti viz cv. 16 kap. III).

[4] Jestliže teorie $\boldsymbol{T}$ s dodatečným axiomem φ (kde φ je uzavřená formule jazyka teorie $\boldsymbol{T}$) je nerozhodnutelná, pak je nerozhodnutelná i teorie $\boldsymbol{T}$ sama (plyne triviálně z věty o dedukci, neboť pak $\boldsymbol{T}, \varphi \vdash \psi$, právě když $\boldsymbol{T} \vdash \varphi \rightarrow \psi$).

[5] který je podle dohody nutně různý od rovnosti

není „nepřijatelné“). Neprohrávající strategie tedy pro jednu stranu existuje, ale přesto se šachy neustále hrají dál — neprohrávající strategie určující, jak táhnout v závislosti na postavení, zatím nebyla popsána (a pravděpodobně ani popsána nikdy nebude, protože počet možných postavení a tahů je velice veliký).

*

V prvním paragrafu budeme prokazovat rozhodnutelnost tří speciálních teorií a naše pozornost bude upřena zejména na aritmetiku, které se budou týkat první dva případy. Avšak předvedenou metodu — nazývanou eliminací kvantifikátorů — lze použít i pro mnohé jiné teorie[6)], jak ostatně ukazuje i náš třetí příklad. Předem však musíme zdůraznit, že eliminace kvantifikátorů je sice pravděpodobně nejčastěji používaná metoda k prokázání rozhodnutelnosti matematických teorií, ale v žádném případě to *není* metoda jediná. Již jsme zmínili, jak k prokazování rozhodnutelnosti přispívá úplnost teorie, o modelové úplnosti ještě bude řeč.

Popišme nejprve obecné rysy metody eliminace kvantifikátorů. Při této metodě nejprve zvolíme nějaké formule, které budeme pokládat za „jednoduché“. Dále ukážeme, že libovolnou uzavřenou formuli je možno převést ve zkoumané teorii na formuli, která je složena jen z „jednoduchých“ formulí — přesněji: ke každé formuli *efektivně* sestrojíme formuli, která vznikne spojkami *výrokového* počtu z „jednoduchých“ formulí, a to tak, že ve zkoumané teorii je dokazatelná ekvivalence sestrojené formule a formule původní. Přitom můžeme dokonce povolit jen některé spojky nebo můžeme omezit, jak kterou spojku smíme použít při tvorbě formule ψ. Jako poslední potřebujeme ukázat, že o každé formuli, která vznikne povoleným způsobem pomocí výrokových spojek z „jednoduchých“ formulí, umíme rozhodnout, zda je dokazatelná ve zkoumané teorii, či nikoli. Za uvedených předpokladů je již jistě zřejmá metoda, jak efektivně rozhodnout, jestli zadaná formule je, nebo není v teorii $\boldsymbol{T}$ dokazatelná: nejprve k zadané formuli φ sestrojíme formuli ψ složenou z „jednoduchých“ formulí tak, že $\boldsymbol{T} \vdash \varphi \equiv \psi$, a pak o této formuli ψ rozhodneme, zda je ve zkoumané teorii dokazatelná, či nikoli.

Volba „jednoduchých“ formulí závisí na povaze té které teorie a je věcí zkušeností a intuice.

Jestliže zkoumaná teorie je úplná[7)], je možno metodu prokazující její rozhodnutelnost popsat ještě o něco podrobněji. Při volbě „základních“ formulí budeme dbát na to, abychom prokázali, že jsme schopni o každé z nich efektivně rozhodnout, zda je v teorii dokazatelná ona nebo její negace. Máme-li rozhodnout, jestli je dokazatelná nějaká formule φ v teorii $\boldsymbol{T}$, pak pochopitelně postupně:

(a) nejprve efektivně sestrojíme onu předpokládanou formuli ψ takovou, že platí $\boldsymbol{T} \vdash \varphi \equiv \psi$, a skládající se pouze z „jednoduchých“ formulí a jejich negací,
(b) o každé jednotlivé „jednoduché“ formuli, která se vyskytuje ve formuli ψ, zjistíme, zda je, či není v naší teorii dokazatelná,
(c) formule, které jsou dokazatelné v teorii $\boldsymbol{T}$, ohodnotíme 1 a ty, které dokazatelné nejsou, ohodnotíme 0 a podle pravidel ohodnocování ve výrokovém počtu ohodnotíme formuli ψ,
(d) ψ je dokazatelná, právě když je při popsaném ohodnocení ohodnocena 1.

---

6) viz např. kap. 4 [K-K]

7) postačí úplnost vzhledem k „jednoduchým“ formulím

Uvědomme si, že pro naposled uvedený postup je zcela klíčový fakt, že výrokový počet je rozhodnutelný a úplný (viz §3 kap. I). Jinak řečeno: Churchovo lemma užité při demonstraci věty o úplnosti výrokového počtu nám udává metodu konstrukce důkazu formule ψ v úplné teorii $\boldsymbol{T}$ na základě důkazů těch „jednoduchých“ formulí a příp. důkazů jejich negací, kteréžto „jednoduché“ formule se vyskytují ve formuli ψ.

Název „eliminace kvantifikátorů“ vyjadřuje, že při konstrukci formule ψ na základě „jednoduchých“ formulí již nevyužíváme kvantifikace. Naproti tomu je třeba velice zdůraznit, že v samotných „jednoduchých“ formulích je kvantifikace povolena: jediným požadavkem je možnost pro každou formuli složenou z „jednoduchých“ formulí efektivně rozhodnout, jestli je ta která formule v teorii $\boldsymbol{T}$ dokazatelná. Uvědomme si, že např. můžeme (efektivně) zadat nějakou konečnou množinu a jako kandidáta na „jednoduchou“ formuli brát formuli odpovídající popisu „existuje prvek ze zadané množiny tak, že ... “, kde vytečkované je popsáno formulí, jejíž dokazatelnost v teorii $\boldsymbol{T}$ je jednoduše rozhodnutelná.

Pasáže týkající se eliminace kvantifikátorů jsou napsány s využitím kap. 13 knihy [Mo].

Právě popsané umožní také nový úhel pohledu na modelovou úplnost. Pokud totiž víme, že ta která teorie je modelově úplná, máme automaticky zaručeno, že každá formule jejího jazyka je ve zkoumané teorii ekvivalentní formuli univerzální. Otázka rozhodnutelnosti takové teorie se tedy redukuje na problém, zda umíme rozhodnout o dokazatelnosti univerzálních formulí.

*

Předpokládejme, že je dokazatelná implikace $\varphi \to \psi$ a že nikoli všechny symboly potřebné pro vybudování formulí φ a ψ jsou potřebné pro vybudování obou z nich. Pak je namístě otázka, zda lze sestrojit důkaz implikace $\varphi \to \psi$ takový, že v jeho prvé části jsou používány jen symboly potřebné pro vybudování formule φ a v druhé části zase jen ty symboly, které jsou potřebné pro výstavbu formule ψ. Jako důsledek věty o úplnosti[8] jsme uvedli, že je-li $\varphi' \to \psi'$ dokazatelná v jakkoli bohatém jazyce, ale bez mimologických axiomů, pak je dokazatelná již v nejchudším možném jazyce (který je jazykem s rovností, právě když se rovnost vyskytuje ve formuli $\varphi' \to \psi'$), a to opět bez použití mimologických axiomů. Vidíme tedy, že zkoumanou otázku lze převést na otázku, zda existuje formule ϑ jazyka obsahujícího jenom symboly *současně* se vyskytující jak ve formuli φ, tak i ve formuli ψ a taková, že $\vdash \varphi \to \vartheta$ a $\vdash \vartheta \to \psi$. Taková formule ϑ se nazývá **interpolant** formulí φ a ψ a její existence bude prokázána ve druhém paragrafu této kapitoly.

V druhé části §2 existenci interpolantu využijeme k řešení otázky, zda existují i jiné způsoby rozšiřování jazyka o nový predikát než způsob popsaný v §1 kap. III.

*

[8] viz také závěr §3 kap. III

Začněme se nyní zabývat bezesporností teorií, a obecněji nedokazatelností té které formule ve zkoumané teorii.

Jestliže nám někdo předloží posloupnost formulí a tvrdí, že je to důkaz v určité rekurzivní teorii $\boldsymbol{T}$, pak ověřit, či vyvrátit tento fakt je poměrně jednoduché (a dokáže to i stroj): stačí ověřit krok za krokem, zda každá formule důkazu je axiomem predikátového počtu nebo uvažované teorie $\boldsymbol{T}$, anebo zda vznikla podle některého z dokazovacích principů aplikovaného na formule, které se vyskytují v posloupnosti dříve (viz definici důkazu v §3 kap. II). Mnohem zajímavější je otázka, jak je vůbec možné ukázat, že důkaz zkoumané formule v určité teorii neexistuje.

Pro mnohé teorie jsme ve čtvrté kapitole sestrojili (za předpokladu bezespornosti) formule, které v nich nelze dokázat (a ani vyvrátit). Nicméně jsme neopomněli zdůraznit, že metoda konstrukce z citované kapitoly je naprosto nevhodná pro zkoumání, zda předem daná formule jazyka teorie je v této teorii dokazatelná, či nikoli. Formule totiž nemusí být autoreferenčního typu a o jiných než autoreferenčních formulích nebyla v kapitole IV vůbec řeč.

Uvědomme si, že místo vyšetřování, zda lze některou konkrétní uzavřenou formuli v nějaké teorii dokázat, stačí vyšetřovat, zda zkoumaná teorie zůstane bezespornou i po přidání negace formule, o kterou jde (viz větu o důkazu sporem). V dalším tedy budeme většinou zkoumat pouze bezespornost teorií, toto omezení není na úkor obecnosti.

Jen o „jednoduchých“ teoriích jsme schopni prokázat jejich bezespornost bez dalších předpokladů. Jako příklad mohou sloužit teorie, které mají konečný model[9)]. Naproti tomu druhá věta o neúplnosti (viz čtvrtou kapitolu) naznačuje, že — při jakkoli zvolené síle metamatematiky — vždy existuje velice mnoho teorií, pro které bezespornost nelze prokázat. Obvykle se tedy při prokazování bezespornosti nějaké teorie předpokládá bezespornost teorie jiné — pokud prokážeme bezespornost teorie za předpokladu bezespornosti teorie jiné, mluvíme o **relativní bezespornosti.**

Připomeňme také, že ve třetí kapitole jsme ukázali některé věty, na které se můžeme odvolávat při dokazování formulí v jednotlivých matematických teoriích. Avšak souvislost mezi dokazatelností a výrokovou dokazatelností může sloužit rovněž k prokázání nedokazatelnosti určité formule ve zkoumané teorii (jestliže se nám podaří prokázat nemožnost výrokové dokazatelnosti formule, o kterou jde, v odpovídající teorii popsané Hilbert-Ackermanovou větou).

*

Na závěr úvodu motivujme pojem interpretace. Interpretace jsou totiž nejobvyklejším prostředkem pro prokazování relativní bezespornosti (a tudíž také nedokazatelnosti formulí v určité teorii). Už z délky následujícího intuitivního popisu je možno usoudit, že autor pokládá interpretace za velice významnou metodu logiky a zařazením interpretací do posledního paragrafu textu v žádném případě nenaznačuje jejich nepodstatnost, spíše naopak vyzvedává jejich význam.

Již v úvodu k výrokovému počtu jsme zmínili veliký vliv geometrie pro rozvoj deduktivního přístupu, a to zejména při konstituování tohoto pojetí. Řekové rozli-

[9)] V mnoha případech o možnosti dokázat bezespornost teorie rozhoduje síla zvolené metamatematiky. Například pokud v matamatematice akceptujeme aktuální nekonečno, existuje přirozený model aritmetiky, pročež je Peanova aritmetika bezesporná.

šovali dva druhy pravdy: epistémé a doxa, první z nich byla pravda neměnná, druhá pomíjivá, zdání. Jako nejčistší případ pravdy prvního druhu byla uváděna pravda matematiky; přitom, jak jsme se již zmínili v úvodu textu, v Eukleidově pojetí byla aritmetika součástí geometrie, a při takovémto pojetí tedy jest ztotožnit matematiku té doby s geometrií[10]. V tomto smyslu měla geometrie značný význam pro pojetí řecké filozofie, který vyjadřoval i nápis na Platonově Akademii „Kdo neznáš geometrii, nevstupuj".

Geometrie však i později ovlivňovala rozvoj logiky, a to zejména v souvislosti s pátým Eukleidovým postulátem[11]. Tento postulát (dnes formulovávaný: daným bodem lze vést právě jednu rovnoběžku s danou přímkou[12]) byl v jistém smyslu výjimečný, neboť mnoho tvrzení bylo možno dokázat bez tohoto předpokladu, a navíc pátý postulát vypovídá — na rozdíl od ostatních — o „vzdálených" bodech[13]. Pravděpodobně díky této výjimečnosti se ho matematici začali pokoušet dokázat ze zbývajících předpokladů a teprve po mnoha staletích neúspěšných pokusů přijali možnost, že takový důkaz neexistuje (zejména N. I. Lobačevskij 1793–1856, J. Bolyai 1802–1860, ale jsou náznaky, že již před nimi totéž učinili někteří další bez výslovného zveřejnění, např. G. Saccheri a J. Gauss[11]). Navíc se v minulém století podařilo ukázat, že takovýto důkaz ani existovat *nemůže* (konstrukce Beltramiho a Kleina).

Než se budeme zabývat konkrétně nedokazatelností pátého Eukleidova postulátu, pokusme se zformulovat metodu interpretace obecněji. Předpokládejme, že se snažíme ukázat nedokazatelnost formule φ v teorii $\boldsymbol{T}$. Nechť se nám podaří „přeložit" základní vlastnosti a vztahy jazyka teorie $\boldsymbol{T}$ na formule[14] nějaké teorie $\boldsymbol{S}$ a nechť jsou „přeloženy" také funkce jazyka teorie $\boldsymbol{T}$ na funkce[15] jazyka teorie $\boldsymbol{S}$ a dále buďtež druhům proměnných jazyka teorie $\boldsymbol{T}$ přiřazeny jakési druhy proměnných jazyka teorie $\boldsymbol{S}$. Takovýto „překlad" základních pojmů teorie $\boldsymbol{T}$ je možno vhodným způsobem rozšířit na „překlad" všech formulí z nich vytvořených (např. formuli $\neg\psi$ budeme „překládat" negací „překladu" formule ψ). Nechť o teorii $\boldsymbol{S}$ již víme nebo předpokládáme, že je *bezesporná*. Jestliže „překlad" je udělán tak „šikovně", že „překlady" všech axiomů teorie $\boldsymbol{T}$ a současně i „překlad" formule $\neg\varphi$ jsou v teorii $\boldsymbol{S}$ dokazatelné, pak formule φ *není* v $\boldsymbol{T}$ dokazatelná (viz §3).

Jak jsme slíbili, celý postup objasníme na případu konstrukce interpretace neeuklidovské geometrie v geometrii euklidovské, tzn. za teorii $\boldsymbol{S}$ zvolme euklidovskou geometrii a buď $\boldsymbol{T}$ neeuklidovská geometrie, tzn. euklidovská geometrie, ve které je pátý postulát nahrazen svojí negací. V $\boldsymbol{S}$ zvolíme libovolný kruh (bez obvodové kružnice) a základní vlastnosti teorie $\boldsymbol{T}$ „být bodem" a „být přímkou" „přeložíme"

[10] Jiný byl přístup Pýthagorův a jeho školy.

