§8

FRAENKEL-MOSTOWSKÉHO PERMUTAČNÍ MODELY

V pátém paragrafu jsme ukázali ideu a význam interpretace jedné teorie ve druhé a podrobněji jsme také zkoumali interpretace teorie množin v teorii množin definované omezením objektů na nějakou třídu a mající predikáty $\in$ a $=$ absolutní. Třídy vhodné k definování interpretace můžeme sestrojovat různými metodami. Základní myšlenkou konstrukce interpretací, o kterých pojednáme v tomto paragrafu, je zachovat jako objekty ve smyslu interpretace právě ty objekty, které „mnoho" zobrazení (jistého typu) ponechává na místě (tj. zachovat objekty, které jsou pevnými body „mnoha" z uvažovaných zobrazení).

Naším cílem je nejprve ukázat obecnou metodu[1] konstrukcí interpretací jak teorie množin bez axiomu fundovanosti v teorii množin bez axiomu fundovanosti, tak také interpretací teorie množin s atomy v teorii množin s atomy. Tuto obecnou metodu pak použijeme pro konstrukci tří interpretací, v jejichž smyslu bude po řadě platit:

(1) existuje množina, lineární uspořádání na každé jejíž části je dobrým uspořádáním, a tato množina není konečná podle Tarského, ale je konečná podle Dedekinda (viz dále); navíc tato množina nemá spočetnou část, a tedy neexistuje ani vzájemně jednoznačné zobrazení naší množiny do ω, ani vzájemně jednoznačné zobrazení ω do naší množiny;
(2) existuje množina, kterou lze lineárně uspořádat, kterou však nelze uspořádat dobře;
(3) sjednocení spočetně mnoha spočetných množin nemusí být spočetnou množinou.

Poznamenejme, že z kteréhokoli výše uvedeného tvrzení plyne negace axiomu výběru (viz dále). Právě prokázání nedokazatelnosti axiomu výběru v Zermelo-Fraenkelově teorii množin bez axiomu fundovnosti (za předpokladu její bezespornosti) je nejdůležitějším výsledkem metody permutačních modelů.

Pro interpretace sestrojené v tomto paragrafu bude předpoklad existence urelementů (a tudíž i neplatnosti axiomu fundovanosti) nebo předpoklad existence atomů podstatný pro teorii, kterou interpretujeme. Lze ho však ve všech zmíněných případech a obecněji v dosti široké škále aplikací odstranit[2], aplikujeme-li současně metodu Fraenkel-Mostowského a ideje Cohenovy konstrukce[3]. Naproti

[1] V obecném znění viz [Sp], kde lze rovněž najít citace starších článků.

[2] viz dodatek k §13

[3] viz §11

tomu existence urelementů nebo atomů v teorii, ve které modelujeme, je podstatná pro konstrukci, ale nepodstatná z hlediska interpretovatelnosti. V minulém paragrafu jsme totiž sestrojili jak interpretaci teorie s nekonečně mnoha urelementy, tak také teorie s nekonečně mnoha atomy v teorii ***ZF***. Stačí tedy interpretace typu zkoumaného v tomto paragrafu složit s interpretacemi typů popsaných v předchozím paragrafu a dostaneme interpretace v konzervativním rozšíření teorie ***ZF***.

Konstrukce permutačních modelů v teorii množin s urelementy je tak podobná konstrukci v teorii s atomy, že uvedeme v textu pouze jednu z nich a triviální modifikaci týkající se druhé teorie ponecháme čtenáři. V předchozím paragrafu bylo deklarováno rozhodnutí dát přednost konstrukci v teorii množin s urelementy (a to i s vědomím, že z ryze technických důvodů vhodného kódování užijeme v dodatku k poslednímu paragrafu teorii množin s atomy).

*

Značení. Následující úvahy budeme provádět v teorii

$$\boldsymbol{WZF},\ \mathbf{ZF5}, (\forall w \in \mathfrak{u})(w = \{w\})\ \&\ \text{„}\mathfrak{u}\text{ má spočetnou podmnožinu“}$$

a tuto teorii budeme označovat ***ZF***$\mathfrak{u}$, tj. budeme předpokládat, že je fixována množina urelementů $\mathfrak{u}$, která je alespoň spočetná.

Připomeňme, že třída $W\mathsf{F}(\mathfrak{u})$ byla definována v šestém paragrafu. Opět budeme zcela volně používat vlastní třídy — všechny použité třídy jsou definovány nějakou množinovou formulí, pročež by čtenáři nemělo dělat potíže jakoukoli formuli uvažovanou v tomto paragrafu reformulovat jako formuli pouze s množinovými proměnnými.

Definice (*ZF*$\mathfrak{u}$). Permutací na množině $\mathfrak{u}$ rozumíme vzájemně jednoznačné zobrazení $\mathfrak{u}$ na $\mathfrak{u}$.

Pro každou permutaci $\mathcal{P}$ na množině $\mathfrak{u}$ a pro každou množinu $x \in W\mathsf{F}(\mathfrak{u})$ definujeme hodnotu $\widehat{\mathcal{P}}(x)$ funkce $\widehat{\mathcal{P}}$ transfinitní indukcí. Nejprve pro $w \in \mathfrak{u}$ položíme $\widehat{\mathcal{P}}(w) = \mathcal{P}(w)$. Je-li pro každé $e \in x$ již hodnota $\widehat{\mathcal{P}}(e)$ definována a není-li x prvkem množiny $\mathfrak{u}$, položíme

$$\widehat{\mathcal{P}}(x) = \{\widehat{\mathcal{P}}(e); e \in x\}. \qquad \square$$

Nejdříve nahlédněme, že popis indukčního kroku v definici $\widehat{\mathcal{P}}$ postačuje k definici hodnoty $\widehat{\mathcal{P}}(x)$ pro každou permutaci $\mathcal{P}$ na $\mathfrak{u}$ a každý prvek x třídy $W\mathsf{F}(\mathfrak{u})$. Kdyby totiž pro nějaké $x \in W\mathsf{F}(\mathfrak{u})$ nebylo $\widehat{\mathcal{P}}(x)$ (jednoznačně) definováno, zvolíme α jakožto nejmenší ordinální číslo, pro které existuje x s touto vlastností a navíc takové, že $\tau^{\mathfrak{u}}(x) = \alpha$; dále fixujme množinu x mající uvedené vlastnosti. Evidentně $\alpha \neq \mathit{0}$, protože pro všechny prvky w množiny $\mathfrak{u}$ je $\widehat{\mathcal{P}}(w)$ (jednoznačně) definováno. Avšak pro libovolné $e \in x$, kde $x \in W\mathsf{F}(\mathfrak{u}) - \mathfrak{u}$, je $\tau^{\mathfrak{u}}(e) < \tau^{\mathfrak{u}}(x)$ (viz čtvrté tvrzení lemmatu §6), a proto je pro každé $e \in x$ hodnota $\widehat{\mathcal{P}}(e)$ (jednoznačně) definována. Indukční krok zaručuje, že je (jednoznačně) definována i hodnota $\widehat{\mathcal{P}}(x)$ — spor.

