APLIKACE BOOLEOVSKÝCH MODELŮ

Definice (ZF). Nechť $\preceq$ je uspořádání na množině P. Prvky $p, q \in P$ nazýváme **slučitelné**, platí-li $(\exists r \in P)(r \preceq p \ \&\ r \preceq q)$.

Uspořádání se nazývá **separované**, jestliže pro každé dva prvky z vlastnosti $\neg p \preceq q$ plyne existence prvku $r \preceq p$, který není slučitelný s prvkem q, tj. v symbolech

$$(i) \qquad \neg p \preceq q \rightarrow (\exists r)[r \preceq p \ \&\ (\forall s \in P)\neg(s \preceq r \ \&\ s \preceq q)].$$

Množina $Q \subseteq P$ je **hustá** v P (vzhledem k uspořádání $\preceq$), jestliže

$$(\forall p \in P)(\exists q \in Q)(q \preceq p).$$

Říkáme, že množina $Q \subseteq B - \{\mathfrak{o}\}$ je hustá v Booleově algebře $\mathfrak{B}$, je-li hustá v množině $B - \{\mathfrak{o}\}$ vzhledem k uspořádání $\leq_{\mathfrak{B}}$. □

Věta 1 (ZF). *Je-li $\preceq$ separované uspořádání na množině P, existuje právě jedna (až na izomorfizmus[1]) úplná Booleova algebra $\mathfrak{B}$ s uspořádáním $\leq_{\mathfrak{B}}$, které je nadmnožinou uspořádání $\preceq$, a taková, že P je husté v Booleově algebře $\mathfrak{B}$.*

Demonstrace. Pracujme[2] v Zermelo-Fraenkelově teorii množin. Pro $Q \subseteq P$ definujme pro potřeby tohoto důkazu množinu $\overline{Q}$ rovností

$$\overline{Q} = \{p \in P; (\forall q \preceq p)(\exists r \preceq q)(r \in Q)\},$$

tj. jako množinu těch p, „na nichž je Q hustá". Přímo z definice je zřejmé, že pro libovolné $p \in P$ a pro každé $Q, R \subseteq P$ je současně:

(a) $Q \subseteq R \rightarrow \overline{Q} \subseteq \overline{R}$,

(b) $\overline{Q}$ je dolní množinou (vzhledem k uspořádání $\preceq$)[3], a nadto je-li Q dolní množinou, pak $Q \subseteq \overline{Q}$,

(c) $\overline{\overline{Q}} = \overline{Q}$,

(d) $\overline{\{r; r \preceq p\}} = \{r; r \preceq p\}$ (využijeme předpokladu separovanosti).

B budiž množina všech $Q \subseteq P$ takových, že $Q = \overline{Q}$ a jako uspořádání na B uvažujme inkluzi. Nejmenším prvkem množiny B v inkluzi (a tedy $\mathfrak{o}$ sestrojované

---

[1] Podrobněji: až na izomorfizmus univerza jedné Booleovy algebry na univerzum druhé Booleovy algebry vzhledem k příslušným uspořádáním na jednotlivých Booleových algebrách.

[2] Srovnejte následující důkaz s důkazem věty o zúplňování uspořádání (Mac Neille), viz např. 5.24 §5 kap. I [B-Š].

[3] Množina Q je ***dolní*** množinou vzhledem k uspořádání $\preceq$, jestliže $(\forall p \in Q)(\forall q)(q \preceq p \rightarrow q \in Q)$.

Booleovy algebry) je prázdná množina (rovnost $\overline{\emptyset} = \emptyset$ je evidentní). Označme symbolem P' množinu všech $\{r; r \preceq p\}$, kde $p \in P$. Prvky B jsou dolní množiny vzhledem k uspořádání $\preceq$; na základě tohoto pozorování dále nahlédněme, že P' je hustá v $B - \{\emptyset\}$ (neboť $p \in Q \in B \to \{r; r \preceq p\} \subseteq Q$)). Triviálně $\{r; r \preceq p\} \subseteq \{r; r \preceq q\} \equiv p \preceq q$, pročež zobrazení přiřazující prvku p množiny P množinu $\{r; r \preceq p\}$, je izomorfizmem množin P a P' vzhledem k uspořádání $\preceq$ a vzhledem k inkluzi.

Uvědomme si, že průnik *jakékoli* neprázdné podmnožiny A množiny B je opět prvkem B (a je tudíž infimem v uspořádání zadaném inkluzí). Při prokazování nahlédněme, že $\overline{\bigcap A} \subseteq \overline{Q} = Q$ pro každé $Q \in A$, takže $\overline{\bigcap A} = \bigcap A$.

Pro sjednocení však analogické tvrzení obecně neplatí[4]. Nicméně supremum existuje vždy — supremem množiny $A \subseteq B$ v uspořádání daném inkluzí na množině B je samozřejmě množina $\overline{\bigcup A}$. Jedná se tudíž o *úplný* svaz.

K prokázání existence hledané Booleovy algebry nám tedy zbývá „pouze“ definovat Booleovské operace na B, a to tak, aby uspořádání získané běžnou definicí na základě průseku korespondovalo s uspořádáním zadaným inkluzí na množině B.

Pro $Q, Q_1, Q_2 \in B$ položíme $Q_1 \wedge Q_2 = Q_1 \cap Q_2$, $Q_1 \vee Q_2 = \overline{Q_1 \cup Q_2}$ a dále

$$-Q = \{p \in P; (\forall q \preceq p)(q \notin Q)\}.$$

Abychom ukázali korektnost uvedených definic, je potřeba jenom prokázat implikaci $Q \in B \to -Q \in B$, tj. $\overline{-Q} = -Q$. Jestliže však $p \notin -Q$, pak existuje $q \preceq p$ takové, že $q \in Q$. Pro toto q již nemůže existovat $r \preceq q$ s vlastností $r \in -Q$, protože $r \preceq q \in Q \to r \in Q$ plyne z faktu, že Q je dolní množina vzhledem k uspořádání $\preceq$. Pročež jsme ukázali $p \notin -Q \to p \notin \overline{-Q}$, druhá inkluze je triviální.

Množinu P prohlásíme za $\mathbf{1}$ sestrojované Booleovy algebry.

Zcela triviálně pro $Q_1, Q_2 \subseteq P$ máme $Q_1 \subseteq Q_2 \equiv Q_1 \cap Q_2 = Q_1$, takže uspořádání na univerzu B sestrojované Booleovy algebry vzniklé pomocí výše zavedené operace průseku souhlasí s inkluzí na B. Musíme ověřit, že jsme skutečně vytvořili Booleovu algebru, ale po takovémto ověření, již budeme automaticky vědět, že jsme vytvořili *úplnou* Booleovu algebru.

Prokázání komutativity operací $\wedge, \vee$ a neutrality $\mathbf{0}$ a $\mathbf{1}$, jakožto zcela evidentních faktů, je ponecháno čtenáři. Rovněž rovnost $Q \cap -Q = \emptyset$ plyne přímo z definice a její reformulací obdržíme $Q \wedge -Q = \mathbf{0}$. Dále potřebujeme ukázat $Q \in B \to \overline{Q \cup -Q} = P$ (je dobré si povšimnout, že není vyžadována dokazatelnost vztahu $Q \cup -Q = P$). Pro jakékoli $Q \in B$ je však podle definice $Q = \overline{Q}$.

[4] Uvažte jednoduché uspořádání $\preceq$ na trojbodové množině $\{a, b, c\}$, ve kterém prvky a, b jsou navzájem nesrovnatelné a oba jsou menší než c. Pro toto uspořádání je $\overline{\{a\}} = \{a\}$ $(= \{r; r \preceq a\})$ a současně $\overline{\{b\}} = \{b\}$, avšak $\overline{\{a\} \cup \{b\}} = \overline{\{a, b\}} = \{a, b, c\} \neq \overline{\{a\}} \cup \overline{\{b\}}$.

Proto není-li $p \in Q$, musí existovat $q \preceq p$ takové, že $(\forall r \preceq q)(r \notin Q)$, a podle definice je tudíž $q \in -Q$. Ukázali jsme tedy, že pro každé $p \in P$ existuje $q \preceq p \,\&\, q \in (Q \cup -Q)$.

Přistupme nyní k dokazování distributivity a buďte R, Q_1, Q_2 prvky naší Booleovy algebry. Nejprve prokazujme

$$R \cap \overline{(Q_1 \cup Q_2)} = \overline{(R \cap Q_1) \cup (R \cap Q_2)}.$$

Je-li $p \in R \cap \overline{(Q_1 \cup Q_2)}$ je nutně $p \in R$ a současně $(\forall q \preceq p)(\exists r \preceq q)(r \in Q_1 \cup Q_2)$. Z faktu, že R je dolní množinou získáme dále

$$(\forall q \preceq p)(\exists r \preceq q)(r \in R \cap (Q_1 \cup Q_2) = (R \cap Q_1) \cup (R \cap Q_2)),$$

tj. $p \in \overline{(R \cap Q_1) \cup (R \cap Q_2)}$.

Předpokládáme-li naopak

$$(\forall q \preceq p)(\exists r \preceq q)(r \in (R \cap Q_1) \cup (R \cap Q_2)),$$

triviálně obdržíme $(\forall q \preceq p)(\exists r \preceq q)(r \in Q_1 \cup Q_2)$, tj. $p \in \overline{Q_1 \cup Q_2}$. Nadto však z uvedeného předpokladu obdržíme také $(\forall q \preceq p)(\exists r \preceq q)(r \in R)$, což přináší $p \in \overline{R} = R$.

Dokázat druhou distributivitu znamená ověřit vztah

$$\overline{R \cup (Q_1 \cap Q_2)} = \overline{(R \cup Q_1)} \cap \overline{(R \cup Q_2)}.$$

Jestliže $(\forall q \preceq p)(\exists r \preceq q)(r \in R \cup (Q_1 \cap Q_2) = (R \cup Q_1) \cap (R \cup Q_2))$, získáme zcela jednoduše $(\forall q \preceq p)(\exists r_1 \preceq q)(\exists r_2 \preceq q)(r_1 \in (R \cup Q_1) \,\&\, r_2 \in (R \cup Q_2))$. Prokázali jsme tedy triviálně, že množina na levé straně dokazované rovnosti je podmnožinou množiny vyskytující se na straně pravé téže rovnosti.

Buď tudíž

$$p \in \overline{(R \cup Q_1)} \cap \overline{(R \cup Q_2)}.$$

Pro každé $q \preceq p$ jsme za těchto okolností zcela jistě schopni zvolit $r_1 \preceq q$ takové, že $r_1 \in R \cup Q_1$. Dále zvolíme $r_2 \preceq r_1$ takové, že $r_2 \in R \cup Q_2$. Pokud $r_2 \notin R$, nemůže být ani $r_1 \in R$, protože R je dolní množinou uspořádání $\preceq$. V takovém případě je $r_1 \in Q_1$ a následně $r_2 \in Q_1$, neboť rovněž Q_1 je dolní množinou. V každém případě je $r_2 \in R \cup (Q_1 \cap Q_2)$.

K dokončení celého důkazu potřebujeme ještě prokázat jednoznačnost, tj. existenci příslušného izomorfizmu. Jsou-li $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ dvě Booleovy algebry (s uspořádáními $\leq_{\mathcal{B}_1}, \leq_{\mathcal{B}_2}$), ve kterých je množina P hustá, pak sobě navzájem přiřadíme takové prvky $u_1 \in B_1$ a $u_2 \in B_2$, pro které $(\forall q \in P)(q \leq_{\mathcal{B}_1} u_1 \equiv q \leq_{\mathcal{B}_2} u_2)$. Libovolné $u \in B_i$ je supremem množiny $\{p \in P; p \leq_{\mathcal{B}_i} u\}$ v algebře $\mathcal{B}_i$ (pro $\mathbf{i = 1, 2}$), neboť předpokládáme hustotu množiny P v Booleově algebře $\mathcal{B}_i$. Takže popsané zobrazení je vzájemně jednoznačné zobrazení B_1 na B_2, které respektuje uspořádání algeber (opětovně z důvodu hustoty P). ∎

Značení. Úplnou Booleovu algebru sestrojenou podle předchozí věty k separovanému uspořádání $\preceq$ budeme značit $\mathfrak{B}(\preceq)$.