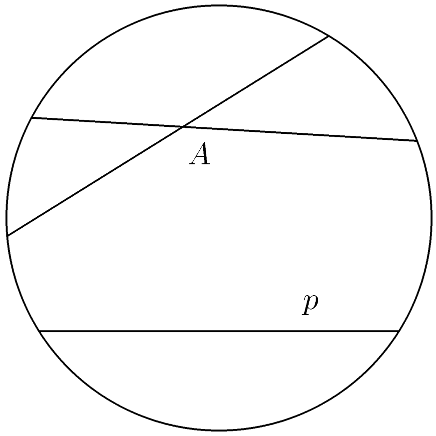
[11] Historie pátého postulátu je popsaná podrobněji v práci [V1].

[12] V původní Eukleidově geometrii se nepoužívala jako základní vlastnost „být přímkou", ale vlastnost „být úsečkou", a proto původní formulace byla trochu jiná. I na tomto konkrétním příkladu volby základních pojmů si může čtenář ověřit neochotu antických matematiků přijímat nekonečno. Pojem přímky nese v sobě „prodlužování do nekonečna" mnohem zřetelněji než pojem úsečky (ta však v dnešním pojetí také přináší nekonečno, a to ve smyslu hustoty svých bodů).

[13] Rovnoběžky jsou definovány jako ty přímky, které se nikdy — tedy ani ve „vzdálených" bodech — neprotnou.

[14] přičemž „překlad" predikátu vypovídá o stejném počtu objektů jako „překládaný" predikát

[15] přičemž „překlad" funkce je funkce téže četnosti jako „překládaná" funkce



jakožto „být bodem kruhu“ a „být tětivou kruhu“. Nyní je třeba ověřit v teorii $\boldsymbol{S}$ dokazatelnost *všech* „překladů“ axiomů teorie $\boldsymbol{T}$, my se omezíme na zkoumání pouze „překladu“ jediného axiomu jako příkladu: „překladem“ postulátu „každými dvěma body lze vést právě jednu přímku“ je „každými dvěma body v kruhu lze vést právě jednu tětivu“, což je evidentně v euklidovské geometrii dokazatelné. Nadto „překlad“ negace pátého postulátu plyne z tvrzení, že existuje tětiva p a bod A v kruhu, kterým procházejí alespoň dvě různé tětivy, které se s původní tětivou neprotínají *uvnitř kruhu* (viz obrázek; „nikdy neprotnou“ totiž „překládáme“: „neprotnou uvnitř kruhu“). Je tedy možno uzavřít (po prozkoumání dokazatelnosti „překladů“ ostatních axiomů), že je-li euklidovská geometrie bezesporná, pak pátý postulát není dokazatelný ze zbývajících axiomů euklidovské geometrie (neboli řečeno jinými slovy, je-li euklidovská geometrie bezesporná, je bezesporná i neeuklidovská geometrie).

Je potřeba zdůraznit, že výsledky o nedokazatelnosti nějakých axiomů (obecně nějakých formulí) jsou známy pro nejrůznější teorie, nikoli jenom pro geometrii. Omezme se však na jediný další příklad. Po vzniku teorie množin se jako obzvláště důležité jevily otázky dokazatelnosti axiomu výběru a hypotézy kontinua. Připomeňme, že hypotézu kontinua i zobecněnou hypotézu kontinua jsme formulovali na počátku §1 předchozí kapitoly.

Bezespornost teorie množin s axiomem výběru a zobecněnou hypotézou kontinua — za předpokladu bezespornosti teorie množin — prokázal K. Gödel (viz [G4]), bezespornost teorie množin s negací axiomu výběru a bezespornost teorie množin s axiomem výběru a s negací hypotézy kontinua — opět za předpokladu bezespornosti teorie množin — ukázal P. Cohen (viz [C]).

*

Nedokazatelnost nějaké formule v teorii je možno prokazovat také pomocí konstrukce vhodného modelu. Značně netriviální příklad takovéto konstrukce modelu podáváme v dodatku ke kapitole. Tento dodatek je opatřen samostatným úvodem.

§1

ELIMINACE KVANTIFIKÁTORŮ

strany 318–331

§2

INTERPOLACE

strany 332–335

§3

INTERPRETACE

Jednou z nejobvyklejších metod prokázání relativní bezespornosti teorií je metoda interpretace[1)], které se budeme věnovat v tomto paragrafu.

Již na příkladu interpretace neeuklidovské geometrie v geometrii euklidovské (popsané v úvodu kapitoly) jsme viděli, že je možné objekty ve smyslu interpretace omezit jen na objekty určitého druhu. Po formální stránce to znamená, že v teorii $\boldsymbol{S}$, ve které interpretujeme (v uvedeném případě je teorií $\boldsymbol{S}$ euklidovská geometrie rozšířená o pojmy vzniklé fixací kruhu), volíme druh proměnných (např. body uvnitř kruhu) a druhu proměnných teorie $\boldsymbol{T}$ (např. druhu „body") přiřadíme tento druh proměnných. Přitom vůbec není podstatné, že výchozí teorie měla více druhů proměnných. Téměř všechny (pokud ne vůbec všechny) zajímavé interpretace např. Zermelo-Fraenkelovy teorie množin v teorii množin omezují objekty ve smyslu interpretace, a přitom má teorie $\boldsymbol{ZF}$ pouze univerzální druh proměnných (kteréžto proměnné představují množiny). Z tohoto důvodu je podstatně výhodnější popisovat interpretace v jazyce s více druhy proměnných[2)], a proto v celém tomto paragrafu budeme důsledně využívat, že pracujeme v predikátovém počtu s více druhy proměnných.

Již v §1 kap. II jsme uvedli, že potřebujeme (potenciálně) nekonečně mnoho proměnných každého druhu. Na druhé straně v každé formuli se vyskytuje jenom konečně mnoho proměnných, pročež není podstatným omezením předpokládat, že proměnné každého druhu jsou očíslovány přirozenými čísly. V takovém případě, přiřadíme-li druhu proměnných nějaký druh proměnných, je automaticky přiřazena jakékoli proměnné prvého druhu (řekněme i-té) určitá proměnná druhého druhu (opět i-tá).

Definice. Interpretací jazyka L v jazyce L′ nazýváme (metamatematické) zobrazení $*$ přiřazující každému druhu proměnných $\mathfrak{x}$ jazyka $\mathbf{L}$ druh proměnných $\mathfrak{x}^*$ jazyka $\mathbf{L}'$, dále přiřazující každému predikátu $\mathcal{P}$ jazyka $\mathbf{L}$ predikát $\mathcal{P}^*$ jazyka $\mathbf{L}'$ stejné četnosti, a nakonec přiřazující každé funkci $\mathfrak{F}$ jazyka $\mathbf{L}$ funkci $\mathfrak{F}^*$ jazyka $\mathbf{L}'$ opět stejné četnosti (tedy speciálně $*$ přiřazuje každé konstantě $\mathfrak{c}$ jazyka $\mathbf{L}$ konstantu $\mathfrak{c}^*$ jazyka $\mathbf{L}'$), přičemž navíc požadujeme:

(a) v případě, že jazyk $\mathbf{L}$ má více druhů proměnných a že proměnné druhu $\mathfrak{x}$ jazyka $\mathbf{L}$ jsou také proměnné druhu x jazyka $\mathbf{L}$, pak proměnné druhu $\mathfrak{x}^*$ jazyka $\mathbf{L}'$ musí být také proměnnými druhu x^* jazyka $\mathbf{L}'$,

(b) je-li v jazyce $\mathbf{L}$ pro n-četnou funkci $\mathfrak{F}$ určeno, že pro pořadí druhů objektů reprezentovaných postupně proměnnými $x_1, \dots, x_n$ je hodnota funkce $\mathfrak{F}$ objekt druhu $\mathfrak{x}$, pak v jazyce $\mathbf{L}'$ musí být vyžadováno, že hodnota funkce $\mathfrak{F}^*$ je druhu $\mathfrak{x}^*$ pro pořadí druhů $x_1^*, \dots, x_n^*$[3)].

---

1) viz definice relativní interpretace v práci [T-M-R]

2) srovnej zesložitění formulací vznikajících připuštěním jen jednoho druhu proměnných např. v §2 kap. 4 [Š]

3) Pro jazyky s rovností je podle druhého faktu §4 kap. II tento požadavek totéž, co požadavek

Nadto je-li $\mathbf{L}$ jazykem s rovností, je možno predikátu $=$ přiřadit interpretací jakýkoli binární predikát $=^*$ jazyka $\mathbf{L}'$ [4].

Interpretaci $*$ jazyka $\mathbf{L}$ v jazyce $\mathbf{L}'$ dále rozšíříme metamatematickou indukcí podle složitosti termů a formulí na zobrazení přiřazující každému termu t jazyka $\mathbf{L}$ term t^* jazyka $\mathbf{L}'$ a přiřazující každé formuli φ jazyka $\mathbf{L}$ formuli φ^* jazyka $\mathbf{L}'$ definujíce:

(1) pro každou k-četnou funkci[5] $\mathfrak{F}$ jazyka $\mathbf{L}$ term $[\mathfrak{F}(t_1, \ldots, t_k)]^*$ jako term $\mathfrak{F}^*(t_1^*, \ldots, t_k^*)$ jazyka $\mathbf{L}'$,

(2) pro libovolný k-četný predikát $\mathcal{P}$ jazyka $\mathbf{L}$ (případně i pro predikát $=$) a pro libovolné termy $t_1, \ldots, t_k$ téhož jazyka formuli $[\mathcal{P}(t_1, \ldots, t_k)]^*$ jako formuli $\mathcal{P}^*(t_1^*, \ldots, t_k^*)$ jazyka $\mathbf{L}'$,

(3) pro formule φ, ψ jazyka $\mathbf{L}$ formuli $[\varphi \mathbin{\&} \psi]^*$ jako formuli $\varphi^* \mathbin{\&} \psi^*$ jazyka $\mathbf{L}'$,

(4) pro formuli φ jazyka $\mathbf{L}$ formuli $[\neg\varphi]^*$ jako formuli $\neg\varphi^*$ jazyka $\mathbf{L}'$,

(5) pro formuli φ a pro proměnnou $\mathfrak{x}$ jakéhokoli druhu jazyka $\mathbf{L}$ formuli $[(\forall\mathfrak{x})\varphi]^*$ jako formuli $(\forall\mathfrak{x}^*)\varphi^*$ jazyka $\mathbf{L}'$.

Říkáme, že formule φ jazyka $\mathbf{L}$ **platí v teorii S ve smyslu interpretace** $*$ (jazyka $\mathbf{L}$ v jazyce teorie $\boldsymbol{S}$), jestliže formule φ^* je v teorii $\boldsymbol{S}$ dokazatelná.

Interpretaci $*$ jazyka teorie $\boldsymbol{T}$ v jazyce teorie $\boldsymbol{S}$ nazýváme **interpretací teorie $\boldsymbol{T}$ v teorii $\boldsymbol{S}$,** jestliže současně:

(i) ve smyslu interpretace $*$ platí v teorii $\boldsymbol{S}$ každý z axiomů teorie $\boldsymbol{T}$,

(ii) je-li teorie $\boldsymbol{T}$ teorií s rovností, pak ve smyslu interpretace $*$ platí v teorii $\boldsymbol{S}$ každý z axiomů rovnosti jazyka $\mathbf{L}$. □

V nejběžnějším případě, že jazyk teorie $\boldsymbol{T}$ má jediný (univerzální) druh proměnných x, zvolíme v interpretaci $*$ teorie $\boldsymbol{T}$ v teorii $\boldsymbol{S}$ jen jeden druh proměnných x^* jazyka teorie $\boldsymbol{S}$. Velice důrazně však upozorněme na to, že i v takovémto případě je požadována podmínka (b) předchozí definice, a že neplatí vždy zcela triviálně. Přechází totiž na podmínku, že pro libovolnou k-tici objektů druhu x^* je hodnota k-četné funkce $\mathfrak{F}^*$ opět druhu x^*[6].

Pokud $\boldsymbol{T}$ je teorie s rovností, a jestliže predikátu $=$ přiřazujeme opět ten samý predikát (chápaný jako rovnost tentokrát v teorii $\boldsymbol{S}$), není třeba v jednotlivých případech ověřovat $\boldsymbol{S} \vdash \varphi^*$ pro φ probíhající axiomy rovnosti, protože φ^* jsou přímo axiomy rovnosti.

Triviálním pozorováním je, že pro každou teorii existuje interpretace v ní samé. Identické přiřazení (tj. proměnné druhu $\mathfrak{x}^*$ jsou proměnné druhu $\mathfrak{x}$; predikátům $\mathcal{P}, \ldots$

$(\forall x_1^*, \ldots, x_n^*)(\exists\mathfrak{x}^*)(\mathfrak{x}^* = \mathfrak{F}^*(x_1^*, \ldots, x_n^*))$ a předchozí požadavek je totéž, jako $(\forall\mathfrak{x}^*)(\exists x^*)(\mathfrak{x}^* = x^*)$. Interpretace jazyka $\mathbf{L}$ v jazyce teorie $\boldsymbol{S}$ taková, že uvedené požadavky jsou v teorii $\boldsymbol{S}$ dokazatelné, je někdy nazývána *interpretací jazyka* $\mathbf{L}$ *v teorii* $\boldsymbol{S}$ (viz [Š]).

[4] tzn. není bezpodmínečně nutno „překládat“ rovnost rovností, ale je to obvyklé

[5] Protože pro konstanty a proměnné jsme přiřazení již popsali, stačí nyní popsat indukční krok. Předpokládejme tedy, že pro termy $t_1, \ldots, t_k$ jsou již termy $t_1^*, \ldots, t_k^*$ definovány.

[6] Proměnné druhu x^* probíhají celé „nové univerzum“, a musíme proto žádat, aby hodnoty „hvězdičkovaných“ funkcí byly v tomto novém univerzu za předpokladu, že argumenty v něm jsou. Je-li $\boldsymbol{S}$ teorií s rovností, pak podle čtvrtého paragrafu druhé kapitoly je tento požadavek totéž co požadavek $\boldsymbol{S} \vdash (\forall x_1^*, \ldots, x_k^*)(\exists y^*)(y^* = \mathfrak{F}^*(x_1^*, \ldots, x_k^*))$, přičemž proměnné $y^*, x_1^*, \ldots, x_k^*$ jsou nyní všechny jediného druhu x^*.

přiřadíme po řadě predikáty $\mathcal{P}, \ldots$ a funkcím $\mathfrak{F}, \ldots$ přiřadíme po řadě funkce $\mathfrak{F}, \ldots$) je vždy interpretací. Toto přiřazení je zvykem nazývat nazývat **identickou interpretací.** Přesně stejným způsobem však ukážeme obecněji, že identické přiřazení je interpretací jakékoli teorie $\boldsymbol{T}$ v každé teorii $\boldsymbol{S}$, která je rozšířením teorie $\boldsymbol{T}$. Vztah „existuje interpretace teorie $\boldsymbol{T}$ v teorii $\boldsymbol{S}$" je tedy přirozeným zobecněním vztahu „$\boldsymbol{S}$ je rozšířením teorie $\boldsymbol{T}$".

Následující věta ukazuje souvislost existence interpretace s relativní bezesporností, a tím prokazuje důležitost pojmu interpretace.

Věta. *Jestliže $*$ je interpretace teorie $\boldsymbol{T}$ v teorii $\boldsymbol{S}$, pak pro každou formuli jazyka teorie $\boldsymbol{T}$ jest*

$$\boldsymbol{T} \vdash \varphi \;\Rightarrow\; \boldsymbol{S} \vdash \varphi^*.$$

Speciálně tedy, jestliže existuje interpretace teorie $\boldsymbol{T}$ v bezesporné teorii $\boldsymbol{S}$, pak teorie $\boldsymbol{T}$ je také bezesporná.

Demonstrace[7]**.** Nechť $\delta_1, \ldots, \delta_k$ je důkaz v teorii $\boldsymbol{T}$. Indukcí ukážeme, že každá formule δ_i^* je v $\boldsymbol{S}$ dokazatelná (v žádném případě však *netvrdíme*, že sama posloupnost $\delta_1^*, \ldots, \delta_k^*$ musí být důkazem v $\boldsymbol{S}$). Demonstraci tedy provedeme indukcí dle i (pro $i \leqq k$), ověřme nyní jednotlivé indukční kroky.