Uvědomme si, že permutace $\mathcal{P}$ na $\mathfrak{u}$ je množinou (neboť $\mathcal{P} \subseteq \mathfrak{u} \times \mathfrak{u}$), avšak $\widehat{\mathcal{P}}$ je zobrazení, jehož definiční obor je $W\mathsf{F}(\mathfrak{u}) \supseteq W\mathsf{F}$, takže je vlastní třídou.

Následující lemma má značný význam pro další konstrukci a zkoumání vlastností interpretace, a to bez ohledu na to, že jeho demonstrace je poměrně jednoduchá.

Zachováme obvyklou symboliku teorie množin a znakem $\circ$ budeme označovat *skládání zobrazení*, přičemž logickou funkci skládání definujeme za pomoci formule

$$Z = X \circ Y \equiv (\forall e)[e \in Z \equiv (\exists e_{\mathbf{1}}, e_{\mathbf{2}}, e_{\mathbf{3}})(e = \langle e_{\mathbf{1}}, e_{\mathbf{3}}\rangle \ \&\ \langle e_{\mathbf{1}}, e_{\mathbf{2}}\rangle \in X \ \&\ \langle e_{\mathbf{2}}, e_{\mathbf{3}}\rangle \in Y)].$$

Lemma 1. *V teorii* $\boldsymbol{ZF}\mathfrak{u}$ *je pro každé dvě permutace* $\mathcal{P}$ *a* $\mathcal{Q}$ *na* $\mathfrak{u}$ *dokazatelné:*

(1) $\widehat{\mathcal{P}}$ *je vzájemně jednoznačné zobrazení* $W\mathsf{F}(\mathfrak{u})$ *na sebe;*
(2) $(\forall \alpha \in \mathsf{On})(\widehat{\mathcal{P}}(v^{\mathfrak{u}}_{\alpha}) = v^{\mathfrak{u}}_{\alpha})$;
(3) $\widehat{\mathcal{P} \circ \mathcal{Q}} = \widehat{\mathcal{P}} \circ \widehat{\mathcal{Q}}$;
(4) $\widehat{\mathcal{P}^{-1}} = \widehat{\mathcal{P}}^{-1}$.

Demonstrace. Pracujme v teorii $\boldsymbol{ZF}\mathfrak{u}$ a buďte $\mathcal{P}$ a $\mathcal{Q}$ libovolné permutace na množině $\mathfrak{u}$.

(1) Prostotu prokazujme indukcí a předpokládejme, že $\alpha \in \mathsf{On}$ je nejmenší β pro které existují $x, y \in v^{\mathfrak{u}}_{\beta}$ & $x \neq y$ & $\widehat{\mathcal{P}}(x) = \widehat{\mathcal{P}}(y)$ (α pak nemůže být limitní). Ordinální číslo α je navíc různé od *0*, neboť $\mathcal{P}$ je vzájemně jednoznačné zobrazení $\mathfrak{u}$ na $\mathfrak{u}$. Jestliže $e \in x$ & $e \notin y$, dostaneme vztah $\widehat{\mathcal{P}}(e) \in \widehat{\mathcal{P}}(x)$ prostě podle definice $\widehat{\mathcal{P}}$. Na druhé straně kdyby bylo $\widehat{\mathcal{P}}(e) \in \widehat{\mathcal{P}}(y)$, musilo by existovat $z \in y$ tak, že $\widehat{\mathcal{P}}(e) = \widehat{\mathcal{P}}(z)$. V takovém případě však máme jak $e \in v^{\mathfrak{u}}_{\alpha-1}$ (uvědomme si, že $e \in x$ a užijme čtvrtý bod lemmatu §6), tak i $z \in v^{\mathfrak{u}}_{\alpha-1}$ (protože $z \in y$), což je ve sporu s indukčním předpokladem.

Zobrazení $\widehat{\mathcal{P}}$ je zobrazením na $W\mathsf{F}(\mathfrak{u})$ v důsledku druhé části vysloveného tvrzení (2), které nyní dokážeme.

(2) Pro důkaz indukčního kroku sporem fixujme $x \in v^{\mathfrak{u}}_{\alpha}$ tak, že $\widehat{\mathcal{P}}(x) \notin v^{\mathfrak{u}}_{\alpha}$ a současně

$$(\forall \beta \in \alpha)(\forall y \in v^{\mathfrak{u}}_{\beta})(\widehat{\mathcal{P}}(y) \in v^{\mathfrak{u}}_{\beta}).$$

Evidentně není α limitní ordinální číslo a rovněž není rovné *0*, můžeme tedy zvolit γ tak, že $\alpha = \gamma + 1$. Za těchto předpokladů pro každé $y \in x$ je $\tau^{\mathfrak{u}}(y) \underline{\in} \gamma$ (viz čtvrtý bod lemmatu §6), a proto $\widehat{\mathcal{P}}''x \subseteq v^{\mathfrak{u}}_{\gamma}$ podle volby α a podle prvního tvrzení lemmatu §6. Prosté užití definice množiny $v^{\mathfrak{u}}_\alpha$ zaručí $\widehat{\mathcal{P}}(x) = \widehat{\mathcal{P}}''x \in v^{\mathfrak{u}}_\alpha$, a přinese tudíž hledaný spor.

Kdyby $\widehat{\mathcal{P}}$ nebylo pro každé $\alpha \in \mathsf{On}$ zobrazením $v^{\mathfrak{u}}_\alpha$ na sebe, mohli bychom zvolit $\alpha \in \mathsf{On}$ jako nejmenší β, pro které $v^{\mathfrak{u}}_\beta - \widehat{\mathcal{P}}''v^{\mathfrak{u}}_\alpha \neq \emptyset$ a vybrat $x \in v^{\mathfrak{u}}_\alpha - \widehat{\mathcal{P}}''v^{\mathfrak{u}}_\alpha$. Není možné, aby x bylo prvkem množiny $\mathfrak{u}$, neboť $\mathcal{P}$ je zobrazení množiny $\mathfrak{u}$ na sebe. Uvědomíme-li si, že podle volby ordinálního čísla α a podle čtvrtého bodu lemmatu z šestého paragrafu je hodnota $\widehat{\mathcal{P}^{-1}}$ definována pro každé $e \in x$, nahlédneme rovnost $x = \widehat{\mathcal{P}}(\{\widehat{\mathcal{P}^{-1}}(e); e \in x\})$, jež je ve sporu s naší fixací.