Poznamenejme, že prvky separovaného uspořádání $\preceq$ jsou neslučitelné, právě když jsou disjunktní v uspořádání na Booleově algebře $\mathfrak{B}(\preceq)$.

*

Pro aplikace cohenovských rozšíření je poměrně příznačné, že se sestrojují množiny „podmínek“, tedy jakási částečná uspořádání. Přitom vlastnosti podmínek korespondují s vlastnostmi množin, které chceme pomocí Booleovských modelů přidat. Níže uvedené příklady vysvětlí, co je míněno touto zatím nepříliš konkrétní formulací. Teprve následně je k uspořádání podmínek sestrojena příslušná Booleova algebra, a to pomocí předchozí věty. Pokud přistoupíme na stanovisko, že intuitivnější je systém podmínek, nahlédneme výhodnost definic popisujících vlastnosti uspořádání a nikoli pouze vlastnosti Booleových algeber. Často se — ale až následně — tyto vlastnosti (viz např. vlastnost κ-c.c. popsanou níže) přenesou na Booleovy algebry sestrojené za pomoci předešlé věty. Takovýto přenos bývá většinou automatický, protože přenášíme vlastnost *husté* podmnožiny Booleovy algebry na celou algebru (přesněji na celou algebru s vynechaným prvkem $\mathbf{0}$).

V dalším vybíráme dva charakteristické příklady konstrukce Booleovských modelů. V obou případech ukážeme poměrně silné výsledky dosažené při podrobnějším vyšetřování metody cohenovských rozšíření, a nebudeme se zatěžovat zkoumáním toho, jak dalece jsou výsledky toho kterého typu předznamenány v prvotních fázích vývoje metody cohenovských rozšíření (např. již přímo v článcích P. Cohena samotného). Druhý příklad ukazuje možnost porušení hypotézy kontinua a reprezentuje tudíž směr hlavní motivace Booleovských modelů. První příklad ukazuje možnost kolapsu kardinálního čísla (tj. přidání zobrazení tohoto kardinálního čísla na kardinální číslo menší). V prvém případě tedy zkoumané kardinální číslo zůstane číslem ordinálním i ve zvětšeném modelu, ale přestane být číslem kardinálním. Pořadí příkladů respektuje autorovu představu, že množina podmínek použitá v prvém příkladu je trochu lépe motivovatelná než množina podmínek pro druhý příklad.

Uvedli jsme, že popsané výsledky budou poměrně silné — ve výsledných modelech budeme zaručovat pravdivost ještě dalších tvrzení. V prvém případě se budeme snažit, aby přes kolaps kardinálu byla zachována zobecněná hypotéza kontinua. Tím bude speciálně prokázáno, že **GCH** může platit i v případě, že neplatí axiom konstruovatelnosti.

Ve druhém případě budeme zkoumat dvojici nekonečných kardinálních čísel $\kappa \in \lambda$ a snažit se, aby nastalo $2^\kappa = \lambda$ (tj. aby mohutnost množiny všech podmnožin κ měla mohutnost λ) při zachování všech kardinálních čísel a dokonce i při zachování všech kofinálů kardinálních čísel. Hlavním dodatečným požadavkem však bude, aby pro všechna kardinální čísla menší než κ a současně pro všechna kardinální čísla větší nebo rovna λ byla zachována hypotéza kontinua. Pro splnění tohoto dodatečného požadavku budeme potřebovat při naší konstrukci předpoklad, že κ je regulárním kardinálním číslem[5)].

Zastavme se nyní na okamžik u otázky, zda potřeba regularity κ je vyvolána pouze způsobem konstrukce a nebo zda jde o požadavek, který je nutný. Jinými slovy zkoumejme konzistenci Zermelo-Fraenkelovy teorie množin s dodatečnými axiomy „κ je singulární kardinální číslo, $\kappa^+ \in 2^\kappa$ a pro každé kardinální číslo $\mu \in \kappa$ je $2^\mu = \mu^+$“. Předpokládáme-li navíc $\aleph_0 \in \mathfrak{cf}(\kappa)$, je již uvedená teorie sporná (viz např. 5.24 kap. II [B-Š]). (Poznamenejme však, že jistý předpoklad existence velkých kardinálů zaručí bezespornost uvedené teorie pro $\mathfrak{cf}(\kappa) = \aleph_0$). Závěrem je tedy možno konstatovat, že předpoklad regularity κ je vynucený formulací teorie, jejíž model konstruujeme, a nikoli konstrukcí samotnou.

Sestrojíme nyní dva systémy podmínek, tj. dvě uspořádané množiny. Budeme zkoumat jejich vlastnosti (a vlastnosti Booleových algeber, které jim přísluší podle první věty). Poté prozkoumáme, jak ovlivní takovéto vlastnosti Booleových algeber jim odpovídající Booleovské modely, a teprve na závěr — jako happy end — zformulujeme věty vyjadřující prokázané konzistence. Námi zvolený postup snad čtenáři předvede hned po nadefinování určitých vlastností uspořádání praktické příklady uspořádání, které mají tu kterou vlastnost. Pokud čtenář chce znát výsledky, ke kterým směřujeme, nechť pohlédne již nyní na znění vět 2 a 3.

*

Pro definici prvního systému podmínek $P_\mathbf{1}$ budeme uvažovat dvě nekonečná kardinální čísla $\kappa \in \lambda$ jakožto parametry a podmínky budou ty prosté funkce zobrazující podmnožiny κ do λ, jejichž definiční obor má *mohutnost menší* než κ, tj. položíme

$$P_\mathbf{1} = \{p; \mathcal{F}nc(p) \,\&\, \mathcal{F}nc(p^{-1}) \,\&\, \mathfrak{Card}(\mathfrak{Dom}(p)) \in \kappa \,\&\, \mathfrak{Dom}(p) \subseteq \kappa \,\&\, \mathfrak{Rng}(p) \subseteq \lambda\}.$$

Jako uspořádání $\preceq_\mathbf{1}$ budeme uvažovat *obrácenou* inkluzi na systému podmínek $P_\mathbf{1}$, neboli definujeme

$$p \preceq_\mathbf{1} q \equiv (p, q \in P_\mathbf{1} \;\&\; q \subseteq p).$$

Právě popsané uspořádání je separované: předpoklad $\neg p \preceq_\mathbf{1} q$, tj. $\neg q \subseteq p$, zaručuje existenci $\alpha \in \kappa$ a $\beta \in \lambda$ takových, že $\langle \beta, \alpha \rangle \in q \;\&\; \langle \beta, \alpha \rangle \notin p$; je-li $\alpha \in \mathfrak{Dom}(p)$,

---

5) Nekonečné kardinální číslo κ je nazýváno *regulárním*, jestliže pro každé sjednocení méně než κ množin, z nichž každá má mohutnost menší než κ, má toto sjednocení mohutnost menší než κ — v symbolech

$$(\forall x)[(\mathfrak{Card}(x) \in \kappa \;\&\; (\forall y \in x)(\mathfrak{Card}(y) \in \kappa)) \rightarrow \mathfrak{Card}(\bigcup x) \in \kappa].$$

Kardinální číslo, které není regulární, se nazývá *singulární*.

Ke každému kardinálnímu číslu existuje jeho následovník, tj. nejmenší kardinální číslo ostře větší. Následovníka kardinálního čísla κ označujeme symbolem κ^+.

Kofinálem kardinálního čísla κ (znak $\mathfrak{cf}(\kappa)$) rozumíme nejmenší kardinální číslo $\kappa' \,\underline{\in}\, \kappa$ takové, že existuje množina $x \subseteq \kappa$ mohutnosti κ', která je kofinální v κ, tj. která má vlastnost $(\forall \alpha \in \kappa)(\exists \beta \in x)(\alpha \,\underline{\in}\, \beta)$.

položíme $\gamma = p(\alpha)$, není-li $\alpha \in \mathfrak{Dom}(p)$, zvolíme $\gamma \neq \beta$ & $\gamma \in \lambda - \mathfrak{Rng}(p)$ a položíme $r = p \cup \{\langle \gamma, \alpha \rangle\}$; v obou případech $p \subseteq r$, tj. $r \preceq_{\mathbf{1}} p$, a navíc $\neg(\exists r')(\mathcal{F}nc(r')$ & $r \cup q \subseteq r')$, pročež r a q jsou neslučitelné.

Booleovu algebru příslušnou uspořádání $\preceq_{\mathbf{1}}$ na prvém systému podmínek označíme $\mathcal{B}_{\mathbf{1}}$, tzn. položíme $\mathcal{B}_{\mathbf{1}} = \mathcal{B}(\preceq_{\mathbf{1}})$. Čtenář by si měl v tomto okamžiku uvědomit přirozenost definice systému podmínek, protože chceme přidat novou funkci zobrazující vzájemně jednoznačně κ na λ, a je proto přirozené definovat podmínky jako části takovéhoto zobrazení. Další zkoumání prokáží, že nově přidané zobrazení bude zobrazením *na* λ (ve smyslu modelu $\mathbb{M}[\mathbf{G}]$). Booleova algebra $\mathcal{B}(\preceq_{\mathbf{1}})$ bývá nazývána (κ, λ)-**kolapsující** algebrou[6)].

Rovněž druhý systém podmínek $P_{\mathbf{2}}$ závisí na dvou parametrech $\kappa \in \lambda$, které jsou nekonečnými kardinálními čísly, avšak podmínky jsou v tomto druhém případě ty funkce zobrazující podmnožiny $\kappa \times \lambda$ do dvouprvkové množiny $\{0, 1\}$, jejichž definiční obor je množina *mohutnosti menší* než κ, tj. položíme

$$P_{\mathbf{2}} = \{p; \mathcal{F}nc(p) \;\&\; \mathfrak{Dom}(p) \subseteq \kappa \times \lambda \;\&\; \mathfrak{Card}(\mathfrak{Dom}(p)) \in \kappa \;\&\; \mathfrak{Rng}(p) \subseteq \{0, 1\}\}.$$

Uspořádání $\preceq_{\mathbf{2}}$ opět definujeme *obrácenou* inkluzí na systému podmínek, neboli položíme

$$p \preceq_{\mathbf{2}} q \equiv (p, q \in P_{\mathbf{2}} \;\&\; q \subseteq p).$$

Analogicky jako v předchozím případě nahlédneme, že uspořádání $\preceq_{\mathbf{2}}$ je separované, a následně definujeme Booleovu algebru $\mathcal{B}_{\mathbf{2}}$ vztahem $\mathcal{B}_{\mathbf{2}} = \mathcal{B}(\preceq_{\mathbf{2}})$. Nyní již sice není intuice tak přímočará jako v předchozím případě, avšak i teď je možno jednoduše motivovat způsob výběru podmínek. K tomuto cíli si nejprve uvědomme, že místo podmnožiny y množiny κ můžeme uvažovat charakteristickou funkci podmnožiny y, tj. funkci f s vlastnostmi

$$\mathfrak{Dom}(f) = \kappa \;\&\; \mathfrak{Rng}(f) = \{0, 1\} \;\&\; (\forall x \in \kappa)(f(x) = 1 \equiv x \in y).$$