Je-li φ axiomem typu **PP**1–**PP**5, je φ^* formulí téhož typu (pro axiomy specifikace si musíme navíc uvědomit, že je-li term $\boldsymbol{t}$ substituovatelný za proměnnou x ve formuli φ, je term $\boldsymbol{t}^*$ substituovatelný za proměnnou x^* ve formuli φ^*, a pro axiomy distribuce je potřeba nahlédnout, že nemá-li proměnná x volný výskyt ve formuli φ, nemá proměnná x^* volný výskyt ve formuli φ^*).

Je-li φ axiomem typu **R**1–**R**3 nebo axiomem teorie $\boldsymbol{T}$, je $\boldsymbol{S} \vdash \varphi^*$ podle definice interpretace.

Ověřme nyní, že vůči každé interpretaci jsou korektní dedukční pravidla. Jestliže $\boldsymbol{S} \vdash (\varphi \to \psi)^*$ a současně $\boldsymbol{S} \vdash \varphi^*$, pak chceme ukázat $\boldsymbol{S} \vdash \psi^*$. K tomu si však stačí pouze uvědomit, že formule $(\varphi \to \psi)^*$ je formulí $\varphi^* \to \psi^*$, a prostě použít princip modus ponens. Analogicky je-li v $\boldsymbol{S}$ dokazatelná φ^*, je v téže teorii dokazatelná i $(\forall x^*)\varphi^*$; k prokázání jednoduše použijeme generalizaci, ale nyní je podstatné, že v obecném případě chápeme $\boldsymbol{S}$ jako teorii v predikátovém počtu *s více druhy proměnných*, neboť druh proměnných x^* nemusí být univerzálním druhem (a dokonce v běžných případech jím nikdy není).

Předpokládáme-li, že teorie $\boldsymbol{T}$ je sporná, je $\boldsymbol{T} \vdash \varphi \;\&\; \neg\varphi$ pro nějakou formuli jazyka teorie $\boldsymbol{T}$. Podle již dokázaného je $\boldsymbol{S} \vdash (\varphi \;\&\; \neg\varphi)^*$, tj. $\boldsymbol{S} \vdash \varphi^* \;\&\; \neg\varphi^*$; tudíž $\boldsymbol{S}$ je sporná. ■

Předchozí věta poslouží i k prokázání, že složení dvou interpretací je opět interpretace (viz cv. 6).

*

[7] Při úvahách o interpretaci „překládáme" implikaci na implikaci, negaci na negaci, etc. Obecněji pojatá metoda překladu je možná, ale z následující demonstrace vynikne, že od takovéhoto „překladu" by bylo potřeba požadovat navíc, aby „překlady" logických axiomů byly dokazatelné v $\boldsymbol{S}$ a aby „překlady" dedukčních pravidel byly použitelné jako dedukční pravidla při důkazech v teorii $\boldsymbol{S}$.

Ještě pořád jsme však nepopsali zcela adekvátně interpretaci odpovídající příkladu z úvodu ke kapitole. Tam jsme tvrdili, že se jedná o „konstrukci interpretace neeuklidovské geometrie v geometrii euklidovské“, avšak konstrukce záleží ještě na dalších pojmech. Tyto pojmy nejsou v jazyce euklidovské geometrie k dispozici. Nejprve jsme totiž *fixovali* jakýsi kruh, tedy přesně vzato jsme rozšířili jazyk euklidovské geometrie o konstantu. Dále jsme rozšířili jazyk euklidovské geometrie o nový druh proměnných „body uvnitř kruhu“, etc. Uvedená konstrukce je interpretací *až v takto obohaceném* jazyce. Tyto úvahy nás vedou k následující definici.

Definice. Říkáme, že teorie $\boldsymbol{T}$ **má interpretaci** (nebo také *je interpretovatelná*) v teorii $\boldsymbol{S}$, jestliže existuje interpretace teorie $\boldsymbol{T}$ v nějakém obohacení teorie $\boldsymbol{S}$ definicemi predikátů a druhů proměnných a zavedením funkcí[8]. □

Jestliže teorie $\boldsymbol{T}$ má interpretaci v bezesporné teorii $\boldsymbol{S}$, pak je sama teorie $\boldsymbol{T}$ bezesporná. Stačí si uvědomit, že každé obohacení bezesporné teorie $\boldsymbol{S}$ vzniklé nějakými definicemi predikátů a druhů proměnných a zavedením funkcí je konzervativním rozšířením (viz §1 kap. III) a je tudíž také bezesporné. Po nahlédnutí tohoto faktu již stačí použít poslední větu.

Na základě skládání interpretací dostáváme, že má-li teorie $\boldsymbol{T}$ interpretaci v teorii $\boldsymbol{S}$ a má-li teorie $\boldsymbol{S}$ interpretaci v teorii $\boldsymbol{R}$, má i teorie $\boldsymbol{T}$ interpretaci v teorii $\boldsymbol{R}$ (podrobněji viz cv. 8).

*

Velice často se chybuje při konstrukcích interpretací tím, že se neprokáže absolutnost potřebných pojmů a pouhým odhadem se předpokládá, že v tom a tom směru se „nic nezměnilo“.

Uvažujme např. interpretaci $*$ teorie $\boldsymbol{ZF}$ v teorii $\boldsymbol{ZF}$ takovou, že $\in^*$ a $=^*$ jsou prostě predikáty $\in$ a $=$. Při takovéto interpretaci pouze omezíme množiny ve smyslu interpretace (tzn. druh proměnných x^* nebude zahrnovat všechny množiny neboli nebude druhem univerzálním). Uvažujme nějakou konstantu definovanou formulí — např. $\aleph_1$ definované jako nejmenší nespočetné kardinální číslo. Jestliže $\aleph_1$ a všechny jeho prvky jsou $*$-množiny, pak máme sklon automaticky předpokládat, že $\aleph_1$ je také nejmenší nespočetný kardinál ve smyslu interpretace $*$. Může se však stát, že jsme ponechali velice málo objektů, které jsou funkcemi ve smyslu interpretace, a to dokonce tak málo, že pro nějakou $*$-množinu $\alpha < \aleph_1$ již neexistuje $*$-objekt, který je ve smyslu interpretace vzájemně jednoznačným zobrazením mezi α a $\aleph_0$. V takovém případě ve smyslu interpretace sice $\aleph_1$ zůstane nespočetným kardinálním číslem (nemůže existovat vzájemně jednoznačné zobrazení mezi $\aleph_1$ a nějakým $\beta < \aleph_1$, které je $*$-objektem, protože takové zobrazení vůbec neexistuje), ale přestane být *nejmenším*, tj. $\aleph_1^* < \aleph_1$.

---

[8] viz §1 kap. III; při využití definice ze cv. 7 naší kapitoly můžeme popisovaný vztah teorií vyjádřit, že existují formule $\varphi_1, \ldots, \psi_1, \ldots$ a $\vartheta_1, \ldots$ určující interpretaci teorie $\boldsymbol{T}$ v teorii $\boldsymbol{S}$

Definice. Říkáme, že **formule** $\varphi(x_1,\dots,x_k)$ jazyka $\mathbf{L}$ je **absolutní** v teorii $\boldsymbol{S}$ (vzhledem k interpretaci $*$ jazyka $\mathbf{L}$ v jazyce teorie $\boldsymbol{S}$), jestliže[9)]

$$\boldsymbol{S} \vdash (\forall x_1^*,\dots,x_k^*)(\varphi(x_1/x_1^*,\dots,x_k/x_k^*) \equiv \varphi^*). \qquad \square$$

Intuitivně nejjednodušší jsou interpretace, ve kterých je co nejvíce pojmů absolutních. Proto svou jednoduchostí obzvláště vynikají ty interpretace, ve kterých omezíme systém objektů ve smyslu interpretace a všechny predikáty a funkce ponecháme beze změny — interpretaci základního jazyka teorie množin tohoto druhu jsme uvažovali při motivování absolutnosti. Je naopak překvapující, co všechno je možno pomocí interpretací tohoto typu ukázat[10)], z našich příkladů však tohoto typu bude až příklad třetí.

*

Jako první příklad interpretace zvolíme interpretaci $\boldsymbol{ZF}_{\mathrm{Fin}}$ v $\boldsymbol{PA}$, protože pro tuto interpretaci jsme již velmi mnoho potřebného sestrojili v kap. IV. Pro úplný popis vztahu zmíněných teorií je poté již vhodné sestrojit i interpretaci $\boldsymbol{PA}$ v $\boldsymbol{ZF}_{\mathrm{Fin}}$. Uvedené teorie však mají různé jazyky, a tudíž tyto interpretace naprosto nemohou sloužit jako příklady interpretací s absolutními pojmy.

Příklad 1. $\boldsymbol{ZF}_{\mathrm{Fin}}$ má interpretaci v $\boldsymbol{PA}$.

Obohaťme jazyk aritmetiky o predikáty a funkce definované v §3 kap. IV, tedy zejména o binární predikát ε a o unární predikát $\mathcal{S}et$. Navíc ještě definujme nový druh proměnných $x^\diamondsuit$ formulí (jedné volné proměnné x; tato formule vyjadřuje, že x má vlastnost $\mathcal{S}et$ a že tutéž vlastnost mají její ε-prvky a ε-prvky jejích ε-prvků, etc., tzn. že má vlastnost $\mathcal{S}et$ *dědičně*)

$$(\forall y)\big[\big(\mathcal{S}eq(y) \mathbin{\&} \mathfrak{Pair}(x,0)\,\varepsilon\, y \mathbin{\&} (\forall z,u,v)[(\mathfrak{S}(z) < \mathfrak{Lh}(y) \mathbin{\&}$$
$$\mathbin{\&} \mathfrak{Pair}(u,z)\,\varepsilon\, y \mathbin{\&} \mathfrak{Pair}(v,\mathfrak{S}(z))\,\varepsilon\, y) \rightarrow v\,\varepsilon\, u]\big) \rightarrow (\forall z,w)(\mathfrak{Pair}(w,z)\,\varepsilon\, y \rightarrow \mathcal{S}et(w))\big].$$

Buď $\diamondsuit$ zobrazení přiřazující univerzálnímu druhu proměnných v teorii $\boldsymbol{ZF}_{\mathrm{Fin}}$ druh proměnných $x^\diamondsuit$ a predikátu $\in$ predikát ε (a rovnosti v teorii množin rovnost v aritmetice; po formální stránce však prostě predikátu $=$ predikát $=$). Pak $\diamondsuit$ je interpretací $\boldsymbol{ZF}_{\mathrm{Fin}}$ v teorii $\boldsymbol{PA}$ obohacené o definice uvedených pojmů (pro potřebu tohoto příkladu nazvěme tuto teorii $\boldsymbol{PA}^\diamondsuit$).

Dokazujme v teorii $\boldsymbol{PA}^\diamondsuit$ postupně formule $\varphi^\diamondsuit$ pro potřebné formule φ. Naše tvrzení potřebujeme prokázat pro každé φ, které je axiomem teorie $\boldsymbol{ZF}_{\mathrm{Fin}}$. Toto je možno prokázat přímo pro každý axiom zvlášť (jako cvičení jest tento přístup vhodný), ale existuje rychlejší způsob využívající cv. 31 kap. III. Proto budeme nyní prokazovat, že každý axiom z citovaného cvičení platí ve smyslu interpretace.

---

9) Speciálně tedy musí být všechny symboly jazyka $\mathbf{L}$ vyskytující se ve formuli φ také symboly jazyka teorie $\boldsymbol{S}$.

10) Například interpretaci teorie množin s axiomem výběru a hypotézou kontinua v teorii množin, která je tohoto typu, zadává i Gödelův systém konstruktivních množin (viz [G4]). Pomocí interpretace uvedeného typu se tudíž podařilo prokázat např. bezespornost axiomu výběru a hypotézy kontinua.

1) Formule
$$[(\forall q)(q \in x \equiv q \in y) \equiv x = y]^{\diamondsuit}$$
je formulí
$$(\forall q^{\diamondsuit})(q^{\diamondsuit} \,\varepsilon\, x^{\diamondsuit} \equiv q^{\diamondsuit} \,\varepsilon\, y^{\diamondsuit}) \equiv x^{\diamondsuit} = y^{\diamondsuit}.$$
V §3 kap. IV jsme uvedli, že definice jsou dělány v $\boldsymbol{PA}^{\diamondsuit}$ tak, že libovolná dvě přirozená čísla, která jsou „množinami“ (tj. mají vlastnost $\mathcal{S}et$), jsou si rovna, právě když mají tytéž ε-prvky. Nyní jsme ze svých úvah vyloučili (definicí druhu proměnných $x^{\diamondsuit}$) všechna přirozená čísla, která nejsou „množinami“, a navíc jakýkoli ε-prvek $\diamondsuit$-objektu je také $\diamondsuit$-objektem v důsledku definice druhu proměnných $x^{\diamondsuit}$.

2) Formule
$$\big((\exists u)(\forall q)(q \notin u) \mathbin{\&} (\exists z)(\forall q)[q \in z \ \equiv (q \in x \vee q = y)]\big)^{\diamondsuit}$$
je formulí
$$(\exists u^{\diamondsuit})(\forall q^{\diamondsuit})(\neg q^{\diamondsuit} \,\varepsilon\, u^{\diamondsuit}) \mathbin{\&} (\exists z^{\diamondsuit})(\forall q^{\diamondsuit})[q^{\diamondsuit} \,\varepsilon\, z^{\diamondsuit} \equiv (q^{\diamondsuit} \,\varepsilon\, x^{\diamondsuit} \vee q^{\diamondsuit} = y^{\diamondsuit})];$$
k dokázání v teorii $\boldsymbol{PA}^{\diamondsuit}$ stačí za $u^{\diamondsuit}$ zvolit o, popis konstrukce $z^{\diamondsuit}$ byl podrobně probrán v §3 kap. IV.