(3) Opětovně budeme dokazovat indukcí na základě definice $\widehat{\mathcal{P}}$. Je-li

$$\widehat{\mathcal{P}\circ\mathcal{Q}}\restriction v^{\mathfrak{u}}_\alpha = \big(\widehat{\mathcal{P}}\restriction v^{\mathfrak{u}}_\alpha\big)\circ\big(\widehat{\mathcal{Q}}\restriction v^{\mathfrak{u}}_\alpha\big)$$

a je-li $x \subseteq v^{\mathfrak{u}}_\alpha$, jest dle definice rozšiřování permutace a v důsledku čtvrtého bodu lemmatu §6

$$\widehat{\mathcal{P}\circ\mathcal{Q}}(x) = \{\widehat{\mathcal{P}\circ\mathcal{Q}}(e); e \in x\} = \{\widehat{\mathcal{P}}(\widehat{\mathcal{Q}}(e)); e \in x\} = \widehat{\mathcal{P}}(\{\widehat{\mathcal{Q}}(e); e \in x\}) = \widehat{\mathcal{P}}(\widehat{\mathcal{Q}}(x)).$$

(4) Využijeme, že $\mathcal{P}\circ\mathcal{P}^{-1}$ je identitou, a již prokázané tvrzení (3). ■

Definice ($\boldsymbol{ZF}\mathfrak{u}$). (1) Je-li $\mathcal{G}$ grupa permutací na množině $\mathfrak{u}$, definujeme pro každé x ze třídy $\mathsf{WF}(\mathfrak{u})$ množinu $\mathcal{H}(x)$ jako systém těch permutací z $\mathcal{G}$, jejichž rozšíření zachovávají množinu x na místě, tj. položíme

$$\mathcal{H}(x) = \{\mathcal{P} \in \mathcal{G}; \widehat{\mathcal{P}}(x) = x\}.$$

(2) Neprázdný systém $\mathcal{F}$ podgrup grupy permutací $\mathcal{G}$ nazveme **normálním filtrem**, jestliže máme současně:

(a) je-li $\mathcal{I}$ podgrupou grupy $\mathcal{G}$, pak z formule $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ & $\mathcal{J} \in \mathcal{F}$ plyne vztah $\mathcal{I} \in \mathcal{F}$,

(b) $(\mathcal{I} \in \mathcal{F}$ & $\mathcal{J} \in \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{I} \cap \mathcal{J} \in \mathcal{F}$,

(c) je-li $\mathcal{I} \in \mathcal{F}$ a je-li $\mathcal{P} \in \mathcal{G}$, pak $\mathcal{P}\mathcal{I}\mathcal{P}^{-1} = \{\mathcal{P}\circ\mathcal{Q}\circ\mathcal{P}^{-1}; \mathcal{Q} \in \mathcal{I}\} \in \mathcal{F}$.

O normálním filtru permutací na množině $\mathfrak{u}$ řekneme, že **zachovává body**, jestliže navíc máme

(d) pro každé $w \in \mathfrak{u}$ je $\mathcal{H}(w) \in \mathcal{F}$. □

Na základě prvního lemmatu je triviální ověřit, že předešlá definice je smysluplná, tedy např. že $\mathcal{H}(x)$ je grupou a že rovněž množiny permutací popsané v bodech (b) a (c) z definice normálního filtru jsou grupami.

Značení. Teorii $\boldsymbol{ZF}\mathfrak{u}$ s dodatečnými axiomy „$\mathcal{G}$ je grupou (nějakých) permutací na množině $\mathfrak{u}$“ a „$\mathcal{F}$ je normálním filtrem podgrup grupy $\mathcal{G}$ zachovávajícím body“ budeme označovat symboly[4] $\boldsymbol{ZF}\mathfrak{u}\mathcal{F}$.

[4] Parametr $\mathcal{G}$ lze odečíst z parametru $\mathcal{F}$, znak $\boldsymbol{u}$ zachováváme, abychom zdůraznili, že jde o teorii bez axiomu fundovanosti.

Definice ($\boldsymbol{ZF}\mathfrak{u}\mathcal{F}$). Třídu **symetrických množin** Sym (budeme-li chtít zdůraznit závislost na parametru, budeme používat podrobnějšího zápisu $\mathsf{Sym}(\mathcal{F})$) definujeme rovností[5)]

$$\mathsf{Sym} = \{x \in \mathsf{WF}(\mathfrak{u}); \mathcal{H}(x) \in \mathcal{F}\}$$

a dále definujeme třídu **dědičně symetrických množin** HSym (podrobněji značíme $\mathsf{HSym}(\mathcal{F})$) rovností

$$\mathsf{HSym} = \{x \in \mathsf{WF}(\mathfrak{u}); (\exists y)(\mathcal{T}rans(y) \;\&\; x \in y \;\&\; y \subseteq \mathsf{Sym})\}. \qquad \square$$

Ekvivalentně lze také definovat HSym indukcí tak, že pro $x \subseteq v_\alpha^{\mathfrak{u}}$ a za předpokladu, že $v_\alpha^{\mathfrak{u}} \cap \mathsf{HSym}$ je již definováno, položíme

$$x \in \mathsf{HSym} \equiv (x \in \mathsf{Sym} \;\&\; x \subseteq \mathsf{HSym})$$

(přičemž navíc vyžadujeme, aby $\mathfrak{u} \subseteq \mathsf{HSym}$); při prokazování ekvivalence je výhodné použít nejen vícekrát tvrzení následujícího lemmatu, avšak i ideu jeho demonstrace a bod (2) lemmatu 1.

Je zcela zřejmé, že třída HSym je tranzitivní (naproti tomu třída Sym tranzitivní není, a je proto méně vhodná jako parametr při konstrukci interpretací).

Lemma 2. *V teorii $\boldsymbol{ZF}\mathfrak{u}\mathcal{F}$ je dokazatelné:*

(1) *Pro každé $x \in \mathsf{WF}$ je $\mathcal{H}(x) = \mathcal{G}$; speciálně dostáváme $\mathsf{WF} \subseteq \mathsf{HSym}$. Dále jest $\mathfrak{u} \subseteq \mathsf{HSym}$ & $\mathfrak{u} \in \mathsf{HSym}$.*

(2) $(\forall x)(\forall \mathcal{P} \in \mathcal{G})[(x \in \mathsf{Sym} \to \widehat{\mathcal{P}}(x) \in \mathsf{Sym}) \;\&$
$\qquad\qquad\& \;(x \in \mathsf{HSym} \to \widehat{\mathcal{P}}(x) \in \mathsf{HSym})]$.

(3) $x \in \mathsf{HSym} \to [\bigcup x \in \mathsf{HSym} \;\&\; (\mathfrak{P}(x) \cap \mathsf{HSym}) \in \mathsf{HSym}]$.