Přidat novou podmnožinu tedy znamená přidat novou charakteristickou funkci. Tím je osvětlen jak význam prvního argumentu každé jednotlivé podmínky, tak také volba dvouprvkové množiny $\{0, 1\}$ jako oboru hodnot funkcí připuštěných jako podmínky. Nevystačíme však s přidáním jediné charakteristické funkce, takovýchto nových charakteristických funkcí musí být λ, a druhý argument v každé

[6)] Uvedená množina podmínek je zajímavá i z jiného pohledu. Pro regulární kardinální číslo κ bychom mohli také definovat $P'_{\mathbf{1}}$ jako množinu prostých funkcí zobrazujících $\alpha \in \kappa$ do λ, tj. položit

$$P'_{\mathbf{1}} = \{f; \mathcal{F}nc(f) \;\&\; \mathcal{F}nc(f^{-1}) \;\&\; \mathfrak{Dom}(f) \in \kappa \;\&\; \mathfrak{Rng}(f) \subseteq \lambda\}$$

a opětovně definovat uspořádání na takovéto množině podmínek obrácenou inkluzí. Množiny $P_{\mathbf{1}}$ a $P'_{\mathbf{1}}$ jsou zcela jistě různé, avšak Booleovy algebry vzniklé pomocí první věty na základě popsaných uspořádání jsou izomorfní. K nahlédnutí tohoto faktu si postačí uvědomit, že $P'_{\mathbf{1}}$ je hustá v množině $P_{\mathbf{1}}$ (neboť κ je regulární), je proto hustou i v Booleově algebře $\mathcal{B}(\preceq_{\mathbf{1}})$, a použít jednoznačnosti zaručené první větou.

jednotlivé podmínce má popsat, o kterou nově přidávanou charakteristickou funkci se jedná. Při podrobnějším prověřování vlastností výsledného modelu budeme muset pochopitelně prokázat, že charakteristické funkce příslušející dvěma různým druhým argumentům jsou od sebe různé ve smyslu výsledného modelu.

Definice ($\boldsymbol{ZF}$). Buď κ kardinální číslo.

Uspořádání $\preceq$ na množině P splňuje **podmínku κ-řetězců**[7] (κ-chain condition, zkráceně κ-c.c.), jestliže každá množina po dvou neslučitelných prvků množiny P má mohutnost *menší* než κ. Místo soustavy znaků $\aleph_1$-c.c. se používá posloupnost symbolů c.c.c. (countable chain condition).

Jestliže pro každou posloupnost $\{p_\alpha; \alpha \in \kappa\}$ prvků množiny P zaručuje vlastnost $(\forall\alpha \in \kappa)(\forall\beta \in \alpha)(p_\alpha \preceq p_\beta)$ existenci prvku $p \in P$ takového, že $(\forall\alpha \in \kappa)(p \preceq p_\alpha)$, pak budeme říkat, že uspořádání $\preceq$ na množině P má **vlastnost κ-minorant**. □

Již jsme poznamenali, že vlastnost κ-c.c. uspořádání $\preceq$ zaručuje vlastnost κ-c.c. uspořádání $\leq_{\mathcal{B}}$ omezeného na dvojice nenulových prvků Booleovy algebry $\mathcal{B}(\preceq)$. Navíc přímo z definice plyne, že splňuje-li uspořádání $\preceq$ podmínku κ-c.c. a je-li $\kappa \in \lambda$, je uspořádání $\preceq$ také λ-c.c. Tento triviální fakt budeme v dalším používat bez jakéhokoli citování.

Za předpokladu *regularity kardinálního čísla* κ je zcela evidentní, že obě výše definovaná uspořádání $\preceq_1$ a $\preceq_2$ (závisející na parametru κ) mají vlastnost κ'-minorant pro jakékoli $\kappa' \in \kappa$ (avšak již nemají vlastnost κ-minorant).

Následující dvě lemmata ukazují, že vlastnosti Booleových algeber, na nichž je uvažován $\mathbb{M}$-generický ultrafiltr, ovlivňují chování modelu $\mathbb{M}[\mathbf{G}]$.

Lemma 1. *Nechť* $\mathbb{M} \models \boldsymbol{ZF}, \mathbf{AC}$,„$\preceq$ *má vlastnost* $\boldsymbol{\kappa}$*-minorant*“[8] *a nechť* $\mathbf{G}$ *je* $\mathbb{M}$*-generický ultrafiltr na individuu* $\mathcal{B}$, *pro které* $\mathbb{M} \models \mathcal{B} = \mathcal{B}(\preceq)$. *Pak pro každé* $\mathsf{x} \in \mathsf{M}[\mathsf{G}]$, *které splňuje* $\mathsf{x} \subseteq \boldsymbol{\kappa}$, *je* $\mathsf{x} \in \mathsf{M}$. *Obecněji pro každou funkci* $\mathsf{f} \in \mathsf{M}[\mathsf{G}]$, *která splňuje jednak* $\mathbf{dom}(\mathsf{f}) \subseteq \boldsymbol{\kappa}$ *a jednak* $\mathbf{rng}(\mathsf{f}) \subseteq \mathsf{M}$, *je* $\mathsf{f} \in \mathsf{M}$.

[7] Vlastně se jedná o anti-řetězec, protože prvky jsou neslučitelné.

[8] Uvědomme si, že $\boldsymbol{\kappa}$ je kardinálním číslem ve smyslu modelu $\mathbb{M}$. Naprosto není zaručeno, že je skutečným kardinálním číslem; z trazitivnosti modelu $\mathbb{M}$ můžeme odvodit pouze absolutnost pojmu ordinálního čísla. Je třeba také zkoumat absolutnost definice Booleovy algebry $\mathcal{B}$. Individuum $\preceq$ je uspořádáním jak ve smyslu modelu $\mathbb{M}$, tak také ve skutečnosti. Individuum $\mathcal{B}$ je úplnou Booleovou algebrou ve smyslu modelu $\mathbb{M}$ sestrojenou k uspořádání $\preceq$ podle první věty tohoto paragrafu. Tato Booleova algebra ve smyslu modelu je následně také Booleovou algebrou ve skutečnosti, avšak již naprosto nemusí být *úplnou* Booleovou algebrou v celkovém metamatematickém rámci.
Připomeňme úmluvu z předchozího paragrafu, že $\mathbb{M} = \langle \mathsf{M}, \{\langle \mathsf{x}, \mathsf{y}\rangle; \mathsf{x} \in \mathsf{y}$ a současně $\mathsf{x}, \mathsf{y} \in \mathsf{M}\}\rangle$ je modelem teorie $\boldsymbol{ZF}$, jehož univerzum M je spočetnou tranzitivní množinou.

Demonstrace. Buď $\leq_{\mathcal{B}}$ individuum modelu $\mathbb{M}$, takové, že $\mathbb{M} \models$ „$\leq_{\mathcal{B}}$ je uspořádání na Booleově algebře $\mathcal{B}(\preceq)$“.

Uvnitř modelu $\mathbb{M}$ platí, že jsou-li $\{D_\alpha; \alpha \in \boldsymbol{\kappa}\}$ části množiny $P = \mathfrak{Dom}(\preceq)$, které jsou současně dolními množinami a jsou husté v množině P (vzhledem k $\preceq$), pak $\bigcap\{D_\alpha; \alpha \in \boldsymbol{\kappa}\}$ je (dolní) množinou hustou v množině P. Pro libovolné $q \in P$ jsme totiž rekurzí schopni sestrojit posloupnost $\{p_\alpha; \alpha \in \boldsymbol{\kappa}\}$ takovou, že

$$(ii) \qquad p_{\boldsymbol{0}} \preceq q \ \& \ (\forall \alpha \in \boldsymbol{\kappa})[p_\alpha \in D_\alpha \ \& \ (\forall \beta \in \alpha)(p_\alpha \preceq p_\beta)].$$

(Při konstrukci p_α pro $\alpha \in \boldsymbol{\kappa}$ využijme vlastnosti $\boldsymbol{\kappa}$-minorant k získání q' takového, že $(\forall \beta \in \alpha)(q' \preceq p_\beta)$ a z hustoty množiny D_α následně vyvoďme existenci q'', které má posledně uvedenou vlastnost a nadto je prvkem množiny D_α; užijme axiomu výběru k fixaci jednoho takového prvku jakožto množiny p_α.) Po dokončení konstrukce posloupnosti s vlastností (ii) použijeme opět vlastnosti $\boldsymbol{\kappa}$-minorant k prokázání existence p takového, že $(\forall \alpha \in \boldsymbol{\kappa})(p \preceq p_\alpha)$. Pro toto p je nutně $p \preceq p_{\boldsymbol{0}} \preceq q$, a navíc $p \in \bigcap\{D_\alpha; \alpha \in \boldsymbol{\kappa}\}$ v důsledku předpokladu, že $\{D_\alpha; \alpha \in \boldsymbol{\kappa}\}$ jsou dolní množiny.

Předpokládejme, že funkce f je nějakým individuem modelu $\mathbb{M}[\mathbf{G}]$ s vlastností $\mathbf{dom}(\mathsf{f}) \subsetneq \boldsymbol{\kappa}$ a současně s vlastností $\mathbf{rng}(\mathsf{f}) \subsetneq \mathbf{M}$. Pak můžeme zvolit $\mathsf{g} \in \mathbb{M}^{\mathcal{B}}$ takové, že $\mathbf{i_G}(\mathsf{g}) = \mathsf{f}$.

Definujme $\boldsymbol{w} \in B$ rovností[9]

$$\boldsymbol{w} = \|\mathcal{F}nc(\mathsf{g}) \ \& \ (\forall \boldsymbol{h}, \boldsymbol{h_1}, \boldsymbol{h_2})[(\vartheta_{op}(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h_1}, \boldsymbol{h_2}) \ \& \ \boldsymbol{h} \in \mathsf{g}) \rightarrow \boldsymbol{h_2} \in \breve{\kappa}]\|^{\mathbb{M}}.$$

Protože předpokládáme, že f je funkcí takovou, že $\mathbf{dom}(\mathsf{f}) \subsetneq \boldsymbol{\kappa}$, dostáváme podle třetí věty předchozího paragrafu $\boldsymbol{w} \in \mathbf{G}$.

Ve smyslu modelu $\mathbb{M}$ definujme pro každé $\alpha \in \boldsymbol{\kappa}$

$$\begin{aligned} B_\alpha = \{p \in P; \, & p \leq_{\mathcal{B}} \boldsymbol{w} \ \& \ (\forall \boldsymbol{h}, \boldsymbol{h_1})(p \leq_{\mathcal{B}} -\|\vartheta_{op}(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h_1}, \breve{\alpha}) \ \& \ \boldsymbol{h} \in \mathsf{g}\|) \ \vee \\ & \vee \ p \leq_{\mathcal{B}} \boldsymbol{w} \ \& \ (\exists \boldsymbol{h}, x)(p \leq_{\mathcal{B}} \|\vartheta_{op}(\boldsymbol{h}, \breve{x}, \breve{\alpha}) \ \& \ \boldsymbol{h} \in \mathsf{g}\|)\}, \\ C_\alpha = \{p \in P; \, & p \leq_{\mathcal{B}} -\boldsymbol{w} \ \vee \\ & \vee \ p \leq_{\mathcal{B}} \boldsymbol{w} \ \& \ (\exists \boldsymbol{h}, \boldsymbol{h_1})(p \leq_{\mathcal{B}} \|\vartheta_{op}(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h_1}, \breve{\alpha}) \ \& \ \boldsymbol{h} \in \mathsf{g}\|) \ \& \\ & \& \ (\forall q \leq_{\mathcal{B}} p) \neg (\exists \boldsymbol{h}', x)(q \leq_{\mathcal{B}} \|\vartheta_{op}(\boldsymbol{h}', \breve{x}, \breve{\alpha}) \ \& \ \boldsymbol{h}' \in \mathsf{g}\|)\} \\ D_\alpha = B_\alpha & \cup C_\alpha. \end{aligned}$$

Ve smyslu modelu $\mathbb{M}$ je evidentně D_α hustá dolní množina pro každé $\alpha \in \boldsymbol{\kappa}$. Předpokládaná genericita ultrafiltru $\mathbf{G}$ a dokázaná hustota množiny $\bigcap\{D_\alpha; \alpha \in \boldsymbol{\kappa}\}$ tudíž implikuje[10] existenci $\mathbf{p} \in \mathbf{G}$ takového, že $\mathbb{M} \models (\forall \alpha \in \boldsymbol{\kappa})(\mathbf{p} \in D_\alpha)$. Navíc

[9] V předchozím paragrafu jsme definovali v teorii $\boldsymbol{ZF\mathcal{B}}$ funkci $\breve{x}$ pro každé $x \in \mathrm{V}$.