3) Pro libovolnou formuli φ jazyka teorie množin je formule
$$\Big[\Big(\varphi(x/\emptyset) \mathbin{\&} (\forall x, y, z)\big[\big(\varphi \mathbin{\&} (\forall q)[q \in z \equiv (q \in x \vee q = y)]\big) \to \varphi(x/z)\big]\Big) \to (\forall x)\varphi\Big]^{\diamondsuit}$$
formulí
$$\Big(\varphi^{\diamondsuit}(x^{\diamondsuit}/\mathsf{o}) \mathbin{\&} (\forall x^{\diamondsuit}, y^{\diamondsuit}, z^{\diamondsuit})\big[\big(\varphi^{\diamondsuit} \mathbin{\&} (\forall q^{\diamondsuit})[q^{\diamondsuit} \,\varepsilon\, z^{\diamondsuit} \equiv (q^{\diamondsuit} \,\varepsilon\, x^{\diamondsuit} \vee q^{\diamondsuit} = y^{\diamondsuit})]\big) \to$$
$$\to \varphi^{\diamondsuit}(x^{\diamondsuit}/z^{\diamondsuit})\big]\Big) \to (\forall x^{\diamondsuit})\varphi^{\diamondsuit}.$$
Posledně uvedenou formuli budeme dokazovat v $\boldsymbol{PA}^{\diamondsuit}$ indukcí, přičemž si uvědomíme jako nejdůležitější fakt, že formule $\varphi^{\diamondsuit}$ je formulí jazyka $\boldsymbol{PA}^{\diamondsuit}$, a tudíž máme indukci pro tuto formuli k dispozici — podrobněji: podle §1 kap. III je formule $\varphi^{\diamondsuit}$ ekvivalentní (v teorii $\boldsymbol{PA}^{\diamondsuit}$) formuli jazyka aritmetiky (tj. bez proměnných druhu $x^{\diamondsuit}$) a použijeme indukci pro tuto ekvivalentní formuli. Existuje-li přirozené číslo $x^{\diamondsuit}$ tak, že $\neg\varphi^{\diamondsuit}$, pak existuje také nejmenší (v uspořádání přirozených čísel) přirozené číslo s touto vlastností (viz cv. 10 kap. IV); označme toto nejmenší číslo $u^{\diamondsuit}$. Nutně $u^{\diamondsuit} \neq \mathsf{o}$, takže je možno dále fixovat $v^{\diamondsuit}$ takové, že $v^{\diamondsuit} \,\varepsilon\, u^{\diamondsuit}$. Zvolíme-li přirozené číslo $w^{\diamondsuit}$ tak („vynechání prvku“ je možné), že
$$(\forall q^{\diamondsuit})\big([q^{\diamondsuit} \neq v^{\diamondsuit} \to (q^{\diamondsuit} \,\varepsilon\, u^{\diamondsuit} \equiv q^{\diamondsuit} \,\varepsilon\, w^{\diamondsuit})] \mathbin{\&} \neg v^{\diamondsuit} \,\varepsilon\, w^{\diamondsuit}\big),$$
je $w^{\diamondsuit} < u^{\diamondsuit}$. Důsledkem posledního vztahu je $\varphi^{\diamondsuit}(x^{\diamondsuit}/w^{\diamondsuit})$. V takovém případě ale z formulí $(\forall q^{\diamondsuit})[q^{\diamondsuit} \,\varepsilon\, u^{\diamondsuit} \equiv (q^{\diamondsuit} \,\varepsilon\, w^{\diamondsuit} \vee q^{\diamondsuit} = v^{\diamondsuit})]$ a $\neg\varphi^{\diamondsuit}(x^{\diamondsuit}/u^{\diamondsuit})$ vyvodíme spor.

4) Formule
$$\big(x \neq \emptyset \to (\exists y)[y \in x \mathbin{\&} (\forall q)\neg(q \in y \mathbin{\&} q \in x)]\big)^{\diamondsuit}$$
je formulí
$$x^{\diamondsuit} \neq \mathsf{o} \to (\exists y^{\diamondsuit})[y^{\diamondsuit} \,\varepsilon\, x^{\diamondsuit} \mathbin{\&} (\forall q^{\diamondsuit})\neg(q^{\diamondsuit} \,\varepsilon\, y^{\diamondsuit} \mathbin{\&} q^{\diamondsuit} \,\varepsilon\, x^{\diamondsuit})],$$

za $y^\diamondsuit$ stačí zvolit nejmenší $u^\diamondsuit$ s vlastností $u^\diamondsuit \,\varepsilon\, x^\diamondsuit$ a uvědomit si, že $v \,\varepsilon\, w \to v < w$.

Přiřazení $\diamondsuit$ je interpretací (neostrého) rozšíření teorie $\boldsymbol{ZF}_{\mathrm{Fin}}$ (viz cv. 31 kap. III) v $\boldsymbol{PA}^\diamondsuit$, a je tedy také interpretací $\boldsymbol{ZF}_{\mathrm{Fin}}$ v $\boldsymbol{PA}^\diamondsuit$.

*

Příklad 2. PA má interpretaci jak v $\boldsymbol{ZF}_{\mathrm{Fin}}$, tak i v $\boldsymbol{ZF}$.

V teorii množin můžeme přirozená čísla definovat jako ordinální čísla neobsahující nekonečnou množinu[11], tzn. obohatit jazyk o nový druh proměnných (řekněme $x^\heartsuit$) přidáním axiomu

$$(\exists x^\heartsuit)(x = x^\heartsuit) \equiv \big((\forall u, v \,\underline{\in}\, x)[u \subseteq x \,\&\, (u \in v \;\vee u = v \;\vee v \in u)] \,\& \\ \& \,(\forall u' \,\underline{\in}\, x)[u' \neq \emptyset \to \neg(\forall w \in u')(w \cup \{w\} \in u')]\big).$$

Systém[12] přirozených čísel je pak v teorii množin dobře uspořádán pomocí vztahu $x^\heartsuit \in y^\heartsuit \vee x^\heartsuit = y^\heartsuit$. Nechť logické funkce $\oplus$ a $\otimes$ přiřazují přirozeným číslům jejich ordinální součet resp. součin a pro ostatní množiny jsou dodefinovány např. konstantou $\emptyset$. Nechť $\heartsuit$ je zobrazení přiřazující univerzálnímu druhu proměnných v aritmetice proměnné druhu $x^\heartsuit$, přiřazující funkci $\mathfrak{S}$ jazyka aritmetiky funkci teorie množin, která přiřazuje každé množině x množinu $x \cup \{x\}$, a přiřazující funkcím $+$ a $\cdot$ jazyka aritmetiky postupně funkce $\oplus$ a $\otimes$ definované v jazyce teorie množin a konstantě $\mathfrak{o}$ přiřazující $\emptyset$ (logickému symbolu $=$ v aritmetice přiřadíme týž symbol, nyní znamenající rovnost v teorii množin). Pak zobrazení $\heartsuit$ je interpretací $\boldsymbol{PA}$ jak v teorii $\boldsymbol{ZF}_{\mathrm{Fin}}$, tak i v teorii $\boldsymbol{ZF}$, přičemž obě teorie obohatíme o uvedené definice.

Nechť $\boldsymbol{ZF}^\heartsuit_{-\infty}$ označuje pro potřeby tohoto příkladu teorii $\boldsymbol{ZF}$, ze které vypustíme axiom nekonečna, ale kterou na druhé straně obohatíme o uvedené definice. Dokazujme v teorii $\boldsymbol{ZF}^\heartsuit_{-\infty}$ postupně formule $\varphi^\heartsuit$, kde φ probíhá axiomy $\boldsymbol{PA}$.

1) Formule $[\mathfrak{S}(x) \neq \mathfrak{o}]^\heartsuit$ je formulí $x^\heartsuit \cup \{x^\heartsuit\} \neq \emptyset$. Avšak dokonce pro libovolnou množinu x je v teorii $\boldsymbol{ZF}^\heartsuit_{-\infty}$ dokazatelné $x \in x \cup \{x\}$, takže $\emptyset \neq x \cup \{x\}$.

2) Formule $[\mathfrak{S}(x) = \mathfrak{S}(y) \to x = y]^\heartsuit$ je formulí

$$(x^\heartsuit \cup \{x^\heartsuit\} = y^\heartsuit \cup \{y^\heartsuit\}) \to x^\heartsuit = y^\heartsuit.$$

V teorii $\boldsymbol{ZF}^\heartsuit_{-\infty}$ však z předpokladu

$$x^\heartsuit \neq y^\heartsuit \,\&\, (x^\heartsuit \cup \{x^\heartsuit\} \subseteq y^\heartsuit \cup \{y^\heartsuit\}) \,\&\, (y^\heartsuit \cup \{y^\heartsuit\} \subseteq x^\heartsuit \cup \{x^\heartsuit\})$$

plyne $x^\heartsuit \in y^\heartsuit \in x^\heartsuit$, což je ve sporu s axiomem fundovanosti.

3) Formule $[x \neq \mathfrak{o} \to (\exists y)(x = \mathfrak{S}(y))]^\heartsuit$ jest formulí

$$x^\heartsuit \neq \emptyset \to (\exists y^\heartsuit)(x^\heartsuit = y^\heartsuit \cup \{y^\heartsuit\}).$$

Pro důkaz sporem fixujme přirozené číslo $x^\heartsuit \neq \emptyset$, pro které neexistuje y tak, že $x^\heartsuit = y \cup \{y\}$. Každé $y \in x^\heartsuit$ je přirozeným číslem, a tedy $y \cup \{y\}$ je opět přirozeným číslem, a to číslem různým od $x^\heartsuit$. Trichotomie relace zadané predikátem $\in$

[11] viz cv. 23 a 27 obě kap. III; zde připomenuty také definice $\oplus$ a $\otimes$ a rovněž tvrzení o ordinálních a přirozených číslech, na která se dále odvoláváme

[12] V teorii $\boldsymbol{ZF}$ je tento systém množinou, v teorii $\boldsymbol{ZF}_{\mathrm{Fin}}$ vlastní třídou.

na přirozených číslech a neexistence q, pro které $y \in q$ & $q \in y \cup \{y\}$ (viz bod (f) cv. 23 kap. III) zaručí $y \cup \{y\} \in x^\heartsuit$. Tento fakt je ve sporu s definicí přirozeného čísla v $\boldsymbol{ZF}^\heartsuit_{-\infty}$ (získali bychom nekonečnou tranzitivní část množiny x a užili bod (c) ze cvičení 23 kap. III). Na závěr si opětovně uvědomíme, že $y \in x^\heartsuit$ implikuje, že y je $\heartsuit$-objektem.

4) Formule $[x + \mathsf{o} = x]^\heartsuit$ je formulí $x^\heartsuit \oplus \emptyset = x^\heartsuit$, která je pro ordinální součet zřejmá v $\boldsymbol{ZF}^\heartsuit_{-\infty}$.

5) Formule $[x + \mathfrak{S}(y) = \mathfrak{S}(x + y)]^\heartsuit$ jest formulí

$$x^\heartsuit \oplus (y^\heartsuit \cup \{y^\heartsuit\}) = (x^\heartsuit \oplus y^\heartsuit) \cup \{x^\heartsuit \oplus y^\heartsuit\}.$$

Abychom uvedenou formuli dokázali v $\boldsymbol{ZF}^\heartsuit_{-\infty}$, stačí sestrojit vzájemně jednoznačné zobrazení mezi množinami

$$[\{\emptyset\} \times x^\heartsuit] \cup [\{\{\emptyset\}\} \times (y^\heartsuit \cup \{y^\heartsuit\})] \ \text{ a } \ [\{\emptyset\} \times x^\heartsuit] \cup [\{\{\emptyset\}\} \times y^\heartsuit] \cup \{x^\heartsuit \oplus y^\heartsuit\}.$$

(Existuje-li vzájemně jednoznačné zobrazení dvou konečných množin, musí existovat izomorfizmus těchto množin vzhledem ke každým dvěma lineárním uspořádáním na nich.)

6) Formule $[x \cdot \mathsf{o} = \mathsf{o}]^\heartsuit$ jest formulí $x^\heartsuit \otimes \emptyset = \emptyset$; v $\boldsymbol{ZF}^\heartsuit_{-\infty}$ je však triviálně $x^\heartsuit \times \emptyset = \emptyset$ a obrazem $\emptyset$ pro jakoukoli funkci je $\emptyset$.

7) Formule $[x \cdot \mathfrak{S}(y) = x \cdot y + x]^\heartsuit$ je formulí

$$x^\heartsuit \otimes (y^\heartsuit \cup \{y^\heartsuit\}) = (x^\heartsuit \otimes y^\heartsuit) \oplus x^\heartsuit.$$

K dokázání posledně zmíněné formule v $\boldsymbol{ZF}^\heartsuit_{-\infty}$ stačí sestrojit vzájemně jednoznačné zobrazení mezi množinami

$$x^\heartsuit \times (y^\heartsuit \cup \{y^\heartsuit\}) \ \text{ a } \ [\{\emptyset\} \times (x^\heartsuit \times y^\heartsuit)] \cup [\{\{\emptyset\}\} \times x^\heartsuit].$$

8) Pro jakoukoli formuli ψ jazyka aritmetiky je formule

$$\big[\big(\psi(x/\mathsf{o}) \;\&\; (\forall x)[\psi \rightarrow \psi(x/\mathfrak{S}(x))]\big) \rightarrow (\forall x)\psi\big]^\heartsuit$$

formulí

$$\big(\psi^\heartsuit(x^\heartsuit/\emptyset) \;\&\; (\forall x^\heartsuit)[\psi^\heartsuit \rightarrow \psi^\heartsuit(x^\heartsuit/x^\heartsuit \cup \{x^\heartsuit\})]\big) \rightarrow (\forall x^\heartsuit)\psi^\heartsuit.$$

Pokračujme v $\boldsymbol{ZF}^\heartsuit_{-\infty}$ a předpokládejme, že pro $x^\heartsuit$ jest $\neg\psi^\heartsuit$. Pak máme $x^\heartsuit \neq \emptyset$. Protože $\psi^\heartsuit$ je *formulí jazyka teorie množin* obohaceného pouze *definicemi* o nový druh proměnných a nové funkce, je možno na tuto formuli aplikovat schéma vydělení. Analogicky příkladu 1 uvážíme totiž existenci formule ϑ ekvivalentní s formulí $\varphi^\heartsuit$ v teorii $\boldsymbol{ZF}^\heartsuit_{-\infty}$, kterážto formule ϑ je navíc formulí jenom základního jazyka teorie množin. Nadto za schématu nahrazení lze vyvodit schéma vydělení (viz cv. 18 kap. III). Z uvedeného vyplývá, že systém

$$\{y \in x^\heartsuit \cup \{x^\heartsuit\}; \neg\psi^\heartsuit(x^\heartsuit/y)\}$$

je množinou, a v důsledku axiomu fundovanosti existuje tudíž nějaké $z \in x^\heartsuit \cup \{x^\heartsuit\}$, pro které $\neg\psi^\heartsuit(x^\heartsuit/z)$ a současně $(\forall u \in z)\psi^\heartsuit(x^\heartsuit/u)$. Protože $z \in x^\heartsuit \cup \{x^\heartsuit\}$, je z přirozeným číslem a v důsledku třetího bodu musí existovat přirozené číslo v tak, že $z = v \cup \{v\}$. Pak ale platí $\psi^\heartsuit(x^\heartsuit/v)$, pročež volba z je zjevně ve sporu s formulí $\psi^\heartsuit \rightarrow \psi^\heartsuit(x^\heartsuit/x^\heartsuit \cup \{x^\heartsuit\})$.

*

Na základě skládání interpretací a obou předchozích výsledků vidíme, že $\boldsymbol{ZF}_{\mathrm{Fin}}$ má interpretaci v $\boldsymbol{ZF}$. Tato interpretace však *nemá* absolutní náležení. Nicméně není těžké sestrojit interpretaci $\boldsymbol{ZF}_{\mathrm{Fin}}$ v $\boldsymbol{ZF}$, která má oba predikáty (náležení i rovnost) absolutní, viz cv. 10.

Z následující úvahy však poměrně jednoduše vyplývá, že $\boldsymbol{ZF}$ nemá interpretaci v $\boldsymbol{ZF}_{\mathrm{Fin}}$, tedy vztah teorií „mít interpretaci v“ není symetrický ani pro bezesporné teorie.

V druhém příkladu jsme v $\boldsymbol{ZF}$ sestrojili více než pouze interpretaci, sestrojili jsme totiž formální model formální teorie PA, která je formalizací teorie $\boldsymbol{PA}$. Abychom tento fakt ověřili, uvědomme si nejprve, že systém přirozených čísel je v teorii $\boldsymbol{ZF}$ množinou ω. Realizujme po řadě formální logické funkce odpovídající logickým funkcím $\mathfrak{S}$, $+$ a $\cdot$ množinovými funkcemi $\mathfrak{S}_\omega = \{\langle x, y\rangle; y \in \omega \ \&\ x = y \cup \{y\}\}$, $+_\omega = \{\langle x, y, z\rangle; x, y, z \in \omega \ \&\ x = y \oplus z\}$ a $\cdot_\omega = \{\langle x, y, z\rangle; x, y, z \in \omega \ \&\ x = y \otimes z\}$. Body 1–7 druhého příkladu zaručují, že takto dostáváme *formální* model formální teorie RA odpovídající teorii $\boldsymbol{RA}$. Označme tento formální model jako $\mathbb{ra}$. Uvědomme si, že $\mathbb{ra}$ je množinou.