Demonstrace. Pracujme v teorii $\boldsymbol{ZF}\mathfrak{u}\mathcal{F}$.

(1) Vyslovené tvrzení dokážeme triviálně indukcí podle $\alpha \in On$. Předpokládáme-li

$$(\forall y \in v_\alpha)(\forall \mathcal{P} \in \mathcal{G})(\widehat{\mathcal{P}}(y) = y),$$

pak pro každé $x \subseteq v_\alpha$ a každé $\mathcal{P} \in \mathcal{G}$ dostáváme také $\widehat{\mathcal{P}}(x) = \widehat{\mathcal{P}}''x = x$, pročež rovněž $x \in \mathsf{HSym}$ (uvažte, že $v_{\alpha+1}$ je tranzitivní podle lemmatu z šestého paragrafu a navíc $x \in v_{\alpha+1}$).

Dále pro $w \in \mathfrak{u}$ je $\mathcal{H}(w) \in \mathcal{F}$ podle vlastnosti (d) filtru $\mathcal{F}$, a tedy $w \in \mathsf{Sym}$. Nyní využijeme, že pro každé $w \in \mathfrak{u}$ je w urelementem, a dostaneme $\mathfrak{u} \subseteq \mathsf{HSym}$. Na závěr si stačí uvědomit, že $\mathcal{H}(\mathfrak{u}) = \mathcal{G}$ a že $\mathfrak{u} \cup \{\mathfrak{u}\}$ je tranzitivní množinou.

(2) Pro každé $x \in \mathsf{WF}(\mathfrak{u})$ prokážeme $\mathcal{H}(\widehat{\mathcal{P}}(x)) = \mathcal{P}\mathcal{H}(x)\mathcal{P}^{-1}$. K tomu postačuje užít třetí bod předchozího lemmatu, neboť pro $\mathcal{Q} \in \mathcal{H}(x)$ platí

$$[\widehat{\mathcal{P}} \circ \widehat{\mathcal{Q}} \circ \widehat{\mathcal{P}}^{-1}](\widehat{\mathcal{P}}(x)) = \widehat{\mathcal{P}}(\widehat{\mathcal{Q}}(\widehat{\mathcal{P}}^{-1}(\widehat{\mathcal{P}}(x)))) = \widehat{\mathcal{P}}(\widehat{\mathcal{Q}}(x)) = \widehat{\mathcal{P}}(x).$$

[5)] tzn. jakožto systém těch množin, které dostatečně mnoho permutací ponechává na místě — přičemž sousloví „dostatečně mnoho permutací ponechává x na místě" precizujeme podmínkou, že grupa $\mathcal{H}(x)$ je prvkem filtru $\mathcal{F}$; jako parametr stačí uvést normální filtr, protože již výše jsme zmínili, že příslušná grupa permutací se z něho dá odečíst, následně odečteme rovněž množinu $\mathfrak{u}$

Naopak je-li $\mathcal{R} \in \mathcal{H}(\widehat{\mathcal{P}}(x))$, je tvaru $\mathcal{P} \circ \mathcal{Q} \circ \mathcal{P}^{-1}$ pro nějaké $\mathcal{Q} \in \mathcal{H}(x)$ — stačí totiž položit $\mathcal{Q} = \mathcal{P}^{-1} \circ \mathcal{R} \circ \mathcal{P}$ a uvážit jednak, že $\mathcal{R} = \mathcal{P} \circ (\mathcal{P}^{-1} \circ \mathcal{R} \circ \mathcal{P}) \circ \mathcal{P}^{-1}$, a jednak, že $\widehat{\mathcal{P}}^{-1}(\widehat{\mathcal{R}}(\widehat{\mathcal{P}}(x))) = \widehat{\mathcal{P}}^{-1}(\widehat{\mathcal{P}}(x)) = x$.

Druhé tvrzení je triviálním důsledkem prokázaného a definice třídy HSym, neboť $\mathit{Trans}(x) \to \mathit{Trans}(\widehat{\mathcal{P}}(x))$.

(3) Je-li $e \in y$ & $y \in x$ a $\mathcal{P} \in \mathcal{G}$, je $\widehat{\mathcal{P}}(e) \in \widehat{\mathcal{P}}(y)$ & $\widehat{\mathcal{P}}(y) \in \widehat{\mathcal{P}}(x)$ přímo podle definice $\widehat{\mathcal{P}}$, pročež $\widehat{\mathcal{P}}(\bigcup x) = \widehat{\mathcal{P}}'' \bigcup x \subseteq \bigcup \widehat{\mathcal{P}}(x)$. Aplikujeme-li uvedené navíc na automorfizus $\mathcal{P}^{-1}$ a užijeme-li poslední tvrzení prvního lemmatu, získáme

$$\bigcup \widehat{\mathcal{P}}(x) = \widehat{\mathcal{P}}''\widehat{\mathcal{P}}^{-1}{}'' \bigcup \widehat{\mathcal{P}}(x) = \widehat{\mathcal{P}}''\widehat{\mathcal{P}^{-1}}{}'' \bigcup \widehat{\mathcal{P}}(x) \subseteq \widehat{\mathcal{P}}'' \bigcup \widehat{\mathcal{P}^{-1}}(\widehat{\mathcal{P}}(x)) = \widehat{\mathcal{P}}\Big(\bigcup x\Big).$$

Takže dostáváme pro každé $\mathcal{P} \in \mathcal{H}(x)$ dokonce rovnost $\widehat{\mathcal{P}}(\bigcup x) = \bigcup x$. V důsledku toho je $\bigcup x$ symetrická množina pro každou symetrickou množinu x, což dále zaručí, že uvedená množina je dědičně symetrická pro každou dědičně symetrickou množinu x (je-li $y \ni x$ tranzitivní, je množina $y \cup \{\bigcup x\}$ také tranzitivní).

Pro každé $\mathcal{P} \in \mathcal{H}(x)$ získáme rovněž implikaci $y \subseteq x \to \widehat{\mathcal{P}}(y) \subseteq \widehat{\mathcal{P}}(x) = x$ (podrobněji: $e \in \widehat{\mathcal{P}}(y)$ implikuje $\widehat{\mathcal{P}}^{-1}(e) \in y$, pročež předpoklad $y \subseteq x$ zaručuje $\widehat{\mathcal{P}}^{-1}(e) \in x$, z čehož dostáváme $e = \widehat{\mathcal{P}}(\widehat{\mathcal{P}}^{-1}(e)) \in \widehat{\mathcal{P}}(x) = x$). Tudíž $\mathfrak{P}(x) \cap \mathsf{HSym}$ je symetrická množina pro každou symetrickou množinu x podle předchozího bodu a v důsledku čtvrtého bodu prvního lemmatu. Následně je $\mathfrak{P}(x) \cap \mathsf{HSym}$ dědičně symetrická pro každou dědičně symetrickou množinu x (je-li $y \ni x$ tranzitivní, je $y \cup (\mathfrak{P}(x) \cap \mathsf{HSym}) \cup \{\mathfrak{P}(x) \cap \mathsf{HSym}\}$ rovněž tranzitivní). ■

Dokázané vztahy $\mathit{WF} \subseteq \mathsf{HSym}$ & $\mathfrak{u} \in \mathsf{HSym}$ vizualizujme následujícím jednoduchým diagramu (který však bude jedním ze stavebních kamenů mnohem složitějšího diagramu v dodatku).