[10] Podrobněji: kdyby takový prvek Booleovy algebry neexistoval, byly by všechny komplementy prvků množiny $\bigcap\{D_\alpha; \alpha \in \boldsymbol{\kappa}\}$ prvky $\mathbf{G}$, následně by byl rovněž jejich průsek prvkem $\mathbf{G}$; tento průsek je však v důsledku hustoty zkoumané množiny nulou Booleovy algebry — spor.

pro toto p musí být dokonce splněno $\mathbb{M} \models (\forall \alpha \in \boldsymbol{\kappa})(\mathsf{p} \in B_\alpha)$, protože $\boldsymbol{w} \in \mathsf{G}$ a $\mathbf{rng}(\mathsf{f}) \subseteq \mathbf{M}$ — k prokázání užijeme opětovně třetí větu §11 a vztah

$$\mathbb{M} \models (\mathsf{p} \in C_\alpha \ \&\ \mathsf{p} \leq_{\mathcal{B}} \boldsymbol{w}) \to$$
$$\to (\forall \boldsymbol{h}, \boldsymbol{h_1})[(\mathsf{p} \leq_{\mathcal{B}} \|\vartheta_{op}(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h_1}, \breve{\alpha}) \ \&\ \boldsymbol{h} \in \mathfrak{g}\| \to (\forall x)(\mathsf{p} \leq_{\mathcal{B}} \|\breve{x} \neq \boldsymbol{h_1}\|)]$$

plynoucí z důsledku uvedeného v předchozím paragrafu.

Ve smyslu modelu $\mathbb{M}$ definujme $\mathfrak{y}$ jako množinu všech uspořádaných dvojic $\langle x, \alpha \rangle$, kde $\alpha \in \boldsymbol{\kappa}$ a současně $\mathsf{p} \leq_{\mathcal{B}} \|(\exists \boldsymbol{h})(\vartheta_{op}(\boldsymbol{h}, \breve{x}, \breve{\alpha}) \ \&\ \boldsymbol{h} \in \mathfrak{g})\|$. Z definice množiny B_α plyne[11)], že $\mathsf{p} \leq_{\mathcal{B}} \|\mathfrak{g} = \breve{\mathfrak{y}}\|$, takže $\|\mathfrak{g} = \breve{\mathfrak{y}}\| \in \mathsf{G}$, což následně zaručí $\mathbf{i}_{\mathsf{G}}(\mathfrak{g}) = \mathbf{i}_{\mathsf{G}}(\breve{\mathfrak{y}}) = \mathfrak{y}$.

První tvrzení lemmatu získáme jako speciální případ tvrzení prokázaného, uvažujeme-li příslušnou charakteristickou funkci. ■

Lemma 2 (*ZF*$\mathcal{B}$). *Nechť κ je kardinální číslo, nechť Booleova algebra $\mathcal{B}$ je $\mathfrak{cf}(\kappa)$-c.c. a buď $\mu \in \mathfrak{cf}(\kappa)$. Pak pro každé $\boldsymbol{f} \in V^{\mathcal{B}}$ je*

$$\|\text{„}\boldsymbol{f} \text{ je funkcí zobrazující } \breve{\mu} \text{ kofinálně do } \breve{\kappa}\text{“}\| = \mathsf{o}.$$

Demonstrace. Pracujme v Zermelo-Fraenkelově teorii s příslušnými fixacemi. Nechť

$$(iii) \qquad w = \|\text{„}\boldsymbol{f} \text{ je funkcí zobrazující } \breve{\mu} \text{ kofinálně do } \breve{\kappa}\text{“}\| \neq \mathsf{o}.$$

Pro každé $\alpha \in \mu$ a pro každé $\beta \in \kappa$ položme

$$(iv) \qquad w_{\alpha,\beta} = w \wedge \|\langle \breve{\beta}, \breve{\alpha} \rangle^{\mathcal{B}} \in \boldsymbol{f}\|.$$

Ze vztahů (iii) a (iv) plyne

$$(\alpha \in \mu \ \&\ \beta_1, \beta_2 \in \kappa \ \&\ \beta_1 \neq \beta_2) \to w_{\alpha,\beta_1} \wedge w_{\alpha,\beta_2} = \mathsf{o},$$

a proto předpoklad $\mathfrak{cf}(\kappa)$-c.c. zaručuje pro každé $\alpha \in \mu$ vztah

$$\mathfrak{Card}(\{\beta \in \kappa; w_{\alpha,\beta} \neq \mathsf{o}\}) \in \mathfrak{cf}(\kappa).$$

Je tedy možné pro libovolné $\alpha \in \mu$ zvolit $\gamma_\alpha \in \kappa$ tak, že

$$\{\beta \in \kappa; w_{\alpha,\beta} \neq \mathsf{o}\} \subseteq \gamma_\alpha.$$

Protože $\mu \in \mathfrak{cf}(\kappa)$, existuje nutně $\gamma \in \kappa$ takové, že $(\forall \alpha \in \mu)(\gamma_\alpha \in \gamma)$. Toto je však ve sporu s předpokladem $w \neq \mathsf{o}$, neboť w forsuje, že obor hodnot funkce $\boldsymbol{f}$

[11)] Zdůrazněme klíčový fakt konstrukce: je-li $\mathsf{p} \leq_{\mathcal{B}} \|\vartheta_{op}(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h_1}, \breve{\alpha}) \ \&\ \boldsymbol{h} \in \mathfrak{g}\|$, tak konstrukce zaručí existenci x takového, že *celé* p forsuje rovnost $\boldsymbol{h_1} = \breve{x}$. Tím je o každé uspořádané dvojici $\langle \boldsymbol{h_1}, \breve{\alpha} \rangle^{\mathcal{B}}$ zaručeno, že p forsuje její náležení do $\mathfrak{g}$ (formálněji: $p \leq_{\mathcal{B}} \|(\exists \boldsymbol{h})(\vartheta_{op}(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h_1}, \breve{\alpha}) \ \&\ \boldsymbol{h} \in \mathfrak{g})\|$), právě když forsuje její náležení do $\breve{\mathfrak{y}}$. Nadto o individuu $\mathfrak{g}$ je forsováno, že je funkcí, tedy relací, a proto p může za prvky $\mathfrak{g}$ forsovat pouze funkce, které jsou uspořádanými dvojicemi.

je *kofinální* část čísla κ, tedy speciálně zaručuje existenci $w' \leq_{\mathbf{B}} w$ & $w' \neq \mathbf{o}$ a existenci $\delta \ni \gamma$ takových, že $w' \leq_{\mathbf{B}} \|(\exists \alpha \in \mu)(\langle \check{\delta}, \check{\alpha} \rangle^{\mathbf{B}} \in \boldsymbol{f})\|$. ∎

Následující lemma zajišťuje, mimo jiné, že uspořádání $\preceq_{\mathbf{2}}$ je $(\lambda^\kappa)^+$-c.c.

Lemma 3 (*ZF*, AC). *Pro každé $\iota \in I$ buď $\preceq_\iota$ uspořádáním na množině P_ι, jejíž mohutnost je nanejvýše μ. Budiž P množina všech funkcí p takových, že definiční obor p je podmnožinou množiny I mohutnosti menší nebo rovné $\kappa \supseteq \omega$ a takových, že $(\forall \iota \in I)(p(\iota) \in P_\iota)$. Pro $p, q \in P$ položme*[12)]

$$p \preceq q \equiv (\forall \iota \in \mathfrak{Dom}(q))(\iota \in \mathfrak{Dom}(p) \;\&\; p(\iota) \preceq_\iota q(\iota)).$$

Pak $\preceq$ je $(\mu^\kappa)^+$-c.c.

Demonstrace. Začněme pracovat v ***ZF***, **AC**. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\mu \supseteq 2$.

Buď W množina po dvou neslučitelných prvků množiny P. Naším cílem je prokázat, že mohutnost množiny W je nanejvýše μ^κ. Pro každé $\alpha \in \kappa^+$ sestrojíme rekurzí množinu W_α a na základě této již definované množiny navíc definujeme $S_\alpha = \bigcup\{\mathfrak{Dom}(p); p \in W_\alpha\}$. Množiny W_α konstruujeme takovým způsobem, že současně:

(a) W_α má mohutnost nanejvýše μ^κ,
(b) $\beta \in \alpha \rightarrow W_\beta \subseteq W_\alpha$.

Nejprve zvolíme jeden prvek množiny W, řekněme r a položíme $W_0 = \{r\}$. Z vlastnosti (a) plyne, že pro každé $\alpha \in \kappa^+$ je mohutnost množiny S_α nanejvýše kardinální číslo μ^κ, neboť $\kappa \in \mu^\kappa$ (**AC** je k dispozici).

Pro limitní ordinální číslo $\alpha \in \kappa^+$ definujeme W_α jako sjednocení všech W_β pro $\beta \in \alpha$. Obě podmínky (a) a (b) jsou pak splněny zcela automaticky.

Buď tedy $\alpha \in \kappa^+$. Definujme ekvivalenci $\sim$ na prvcích množiny W tak, že

$$p \sim q \equiv p \restriction S_\alpha = q \restriction S_\alpha.$$

Množina $W_{\alpha+1}$ budiž množinou W_α, ke které přidáme právě jeden prvek z každé ekvivalenční třídy vzhledem k ekvivalenci $\sim$ (je-li možno). Odhadněme nejprve mohutnost množiny těchto ekvivalenčních tříd. Každá takováto ekvivalenční třída je popsána funkcí q definovanou na *podmnožině* množiny S_α, která má mohutnost menší nebo rovnou κ, a takovou, že $(\forall \iota \in \mathfrak{Dom}(q))(q(\iota) \in P_\iota)$. Funkce popsaného typu můžeme rozdělit do skupin podle definičního oboru. Takovýchto skupin bude tolik, kolik je podmnožin množiny S_α mohutnosti menší nebo rovné κ. Pročež skupin funkcí je nanejvýše $(\mu^\kappa)^\kappa = \mu^\kappa$ (připomeňme, že mohutnost množiny S_α je odhadnuta kardinálním číslem μ^κ). V jedné skupině je nanejvýše tolik funkcí,

12) Mohli bychom také vyšetřovat funkce definované na celé množině I a transformovat sousloví „nedefinovaná v bodě ι“ na spojení slov „mající za hodnotu (případně dodatečně přidaný) největší prvek uspořádání $\preceq_\iota$“.

kolik je všech zobrazení definičního oboru do μ (mohutnost jedné každé množiny P_ι je odhadnuta kardinálním číslem μ), tedy v jedné skupině je nejvýše μ^κ funkcí. Sumarizujeme-li, pak ekvivalenčních tříd je nanejvýše $\mu^\kappa \cdot \mu^\kappa = \mu^\kappa$. Takže mohutnost množiny $W_{\alpha+1}$ je odhadnutelná kardinálním číslem $\mu^\kappa + \mu^\kappa = \mu^\kappa$, pročež je pro krok $\alpha + 1$ splněny oba požadavky (a) a (b).