Pro jakoukoli *formální* formuli μ s jednou formální volnou proměnnou jazyka aritmetiky $\boldsymbol{RA}$ je formule $\alpha \in \omega \ \&\ \mathbb{ra} \models \mu[\alpha]$ formulí jazyka teorie množin (s výše uvedenými obohaceními jazyka, a nyní navíc s dodatečnou konstantou $\mathbb{ra}$). Konstanta $\mathbb{ra}$ je definována formulí jazyka $\boldsymbol{ZF}$ (obohaceného o běžné funkce dvojice, sjednocení, etc. a o funkce $\oplus, \otimes$) a je definována jednoznačně. Tedy pro formule s touto konstantou je opět k dispozici indukce (viz věta o zavedení funkce §1 kap. III).

Pracujme nadále uvnitř teorie $\boldsymbol{ZF}$ a předpokládejme, že existuje přirozené číslo α takové, že $\mathbb{ra} \models \neg\mu[\alpha]$. Protože množina přirozených čísel je dobře uspořádána relací $\underline{\in}$, existuje v důsledku indukce dokonce přirozené číslo $\beta \in \omega$ tak, že

$$\Big(\beta = \mathfrak{o} \ \&\ \mathbb{ra} \models \neg\mu[\mathfrak{o}]\Big) \vee \Big(\mathbb{ra} \models \mu[\beta] \ \&\ \mathbb{ra} \models (\neg\mu)[\mathfrak{S}_\omega(\beta)]\Big).$$

Tudíž v modelu $\mathbb{ra}$ je splněno i schéma indukce. Zdůrazněme, že jsme museli uvažovat všechny *formální* formule jazyka aritmetiky, abychom ukázali, že $\mathbb{ra}$ je formální model PA.

Kdyby tedy měla teorie $\boldsymbol{ZF}$ interpretaci v teorii $\boldsymbol{ZF}_{\mathrm{Fin}}$, měla by podle posledního příkladu rovněž interpretaci v $\boldsymbol{PA}$, a v takovém případě by byla v teorii $\boldsymbol{ZF}$ dokazatelná existence formálního modelu[13] formální teorie ZF. Pak by ale byla v $\boldsymbol{ZF}$ dokazatelná formální bezespornost formální teorie ZF (užijeme větu o korektnosti *uvnitř* teorie $\boldsymbol{ZF}$), což je ve sporu s druhou větou o neúplnosti.

*

Následující příklad je vybrán, aby ukázal možnost prokázání nedokazatelnosti konkrétní formule a současně ukázal použití absolutností predikátů a funkcí při zkoumání interpretací.

Příklad 3. Nedokazatelnost schématu nahrazení z ostatních axiomů *ZF*. Původní Zermelova formulace (1908) axiomatiky teorie množin měla místo schématu nahrazení[14] schéma vydělení, tj. axiomy

$$(\forall x)(\exists z)(\forall q)[q \in z \equiv (q \in x \ \&\ \varphi)]$$

pro libovolnou formuli φ neobsahující proměnnou z volně[15]. Teorii $\boldsymbol{ZF}$, ve které nahradíme schéma nahrazení schématem vydělení, jsme ve cv. 18 kap. III označili jako teorii $\boldsymbol{Z}$, nazvali Zermelovou teorií množin a ukázali jsme, že $\boldsymbol{ZF}$ je rozšíření $\boldsymbol{Z}$. Naproti tomu nyní ukážeme, že teorie $\boldsymbol{Z}$ s negací axiomu nahrazení pro vhodnou

[13] Formální model $\mathbb{pa}$ formální teorie PA v teorii $\boldsymbol{ZF}$ upravíme na formální model formální teorie ZF podle předpokládané interpretace teorie $\boldsymbol{ZF}$ v teorii $\boldsymbol{PA}$.

[14] Toto schéma bylo navrženo A. Fraenkelem 1922, ale také již dříve D. Mirimanoffem (1917).

[15] avšak také **AC** místo axiomu fundovanosti

formuli ψ je relativně bezesporná vzhledem k $\boldsymbol{ZF}$ (takže $\boldsymbol{ZF}$ není *konzervativním* rozšířením teorie $\boldsymbol{Z}$).

Pro libovolné přirozené číslo $\alpha \in \omega$ definujme v teorii $\boldsymbol{ZF}$ kardinální číslo κ_α jako mohutnost množiny $\mathfrak{P}(\ldots\mathfrak{P}(\omega)\ldots)$, kde potence $\mathfrak{P}$ se provede α-krát, tj. definujeme κ_α jako to y, které vyhovuje následující formuli (kterou budeme označovat $\psi(\alpha, y)$; predikát $\mathcal{F}nc$ znamená „být množinovou funkcí" a připomeňme, že definiční obor značíme $\mathfrak{Dom}$):

$$(\exists f)\big(\mathcal{F}nc(f)\ \&\ \mathfrak{Dom}(f) \in \omega\ \&\ \alpha \in \mathfrak{Dom}(f)\ \&\ f(0) = \omega\ \&$$
$$\&\ (\forall z \in \omega)[(z \cup \{z\}) \in \mathfrak{Dom}(f) \rightarrow f(z \cup \{z\}) = \mathfrak{P}(f(z))]\ \&\ \mathfrak{Card}(f(\alpha)) = y\big).$$

Uvědomme si, že definice κ_α má pro $\alpha \in \omega$ smysl, tzn. že v teorii $\boldsymbol{ZF}$ je dokazatelné, že pro každé $\alpha \in \omega$ existuje právě jedno y tak, že $\psi(\alpha, y)$[16)]. Fixujeme-li konstantu κ jako nejmenší ordinální číslo větší než všechny κ_α pro $\alpha \in \omega$, pak je v teorii $\boldsymbol{ZF}$ s příslušně obohaceným jazykem dokazatelné, že κ je číslem kardinálním (a to limitním).

Nechť $x^\clubsuit$ probíhá množiny, které jsou prvky nějaké tranzitivní množiny, která má mohutnost ostře menší než κ (tj. která má mohutnost menší nebo rovnou κ_α pro nějaké $\alpha \in \omega$), což vede k definici druhu proměnných $x^\clubsuit$ pomocí

$$(\exists x^\clubsuit)(x = x^\clubsuit) \equiv (\exists z)[(\forall u \in z)(u \subseteq z)\ \&\ x \in z\ \&\ \mathfrak{Card}(z) < \kappa].$$

Budiž $\clubsuit$ interpretace jazyka teorie množin přiřazující univerzálnímu druhu proměnných x druh $x^\clubsuit$, a přiřazující predikátům $\in$ a $=$ po řadě tytéž predikáty. Nejprve chceme ukázat, že $\clubsuit$ je interpretací $\boldsymbol{Z}$ v $\boldsymbol{ZF}$ s definicí druhu proměnných $x^\clubsuit$ (označme tuto teorii např. $\boldsymbol{ZF}^\clubsuit$).

V teorii $\boldsymbol{ZF}^\clubsuit$ je triviálně dokazatelné, že systém $\clubsuit$-množin je tranzitivní. Metamatematickou indukcí ukážeme, že v takovém případě je každá omezená formule absolutní. Podle definice je formule $[x \in y]^\clubsuit$, tj. formule $x^\clubsuit \in^\clubsuit y^\clubsuit$ formulí $x^\clubsuit \in y^\clubsuit$, tj. formulí $[x \in y](x/x^\clubsuit, y/y^\clubsuit)$ a analogicky pro rovnost, pročež pro základní formule není co dokazovat.

Jestliže $[\varphi(x_1, \ldots, x_n)]^\clubsuit$ a $[\vartheta(x_1, \ldots, x_n)]^\clubsuit$ jsou po řadě ekvivalentní formulím $\varphi(x_1/x_1^\clubsuit, \ldots, x_n/x_n^\clubsuit)$ a $\vartheta(x_1/x_1^\clubsuit, \ldots, x_n/x_n^\clubsuit)$, jsou formule $[\neg\varphi(x_1, \ldots, x_n)]^\clubsuit$ a $[\varphi(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow \vartheta(x_1, \ldots, x_n)]^\clubsuit$ po řadě evidentně ekvivalentní formulím

$$[\neg\varphi](x_1/x_1^\clubsuit, \ldots, x_n/x_n^\clubsuit) \ \text{ a } \ [\varphi \rightarrow \vartheta](x_1/x_1^\clubsuit, \ldots, x_n/x_n^\clubsuit).$$

Jediný trochu netriviální případ se týká formulí vznikajících omezenou kvantifikací. Formule $[(\exists x \in y)\varphi(x, y, x_1, \ldots, x_n)]^\clubsuit$ je formulí

$$(\exists x^\clubsuit \in^\clubsuit y^\clubsuit)\varphi(x/x^\clubsuit, y/y^\clubsuit, x_1/x_1^\clubsuit, \ldots, x_n/x_n^\clubsuit)$$

v důsledku indukčního předpokladu absolutnosti formule φ. Potřebujeme ukázat, že uvedená formule je ekvivalentní formuli $(\exists x \in y^\clubsuit)\varphi(x, y/y^\clubsuit, x_1/x_1^\clubsuit, \ldots, x_n/x_n^\clubsuit)$. K tomuto účelu však stačí užít tranzitivitu systému $\clubsuit$-množin a prokázat, že $x \in y^\clubsuit$ implikuje, že x je $\clubsuit$-množinou.

16) Jestliže platí zobecněná hypotéza kontinua, je nadto $\kappa_\alpha = \aleph_\alpha$.

V důsledku prokázaného je mnoho formulí (a to nejen omezených) absolutních vzhledem k interpretaci $\clubsuit$. K prokazování absolutnosti většiny axiomů nyní použijeme výsledků cv. 21 kap. IV.

Speciálně axiom extenzionality a axiom fundovanosti jsou Π_1-formule, tedy jsou tvaru $(\forall x, y)\varphi_1$ a $(\forall x)\varphi_7$, kde formule $\varphi_1(x, y)$ a $\varphi_7(x)$ jsou omezené formule základního jazyka teorie množin. Jsou-li $x^\clubsuit, y^\clubsuit$ libovolné $\clubsuit$-objekty, dostáváme $\varphi_1(x^\clubsuit, y^\clubsuit)$ a $\varphi_7(x^\clubsuit)$ prostě specifikací z axiomů extenzionality a fundovanosti. V důsledku absolutnosti omezených formulí jsou však v teorii $\boldsymbol{ZF}^\clubsuit$ dokazatelné dokonce formule $\varphi_1^\clubsuit(x^\clubsuit, y^\clubsuit)$ a $\varphi_7^\clubsuit(x^\clubsuit)$. Tudíž na základě věty o konstantách ($x^\clubsuit, y^\clubsuit$ jsme volili zcela libovolně) a generalizace (pro proměnné $x^\clubsuit, y^\clubsuit$) je dokazatelná platnost uvedených axiomů ve smyslu interpretace.

Axiom nekonečna je Σ_1-formulí, a může být tedy zapsán jako formule tvaru $(\exists z)\varphi_6$, kde $\varphi_6(z)$ je omezená formule. V teorii $\boldsymbol{ZF}^\clubsuit$ je zřejmé, že $\omega \in \omega + 1$ a nadto $\omega + 1$ je spočetná tranzitivní množina, a tudíž ω je $\clubsuit$-množina. Protože $\boldsymbol{ZF}^\clubsuit \vdash \varphi_6(z/\omega)$, tak z absolutnosti formule φ_6 dovodíme, že $\boldsymbol{ZF}^\clubsuit \vdash \varphi_6^\clubsuit(z^\clubsuit/\omega)$. Axiom nekonečna tudíž platí ve smyslu interpretace.

Axiomy dvojice a sjednocení jsou Π_2-formule, a můžeme je tedy vyjádřit ve tvaru $(\forall x, y)(\exists z)\varphi_2$ a $(\forall x)(\exists z)\varphi_3$, kde formule $\varphi_2(x, y, z)$ a $\varphi_3(x, z)$ jsou omezené formule základního jazyka teorie množin. Pracujme nadále v teorii $\boldsymbol{ZF}^\clubsuit$. Jestliže $x^\clubsuit \in x$ a $y^\clubsuit \in y$ a jestliže x, y jsou tranzitivní množiny mohutnosti menší než κ, jsou množiny $x \cup y \cup \{\{x^\clubsuit, y^\clubsuit\}\}$ a $x \cup \{\bigcup x^\clubsuit\}$ opět tranzitivní množiny mohutnosti menší než κ. Tudíž množiny $\{x^\clubsuit, y^\clubsuit\}$ a $\bigcup x^\clubsuit$ jsou $\clubsuit$-množinami. Položíme-li $z_2^\clubsuit = \{x^\clubsuit, y^\clubsuit\}$ a $z_3^\clubsuit = \bigcup x^\clubsuit$, pak, podle definice funkcí dvojice a sjednocení, dostáváme $\varphi_2(x^\clubsuit, y^\clubsuit, z_2^\clubsuit)$ a $\varphi_3(x^\clubsuit, z_3^\clubsuit)$. Tudíž na metamatematické hladině z absolutností formulí φ_2 a φ_3 obdržíme dále dokazatelnost formulí $\varphi_2^\clubsuit(x^\clubsuit, y^\clubsuit, z_2^\clubsuit)$ a $\varphi_3^\clubsuit(x^\clubsuit, z_3^\clubsuit)$ v teorii $\boldsymbol{ZF}^\clubsuit$ s fixovanými $x^\clubsuit, y^\clubsuit, z_2^\clubsuit$ a $z_3^\clubsuit$. Použijeme-li na závěr opět větu o konstantách a generalizaci a tentokrát i duální formu specifikace, vidíme, že platí axiomy dvojice a sjednocení ve smyslu interpretace.

Axiom potence je pouze Π_3-formulí, a proto je zapotřebí ho zkoumat podrobněji; pokračujme v teorii $\boldsymbol{ZF}^\clubsuit$. Jestliže $x^\clubsuit \in x$, kde x je tranzitivní množina mohutnosti menší nebo rovné κ_α pro nějaké $\alpha \in \omega$, pak i množina $x \cup \mathfrak{P}(x^\clubsuit) \cup \{\mathfrak{P}(x^\clubsuit)\}$ je tranzitivní a je to množina mohutnosti menší nebo rovné $\kappa_{\alpha+1}$, tedy opět mohutnosti menší než κ. Tudíž jakákoli podmnožina $\clubsuit$-množiny je $\clubsuit$-množinou, a nadto $\mathfrak{P}(x^\clubsuit)$ je také $\clubsuit$-množinou. Na metamatematické hladině dostáváme z definice potenční množiny

$$\boldsymbol{ZF}^\clubsuit \vdash (\forall q \in \mathfrak{P}(x^\clubsuit))(q \subseteq x^\clubsuit) \mathbin{\&} (\forall q)(q \subseteq x^\clubsuit \rightarrow q \in \mathfrak{P}(x^\clubsuit)).$$

Fixujme množiny $x^\clubsuit$ a $\mathfrak{P}(x^\clubsuit)$; první část uvedené formule je absolutní, a tudíž je ekvivalentní v $\boldsymbol{ZF}^\clubsuit$ formuli $(\forall q^\clubsuit \in^\clubsuit \mathfrak{P}(x^\clubsuit))(q^\clubsuit \subseteq^\clubsuit x^\clubsuit)$ (tzn. nezáleží na tom, zda se omezíme na $\clubsuit$-množiny $q^\clubsuit$, které jsou prvky $\mathfrak{P}(x^\clubsuit)$, nebo připustíme-li všechny množiny q, které jsou prvky $\mathfrak{P}(x^\clubsuit)$). Nadto víme, že každá část $\clubsuit$-množiny je $\clubsuit$-množinou, a druhá část zkoumané formule je tudíž ekvivalentní v teorii $\boldsymbol{ZF}^\clubsuit$ formuli $(\forall q^\clubsuit)(q^\clubsuit \subseteq^\clubsuit x^\clubsuit \rightarrow q^\clubsuit \in^\clubsuit \mathfrak{P}(x^\clubsuit))$. Nyní již stačí opětovně jako výše použít duální specifikaci, větu o konstantách a generalizaci.