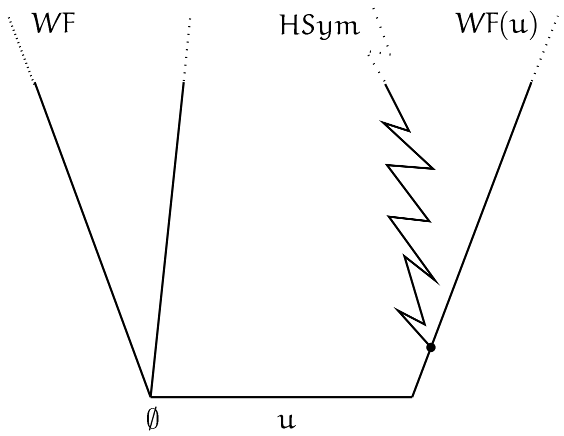

Diagram 1

*

Uvažujme nyní interpretaci typu vyšetřovaného v §5, přičemž roli univerza ve smyslu interpretace bude hrát třída HSym. Takže se budeme zabývat interpretací ♠ jazyka teorie množin definovanou v $\boldsymbol{ZF}\mathrm{u}\mathcal{F}$ (případně v zesíleních této teorie) formulemi

$$(\spadesuit)\qquad \begin{aligned} &x \in \mathsf{HSym},\\ &x \in y,\\ &x = y \end{aligned}$$

(což opět zaručuje, že predikáty náležení a rovnosti ve smyslu sestrojované interpretace budou absolutní).

Zopakujme, že tedy uvažujeme interpretaci jazyka teorie množin v teorii $\boldsymbol{ZF}\mathrm{u}\mathcal{F}^{(\spadesuit)}$, přičemž jazyk teorie $\boldsymbol{ZF}\mathrm{u}\mathcal{F}^{(\spadesuit)}$ je jazyk teorie $\boldsymbol{ZF}\mathrm{u}\mathcal{F}$ obohacený o nový druh proměnných $x^{\spadesuit}$ a o nové predikáty $\in^{\spadesuit}$ a $=^{\spadesuit}$ a systém axiomů teorie $\boldsymbol{ZF}\mathrm{u}\mathcal{F}^{(\spadesuit)}$ je systém axiomů teorie $\boldsymbol{ZF}\mathrm{u}\mathcal{F}$ obohacený o axiomy

$$(\spadesuit\spadesuit)\qquad \begin{aligned} (\exists x^{\spadesuit})(x = x^{\spadesuit}) &\equiv x \in \mathsf{HSym},\\ x \in^{\spadesuit} y &\equiv x \in y,\\ x =^{\spadesuit} y &\equiv x = y. \end{aligned}$$

Dále zopakujme, že ke každé formuli jazyka $\boldsymbol{ZF}\mathrm{u}\mathcal{F}^{(\spadesuit)}$ existuje formule jazyka teorie $\boldsymbol{ZF}\mathrm{u}\mathcal{F}$ s ní ekvivalentní (v teorii $\boldsymbol{ZF}\mathrm{u}\mathcal{F}^{(\spadesuit)}$). Je proto možno reformulovat platnost jednoho každého axiomu ve smyslu interpretace na dokazatelnost jisté formule v teorii $\boldsymbol{ZF}\mathrm{u}\mathcal{F}$. Protože vzhledem k interpretaci ♠ není většinou obtížné nalézt příslušnou formuli, budeme převážně zkoumat platnost axiomů ve smyslu interpretace zkoumáním odpovídajících formulí jazyka teorie $\boldsymbol{ZF}\mathrm{u}\mathcal{F}$, jak jsme ostatně již uvedli v §5.

Věta. *Formule* (♠) *definují interpretaci teorie* $\boldsymbol{WZF}$, **ZF5** *v teorii* $\boldsymbol{ZF}\mathrm{u}\mathcal{F}$.

Demonstrace. Protože třída HSym je tranzitivní, byla platnost axiomu extenzionality ve smyslu interpretace zaručena již v §5.

ZF2: Axiom sjednocení platí ve smyslu interpretace, právě když

$$\boldsymbol{ZF}\mathrm{u}\mathcal{F} \vdash (\forall x \in \mathsf{HSym})(\exists z \in \mathsf{HSym})(\forall e \in \mathsf{HSym})[e \in z \equiv \\ \equiv (\exists y \in \mathsf{HSym})(e \in y \ \&\ y \in x)],$$

což je podle absolutnosti formule (3) z §5 totéž jako

$$\boldsymbol{ZF}\mathrm{u}\mathcal{F} \vdash (\forall x \in \mathsf{HSym})(\exists z \in \mathsf{HSym})(\forall e)[e \in z \equiv (\exists y)(e \in y \ \&\ y \in x)].$$

Užijeme-li třetí bod předchozího lemmatu (dovolující za z položit $\bigcup x$), dostáváme triviálně platnost axiomu sjednocení ve smyslu interpretace.

ZF3: Absolutnost predikátu $x \subseteq y$ byla ukázána v §5, takže prokázat platnost axiomu potence ve smyslu interpretace znamená ukázat

$$\boldsymbol{ZF}\mathrm{u}\mathcal{F} \vdash (\forall x \in \mathsf{HSym})(\exists z \in \mathsf{HSym})(\forall e \in \mathsf{HSym})(e \in z \equiv e \subseteq x),$$

pročež axiom potence ve smyslu interpretace je zřejmým důsledkem třetího tvrzení předchozího lemmatu (stačí položit $z = \mathfrak{P}(x) \cap \mathsf{HSym}$).