Pokud se podaří prokázat $W = \bigcup\{W_\alpha; \alpha \in \kappa^+\}$, bude ukázáno na základě podmínek (a) a (b), že mohutnost celé množiny W je nejvýše μ^κ (neboť $\kappa^+ \underline{\in} \mu^\kappa$). Budiž $p \in W$, chceme nalézt $\alpha \in \kappa^+$ takové, že $p \in W_\alpha$. Protože $\mathfrak{Card}(\mathfrak{Dom}(p)) \underline{\in} \kappa$ a protože κ^+ je regulární, musí existovat $\alpha \in \kappa^+$ takové, že

$$\mathfrak{Dom}(p) \cap \bigcup\{S_\beta; \beta \in \kappa^+\} = \mathfrak{Dom}(p) \cap S_\alpha.$$

Podle definice množiny $W_{\alpha+1}$ existuje $q \in W_{\alpha+1}$ takové, že $p \restriction S_\alpha = q \restriction S_\alpha$. Nadto $\mathfrak{Dom}(q) \subseteq \bigcup\{S_\beta; \beta \in \kappa^+\}$, takže $\mathfrak{Dom}(p) \cap \mathfrak{Dom}(q) = \mathfrak{Dom}(p) \cap S_\alpha$. Funkce p a q souhlasí na průniku definičních oborů, a tedy $p \cup q \in P$. Ukázali jsme, že prvky p a q množiny W jsou slučitelné, tudíž nutně si musí být rovny. Předpokládali jsme, že $q \in W_{\alpha+1}$, což prokazuje $p \in \bigcup\{W_\alpha; \alpha \in \kappa^+\}$. ∎

Lemma 4 (*ZF*). *Je-li $\preceq$ separované uspořádání na množině P, které je κ-c.c., a je-li mohutnost P rovna kardinálnímu číslu λ, je*

$$\mathfrak{Card}(\mathbf{\mathfrak{B}}(\preceq)) \text{ menší nebo rovna } \sum_{\mu \in \kappa} \lambda^\mu.$$

Demonstrace. Uvažujme v Zermelo-Fraenkelově teorii množin. Množina P budiž indexována ordinálními čísly, tj. předpokládejme rovnost $P = \{p_\alpha; \alpha \in \lambda\}$ a nechť $\leq_{\mathfrak{B}}$ je uspořádání na Booleově algebře $\mathfrak{B}(\preceq)$. Pro libovolný nenulový prvek u Booleovy algebry $\mathfrak{B}(\preceq)$ definujeme *rekurzí* množinu $\widehat{u} = \{q_\alpha; \alpha \in \lambda\}$ vybírajíce na kroku $\beta \in \lambda$ prvek q_β jakožto prvek s nejmenším indexem z množiny těch prvků $q \in P$, které mají vlastnost

$$q \leq_{\mathfrak{B}} u \;\&\; (\forall \alpha \in \beta)(\text{„}q_\alpha \text{ je neslučitelné s } q \text{ vzhledem k } \preceq\text{“});$$

pokud takové q neexistuje, položíme $q_\alpha = q_0$. Takto sestrojená množina $\widehat{u}$ je pro každé $u \in B$ množinou po dvou neslučitelných prvků. Proto takovýchto množin může existovat nanejvýše tolik, kolik je podmnožin množiny P mohutnosti menší než κ. Na závěr si stačí uvědomit, že pro každé dva různé prvky u, v Booleovy algebry $\mathfrak{B}(\preceq)$ jsou množiny $\widehat{u}$ a $\widehat{v}$ od sebe různé v důsledku hustoty množiny P (uvažte, že buďto $u - v \neq \mathsf{o}$ nebo $v - u \neq \mathsf{o}$). ∎

Lemma 5. *Nechť* **G** *je $\mathbb{M}$-generický ultrafiltr na individuu $\mathfrak{B}$, které je úplnou Booleovou algebrou ve smyslu $\mathbb{M} \models$ **ZF**. Pak*

$$\mathbb{M}[\mathbf{G}] \models \boldsymbol{\lambda} = 2^{\boldsymbol{\kappa}} \to \mathbb{M} \models \boldsymbol{\lambda} \underline{\in} (\mathfrak{Card}(B))^{\boldsymbol{\kappa}}.$$

Demonstrace. Pro jedno každé individuum $\mathfrak{x}$ s vlastností $\mathbb{M}[\mathbf{G}] \models \mathfrak{x} \subseteq \boldsymbol{\kappa}$ musí existovat $\mathsf{f} \in \mathbb{M}^{\mathcal{B}}$ takové, že $\mathbf{i}_{\mathbf{G}}(\mathsf{f}) = \mathfrak{x}$. Fixujme individuum $\mathfrak{g}$ tak, aby

$$\mathbb{M} \models \mathfrak{Dom}(\mathfrak{g}) = \breve{\boldsymbol{\kappa}} \ \& \ (\forall \alpha \in \boldsymbol{\kappa})(\mathfrak{g}(\breve{\alpha}) = \|\breve{\alpha} \in \mathsf{f}\|).$$

Předpoklad $\mathbf{i}_{\mathbf{G}}(\mathsf{f}) \subseteq \boldsymbol{\kappa}$ zaručí (při využití devátého lemmatu předchozího paragrafu) pro každé $\mathfrak{h} \in \mathbb{M}^{\mathcal{B}}$, že $\|\mathfrak{h} \in \mathsf{f}\|^{\mathbb{M}} \in \mathbf{G}$ implikuje existenci $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{\kappa}$ takového, že $\|\mathfrak{h} = \breve{\boldsymbol{\alpha}}\| \in \mathbf{G}$. Uvedené spolu s výše citovaným lemmatem a s prvními dvěma lemmaty a vztahem (vi), vše z minulého paragrafu, zabezpečí $\mathbf{i}_{\mathbf{G}}(\mathsf{f}) = \mathbf{i}_{\mathbf{G}}(\mathfrak{g})$. Pro námi definované individuum $\mathfrak{g}$ je však navíc $\mathbb{M} \models \mathfrak{g} \subseteq B \times \breve{\boldsymbol{\kappa}}$; stačí tudíž nahlédnout, že $\mathbb{M} \models \mathfrak{Card}(\breve{\boldsymbol{\kappa}}) = \boldsymbol{\kappa}$. ■

Věta 2[13]**.** *Jestliže*

$$\mathbb{M} \models \boldsymbol{ZF}, \mathsf{V} = \mathsf{L}, \text{„}\boldsymbol{\kappa} \textit{ je regulární kardinální číslo“} \ \& \\ \& \text{ „}\boldsymbol{\lambda} \textit{ je kardinální číslo“} \ \& \ \boldsymbol{\kappa} \underline{\in} \mathfrak{cf}(\boldsymbol{\lambda}),$$

pak existuje $\mathbb{M}$-generický ultrafiltr $\mathbf{G}$ *takový, že současně:*

(1) $\mathbb{M}[\mathbf{G}] \models \mathbf{GCH} \ \& \ \mathfrak{Card}(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\kappa}$;

(2) *kardinální čísla modelu $\mathbb{M}$, která jsou menší nebo rovna $\boldsymbol{\kappa}$ nebo jsou naopak větší než $\boldsymbol{\lambda}$, jsou absolutní vzhledem k modelu $\mathbb{M}[\mathbf{G}]$, tj. pro každé individuum $\boldsymbol{\mu}$ modelu $\mathbb{M}$ jest*

$$\mathbb{M} \models \text{„}\boldsymbol{\mu} \textit{ je kardinální číslo“} \ \& \ (\boldsymbol{\mu} \underline{\in} \boldsymbol{\kappa} \vee \boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\mu}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbb{M}[\mathbf{G}] \models \text{„}\boldsymbol{\mu} \textit{ je kardinální číslo“};$$

(3) *kofinály, které jsou menší nebo rovny $\boldsymbol{\kappa}$ nebo jsou naopak větší než $\boldsymbol{\lambda}$, jsou absolutní vzhledem k modelu $\mathbb{M}[\mathbf{G}]$, tj. pro každá $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{M}$ máme*

$$\mathbb{M} \models [(\boldsymbol{\eta} \underline{\in} \boldsymbol{\kappa} \vee \boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\eta}) \ \& \text{ „}\boldsymbol{\mu} \textit{ je kardinální číslo“} \ \& \ \boldsymbol{\eta} = \mathfrak{cf}(\boldsymbol{\mu})] \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbb{M}[\mathbf{G}] \models \boldsymbol{\eta} = \mathfrak{cf}(\boldsymbol{\mu});$$

(4) *je-li kofinál kardinálního čísla ve smyslu modelu $\mathbb{M}$ větší než $\boldsymbol{\kappa}$ a současně menší nebo roven $\boldsymbol{\lambda}$, je kofinál tohoto kardinálního čísla ve smyslu modelu $\mathbb{M}[\mathbf{G}]$ roven kardinálnímu číslu $\boldsymbol{\kappa}$, tj.*

$$\mathbb{M} \models \boldsymbol{\kappa} \in \mathfrak{cf}(\boldsymbol{\mu}) \underline{\in} \boldsymbol{\lambda} \Rightarrow \mathbb{M}[\mathbf{G}] \models \mathfrak{cf}(\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\kappa}.$$

Demonstrace. Fixujme individuum $\preceq_{\mathbf{1}}$ uvnitř modelu $\mathbb{M}$ výše uvedenou definicí. Zvolme $\mathbb{M}$-generický ultrafiltr $\mathbf{G}$ na Booleově algebře $\mathcal{B}_{\mathbf{1}}$ definované uvnitř modelu $\mathbb{M}$ pomocí první věty tohoto paragrafu na základě $\preceq_{\mathbf{1}}$. Individuum $\leq_{\mathbf{1}}$ nechť popisuje uspořádání na Booleově algebře $\mathcal{B}_{\mathbf{1}}$.

Uvažme, že $\mathbb{M} \models$ „$\preceq_{\mathbf{1}}$ má vlastnost $\boldsymbol{\mu}$-minorant“ pro každé $\boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{\kappa}$, které je kardinálním číslem ve smyslu modelu $\mathbb{M}$, neboť $\boldsymbol{\kappa}$ je regulárním kardinálním

[13] viz [L]

číslem. Tento fakt spolu s prvním lemmatem zajistí, že každé $\boldsymbol{\mu}$ menší nebo rovno $\boldsymbol{\kappa}$, které je kardinálním číslem ve smyslu modelu $\mathbb{M}$, je také kardinálním číslem ve smyslu modelu $\mathbb{M}[\mathbf{G}]$. Přesně stejně dokážeme také absolutnost kofinálů, které jsou menší nebo rovny $\boldsymbol{\kappa}$.

Ve smyslu modelu $\mathbb{M}$ je uspořádání $\preceq_{\mathbf{1}}$ navíc $\boldsymbol{\lambda}^+$-c.c. podle třetího lemmatu. Podrobněji: jakoukoli množinu W po dvou neslučitelných podmínek z množiny $P_{\mathbf{1}}$ rozdělíme do skupin podle mohutnosti definičního oboru podmínek; těchto skupin je nanejvýše $\boldsymbol{\kappa}$ a ve skupině funkcí s mohutností definičního oboru ν může být — v důsledku[14] lemmatu 3 — nanejvýš $\boldsymbol{\lambda}^\nu = \boldsymbol{\lambda}$ podmínek (rovnost je důsledkem předpokladu $\nu \in \boldsymbol{\kappa} \mathrel{\underline{\in}} \mathfrak{cf}(\boldsymbol{\lambda})$); tedy mohutnost celé množiny W je nanejvýše $\boldsymbol{\lambda}$.