Jestliže φ je libovolnou formulí teorie množin, pak $\varphi^\clubsuit$ je formulí teorie množin, jejíž jazyk je obohacen o druh proměnných $x^\clubsuit$. Nyní je podstatné, že formule $\varphi^\clubsuit$ je ekvivalentní nějaké formuli jazyka teorie množin (tj. bez obohacení o proměnné druhu $x^\clubsuit$), a to v důsledku věty o definici druhu proměnných (viz §1 kap. III). Tedy pro každé $x^\clubsuit$ existuje množina $\{q^\clubsuit \in x^\clubsuit; \varphi^\clubsuit\}$ (schéma nahrazení použijeme na vhodnou formuli *původního jazyka*); protože tato množina je podmnožinou množiny $x^\clubsuit$, je také $\clubsuit$-množinou. Navíc dokazatelnost formule $q^\clubsuit \in^\clubsuit \{q^\clubsuit \in x^\clubsuit; \varphi^\clubsuit\} \equiv (q^\clubsuit \in x^\clubsuit \ \& \ \varphi^\clubsuit)$ je triviální, uvedená fakta prokazují schéma vydělení ve smyslu interpretace $\clubsuit$.

Jako poslední prokažme, že ve smyslu interpretace neplatí schéma nahrazení pro výše popsanou formuli ψ jazyka teorie množin. K tomu účelu si nejprve uvědomme, že tato formule je absolutní (neboť každé f, které je částí $\clubsuit$-množiny $u^\clubsuit \times v^\clubsuit$ je rovněž $\clubsuit$-množinou). Kdyby platil axiom nahrazení ve smyslu interpretace $\clubsuit$ pro formuli $\psi^\clubsuit$, musela by být množina $\{\kappa_\alpha; \alpha \in \omega\}$ také $\clubsuit$-množinou. To je ale absurdní, protože pak by byla $\clubsuit$-množinou i množina $\bigcup\{\kappa_\alpha; \alpha \in \omega\}$, kterážto množina je množinou κ, a tedy již ona sama má mohutnost κ, a nemůže tedy být prvkem žádné tranzitivní množiny mohutnosti ostře menší než κ.

*

Na závěr ještě srovnejme alespoň v hrubých rysech struktury a interpretace. Strukturami jsme se zabývali pouze v případě, že metamatematikou byla teorie množin. Pochopitelně bychom případně mohli za metamatematiku považovat i každou teorii, která je „silnější“ než teorie množin (např. ve které je teorie množin interpretovatelná), ale je zcela zřejmé, že předpoklad o síle metamatematiky je silně omezující.

Naproti tomu jsme nedávali žádný požadavek na teorii, ve které interpretujeme. Zamysleme se však nad případem, že teorie $\boldsymbol{S}$, ve které interpretaci konstruujeme, je teorií množin. Přirozeně vzniká otázka, zda teorie $\boldsymbol{T}$ má interpretaci v $\boldsymbol{S}$, právě když o její formalizaci T je v teorii $\boldsymbol{S}$ dokazatelné, že má formální model. Ukážeme, že jedna implikace platí, druhá nemůže platit zcela evidentně. Každá teorie má triviální interpretaci sama v sobě, ale existence formálního modelu její formalizace nemůže být dokazatelná, protože z existence by plynula formální bezespornost formalizace, a tím bychom obdrželi spor s druhou větou o neúplnosti.

Nechť T je formalizací teorie $\boldsymbol{T}$ v jakési teorii množin $\boldsymbol{S}$. Jestliže existuje formální model formální teorie T[17], je možno popsat interpretaci $\boldsymbol{T}$ v určitém rozšíření teorie $\boldsymbol{S}$ o definice druhů proměnných a predikátů a zavedení funkcí velice jednoduše. Buď $\mathbb{m}$ formálním modelem formální teorie T. Pro každý druh proměnných $\mathfrak{x}$ jazyka teorie $\boldsymbol{T}$ nechť je druh proměnných $\mathfrak{x}^*$ definován formulí $x \in \mathfrak{x}_{\mathbb{m}}$, kde $\mathfrak{x}_{\mathbb{m}}$ je množina realizující v modelu $\mathbb{m}$ formální druh proměnných, který odpovídá metamatematickému druhu $\mathfrak{x}$, analogicky pro každý k-četný predikát $\mathcal{P}$ nechť $\mathcal{P}^*$ je definován formulí $\langle x_1, \dots, x_k \rangle \in \mathcal{P}_{\mathbb{m}}$, kde $\mathcal{P}_{\mathbb{m}}$ realizuje v modelu $\mathbb{m}$ formální predikát, který odpovídá (metamatematickému) predikátu $\mathcal{P}$, a rovněž analogicky pro každou k-četnou (metamatematickou logickou) funkci $\mathfrak{F}$ nechť $\mathfrak{F}^*$ je funkce definovaná formulí $\langle y, x_1, \dots, x_k \rangle \in \mathfrak{F}_{\mathbb{m}}$, kde $\mathfrak{F}_{\mathbb{m}}$ realizuje v modelu $\mathbb{m}$ formální funkci, která odpovídá metamatematické funkci $\mathfrak{F}$. Pak je zcela triviální ověřit, že $*$ je interpretací $\boldsymbol{T}$ v teorii $\boldsymbol{S}$.

[17] Vlastnost „x je formálním modelem formální teorie T“ je jakousi formulí $\varphi(x)$ jazyka teorie $\boldsymbol{S}$ a my vyžadujeme, aby $\boldsymbol{S} \vdash (\exists x)\varphi$.

Dodatek

GOODSTEINOVA VĚTA

strany 348–374

CVIČENÍ VI

Jsou ponechána jen cvičení mající vztah k třetímu paragrafu.

6) Jestliže $*$ je interpretací jazyka $\mathbf{L}$ v jazyce $\mathbf{L}'$ a jestliže $+$ je interpretací jazyka $\mathbf{L}'$ v jazyce $\mathbf{L}''$, pak složením zobrazení $*$ a $+$ nazýváme pochopitelně zobrazení jazyka $\mathbf{L}$ do jazyka $\mathbf{L}''$ přiřazující každému druhu proměnných $\mathfrak{x}$ jazyka $\mathbf{L}$ druh proměnných $(\mathfrak{x}^*)^+$ jazyka $\mathbf{L}''$, dále přiřazující každému predikátu $\mathcal{P}$ jazyka $\mathbf{L}$ predikát $(\mathcal{P}^*)^+$ jazyka $\mathbf{L}''$, a nakonec přiřazující každé funkci $\mathfrak{F}$ jazyka $\mathbf{L}$ funkci $(\mathfrak{F}^*)^+$ jazyka $\mathbf{L}''$.

Prokažte, že složení interpretací $*$ a $+$ je interpretací jazyka $\mathbf{L}$ v jazyce $\mathbf{L}''$, a že je-li $*$ interpretací teorie $\boldsymbol{T}$ v teorii $\boldsymbol{S}$ a je-li $+$ interpretací teorie $\boldsymbol{S}$ v teorii $\boldsymbol{R}$, je jejich složení interpretací teorie $\boldsymbol{T}$ v teorii $\boldsymbol{R}$. Návod: Užijte větu §3.

7) Říkáme, že formule $\varphi_1, \ldots, \psi_1, \ldots$ a $\vartheta_1, \ldots$ jazyka teorie $\boldsymbol{S}$ **určují v teorii $\boldsymbol{S}$ interpretaci teorie $\boldsymbol{T}$,** jestliže po obohacení jazyka teorie $\boldsymbol{S}$ definováním nových druhů proměnných $\mathfrak{x}_1^*, \ldots$ pomocí formulí $\varphi_1, \ldots$, obohacení jazyka teorie $\boldsymbol{S}$ definováním nových predikátů $\mathcal{P}_1^*, \ldots$ pomocí formulí $\psi_1, \ldots$ a po obohacení jazyka teorie $\boldsymbol{S}$ zavedením nových funkcí $\mathfrak{F}_1^*, \ldots$ pomocí formulí $\vartheta_1, \ldots$, dostáváme teorii $\boldsymbol{S}'$ takovou, že zobrazení přiřazující symbolům jazyka teorie $\boldsymbol{T}$ „ohvězdičkované“ symboly jazyka teorie $\boldsymbol{S}'$ je interpretací teorie $\boldsymbol{T}$ v teorii $\boldsymbol{S}'$.

Formulujte podmínky potřebné k tomu, aby formule $\varphi_1, \ldots, \psi_1, \ldots$ a $\vartheta_1, \ldots$ určovaly interpretaci teorie $\boldsymbol{T}$ v teorii $\boldsymbol{S}$. Návod: Podmínky hledejte v §1 kap. III a §3 kap. VI.

Formulujte metodu, jak ke každé formuli φ jazyka teorie $\boldsymbol{T}$ najít formuli ψ jazyka teorie $\boldsymbol{S}$ (tj. bez „hvězdičkovaných pojmů“) tak, že $\boldsymbol{S}' \vdash \varphi^* \equiv \psi$. Návod: viz §1 kap. III.

8) Nechť teorie $\boldsymbol{S}'$ vznikne obohacením teorie $\boldsymbol{S}$ definicemi druhů proměnných a predikátů a zavedením funkcí. Pak každá interpretace $+$ teorie $\boldsymbol{S}$ v teorii $\boldsymbol{R}$ je částí (jakožto zobrazení) interpretace teorie $\boldsymbol{S}'$ v určité teorii $\boldsymbol{R}'$, která vznikne obohacením teorie $\boldsymbol{R}$ definicemi druhů proměnných a predikátů a zavedením funkcí. Návod: Nechť např. jazyk teorie $\boldsymbol{S}'$ obsahuje druh proměnných definovaný formulí $\varphi(x)$, pak musí být $\boldsymbol{S} \vdash (\exists x)\varphi$ a $(\forall x)[(\exists \mathfrak{x})(\mathfrak{x} = x) \equiv \varphi]$ je axiomem teorie $\boldsymbol{S}'$. Pak jednak formule φ^+ má jedinou volnou proměnnou x^+, jednak $\boldsymbol{R} \vdash (\exists x^+)\varphi^+$, a proto formule φ^+ definuje nový druh proměnných, a navíc formule

$$\big((\forall x)[(\exists \mathfrak{x})(\mathfrak{x} = x) \equiv \varphi]\big)^+,$$

tj. formule $(\forall x^+)[(\exists \mathfrak{x}^+)(\mathfrak{x}^+ = x^+) \equiv \varphi^+]$ bude přidána jakožto dodatečný axiom teorie $\boldsymbol{R}'$. Analogickou úvahu proveďte i pro ostatní symboly obohacující jazyk teorie $\boldsymbol{S}$; přitom respektujte, že funkce $\mathfrak{F}^+$ přiřazená funkci $\mathfrak{F}$ jazyka teorie $\boldsymbol{S}'$ musí být definována pro proměnné *všech* druhů proměnných jazyka teorie $\boldsymbol{R}'$.

Předchozího výsledku a faktu, že složení interpretací je interpretace, využijte k prokázání faktu uvedeného v §3, že má-li teorie $\boldsymbol{T}$ interpretaci v teorii $\boldsymbol{S}$ a má-li teorie $\boldsymbol{S}$ interpretaci v teorii $\boldsymbol{R}$, má i teorie $\boldsymbol{T}$ interpretaci v teorii $\boldsymbol{R}$.

9) Prokažte, že zobrazení zobrazující univerzální druh proměnných teorie $\boldsymbol{ZF}$ na proměnné probíhající množiny v teorii $\boldsymbol{GB}$ (což není univerzální druh této teorie) a zobrazující predikáty $\in$ a $=$ na sebe, je interpretací teorie $\boldsymbol{ZF}$ v teorii $\boldsymbol{GB}$. Návod: Při prokazování axiomu nahrazení pro formuli $\varphi(x, y)$ ve smyslu interpretace uvažte funkci $\{\langle y, x\rangle; \varphi\}$, jejíž existence plyne ze schématu existence tříd a na tuto (v obecném případě třídovou) funkci aplikujte axiom nahrazení teorie $\boldsymbol{GB}$.

10) Sestrojte interpretaci $\boldsymbol{ZF}_{\mathrm{Fin}}$ v $\boldsymbol{ZF}$, která má absolutní náležení i rovnost. K tomu účelu:

(a) definujte druh proměnných $x^{\spadesuit}$ jako ty množiny, které jsou dědičně konečné, tj. které jsou prvky tranzitivní množiny, jejíž mohutnost je přirozené číslo, a ukažte, že systém dědičně konečných množin je tranzitivní,

(b) při využití absolutnosti podobně jako v příkladu 3 prokažte nejprve všechny axiomy uvedené ve cv. 31 kap. III kromě indukce.

Indukci prokážeme podrobněji. Předpokládejme, že pro nějakou formuli φ jazyka teorie množin platí

$$\varphi^{\spadesuit}(x^{\spadesuit}/\emptyset) \;\&\; (\forall x^{\spadesuit}, y^{\spadesuit})[\varphi^{\spadesuit} \to \varphi^{\spadesuit}(x^{\spadesuit}/x^{\spadesuit} \cup \{y^{\spadesuit}\})].$$

Definujme množinu přirozených čísel $\alpha \in \omega$, pro která existuje množina $x^{\spadesuit}$ mající mohutnost α a taková, že $\neg\varphi^{\spadesuit}$. K prokázání existence takové množiny ukažte formuli v jazyce teorie $\boldsymbol{ZF}$ (tj. bez definice proměnných druhu $x^{\spadesuit}$), která popisuje touž množinu přirozených čísel (užijte §1 kap. III), pak již stačí užít axiom vydělení pro takto sestrojenou formuli. Existenci nejmenšího přirozeného čísla z právě zkonstruované množiny doveďte ke sporu s využitím jeho předchůdce a předpokládané vlastnosti $\varphi^{\spadesuit} \to \varphi^{\spadesuit}(x^{\spadesuit}/x^{\spadesuit} \cup \{y^{\spadesuit}\})$.

11) Připomeňme, že kardinální číslo nazýváme slabě nedosažitelným, právě když je současně regulární a limitní (zavedeno F. Hausdorffem 1908). Prokažte relativní bezespornost $\boldsymbol{ZF}$ s dodatečným axiomem „neexistuje slabě nedosažitelné kardinální číslo větší než $\aleph_0$“ v teorii $\boldsymbol{ZF}$ s **GCH**. Návod: Fixujte κ jako nejmenší slabě nedosažitelné kardinální číslo větší než $\aleph_0$ (pokud takové neexistuje, není co dokazovat). Definujte objekty druhu $x^{\star}$ jako ty množiny, které jsou dědičně menší mohutnosti než κ, tj. jako ty množiny, které jsou prvky nějaké tranzitivní množiny mohutnosti menší než κ. Predikáty $\in$ a $=$ buďtež absolutní vzhledem k sestrojované interpretaci $\star$. Zcela analogicky jako ve třetím příkladu ukažte, že ve smyslu interpretace $\star$ platí všechny axiomy $\boldsymbol{ZF}$ (pro prokázání platnosti axiomu potence ve smyslu interpretace užijte limitnost κ a **GCH**; pro prokázání platnosti schématu nahrazení ve smyslu interpretace využijte regularitu kardinálního čísla κ; platnost axiomu nekonečna ve smyslu interpretace vyvoďte z předpokladu $\aleph_0 < \kappa$). Nadto ukažte, že vlastnost „být slabě nedosažitelným kardinálním číslem“ je absolutní v interpretaci $\star$, a uvažte, že kardinální číslo κ není objektem ve smyslu interpretace.