ZF4: Nejdůležitějším faktem pro demonstraci platnosti **ZF4** ve smyslu interpretace ♠ jest, že pro jakoukoli formuli $\varphi(x_{\mathbf{1}}, \ldots, x_{\mathbf{k}})$ jazyka teorie množin je[6)]

$$\boldsymbol{ZF}\mathrm{u}\mathcal{F}^{(\spadesuit)} \vdash (\forall \mathcal{P} \in \mathcal{G})(\forall x^\spadesuit_{\mathbf{1}}, \ldots, x^\spadesuit_{\mathbf{k}})[\varphi^\spadesuit \equiv \varphi^\spadesuit(x^\spadesuit_{\mathbf{1}}/\widehat{\mathcal{P}}(x^\spadesuit_{\mathbf{1}}), \ldots, x^\spadesuit_{\mathbf{k}}/\widehat{\mathcal{P}}(x^\spadesuit_{\mathbf{k}}))].$$

Požadované budeme prokazovat metamatematickou indukcí podle složitosti formule φ. Přitom je-li formule φ formulí základní, není co prokazovat, protože

$$\boldsymbol{ZF}\mathrm{u}\mathcal{F}^{(\spadesuit)} \vdash (\forall \mathcal{P} \in \mathcal{G})(\forall x^\spadesuit, y^\spadesuit)[(x^\spadesuit \in y^\spadesuit \equiv \widehat{\mathcal{P}}(x^\spadesuit) \in \widehat{\mathcal{P}}(y^\spadesuit))\ \& \\ \&\ (x^\spadesuit = y^\spadesuit \equiv \widehat{\mathcal{P}}(x^\spadesuit) = \widehat{\mathcal{P}}(y^\spadesuit))]$$

je důsledkem definice hodnoty $\widehat{\mathcal{P}}(x)$ a prostoty funkce $\widehat{\mathcal{P}}$.

Z jiného důvodu (tentokrát v důsledku věty o ekvivalenci a v důsledku definice $(\vartheta_{\mathbf{1}}\ \&\ \vartheta_{\mathbf{2}})^\spadesuit$ resp. $(\neg\vartheta)^\spadesuit$), avšak stejně triviální jsou indukční kroky pro konjunkci a negaci, je např. třeba nahlédnout, že v teorii $\boldsymbol{ZF}\mathrm{u}\mathcal{F}^{(\spadesuit)}$ je dokazatelná formule

$$\big((\forall \mathcal{P} \in \mathcal{G})(\forall x^\spadesuit_{\mathbf{1}}, \ldots, x^\spadesuit_{\mathbf{k}})[\varphi^\spadesuit_{\mathbf{1}} \equiv \varphi^\spadesuit_{\mathbf{1}}(x^\spadesuit_{\mathbf{1}}/\widehat{\mathcal{P}}(x^\spadesuit_{\mathbf{1}}), \ldots, x^\spadesuit_{\mathbf{k}}/\widehat{\mathcal{P}}(x^\spadesuit_{\mathbf{k}}))]\ \& \\ \&\ (\forall \mathcal{P} \in \mathcal{G})(\forall x^\spadesuit_{\mathbf{1}}, \ldots, x^\spadesuit_{\mathbf{k}})[\varphi^\spadesuit_{\mathbf{2}} \equiv \varphi^\spadesuit_{\mathbf{2}}(x^\spadesuit_{\mathbf{1}}/\widehat{\mathcal{P}}(x^\spadesuit_{\mathbf{1}}), \ldots, x^\spadesuit_{\mathbf{k}}/\widehat{\mathcal{P}}(x^\spadesuit_{\mathbf{k}}))]\big) \rightarrow \\ \rightarrow (\forall \mathcal{P} \in \mathcal{G})(\forall x^\spadesuit_{\mathbf{1}}, \ldots, x^\spadesuit_{\mathbf{k}})[(\varphi_{\mathbf{1}}\ \&\ \varphi_{\mathbf{2}})^\spadesuit \equiv (\varphi_{\mathbf{1}}\ \&\ \varphi_{\mathbf{2}})^\spadesuit(x^\spadesuit_{\mathbf{1}}/\widehat{\mathcal{P}}(x^\spadesuit_{\mathbf{1}}), \ldots, x^\spadesuit_{\mathbf{k}}/\widehat{\mathcal{P}}(x^\spadesuit_{\mathbf{k}}))].$$

Jen o malinko netriviálnější je indukční krok pro kvantifikaci (např. univerzální), při němž pro jakoukoli formuli $\varphi(x_{\mathbf{1}}, \ldots, x_{\mathbf{k+1}})$ zkoumáme formuli $(\forall x_{\mathbf{k+1}})\varphi$. Podle indukčního předpokladu jest

$$\boldsymbol{ZF}\mathrm{u}\mathcal{F}^{(\spadesuit)} \vdash (\forall \mathcal{P} \in \mathcal{G})(\forall x^\spadesuit_{\mathbf{1}}, \ldots, x^\spadesuit_{\mathbf{k}}, x^\spadesuit_{\mathbf{k+1}})[\varphi^\spadesuit \equiv \\ \equiv \varphi^\spadesuit(x^\spadesuit_{\mathbf{1}}/\widehat{\mathcal{P}}(x^\spadesuit_{\mathbf{1}}), \ldots, x^\spadesuit_{\mathbf{k}}/\widehat{\mathcal{P}}(x^\spadesuit_{\mathbf{k}}), x^\spadesuit_{\mathbf{k+1}}/\widehat{\mathcal{P}}(x^\spadesuit_{\mathbf{k+1}}))].$$

Aplikujme distribuci kvantifikace, dostaneme v logice dokazatelnost formule

$$(\forall \mathcal{P} \in \mathcal{G})(\forall x^\spadesuit_{\mathbf{1}}, \ldots, x^\spadesuit_{\mathbf{k}}, x^\spadesuit_{\mathbf{k+1}})[\varphi^\spadesuit \equiv \\ \equiv \varphi^\spadesuit(x^\spadesuit_{\mathbf{1}}/\widehat{\mathcal{P}}(x^\spadesuit_{\mathbf{1}}), \ldots, x^\spadesuit_{\mathbf{k}}/\widehat{\mathcal{P}}(x^\spadesuit_{\mathbf{k}}), x^\spadesuit_{\mathbf{k+1}}/\widehat{\mathcal{P}}(x^\spadesuit_{\mathbf{k+1}}))] \rightarrow \\ \rightarrow (\forall \mathcal{P} \in \mathcal{G})(\forall x^\spadesuit_{\mathbf{1}}, \ldots, x^\spadesuit_{\mathbf{k}})[(\forall x^\spadesuit_{\mathbf{k+1}})\varphi^\spadesuit \equiv \\ \equiv (\forall x^\spadesuit_{\mathbf{k+1}})\varphi^\spadesuit(x^\spadesuit_{\mathbf{1}}/\widehat{\mathcal{P}}(x^\spadesuit_{\mathbf{1}}), \ldots, x^\spadesuit_{\mathbf{k}}/\widehat{\mathcal{P}}(x^\spadesuit_{\mathbf{k}}), x^\spadesuit_{\mathbf{k+1}}/\widehat{\mathcal{P}}(x^\spadesuit_{\mathbf{k+1}}))].$$