Předpokládejme, že $\boldsymbol{\mu}$ je kardinální číslo ve smyslu modelu $\mathbb{M}$, které je větší než $\boldsymbol{\lambda}$. Budiž $\boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{\mu}$ a nechť

$$\mathbb{M} \models p \in P_{\mathbf{1}} \,\&\, p \leq_{\mathbf{1}} \|\text{„}\boldsymbol{f} \text{ je vzájemně jednoznačné zobrazení } \check{\boldsymbol{\mu}} \text{ na } \check{\boldsymbol{\eta}}\text{“}\|.$$

Ve smyslu modelu $\mathbb{M}$ pro $\alpha \in \boldsymbol{\eta}$ a $\beta \in \boldsymbol{\mu}$ definujme

$$w_{\alpha,\beta} = p \wedge \|(\exists \boldsymbol{f}_{\mathbf{1}})(\vartheta_{op}(\boldsymbol{f}_{\mathbf{1}}, \check{\alpha}, \check{\beta}) \,\&\, \boldsymbol{f}_{\mathbf{1}} \in \boldsymbol{f})\|.$$

Pak pro každé $\beta \neq \beta'$ & $\beta, \beta' \in \boldsymbol{\mu}$ a každé $\alpha \in \boldsymbol{\eta}$ jsou $w_{\alpha,\beta}$ a $w_{\alpha,\beta'}$ nutně disjunktní. Protože uspořádání $\preceq_{\mathbf{1}}$ je $\boldsymbol{\lambda}^+$-c.c., musí nevyhnutelně být $\mathfrak{Card}(\{\beta; w_{\alpha,\beta} \neq \mathsf{o}\}) \mathrel{\underline{\in}} \boldsymbol{\lambda}$ pro každé $\alpha \in \boldsymbol{\eta}$. Pak ovšem $\mathfrak{Card}(\{\beta \in \boldsymbol{\mu}; (\exists \alpha \in \boldsymbol{\eta})(w_{\alpha,\beta} \neq \mathsf{o})\}) \mathrel{\underline{\in}} \mathfrak{Max}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda})$, takže je tedy možno volit $\beta \in \boldsymbol{\mu}$ takové, že všechna $w_{\alpha,\beta}$ jsou rovna o. Pro toto β je však $(\forall \alpha \in \boldsymbol{\eta})\|(\exists \boldsymbol{f}_{\mathbf{1}})(\vartheta_{op}(\boldsymbol{f}_{\mathbf{1}}, \check{\alpha}, \check{\beta}) \,\&\, \boldsymbol{f}_{\mathbf{1}} \in \boldsymbol{f})\| = \mathsf{o}$ a následně nahlédneme $\|(\exists \boldsymbol{h} \in \check{\boldsymbol{\eta}})(\exists \boldsymbol{f}_{\mathbf{1}})(\vartheta_{op}(\boldsymbol{f}_{\mathbf{1}}, \boldsymbol{h}, \check{\beta}) \,\&\, \boldsymbol{f}_{\mathbf{1}} \in \boldsymbol{f})\| = \mathsf{o}$, což je spor s naší fixací $p \in P_{\mathbf{1}}$, kteréžto volba zaručuje $p \neq \mathsf{o}$.

Ve smyslu $\mathbb{M}$ jsme výše ukázali, že $\preceq_{\mathbf{1}}$ je $\boldsymbol{\lambda}^+$-c.c. Lemma 2 (spolu s třetí větou předchozího paragrafu) tudíž zajišťuje absolutnost kofinálů kardinálních čísel modelu $\mathbb{M}$ vzhledem k modelu $\mathbb{M}[\mathbf{G}]$ za předpokladu, že kofinály jsou větší než $\boldsymbol{\lambda}$.

Ve smyslu modelu $\mathbb{M}$ vypočítejme nyní mohutnost Booleovy algebry $\mathcal{B}_{\mathbf{1}}$. Dle definice systému podmínek $P_{\mathbf{1}}$ jest $\mathbb{M} \models \mathfrak{Card}(P_{\mathbf{1}}) = \sum_{\nu \in \boldsymbol{\kappa}} \boldsymbol{\lambda}^\nu = \boldsymbol{\lambda}$. Pročež

$$\mathbb{M} \models \mathfrak{Card}(\mathcal{B}_{\mathbf{1}}) \mathrel{\underline{\in}} \mathfrak{Card}(\mathfrak{P}(P_{\mathbf{1}})) = \boldsymbol{\lambda}^+,$$

neboť v modelu $\mathbb{M}$ je zobecněná hypotéza kontinua k dispozici.

Pro $\boldsymbol{\mu}$, pro které je $\mathbb{M} \models \boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{\kappa} \,\&\,$ „$\boldsymbol{\mu}$ je kardinální číslo“, je $\mathbb{M}[\mathbf{G}] \models 2^{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu}^+$ v důsledku předpokladu $\mathbb{M} \models \mathbf{GCH}$ a v důsledku prvního lemmatu. Je-li $\boldsymbol{\mu}$ větší než $\boldsymbol{\lambda}$ a je-li $\boldsymbol{\mu}$ kardinálním číslem ve smyslu $\mathbb{M}$, pak lemma 5 společně se vztahem $\mathbb{M} \models (\mathfrak{Card}(\mathcal{B}_{\mathbf{1}}))^{\boldsymbol{\mu}} \mathrel{\underline{\in}} (\boldsymbol{\lambda}^+)^{\boldsymbol{\mu}} = 2^{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu}^+$ implikují vztah $\mathbb{M}[\mathbf{G}] \models 2^{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu}^+$.

[14] Pro aplikaci buď $I = \boldsymbol{\kappa}$ a pro $\iota \in I$ buďtež $P_\iota = \boldsymbol{\lambda}$ chápané jako množiny navzájem nesrovnatelných prvků.

Páté lemma spolu se vztahem $\mathbb{M} \models (\mathfrak{Card}(\boldsymbol{\mathcal{B}_1}))^{\boldsymbol{\kappa}} \mathrel{\underline{\in}} (\boldsymbol{\lambda}^+)^{\boldsymbol{\kappa}} = \boldsymbol{\lambda}^+$ také zaručuje $\mathbb{M}[\mathbf{G}] \models 2^{\boldsymbol{\kappa}} \mathrel{\underline{\in}} (\mathfrak{Card}(\boldsymbol{\lambda}))^+$.

Na závěr prokažme to nejpodstatnější, totiž $\mathbb{M}[\mathbf{G}] \models \mathfrak{Card}(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\kappa}$, tzn. ukažme

$$\mathbb{M}[\mathbf{G}] \models \text{„existuje vzájemně jednoznačné zobrazení } \boldsymbol{\kappa} \text{ na } \boldsymbol{\lambda}\text{“}.$$

Ve smyslu modelu $\mathbb{M}$ definujme $\mathsf{f} \in V^{\boldsymbol{\mathcal{B}_1}}$ tak, že

$$\mathfrak{Dom}(\mathsf{f}) = \{\langle \breve{\alpha}, \breve{\beta} \rangle^{\boldsymbol{\mathcal{B}_1}} ; \alpha \in \boldsymbol{\lambda} \ \& \ \beta \in \boldsymbol{\kappa}\}$$

a dále

$$(v) \qquad (\forall \alpha \in \boldsymbol{\lambda})(\forall \beta \in \boldsymbol{\kappa})(\mathsf{f}(\langle \breve{\alpha}, \breve{\beta} \rangle^{\boldsymbol{\mathcal{B}_1}}) = \{\langle \alpha, \beta \rangle\}).$$

Připomeňme, že pro $\alpha \in \boldsymbol{\lambda}$ & $\beta \in \boldsymbol{\kappa}$ je $\{\langle \alpha, \beta \rangle\} \in P_{\mathbf{1}}$, v důsledku čehož je $\mathsf{f} \in V^{\boldsymbol{\mathcal{B}_1}}$.

Naším nejbližším cílem je ukázat — neustále ve smyslu modelu $\mathbb{M}$ — rovnost

$$(vi) \qquad \|\text{„}\mathsf{f} \text{ je vzájemně jednoznačné zobrazení } \breve{\boldsymbol{\kappa}} \text{ na } \breve{\boldsymbol{\lambda}}\text{“}\| = \mathbf{1}.$$

Nejprve budiž dáno $\beta \in \boldsymbol{\kappa}$. K dokázání

$$\|(\exists \boldsymbol{g} \in \breve{\boldsymbol{\lambda}})(\exists \boldsymbol{f_1})(\vartheta_{op}(\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{g}, \breve{\beta}) \ \& \ \boldsymbol{f_1} \in \mathsf{f})\| = \mathbf{1}$$

postačí dokázat, že pro každé $q \in P_{\mathbf{1}}$ existují $p \leq_{\mathbf{1}} q$ a $\alpha \in \lambda$ s vlastností

$$p \leq_{\mathbf{1}} \|\langle \breve{\alpha}, \breve{\beta} \rangle^{\boldsymbol{\mathcal{B}_1}} \in \mathsf{f}\|.$$

Buď tedy $q \in P_{\mathbf{1}}$ dáno. Jestliže $\beta \in \mathfrak{Dom}(q)$, můžeme jakožto p zvolit q samotné a jakožto α položíme $q(\beta)$. Není-li $\beta \in \mathfrak{Dom}(q)$, fixujeme $\alpha \in \lambda - \mathfrak{Rng}(q)$ (fixace je možná, protože $\mathfrak{Card}(\mathfrak{Dom}(q)) \in \kappa \in \lambda$) a položíme $p = q \cup \{\langle \alpha, \beta \rangle\}$. V každém případě naše volba zajistí $p \in P_{\mathbf{1}}$, a nadto (v) zabezpečuje

$$(vii) \qquad p \leq_{\mathbf{1}} \mathsf{f}(\langle \breve{\alpha}, \breve{\beta} \rangle^{\boldsymbol{\mathcal{B}_1}}) \leq_{\mathbf{1}} \|\langle \breve{\alpha}, \breve{\beta} \rangle^{\boldsymbol{\mathcal{B}_1}} \in \mathsf{f}\|.$$

Zcela analogicky, je-li dáno libovolné $\alpha \in \boldsymbol{\lambda}$ a $q \in P_{\mathbf{1}}$, zvolíme $\beta \in \boldsymbol{\kappa}$ takové, že $p = q \cup \{\langle \alpha, \beta \rangle\}$ je prostou funkcí. Opět $p \in P_{\mathbf{1}}$, a nadto opětovně dostaneme (vii). Ukázali jsme tudíž

$$\begin{aligned}\|(\forall \boldsymbol{h} \in \breve{\boldsymbol{\kappa}})(\exists \boldsymbol{g} \in \breve{\boldsymbol{\lambda}})(\exists \boldsymbol{f_1})(\vartheta_{op}(\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}) \ \& \ \boldsymbol{f_1} \in \mathsf{f}) \ \& \\ \& \ (\forall \boldsymbol{g} \in \breve{\boldsymbol{\lambda}})(\exists \boldsymbol{h} \in \breve{\boldsymbol{\kappa}})(\exists \boldsymbol{f_1})(\vartheta_{op}(\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}) \ \& \ \boldsymbol{f_1} \in \mathsf{f})\| = \mathbf{1},\end{aligned}$$

neboť pro každé $q \in P_{\mathbf{1}}$ a každá $\boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}$ existuje (podle definice (ii) předešlého paragrafu) $q' \leq_{\mathbf{1}} q$ a existují $\alpha \in \boldsymbol{\lambda}$ a $\beta \in \boldsymbol{\kappa}$ tak, že

$$q' \leq_{\mathbf{1}} \|(\boldsymbol{g} \in \breve{\boldsymbol{\lambda}} \ \& \ \boldsymbol{h} \in \breve{\boldsymbol{\kappa}}) \rightarrow (\boldsymbol{g} = \breve{\alpha} \ \& \ \boldsymbol{h} = \breve{\beta})\|.$$

Jako další dokažme, že

$$(viii) \qquad \|(\forall \boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h})[(\vartheta_{op}(\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}) \ \& \ \boldsymbol{f_1} \in \mathsf{f}) \rightarrow (\boldsymbol{g} \in \breve{\boldsymbol{\kappa}} \ \& \ \boldsymbol{h} \in \breve{\boldsymbol{\lambda}})]\| = \mathbf{1}.$$

Je-li $\mathsf{o} \neq q \leq_{\mathbf{1}} \|\vartheta_{op}(\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h})\ \&\ \boldsymbol{f_1} \in \mathsf{f}\|$, musí podle definice (ii) a bodů (x) a (xi) z předchozího paragrafu existovat $\alpha \in \boldsymbol{\lambda}$ a $\beta \in \boldsymbol{\kappa}$ takové, že

$$(ix) \qquad q \wedge \|\boldsymbol{g} = \breve{\alpha}\ \&\ \boldsymbol{h} = \breve{\beta}\| \wedge \mathsf{f}(\breve{\alpha}, \breve{\beta}\rangle^{\mathcal{B}_1}) \neq \mathsf{o}\,;$$

předpoklad hustoty $P_{\mathbf{1}}$ v naší Booleově algebře umožňuje fixovat $p \in P_{\mathbf{1}}$ (tedy nenulové), které je v Booleově algebře menší než prvek uvedený v zápisu (ix), z čehož následně získáme $(viii)$ užívajíce důsledek předchozího paragrafu.