12) Formulujte podrobněji interpretaci teorie celých čísel v teorii $\boldsymbol{T}_2$ z druhého příkladu §1 a interpretaci aritmetiky v teorii celých čísel. Nechť $\sharp$ je složení těchto dvou interpretací, tedy $\sharp$ je interpretací teorie $\boldsymbol{T}_2$ v teorii $\boldsymbol{T}_2$. Ukažte, že pro každou uzavřenou formuli jazyka teorie $\boldsymbol{T}_2$ máme $\boldsymbol{T}_2 \vdash \varphi \equiv \varphi^{\sharp}$. Návod: Nejprve každému přirozenému číslu x přiřaďte vhodný $\sharp$-objekt $x^{\sharp}$ a potom indukcí podle složitosti

formule φ prokažte $\boldsymbol{T}_2 \vdash \varphi(x_1, \ldots, x_k) \equiv \varphi^\sharp(x_1^\sharp, \ldots, x_k^\sharp)$ — pro uzavřené formule tak obdržíte žádané.

13) Je-li κ první kardinální číslo, na kterém existuje $\aleph_1$-úplný netriviální ultrafiltr, pak κ je měřitelné kardinální číslo.

Nechť W je $\aleph_1$-úplný ultrafiltr na κ. Buď κ' nejmenší kardinální číslo takové, že existuje posloupnost $\{X_\alpha; \alpha < \kappa'\}$ prvků ultrafiltru W, jejíž průnik již není prvkem ultrafiltru. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\alpha < \beta < \kappa'$ implikuje $X_\beta \subset X_\alpha$. Navíc $\aleph_1 \le \kappa'$; naším cílem je dovést ke sporu předpoklad $\kappa' < \kappa$. Definujme $Y_\alpha = X_\alpha - X_{\alpha+1}$. Na množině $Z = \{Y_\alpha; \alpha < \kappa'\}$ definujte ultrafiltr W' tak, že pro $U \subseteq Z$ je $U \in W'$, právě když sjednocení množiny U je prvkem W. Ověřte postupně:

(a) W' je netriviální. Návod: Užijte, že pro každé $\alpha < \kappa'$ je $X_{\alpha+1} \in W$, pročež

$$\bigcup\{Y_\alpha\} = Y_\alpha \;\&\; Y_\alpha \cap X_{\alpha+1} = \emptyset$$

implikuje $\{Y_\alpha\} \notin W'$.

(b) W' je uzavřený na nadmnožiny.

(c) W' je filtr, a to dokonce $\aleph_1$-úplný. Návod: W je $\aleph_1$-úplný a pro $\{U_\gamma; \gamma < \aleph_1\} \subseteq Z$ získáme

$$\bigcup\big(\bigcap\{U_\gamma; \gamma < \aleph_1\}\big) = \bigcap\{\bigcup U_\gamma; \gamma < \aleph_1\}$$

jako důsledek faktu, že pro různá $\alpha, \beta < \kappa'$ jsou Y_α a Y_β disjunktní.

(d) W' je ultrafiltr. Návod: W je ultrafiltr, $\bigcup\{Y_\alpha; \alpha < \kappa'\} = X_0 \in W$ a současně prvky množiny Z jsou po dvou disjunktní.

Takže W' je netriviálním $\aleph_1$-úplným ultrafiltrem na množině mohutnosti κ'. Předpoklad $\kappa' < \kappa$ by tudíž byl ve sporu s volbou κ jako nejmenšího kardinálního čísla, na němž existuje netriviální $\aleph_1$-úplný ultrafiltr. Ultrafiltr W je proto κ-úplný.

14) Množinu $\{X_{\alpha,\beta}; \alpha < \kappa \;\&\; \beta < \kappa^+\}$ budeme chápat jako matici o κ^+ sloupcích a κ řádcích. Nazýváme ji **Ulamovou maticí,** jestliže

(a) pro každé $\alpha < \kappa$ a pro každá různá $\beta, \beta' < \kappa^+$, jsou množiny $X_{\alpha,\beta}$ a $X_{\alpha,\beta'}$ disjunktní (disjunktnost prvků v α-tém řádku),

(b) pro každé $\beta < \kappa^+$ a pro každá $\alpha, \alpha' < \kappa$, která jsou různá, jsou množiny $X_{\alpha,\beta}$ a $X_{\alpha',\beta}$ disjunktní (disjunktnost prvků v β-tém sloupci),

(c) pro každé $\alpha < \kappa$ jest $\mathfrak{Card}(\kappa^+ - \bigcup\{X_{\alpha,\beta}; \beta < \kappa^+\}) \le \kappa$ (sjednocení α-tého řádku pokrývá téměř celé κ^+),

(d) pro každé $\beta < \kappa^+$ jest $\mathfrak{Card}(\kappa^+ - \bigcup\{X_{\alpha,\beta}; \alpha < \kappa\}) \le \kappa$ (sjednocení β-tého sloupce pokrývá téměř celé κ^+).

Na κ^+ existuje Ulamova matice pro každé kardinální číslo κ (viz [U]).

Při prokazování existence fixujte pro každé γ takové, že $\kappa \le \gamma < \kappa^+$, vzájemně jednoznačné zobrazení F_γ ordinálního čísla κ na γ (mohutnost ordinálního čísla $\gamma < \kappa^+$ je nanejvýš κ, protože κ^+ je následovníkem κ). Pro každé $\alpha < \kappa$ a každé $\beta < \kappa^+$ položme $X_{\alpha,\beta} = \{\gamma; \beta < \gamma \;\&\; F_\gamma(\alpha) = \beta\}$. Ověřte postupně podmínky (a)–(d). Návod: Pro prokázání (a) si uvědomte, že množina F_γ je funkce; při ověření (b) užijte prostotu funkce F_γ; k prokázání (c) užijte, že pro každé γ je definičním oborem funkce F_γ celé kardinální číslo κ a k ukázání (d) nahlédněte, že je-li $\beta < \kappa^+$, je $\beta \in \mathfrak{Rng}(F_\gamma)$ pro každé $\gamma \ge \beta$.

15) Na κ^+ neexistuje netriviální κ^+-úplný ultrafiltr (viz [U]).

Předpokládejme, že W je κ^+-úplný uniformní ultrafiltr na κ^+ (viz cv. 34 kap. V), a budiž $\{X_{\alpha,\beta}; \alpha < \kappa \;\&\; \beta < \kappa^+\}$ Ulamova matice na κ^+. Sjednocení každého sloupce je prvkem ultrafiltru W, protože jeho komplement do κ^+ má mohutnost menší než κ^+. Ve sloupci je κ množin, takže pro každé $\beta < \kappa^+$ existuje v β-tém sloupci množina $X_{\alpha_\beta,\beta}$, která je prvkem ultrafiltru W. Protože κ^+ je regulární kardinální číslo, musí existovat $\gamma < \kappa$ tak, že $\{\beta < \kappa^+; \alpha_\beta = \gamma\}$ má mohutnost κ^+. Množiny Ulamovy matice v kterémkoli řádku jsou však disjunktní, což zapříčiňuje hledaný spor. Prokažte vše, co uvedeno.

16) Každé měřitelné kardinální číslo je slabě nedosažitelné.

Prokazujte postupně:

(a) Přímo z definice singulárního kardinálního čísla odvoďte, že pro každé κ, které je singulární kardinální číslo, a každý W ultrafiltr na κ, který je κ-úplný, je také κ^+-úplný, a uvědomte si, že na κ nemůže existovat netriviální κ^+-úplný ultrafiltr.

(b) Jestliže kardinální číslo není limitní, je tvaru κ^+, ale pak nemůže být měřitelné. Návod: předchozí cvičení.

Poznamenejme, že měřitelné kardinální číslo je dokonce silně nedosažitelné, definici viz např. [B-Š].

17) Na základě předchozího cvičení a cv. 11 prokažte, že existence měřitelného kardinálního čísla není v teorii $\boldsymbol{ZF}$ dokazatelná. Ukažte, že v teorii $\boldsymbol{ZF}$ není dokonce dokazatelná ani existence netriviálního $\aleph_1$-úplného ultrafiltru. Návod: cv. 13.

18) Sestrojte takovou interpretaci Robinsonovy aritmetiky v sobě, že ve smyslu interpretace neplatí komutativita sčítání. Návod: Inspirujte se strukturou $\mathbb{RA}_2$.

REJSTŘÍK VĚCNÝ

abeceda 26
absolutní formule v interpretaci 340
Ackermannova funkce 359
aditivní funkce 283
aktivní stav Turingova stroje 227
aktuální nekonečno 13, 132, 211
α-velká množina 365
alternativa 20
alternující řetězec struktur 295
amalgamace 266, 296
antecedent 29
aritmetika Peanova 13, 171, 186
— Presburgerova 172, 321
— Robinsonova 172, 180
— úplná 121
árnost funkce 58
— predikátu 57
atomická formule 69
— struktura 265
automorfizmus struktury 304
autoreference 217
axiom 21, 33, 34, 81, 84
— distribuce 84
— dvojice 162
— existence množin 165
— extenzionality 162, 165
— fundovanosti 162
— henkinovský 111
— identity 84
— indukce 187
— komutativity 82
— konkretizace 84
— mimologický 81
— nahrazení 165
— nekonečna 162
— potence 162
— predikátového počtu 84
— reflexivity 83
— regularity 162
— rovnosti 84
— sjednocení 162
— slabé antisymetrie 83
— speciální 81
— specifikace 84
— substituce 84
— sumy 162
— teorie 22, 81
— tranzitivity 83
— trichotomie 83
— vlastní 81
— výběru 46
— výrokového počtu 33
axiomatizovatelná teorie 218
— třída struktur 286

Berryho paradox 10
Bethova věta 335
bezesporná teorie 86
bezespornost formule s teorií 256
— množiny formulí s teorií 256
— relativní 315
bezesporný systém formulí 34
bezprostřední důsledek 34, 85
bezzávorková notace 54, 125
booleovská funkce 53

Cantorova věta 169, 243
celé číslo 123
centrovaná množina 277
Craigova interpolační věta 333

částečné vnoření 265
četnost funkce 58
— predikátu 57
čísla nesoudělná 194
číslo celé 123
— kardinální 167
— — limitní 169
— — měřitelné 377, 378
— — regulární 169
— — singulární 169
— — slabě nedosažitelné 270, 377
— ordinální 166
— přirozené v teorii množin 168
— racionální 124
— reálné 308

de Morganova pravidla 49
dedukční pravidlo 21, 33, 84
definice explicitní 335
— implicitní 335
definiční obor 164
Δ_1-formule v teorii 204
dělitelnost 194
demonstrace 15
destruktivní dilema 53
diagonální lemma 174, 217
diagram struktury 249
— — úplný (elementární) 249
— — základní 249
dilema destruktivní 53
— konstruktivní 53
disjunkce 20, 28
disjunkt 30
disjunktivní normální tvar 50

distribuce (axiom) 84
— kvantifikace 97
dobré uspořádání 46, 83, 308
dokazatelná formule 22, 34, 86
dokazatelnost 22, 34, 86
— v predikátovém počtu 86
— ve výrokovém počtu 34
dolní množina 166
druhá věta o neúplnosti 176, 224
druhy proměnných 74, 140
duální forma specifikace 97
důkaz 15, 21, 22, 34, 86
— formule v teorii 86
— rozborem případů 39, 40, 90
— sporem 33, 40, 90
— v teorii 86
— ze systému předpokladů (axiomů) 34
důsledek 29
— bezprostřední 34, 85
— logický 126
— sémantický 82
— tautologický 30
dvojice neuspořádaná 162
— uspořádaná 163

ekvivalence 20, 28
ekvivalentní formule 31, 54, 86
— — v teorii 86
— teorie 91
elementárně ekvivalentní struktury 249
elementární diagram struktury 249
— nadstruktura 249
— podstruktura 249
— řetězec struktur 253
— třída struktur 286, 287
— vnoření 265
existenční formule 108
— kvantifikace 60
— kvantifikátor 60
exkluze 53
expanze struktury 120
explicitní definice 335
extenzionalita 162, 165

faktorizace 115, 279
— struktury 115
filtr 276
— Fréchetův 276
— generovaný množinou 276
— κ-dobrý 282, 283, 288
— κ-úplný 283, 284
— netriviální 276
— regulární 283, 307
— spočetně neúplný 282–284
— triviální 276
— uniformní 283
formalizace 174

formule 19, 27, 69
— absolutní v interpretaci 340
— bezesporná s teorií 256
— dokazatelná 22, 34, 86
— — v teorii 86
— ekvivalentní (výrokově) 31, 54
— — v teorii 86
— existenční 108
— Gödelova 175, 221, 222, 224
— jazyka 69
— nepravdivá při ohodnocení 30, 79
— omezená 186
— otevřená 72
— pravdivá při ohodnocení 30, 79
— — v teorii 82
— predikátového počtu 69
— prvotní 26
— Rosserova 177, 221, 222
— slučitelné 72
— splněná při ohodnocení 30, 79
— splněná ve struktuře 79
— splnitelná 30
— tautologicky odvoditelná z teorie 82
— univerzální 108
— úplná v teorii 256
— určující interpretaci 376
— uzavřená 72
— v prenexním tvaru (formě) 108
— výrokově dokazatelná 86
— výrokového počtu 27
— vyvratitelná 34, 86
— základní (atomická) 60, 69
Fregův zákon 33
Fréchetův filtr 276
fundovanost (axiom) 162
funkce 58, 66, 138
— (množinová) 162
— Ackermanova 359
— aditivní 283
— booleovská 53
— do množiny 162
— monotónní 283
— na množinu 162
— prostá 164
— skolemovská 153
— spojitá na ordinálních číslech 380
funkční symbol 66
fuzzy logika 383

generalizace 85
gentzenovské systémy 24
Gödel-Bernaysova teorie množin 14, 164
Gödelova formule 175, 221, 222, 224
Gödelova věta o neúplnosti (druhá) 176, 224
— — — (první) 175, 222
Goodsteinova věta 349, 350

henkinovská konstanta 111, 113
— — iterovaně příslušná k jazyku 114
— teorie 111, 113
henkinovské rozšíření 113
henkinovský axiom 111
Herbrandova věta 133, 155
herbrandovská varianta 151
hierarchie Schwichtenberg-Wainerova 359
Hilbert-Ackermannova věta 132, 144
Hilbert-Bernaysovy podmínky dokazatelnosti 219
hilbertovské systémy 24
Hilbertův program 171
hlava Turingova stroje 227
hodnota pravdivostní 18
— termu ve struktuře 78
homogenní množina 349
husté uspořádání 83
hypotéza kontinua 248

Churchovo lemma 44

idempotence konjunkce, disjunkce 49
identická interpretace 338
implicitní definice 335
implikace 20
— materiální 29
— oboustranná 20
individuální proměnná 58
individuum nestandardní 121
— struktury 77
indukce 187
indukční krok 187
— předpoklad 187
inkonzistentní systém 34
— teorie 86
instance formule 72
instrukce Turingova stroje 227
interpolační věta 314, 333
interpolant 314, 333
interpretace identická 338
— jazyka v jazyce 336
— — v teorii 337
— teorie v teorii 337
interpretovatelná teorie 339
intuicionistická logika 384
inverze relace 164
izolovaná množina formulí 256
izomorfizmus struktur 120
— v teorii množin 165
izomorfní vnoření 265

jádro formule 108
jazyk 67
jednoduchý výrok 18

k-ární funkce 58
k-ární predikát 57
kalkul predikátový 57
— výrokový 18
kanonická struktura 111, 116
κ-dobrý filtr 282, 283, 288
κ-kategorická teorie 245, 273
κ-saturovaná struktura 265
κ-úplný filtr 283, 284
kardinální číslo 167
— — limitní 169
— — měřitelné 307, 377, 378
— — regulární 169
— — singulární 169
— — slabě nedosažitelné 270, 377
kartézský součin 164
klasická matematická logika 15
klauzule 50
koncové rozšíření struktury 244, 262
konečná množina (v teorii množin) 168
kongruentnost 239
konjunkce 20, 28
konjunkt 30
konjunktivní normální tvar 50
konsekvent 29
konstanta 58, 66, 92, 135
— henkinovská 111, 113, 114
— logická 26
konstrukce formule 27
konstruktivní dilema 53
kontradikce 30
kontrárnost 64
konzervativní rozšíření teorie 91
konzistentní systém formulí 34
— teorie 86
korektnost 43, 109
Kripkeho sémantika 384
krok indukční 187
kvantifikace existenční (malá) 60
— obecná 60
— omezená 186
— univerzální (velká) 60
kvantifikátor 60