Na závěr indukčního kroku pro kvantifikaci si tudíž stačí uvědomit, že v teorii $\boldsymbol{ZF}\mathrm{u}\mathcal{F}^{(\spadesuit)}$ je dokazatelná formule

$$(\forall \mathcal{P} \in \mathcal{G})(\forall x^\spadesuit_{\mathbf{1}}, \ldots, x^\spadesuit_{\mathbf{k}})[(\forall x^\spadesuit_{\mathbf{k+1}})\varphi^\spadesuit(x^\spadesuit_{\mathbf{1}}/\widehat{\mathcal{P}}(x^\spadesuit_{\mathbf{1}}), \ldots, x^\spadesuit_{\mathbf{k}}/\widehat{\mathcal{P}}(x^\spadesuit_{\mathbf{k}}), x^\spadesuit_{\mathbf{k+1}}/\widehat{\mathcal{P}}(x^\spadesuit_{\mathbf{k+1}})) \equiv \\ \equiv (\forall x^\spadesuit_{\mathbf{k+1}})\varphi^\spadesuit(x^\spadesuit_{\mathbf{1}}/\widehat{\mathcal{P}}(x^\spadesuit_{\mathbf{1}}), \ldots, x^\spadesuit_{\mathbf{k}}/\widehat{\mathcal{P}}(x^\spadesuit_{\mathbf{k}}))],$$

protože $\widehat{\mathcal{P}}''\mathsf{HSym}$ je *přesně* třída HSym (viz druhý bod druhého lemmatu).

---

6) Zde se autorovi zdá přehlednější se přidržet formulace užívající druh proměnných $x^\spadesuit$, nicméně i v tomto případě by bylo možno formulovat potřebné dokazatelnosti užívajíce pouze jazyk teorie $\boldsymbol{ZF}\mathrm{u}\mathcal{F}$.

Tudíž speciálně pro libovolnou formuli $\varphi(e, y, x_{\mathbf{1}}, \ldots, x_{\mathbf{n}})$ jazyka teorie množin jsme v teorii $\boldsymbol{ZF}\mathfrak{u}\mathcal{F}^{(\spadesuit)}$ dokázali formuli

$$(\forall \mathcal{P} \in \mathcal{H}(x_{\mathbf{1}}) \cap \ldots \cap \mathcal{H}(x_{\mathbf{n}}))(\forall e^{\spadesuit}, y^{\spadesuit})[\varphi^{\spadesuit} \equiv \varphi^{\spadesuit}(e^{\spadesuit}/\widehat{\mathcal{P}}(e^{\spadesuit}), y^{\spadesuit}/\widehat{\mathcal{P}}(y^{\spadesuit}))].$$

Pro prokázání schématu nahrazení ve smyslu interpretace $\spadesuit$ je proto zcela postačující pro libovolnou formuli $\psi(e, y, x_{\mathbf{1}}, \ldots, x_{\mathbf{n}})$ jazyka teorie $\boldsymbol{ZF}\mathfrak{u}$ prokázat[7] dokazatelnost následující implikace *v teorii* $\boldsymbol{ZF}\mathfrak{u}\mathcal{F}$

$$\begin{aligned}(\forall x_{\mathbf{1}}, \ldots, x_{\mathbf{n}} \in \mathsf{HSym})\big[(\forall y, e, e_{\mathbf{1}} \in \mathsf{HSym})\big([(\psi \ \&\ \psi(e/e_{\mathbf{1}})) \rightarrow e = e_{\mathbf{1}}] \ \&\\ \&\ (\forall \mathcal{P} \in \mathcal{H}(x_{\mathbf{1}}) \cap \ldots \cap \mathcal{H}(x_{\mathbf{n}}))[\psi \equiv \psi(e/\widehat{\mathcal{P}}(e), y/\widehat{\mathcal{P}}(y))]\big) \rightarrow\\ \rightarrow (\forall x \in \mathsf{HSym})(\exists z \in \mathsf{HSym})(\forall e \in \mathsf{HSym})[e \in z \equiv (\exists y \in \mathsf{HSym})(y \in x \ \&\ \psi)]\big].\end{aligned}$$

Pracujme nadále v teorii $\boldsymbol{ZF}\mathfrak{u}\mathcal{F}$ a pro jakoukoli formuli ψ a pro jakékoli parametry $x_{\mathbf{1}}, \ldots, x_{\mathbf{n}} \in \mathsf{HSym}$ předpokládejme

$$\begin{aligned}(\forall y, e, e_{\mathbf{1}} \in \mathsf{HSym})\big([(\psi \ \&\ \psi(e/e_{\mathbf{1}})) \rightarrow e = e_{\mathbf{1}}] \ \&\\ \&\ (\forall \mathcal{P} \in \mathcal{H}(x_{\mathbf{1}}) \cap \ldots \cap \mathcal{H}(x_{\mathbf{n}}))[\psi \equiv \psi(e/\widehat{\mathcal{P}}(e), y/\widehat{\mathcal{P}}(y))]\big).\end{aligned}$$

Za tohoto předpokladu potřebujeme dokázat formuli

$$(\forall x \in \mathsf{HSym})(\exists z \in \mathsf{HSym})(\forall e \in \mathsf{HSym})[e \in z \equiv (\exists y \in \mathsf{HSym})(y \in x \ \&\ \psi)],$$

která je v důsledku tranzitivity třídy HSym ekvivalentní formuli[8]

$$(\forall x \in \mathsf{HSym})(\exists z \in \mathsf{HSym})(\forall e \in \mathsf{HSym})[e \in z \equiv (\exists y)(y \in x \ \&\ \psi)].$$

Pro dané $x \in \mathsf{HSym}$ definujme $z = \{e \in \mathsf{HSym}; (\exists y)(y \in x \ \&\ \psi)\}$. Za našich předpokladů formule $\psi \ \&\ e \in \mathsf{HSym} \ \&\ y \in \mathsf{HSym}$ „reprezentuje“ funkci, a tedy třída z je množinou v důsledku schématu nahrazení. Na závěr již postačuje si uvědomit, že z je nadto symetrickou množinou, neboť druhá část našeho předpokladu implikuje $\mathcal{H}(z) \supseteq \mathcal{H}(x) \cap \mathcal{H}(x_{\mathbf{1}}) \cap \ldots \cap \mathcal{H}(x_{\mathbf{n}})$.

ZF5: Axiom nekonečna ve smyslu interpretace je důsledkem $\mathsf{WF} \subseteq \mathsf{HSym}$ a absolutnosti formule (27) z pátého paragrafu. ■

Uvědomme si, že v pátém paragrafu jsme ukázali absolutnost formule definující $e \in \mathfrak{P}(x)$ (tzn. absolutnost inkluze, viz první formule ze seznamu §5) v interpretaci definované pomocí třídy HSym. Naproti tomu formule $z = \mathfrak{P}(x)$ *nemusí* být absolutní, protože v teorii $\boldsymbol{ZF}\mathfrak{u}\mathcal{F}$ z předpokladu $x \in \mathsf{HSym}$ *neplyne* formule $\mathfrak{P}(x) \in \mathsf{HSym}$.