Zbývá ukázat, že $\|\mathcal{F}nc(\mathsf{f})\ \&\ \mathcal{F}nc(\mathsf{f}^{-1})\| = \mathsf{1}$, tj. dokázat pro libovolné funkce $\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{g_1}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{h_1} \in V^{\mathcal{B}_1}$ rovnosti

$$\|\vartheta_{op}(\boldsymbol{f_2}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h})\ \&\ \vartheta_{op}(\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{g_1}, \boldsymbol{h})\ \&\ \boldsymbol{g} \neq \boldsymbol{g_1}\ \&\ \boldsymbol{f_1} \in \mathsf{f}\ \&\ \boldsymbol{f_2} \in \mathsf{f}\| = \mathsf{o}$$

$$\|\vartheta_{op}(\boldsymbol{f_2}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h})\ \&\ \vartheta_{op}(\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h_1})\ \&\ \boldsymbol{h} \neq \boldsymbol{h_1}\ \&\ \boldsymbol{f_1} \in \mathsf{f}\ \&\ \boldsymbol{f_2} \in \mathsf{f}\| = \mathsf{o}.$$

Prokazujme např. první rovnost a buďtež $\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{g_1}, \boldsymbol{h} \in V^{\mathcal{B}_1}$ dány a nechť

$$(x) \qquad \mathsf{o} \neq \|\vartheta_{op}(\boldsymbol{f_2}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h})\ \&\ \vartheta_{op}(\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{g_1}, \boldsymbol{h})\ \&\ \boldsymbol{g} \neq \boldsymbol{g_1}\ \&\ \boldsymbol{f_1} \in \mathsf{f}\ \&\ \boldsymbol{f_2} \in \mathsf{f}\|.$$

Podle definice (ii), rovností (x) a (xi) a druhého lemmatu vše z předchozího paragrafu musí za uvedených předpokladů existovat $\alpha, \alpha_{\mathbf{1}} \in \lambda$ a $\beta \in \kappa$ tak, že

$$\mathsf{o} \neq \|\boldsymbol{g} = \breve{\alpha}\ \&\ \boldsymbol{g_1} = \breve{\alpha}_{\mathbf{1}}\ \&\ \boldsymbol{h} = \breve{\beta}\ \&\ \boldsymbol{g} \neq \boldsymbol{g_1}\| \wedge \mathsf{f}(\langle\breve{\alpha}, \breve{\beta}\rangle^{\mathcal{B}_1}) \wedge \mathsf{f}(\langle\breve{\alpha}_{\mathbf{1}}, \breve{\beta}\rangle^{\mathcal{B}_1}).$$

Aplikace důsledku §11 zabezpečí

$$(xi) \qquad \mathsf{o} \neq \|\breve{\alpha} \neq \breve{\alpha}_{\mathbf{1}}\| \wedge \mathsf{f}(\langle\breve{\alpha}, \breve{\beta}\rangle^{\mathcal{B}_1}) \wedge \mathsf{f}(\langle\breve{\alpha}_{\mathbf{1}}, \breve{\beta}\rangle^{\mathcal{B}_1}).$$

Připomeňme, že pro $\mu \in \mathrm{On}$ máme $\|\breve{\mu} \neq \breve{\mu}\| = \mathsf{o}$, z čehož vyplývá $\alpha \neq \alpha_{\mathbf{1}}$. Podle definice funkce f (rovnost (v)) je $\mathsf{f}(\langle\breve{\alpha}, \breve{\beta}\rangle^{\mathcal{B}_1})$ podmínkou $\{\langle\alpha, \beta\rangle\}$ a podobně $\mathsf{f}(\langle\breve{\alpha}_{\mathbf{1}}, \breve{\beta}\rangle^{\mathcal{B}_1})$ je podmínkou $\{\langle\alpha_{\mathbf{1}}, \beta\rangle\}$. Jakožto podmínky v množině $P_{\mathbf{1}}$ uvažujeme pouze *funkce*, a proto jsou podmínky $\{\langle\alpha, \beta\rangle\}$ a $\{\langle\alpha_{\mathbf{1}}, \beta\rangle\}$ pro různá ordinální čísla $\alpha, \alpha_{\mathbf{1}}$ neslučitelné, což vylučuje nerovnost (xi). Uvedený spor prokazuje nemožnost nerovnosti (x).

Druhou požadovanou rovnost dokážeme zcela analogicky, tentokrát však využijeme *prostoty* funkcí, které jsou podmínkami.

V modelu $\mathbb{M}$ jsme dokázali rovnost (vi). Zbytek demonstrace je již zcela triviální. Aplikujíce větu 3 předchozího paragrafu nahlédneme, že $\mathbf{i}_{\mathbf{G}}(\mathsf{f})$ je vzájemně jednoznačným zobrazením $\boldsymbol{\kappa}$ na $\boldsymbol{\lambda}$ ve smyslu modelu $\mathbb{M}[\mathbf{G}]$. V důsledku tohoto faktu se stane bod (4) zcela evidentním. ■

Lemma 6 (*ZF*, AC). *Pro každé nekonečné kardinální číslo* λ *je* $\lambda \in \mathfrak{cf}(2^\lambda)$.

Demonstrace[15]**.** Uvažujme uvnitř teorie $\boldsymbol{ZF}$ a uvědomme si, že mohutnost množiny všech zobrazení kardinálního čísla λ do 2^λ je $(2^\lambda)^\lambda = \mathfrak{Card}(2^{(\lambda\times\lambda)}) = 2^\lambda$, takže

$$\prod_{\alpha\in\lambda} 2^\lambda = 2^\lambda.$$

[15] viz např. 5.17 kap. II [B-Š]

Předpokládejme $\mathfrak{cf}(2^\lambda) \mathrel{\underline{\in}} \lambda$, tj. že existuje posloupnost $\{x_\alpha; \alpha \in \lambda\}$ taková, že $2^\lambda = \bigcup\{x_\alpha; \alpha \in \lambda\}$, a navíc taková, že $\mathfrak{Card}(x_\alpha) \in 2^\lambda$ pro každé $\alpha \in \lambda$. Za těchto předpokladů dostaneme

$$\bigcup\{x_\alpha; \alpha \in \lambda\} = 2^\lambda = \prod_{\alpha\in\lambda} 2^\lambda,$$

což je ve sporu s Königovou nerovností[16]. ■

Věta 3[17]**.** *Jestliže*

$$\mathbb{M} \models \boldsymbol{ZF}, \mathsf{V} = \mathsf{L}, \text{„}\boldsymbol{\kappa} \textit{ je regulární kardinální číslo“ } \& $$
$$\& \text{ „}\boldsymbol{\lambda} \textit{ je kardinální číslo“ } \& \ \boldsymbol{\kappa} \in \mathfrak{cf}(\boldsymbol{\lambda}),$$

*pak existuje $\mathbb{M}$-generický ultrafiltr **G** takový, že současně:*

(1) *kardinální čísla modelu $\mathbb{M}$ jsou absolutní vzhledem k modelu $\mathbb{M}[\mathbf{G}]$, tj. pro každé individuum $\boldsymbol{\mu}$ modelu $\mathbb{M}$*

$$\mathbb{M} \models \text{„}\boldsymbol{\mu} \textit{ je kardinální číslo“} \quad \textit{implikuje} \quad \mathbb{M}[\mathbf{G}] \models \text{„}\boldsymbol{\mu} \textit{ je kardinální číslo“};$$

(2) *kofinály modelu $\mathbb{M}$ jsou absolutní vzhledem k modelu $\mathbb{M}[\mathbf{G}]$, tzn. pro každá individua $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\eta}$ modelu $\mathbb{M}$*

$$\mathbb{M} \models \text{„}\boldsymbol{\mu} \textit{ je kardinální číslo“ } \& \ \boldsymbol{\eta} = \mathfrak{cf}(\boldsymbol{\mu}) \quad \textit{implikuje} \quad \mathbb{M}[\mathbf{G}] \models \boldsymbol{\eta} = \mathfrak{cf}(\boldsymbol{\mu});$$

(3) *pro každé individuum $\boldsymbol{\mu}$ modelu $\mathbb{M}$, které je nekonečným kardinálním číslem, je splněno ve smyslu modelu $\mathbb{M}[\mathbf{G}]$:*
  - (a) $2^{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu}^+$ *za předpokladu, že* $\mathbb{M} \models \boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{\kappa}$,
  - (b) $2^{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\lambda}$ *za předpokladu, že* $\mathbb{M} \models \boldsymbol{\kappa} \mathrel{\underline{\in}} \boldsymbol{\mu} \in \mathfrak{cf}(\boldsymbol{\lambda})$,
  - (c) $2^{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\lambda}^+$ *za předpokladu, že* $\mathbb{M} \models \mathfrak{cf}(\boldsymbol{\lambda}) \mathrel{\underline{\in}} \boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{\lambda}$,
  - (d) $2^{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu}^+$ *za předpokladu, že* $\mathbb{M} \models \boldsymbol{\lambda} \mathrel{\underline{\in}} \boldsymbol{\mu}$.

Demonstrace. Fixujme individuum $\preceq_{\mathbf{2}}$ uvnitř modelu $\mathbb{M}$ výše uvedenou definicí. Nechť $\leq_{\mathbf{2}}$ je uspořádání na Booleově algebře $\mathcal{B}_{\mathbf{2}}$ definované uvnitř modelu $\mathbb{M}$ pomocí první věty tohoto paragrafu na základě $\preceq_{\mathbf{2}}$. Zvolme $\mathbb{M}$-generický ultrafiltr **G** na Booleově algebře $\mathcal{B}_{\mathbf{2}}$.

Při těchto fixacích nahlédneme (užívajíce regularitu kardinálního čísla $\boldsymbol{\kappa}$ ve smyslu modelu $\mathbb{M}$), že $\mathbb{M} \models$ „$\preceq_{\mathbf{2}}$ má vlastnost $\boldsymbol{\mu}$-minorant“ pro každé $\boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{\kappa}$, které je kardinálním číslem ve smyslu modelu $\mathbb{M}$. Uvedené spolu s lemmatem 1 zabezpečuje tvrzení (1) pro každé $\boldsymbol{\mu}$ menší nanejvýše rovno $\boldsymbol{\kappa}$ a zajišťuje (2) pro všechny kofinály menší nebo rovné $\boldsymbol{\kappa}$.