Leibnizův princip 86
lemma diagonální (autoreferenční) 217
— Churchovo 44
lexikografické uspořádání 166
limitní kardinální číslo 169
— prvek uspořádání 47
Lindströmova věta 300
lineární uspořádání 83
literál 50
logická konstanta 26
— operace 20
— spojka 20
logický důsledek 126
— symbol 67
logika fuzzy 383

— intuicionistická 384
— matematická 9
— modální 384
— predikátová 57
— symbolická 9
— trojhodnotová 55, 383
— vícehodnotová 383
— výroková 18
Łoś-Vaughtův test 294
Łošova věta 280
Löwenheim-Skolemova věta 243, 251, 252

malá kvantifikace 60
matematická logika 9
materiální implikace 29
matice Ulamova 378
maximo-lexikografické uspořádání 167
megarská škola 11
měřitelné kardinální číslo 307, 377, 378
metamatematika 12, 174
metavěta 15
metoda alternujících řetězců 295
mimologický axiom 81
— symbol 67
minimální model teorie 244, 265
množina α-velká 365
— r-hustá 370
— centrovaná 277
— dolní 166
— formulí bezesporná s teorií 256
— — izolovaná 256
— — pominutá 256, 257
— homogenní 349
— konečná (v teorii množin) 168
— nejvýše spočetná 168
— prázdná 163
— spočetná 168
— tranzitivní 164
modální logika 384
model aritmetiky přirozený 121, 172, 181
— — standardní 121
— kanonický 111, 116
— minimální 244, 265
— nestandardní 121
— teorie 81
— ve výrokovém počtu 30
modelově úplná teorie 246, 297
modus ponendo ponens 34, 53
— — tollens 53
— ponens 33, 53, 84
— tollendo ponens 53
— — tollens 53
mohutnost množiny 167, 248
— struktury 249
monotónní funkce 283

nadstruktura 249
— elementární 249
nahrazení proměnné nebo konstanty 71
— v teorii množin 162
následovník kardinálního čísla 169
— ordinálního čísla 166
— v uspořádání 46
negace 19
nejvýše spočetná množina 168
nekonečně malá veličina 121
nekonečno aktuální 13, 132, 211
— potenciální 13, 132, 211
— v teorii množin 162
nepravdivá formule 30, 79
nesoudělnost 194
nestandardní analýza 122
— individuum 121
— model 121
netriviální filtr 276
neúplnost 172, 175–177, 222, 224
neuspořádaná dvojice 162
nezávislost systému axiomů 92
Nicodova operace 53
normální tvar (forma) formule 50
nosič struktury 77
nosná množina struktury 77
notace polská (prefixní, bezzávorková) 54, 125
nutná podmínka 20

obecná kvantifikace 60
objektová proměnná 58
obor hodnot 164
oboustranná implikace 20
obraz množiny při zobrazení 164
odvoditelnost 31
odvozovací pravidlo 21, 33, 84
ohodnocení splňující formuli 79
— ve struktuře 77
— ve výrokovém počtu 30
omezená formule 186
— kvantifikace 186
operace 20, 58
— logická 20
— Peirceova (Nicodova) 53
— Shefferova 22, 53
ordinální číslo 166
otevřená formule 72
— skolemovská varianta 154
— teorie 144
otevřené jádro formule 108

paradox Berryho 10
— krokodýla 10
— lháře 10
— nestandardních modelů aritmetiky 246
— Russellův 169
— Sancho Panzy 9
— Skolemův 243

parametry 188
parciální vnoření 265
pasivní stav Turingova stroje 227
páska Turingova stroje 227
Peanova aritmetika 13, 171, 186
Peirceova operace 53
platnost ve smyslu interpretace 337
— ve struktuře 79
počet predikátový 11, 57
— výrokový 11, 18
podformule 27, 69
podmínka nutná 20
— nutná a postačující 20
— postačující 20
podmínky dokazatelnosti (Hilbert-Bernaysovy) 219
— Tarského 32
podprotiva 64
podslovo 26
podstatně volná proměnná 72
podstruktura 249
— elementární 249
podterm 68
pokrytí množiny 289
polská notace 54, 125
pominutá množina formulí 256, 257
postačující podmínka 20
Postova věta 44
potence 162
potenciální nekonečno 13, 132, 211
pravdivá formule 30, 79
— — v teorii 82
pravdivostní hodnota 18, 30
— ohodnocení 30
— tabulky 31
— — základní 29
pravidlo de Morganovo 49
— dedukční (odvozovací) 21, 33, 84
— generalizace 85
— modus ponens 33, 84
— nahrazení ve výrokovém počtu 42
— odloučení 34
— rezoluce 54
— řezu 54
prázdná množina 163
predikát 57, 66, 137
predikátová formule 69
— logika 57
predikátový kalkul 57
— počet 11, 57
— symbol 66
prefix 108
prefixní notace 54, 125
premisa 29
— v sylogismu 64
prenexní tvar (forma) formule 108
Presburgerova aritmetika 172, 321
princip dosazení do tautologie 87
— Leibnizův 86
— modus ponens 34, 88
— substituce do tautologie 87
— tranzitivity implikace 37, 88
proměnná 19, 58
— objektová (individuální) 58
— podstatně volná 72
— v predikátovém počtu 58, 66
— vázaná 72
— volná 72
— výroková 19, 26
prostá funkce 164
protiva 64
průnik množin 163
první věta o neúplnosti 172, 222
prvotní formule 26
předpoklad 21, 29, 34
— indukční 187
přirozené číslo v teorii množin 168
přirozený model aritmetiky 121, 172, 181

racionální číslo 124
Ramseyova věta (konečná verze) 348
realizace druhu proměnných 77
— funkce 77
— jazyka 77
— konstanty 77
— predikátu 77
— termu ve struktuře 78
realizovaná množina formulí ve struktuře 256
reálné číslo 308
reductio ad absurdum 33
redukce (redukt) struktury 120
regularita (axiom) 162
regulární filtr 283, 307
— kardinální číslo 169
rekurzivně axiomatizovatelná teorie 218
— saturovaná struktura 305
rekurzivní systém 218
— teorie 171, 218
relace 162
relační symbol 66
relativní bezespornost 315
restrikce relace 164
rezoluce 54
r-hustá množina 370
Robinsonova aritmetika 172, 180
— věta 332
Rosserova formule 177, 221, 222
— věta o neúplnosti 177, 222
rovnost 67, 99
rozhodnutelná teorie 179
rozklad množiny 289
rozšíření henkinovské 113
— koncové 244, 262
— teorie 91
— — konzervativní 91

Russellův paradox 169

řetězec struktur 253
— — alternující 295
— — elementární 253

saturovaná struktura 244, 265, 284
sémantický důsledek 82
sémantika 12
sentence 72
Shefferova operace 22, 53
schéma existence tříd 165
— nahrazení 162
schéma vydělení 164
Schwichtenberg-Wainerova hierarchie 359
Σ_1-formule 187
Σ_1-formule v teorii 204
Σ_1-korektnost teorie 218
Σ_1-systém 218
Σ_1-teorie 218
singulární kardinální číslo 169
sjednocení množin 163
— množiny 162
— řetězce struktur 253
Skolemova věta 133, 159
skolemovská funkce 153
— varianta 153
Skolemův paradox 243
slabě nedosažitelné kardinální číslo 270, 377
slovo 26
složený výrok 18
složky konjunkce, disjunkce 30
slučitelné formule 72
slučování premis 49
součet ordinálních čísel 166
součin kartézský 164
— ordinálních čísel 166
speciální axiom 81
— symbol 67
specifikace (axiom) 84
— (duální forma) 97
splněná formule 30, 79
— formule ve struktuře 79
splnitelná formule 30
— množina formulí ve struktuře 256
— teorie 81
splnitelný systém formulí 30, 256
spočetná množina 168
spočetně neúplný filtr 282–284
spojitá funkce na ordinálních číslech 380
spojka logická 20
— výroková 20
společný dělitel 194
sporná teorie 86
sporný systém formulí 34
standardní model aritmetiky 121
stav Turingova stroje 227
stoicko-megarská škola 11
struktura atomická 265
— kanonická 111, 116
— nestandardní 121
— pro jazyk 78
— rekurzivně saturovaná 305
— saturovaná 244, 265, 284
struktury elementárně ekvivalentní 249
subkontrárnost 64
substituce proměnné nebo konstanty 71
substituovatelnost 72
subsumpce 64
sukcedent 29
suma 162
sylogismus 57, 64
symbol funkční 66
— logický 67
— mimologický 67
— predikátový 66
— speciální 67
symbolická logika 9
syntax 12
systém formulí bezesporný (konzistentní) 34
— — splnitelný 30, 256
— — sporný (inkonzistentní) 34
— rekurzivní 218

tabulky pravdivostních hodnot 31
Tarského podmínky 32
tautologický důsledek 30
tautologicky odvoditelná formule 82
tautologie 30
teorie 81
— Abelových grup 82
— axiomatizovatelná 218
— bezesporná (konzistentní) 86
— diskrétního lineárního uspořádání bez největšího a nejmenšího prvku 295
— ekvivalentní 91
— grup 82
— henkinovská 111, 113
— hustého uspořádání 83
— interpretovatelná 339
— κ-kategorická 245, 273
— lineárního uspořádání 83
— množin Gödel-Bernaysova 14, 164
— — Zermelo-Fraenkelova 13, 162
— — Zermelova 164
— modelově úplná 246, 297
— otevřená 144
— pravdivá ve struktuře 81
— rekurzivně axiomatizovatelná 218
— rekurzivní 171, 218
— rovnosti 82, 329
— rozhodnutelná 179
— splnitelná 81

— sporná (inkonzistentní) 86
— struktury 81
— úplná 62, 111, 114, 171
— uspořádání 83
— výrokově bezesporná (konzistentní) 86
— — sporná (inkonzistentní) 86
term 59, 68
— jazyka 68
— uzavřený 68
terminus 64
tertium non datur 40
test Łoś-Vaughtův 294
testy úplnosti 294
tranzitivita implikace 33
tranzitivní množina 164
triviální filtr 276
trojhodnotová logika 55, 383
třída vlastní 165
třída struktur elementární (axiomatizovatelná) 286, 287
Turingův stroj 227
typ nad teorií 256

Ulamova matice 378
ultrafiltr 276
ultramocnina 278
ultraprodukt 242, 278, 280
uniformní filtr 283
univerzální formule 108
— kvantifikace 60
— kvantifikátor 60
— uzávěr formule 72
univerzum struktury 77
úplná aritmetika 121
— formule v teorii 256
— normální forma formule 50
— teorie 62, 111, 114, 171
úplnost 25, 44, 48, 61, 62, 111, 114, 119, 171
— predikátového počtu 62, 119
— výrokového počtu 25, 44, 48
úplný diagram struktury 249
— normální tvar formule 50
uspořádaná k-tice 163
— dvojice 163
uspořádání 83
— bez největšího prvku 83
— dobré 46, 83, 308
— husté 83
— lexikografické 166
— lineární 83
— maximo-lexikografické 167
uzávěr formule 72, 96
uzavřená formule 72
uzavřený term 68

valuace 30
varianta formule 104
— herbrandovská 151
— skolemovská 153
Vaughtův test 294
vázaná proměnná 72
vázaný výskyt proměnné 72
velká kvantifikace 60
věta 15, 86
— Bethova 335
— Cantorova 169, 243
— Craigova 333
— Gödelova o neúplnosti (druhá) 176, 224
— — — (první) 175, 222
— Gödelova o úplnosti 119
— Goodsteinova 349, 350
— Herbrandova 133, 155
— Hilbert-Ackermannova 132, 144
— Lindströmova 300
— Łośova 280
— Löwenheim-Skolemova 243, 251, 252
— McDowell-Speckerova 262
— o dedukci 35, 88
— o definici druhu proměnných 140
— o definici predikátu 137
— o distribuci kvantifikace 97
— o dualitě 54
— o důkazu rozborem případů 40, 90
— o důkazu sporem 40, 90
— o ekvivalenci 40, 98
— o elementárních třídách struktur 287
— o existenci κ^{+}-dobrého ultrafiltru 288
— o fixaci konstant 135
— o henkinovské konstantě 113
— o henkinovském rozšíření 113
— o interpolaci 314, 333
— o kanonické struktuře 116
— o kompaktnosti 46, 120
— o koncovém rozšíření 262
— o konstantách 92
— o korektnosti 12, 43, 109
— o nahrazení 40
— o neúplnosti (druhá) 176, 224
— — (první) 172, 175, 177, 222
— o neutrální formuli 40, 90
— o normálním tvaru (formě) 50
— o pomíjení typů 243, 257
— o prenexním tvaru 108
— o primitivní rekurzi 206
— o rovnosti 99
— o saturovanosti ultraproduktu 284
— o sjednocení elementárního řetězce struktur 254
— o ultraproduktu (základní) 280
— o úplnosti 12, 44, 48, 119
— o uzávěru 96
— o variantách 104
— o záměně pořadí kvantifikace 103
— — — kvantifikace a disjunkce 102

— — — kvantifikace a implikace 100
— — — kvantifikace a konjunkce 102
— — — kvantifikace a negace 102
— o zavedení funkce 138
— — konstant 135
— o zúplňování teorií 114
— Postova 44
— Ramseyova (konečná verze) 348
— Robinsonova 332
— Rosserova o neúplnosti 177, 222
— Skolemova 133, 159
— teorie 86
vícehodnotová logika 383
vlastní axiom 81
vlastní třída 165
vnoření 265
— částečné 265
— elementární 265
— parciální 265
volná proměnná 72
volný výskyt proměnné 72
výběrová funkce 46, 167
výběrová množina 55
vyloučení kontradikce (sporu) 49
vyplývání 31, 126
výrok 18
— jednoduchý 18
— složený 18
výroková forma 70
— formule 27
— logika 18
— proměnná 19, 26
— spojka 20
— tautologie 30
výrokově bezesporná (konzistentní) teorie 86
— dokazatelná formule 86
— ekvivalentní formule 54
— sporná (inkonzistentní) teorie 86
výrokový atom 26
— kalkul 18
— počet 11, 18
výskyt proměnné 72
vytvářející posloupnost formule 27, 69
— — termu 68
vyvratitelná formule 34, 86
vzájemně jednoznačné zobrazení 164

základní diagram struktury 249
— elementární třída struktur 286, 287
— formule 60, 69
— pravdivostní tabulky 29
— věta o ultraproduktu 280
zákon abstrakce 97
— Dunse Scota 37
— dvojité negace 37
— Fregův 33
— hypotetického sylogismu 33
— idempotence 49
— kontrapozice 33
— partikularizace 97
— slučování premis 49
— totožnosti 35
— transpozice 33, 37
— vyloučeného třetího 40
— vyloučení kontradikce (sporu) 49
závěr 29
Zermelo-Fraenkelova teorie množin 13, 162
Zermelova teorie množin 164
zobecněná hypotéza kontinua 248
zobecněný Fréchetův filtr 276
zobrazení 162
— do množiny 162
— na množinu 162
— vzájemně jednoznačné 164