---

[16] Königova nerovnost je tvrzení: Jsou-li $\kappa_\iota, \lambda_\iota$ kardinální čísla taková, že $\kappa_\iota \in \lambda_\iota$ pro každé $\iota \in I$ a je-li $I \neq \emptyset$, potom $\sum_{\iota\in I} \kappa_\iota \in \prod_{\iota\in I} \lambda_\iota$ (viz např. větu 5.15 kap. II [B-Š]).

[17] viz [V1]

Navíc ve smyslu modelu $\mathbb{M}$ má uspořádání $\preceq_{\mathbf{2}}$ vlastnost $\boldsymbol{\kappa}^{+}$-c.c. (uspořádání $\preceq_{\iota}$, na které aplikujeme lemma 3 buďtež uspořádání dvou nesrovnatelných elementů; na mohutnosti množiny I nezáleží[18)]). Absolutnost kardinálních čísel modelu $\mathbb{M}$ větších než $\boldsymbol{\kappa}$ se prokáže naprosto stejně jako v předchozím příkladu. Podle lemmatu 2 a vlastnosti $\boldsymbol{\kappa}^{+}$-c.c. uspořádání $\preceq_{\mathbf{2}}$ ve smyslu modelu $\mathbb{M}$ získáme

$$\mathbb{M} \models (\boldsymbol{\kappa} \in \mathfrak{cf}(\boldsymbol{\mu}) \ \& \ \boldsymbol{\eta} \in \mathfrak{cf}(\boldsymbol{\mu}) \ \& \ \mathsf{f} \in V^{\mathcal{B}_2}) \rightarrow$$
$$\rightarrow \|\text{„}\mathsf{f} \text{ je funkcí zobrazující } \check{\boldsymbol{\eta}} \text{ kofinálně do } \check{\boldsymbol{\mu}}\text{“}\| = \mathsf{o}.$$

V důsledku věty 3 předchozího paragrafu je tudíž pojem kofinálu absolutní pro všechna kardinální čísla ve smyslu modelu $\mathbb{M}$ za předpokladu, že kofinál je větší než $\boldsymbol{\kappa}$.

Ve smyslu modelu $\mathbb{M}$ zkoumejme nyní mohutnost Booleovy algebry $\mathcal{B}_{\mathbf{2}}$ a nejprve spočítejme mohutnost množiny $P_{\mathbf{2}}$. Každá podmínka z $P_{\mathbf{2}}$ je funkcí definovanou na množině mohutnosti menší než $\boldsymbol{\kappa}$ a zobrazující část množiny $\boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{\lambda}$ do $\mathit{2}$. Takovýchto funkcí je

$$\sum_{\boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{\kappa}} (\boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{\lambda})^{\boldsymbol{\mu}} \cdot 2^{\boldsymbol{\mu}} = \sum_{\boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{\kappa}} \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{\mu}} \cdot 2^{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\lambda}$$

v důsledku předpokládané **GCH** a předpokladu $\boldsymbol{\kappa} \in \mathfrak{cf}(\boldsymbol{\lambda})$. Podle lemmatu 4 je také

$$\mathfrak{Card}(\mathcal{B}_{\mathbf{2}}) \mathrel{\underline{\in}} \sum_{\boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{\kappa}^{+}} (\mathfrak{Card}(P_{\mathbf{2}}))^{\boldsymbol{\mu}} = \sum_{\boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{\kappa}^{+}} \lambda^{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{\kappa}} = \boldsymbol{\lambda}$$

opět v důsledku **GCH,** předpokladu $\boldsymbol{\kappa} \in \mathfrak{cf}(\boldsymbol{\lambda})$ a vlastnosti κ^{+}-c.c. uspořádání $\preceq_{\mathbf{2}}$.

Uvedený odhad mohutnosti zkoumané Booleovy algebry uvnitř modelu $\mathbb{M}$ spolu s lemmatem 5 zaručuje vlastnost (3d). Abychom si toto ozřejmili podrobněji, nejprve nahlédněme, že[19)]

$$\mathbb{M}[\mathbf{G}] \models 2^{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\eta} \Rightarrow \mathbb{M} \models 2^{\boldsymbol{\mu}} \mathrel{\underline{\in}} \boldsymbol{\eta}.$$

Vztah je zaručen — při výše prokázaných absolutnostech kardinálních čísel — pouhým faktem, že všechna individua modelu $\mathbb{M}$, která jsou ve smyslu tohoto modelu částmi kardinálního čísla $\boldsymbol{\mu}$, jsou podmnožinami tohoto kardinálního čísla také ve smyslu modelu $\mathbb{M}[\mathbf{G}]$. K dokázání (3d) nyní již stačí pouze uvážit, že pro $\boldsymbol{\lambda} \mathrel{\underline{\in}} \boldsymbol{\mu}$ jest podle pátého lemmatu

$$\mathbb{M}[\mathbf{G}] \models 2^{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\eta} \Rightarrow \mathbb{M} \models \boldsymbol{\eta} \mathrel{\underline{\in}} \mathfrak{Card}(\mathcal{B}_{\mathbf{2}})^{\boldsymbol{\mu}} \mathrel{\underline{\in}} \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{\mu}} = 2^{\boldsymbol{\mu}}.$$

[18)] podrobněji: pro každé $\eta \in \boldsymbol{\kappa}$ a každou množinu po dvou neslučitelných prvků uspořádání $\preceq_{\mathbf{2}}$, jejichž definiční obor má mohutnost η, je možno — podle citovaného lemmatu — odhadnout mohutnost množiny kardinálem $2^{\eta} = \eta^{+}$, takže vůbec každá množina po dvou neslučitelných prvků uspořádání $\preceq_{\mathbf{2}}$ má celkově nanejvýš $\sum_{\eta \in \boldsymbol{\kappa}} \eta^{+} = \boldsymbol{\kappa}$ prvků

[19)] Implikaci můžeme také vyjádřit konstatováním, že $[2^{\boldsymbol{\mu}}]^{\mathbb{M}}$ je menší nebo rovno $[2^{\boldsymbol{\mu}}]^{\mathbb{M}[\mathbf{G}]}$.

V tomto okamžiku jsme schopni dokázat jen jednu nerovnost vztahu (3b), totiž vztah

$$\mathbb{M}[\mathsf{G}] \models \boldsymbol{\mu} \in \mathfrak{cf}(\boldsymbol{\lambda}) \to 2^{\boldsymbol{\mu}} \subseteq \boldsymbol{\lambda},$$

který plyne z odhadu mohutnosti vyšetřované Booleovy algebry ve smyslu modelu $\mathbb{M}$, lemmatu 5 a z faktu

$$\mathbb{M} \models \boldsymbol{\mu} \in \mathfrak{cf}(\boldsymbol{\lambda}) \to 2^{\boldsymbol{\mu}} \subseteq \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\lambda}.$$

Vlastnost (3a) je zaručena lemmatem 1 a faktem, že $\preceq_{\mathbf{2}}$ má vlastnost $\boldsymbol{\mu}$-minorant pro jakékoli $\boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{\kappa}$.

Celá metoda cohenovských rozšíření měla v prvé řadě zajistit vztahy typu (3b). Ve zkoumaném případě potřebujeme po provedení předchozích úvah „pouze“ ukázat, že v modelu $\mathbb{M}[\mathsf{G}]$ existuje $\boldsymbol{\lambda}$ od sebe různých podmnožin kardinálního čísla $\boldsymbol{\kappa}$. Díky celé předchozí konstrukci však již nyní dokončení důkazu nebude tak složité.

Pro jedno každé $\boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{\lambda}$ definujme uvnitř modelu $\mathbb{M}$ individuum $\mathsf{f}_{\boldsymbol{\beta}}$ tak, že $\mathfrak{Dom}(\mathsf{f}_{\boldsymbol{\beta}}) = \breve{\boldsymbol{\kappa}}$ a současně pro $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{\kappa}$ položíme

$$(xii) \qquad \mathsf{f}_{\boldsymbol{\beta}}(\breve{\boldsymbol{\alpha}}) = \bigvee_{p \in P_{\mathbf{2}} \,\&\, p(\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle) = 1} p.$$

Naším prvním cílem je — i nadále uvnitř modelu $\mathbb{M}$ — prokázat

$$(\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{1}}, \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{2}} \in \boldsymbol{\lambda} \;\&\; \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{1}} \neq \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{2}}) \to \| \mathsf{f}_{\boldsymbol{\beta}_1} = \mathsf{f}_{\boldsymbol{\beta}_2} \| = \mathsf{o}.$$

Kdyby existovalo $p \leq_{\mathbf{2}} \| \mathsf{f}_{\boldsymbol{\beta}_1} = \mathsf{f}_{\boldsymbol{\beta}_2} \|$, stačilo by zvolit $\gamma \in \boldsymbol{\kappa}$ tak, aby současně

$$\langle \gamma, \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{1}} \rangle \notin \mathfrak{Dom}(p) \;\&\; \langle \gamma, \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{2}} \rangle \notin \mathfrak{Dom}(p).$$

(Volbu umožňuje předpoklad $\mathfrak{Card}(\mathfrak{Dom}(p)) \in \boldsymbol{\kappa}$.) Při takovéto fixaci by bylo možno dále definovat

$$q = p \cup \{\langle 1, \langle \gamma, \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{1}} \rangle \rangle\} \cup \{\langle 0, \langle \gamma, \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{2}} \rangle \rangle\}.$$

Pak by zcela evidentně nastalo $q \in P_{\mathbf{2}}$ a rovněž tak zřejmě bychom získali $q \preceq_{\mathbf{2}} p$. Rozhodující je si nyní uvědomit, že bychom měli také

$$q \leq_{\mathbf{2}} \mathsf{f}_{\boldsymbol{\beta}_1}(\breve{\gamma}) \leq_{\mathbf{2}} \| \breve{\gamma} \in \mathsf{f}_{\boldsymbol{\beta}_1} \|.$$

Současně pro jakákoli různá x, y je $\| \breve{x} = \breve{y} \| = \mathsf{o}$ a dále $q \wedge \mathsf{f}_{\boldsymbol{\beta}_2}(\breve{\gamma}) = \mathsf{o}$, kterážto fakta by zaručila

$$q \leq_{\mathbf{2}} \| \breve{\gamma} \notin \mathsf{f}_{\boldsymbol{\beta}_2} \| = -\bigvee_{\delta \in \boldsymbol{\kappa}} \mathsf{f}_{\boldsymbol{\beta}_2}(\breve{\delta}) \wedge \| \breve{\delta} = \breve{\gamma} \|.$$

Z nerovností uvedených před okamžikem by však vyplynulo

$$q \leq_{\mathbf{2}} \|\mathsf{f}_{\boldsymbol{\beta}_1} \neq \mathsf{f}_{\boldsymbol{\beta}_2}\|,$$

což je v rozporu s naší volbou.

Pro různá $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2 \in \boldsymbol{\lambda}$ jsme tudíž ukázali $\mathbb{M} \models \|\mathsf{f}_{\boldsymbol{\beta}_1} \neq \mathsf{f}_{\boldsymbol{\beta}_2}\| = \mathbf{1}$. Tedy lemma 13 předchozího paragrafu zaručuje $\mathbf{i}_{\mathsf{G}}(\mathsf{f}_{\boldsymbol{\beta}_1}) \neq \mathbf{i}_{\mathsf{G}}(\mathsf{f}_{\boldsymbol{\beta}_2})$. Prokázali jsme to nejžádanější — druhou nerovnost potřebnou pro

$$\mathbb{M}[\mathsf{G}] \models 2^{\boldsymbol{\kappa}} = \boldsymbol{\lambda}.$$

Lemma 6 (aplikované ve smyslu modelu $\mathbb{M}[\mathsf{G}]$) spolu s prokázanou vlastností (3d) pro ordinální číslo $\boldsymbol{\lambda}$ zajistí vlastnost (3c). ■