*

[7] Srovnej demonstraci platnosti **ZF4** v §6.

[8] V obecném případě však uvedená formule již nemusí být ekvivalentní formuli

$$(\forall x \in \mathsf{HSym})(\exists z \in \mathsf{HSym})(\forall e)[e \in z \equiv (\exists y)(y \in x \ \&\ \psi)].$$

Aplikace 1. V teorii $\boldsymbol{ZF}\mathfrak{u}$ fixujme grupu $\mathcal{G}$ jakožto grupu všech permutací na množině $\mathfrak{u}$. Nechť $\mathcal{F}$ je filtr generovaný právě všemi grupami tvaru $\mathcal{H}(w)$ pro $w \in \mathfrak{u}$. V takovémto případě bude podgrupa $\mathcal{I}$ grupy $\mathcal{G}$ prvkem $\mathcal{F}$, právě když existuje konečně mnoho prvků $w_1, \ldots, w_n$ množiny $\mathfrak{u}$ tak, že $\mathcal{H}(w_1) \cap \ldots \cap \mathcal{H}(w_n) \subseteq \mathcal{I}$. Počet těchto prvků je *matematické* přirozené číslo (tedy $n \in \omega$); formalizace uvedené ideje tedy vede k definici[9)]

$$\begin{aligned}\mathcal{F} = \{\mathcal{I};\ „\mathcal{I} \text{ je podgrupa grupy } \mathcal{G}\text{“} \ \&\ (\exists f)\big(\mathfrak{Dom}(f) \in \omega \ \&\ \mathcal{F}nc(f)\ \& \\ \&\, \mathfrak{Rng}(f) \subseteq \mathfrak{u} \ \&\ (\forall \mathcal{P} \in \mathcal{G})[(\forall m \in \mathfrak{Dom}(f))(\mathcal{P}(f(m)) = f(m) \rightarrow \mathcal{P} \in \mathcal{I})]\big)\}.\end{aligned}$$

Jinak řečeno: při zvoleném $\mathcal{G}$ je filtr $\mathcal{F}$ ten nejmenší možný normální filtr zachovávající body. Výše[10)] jsme v teorii $\boldsymbol{ZF}\mathfrak{u}\mathcal{F}$ dokázali

$$(\forall w \in \mathfrak{u})(\forall \mathcal{P} \in \mathcal{G})(\mathcal{P}\mathcal{H}(w)\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{H}(\mathcal{P}(w))),$$

pro jakkoli fixovanou grupu $\mathcal{G}$ permutací na množině $\mathfrak{u}$. Z tohoto pozorování vyplývá vlastnost (c) pro filtr $\mathcal{F}$, protože pak vztah $\mathcal{H}(w_1) \cap \ldots \cap \mathcal{H}(w_n) \subseteq \mathcal{I}$ implikuje vztah $\mathcal{H}(\mathcal{P}(w_1)) \cap \ldots \cap \mathcal{H}(\mathcal{P}(w_n)) \subseteq \mathcal{P}\mathcal{I}\mathcal{P}^{-1}$.

Binární predikát „relace $\leq$ je lineárním uspořádáním na množině z“ je podle §5 definován omezenou formulí, takže je absolutní v důsledku tranzitivity třídy HSym. Připomeňme, že uspořádání $\leq$ je na množině z dobré, jestliže navíc

$$(\forall y \subseteq z)[y \neq \emptyset \rightarrow (\exists e \in y)(\forall x \in y)(e \leq x)],$$

a proto predikát „být dobrým uspořádáním“ *nemusí* být absolutní ve smyslu interpretace ♠ definované v teorii $\boldsymbol{ZF}\mathfrak{u}\mathcal{F}$ (může existovat $y \subseteq z \ \&\ y \notin \mathsf{HSym}$ bez nejmenšího prvku). Nicméně podformule

$$y \neq \emptyset \rightarrow (\exists e \in y)(\forall x \in y)(e \leq x)$$

absolutní je (opět získáme jako důsledek tranzitivity třídy HSym), pročež je-li prvek HSym relace, která je dobrým uspořádáním, je nutně i dobrým uspořádáním ve smyslu interpretace.

---

9) Zápis $(\exists n \in \omega)(\exists w_1, \ldots, w_n \in \mathfrak{u})(\mathcal{H}(w_1) \cap \ldots \cap \mathcal{H}(w_n) \subseteq \mathcal{I})$ sice „vyjadřuje“ žádané, ale obecně *není* formulí, neboť číslo n nemusí být metamatematickým přirozeným číslem, a tudíž počet proměnných $w_1, \ldots, w_n$ může být příliš velký na to, aby uvedený zápis byl správně vytvořenou formulí. Takže formulaci „existují $w_1, \ldots, w_n \in \mathfrak{u}$“ sice budeme (pro její přehlednost) v dalším textu zcela volně užívat, musíme si však být vědomi, že bychom ji měli přesněji vyjadřovat ve tvaru „existuje množinová funkce f, jejíž definiční obor je přirozeným číslem a jejíž obor hodnot je částí množiny $\mathfrak{u}$“. Navíc soustava symbolů „$\mathcal{H}(w_1) \cap \ldots \cap \mathcal{H}(w_n)$“ (užitá při volnějším vyjadřování) *nemusí* být termem (logickou funkci aplikujeme n-krát, přičemž číslo n nemusí být metamatematickým přirozeným číslem). Při využití výše uvažované množinové funkce f však množinu vyjádřenou uvedenou soustavou symbolů můžeme zcela korektně zapsat ve tvaru $\{\mathcal{P} \in \mathcal{G}; (\forall w \in \mathfrak{Rng}(f))(\mathcal{P} \in \mathcal{H}(w))\}$. Přepis zmíněných slovních spojení do formule by měl být nyní zcela zřejmý.

10) viz důkaz druhého bodu druhého lemmatu

Pracujme v teorii $\boldsymbol{ZF}\mathfrak{u}\mathcal{F}$ a parametry $\mathcal{G},\mathcal{F}$ buďtež definovány způsobem popsaným výše. Předpokládejme, že $\leq$ je prvkem HSym a je lineárním uspořádáním na množině $z\in\mathsf{HSym}\ \&\ z\subseteq\mathfrak{u}$. Pak musí existovat $w_1,\ldots,w_n\in\mathfrak{u}$ takové, že $\mathcal{H}(w_1)\cap\ldots\cap\mathcal{H}(w_n)\subseteq\mathcal{H}(\leq)$. Pro důkaz sporem předpokládejme dále, že existují $e_1,e_2\in z-\{w_1,\ldots,w_n\}\ \&\ e_1\neq e_2$. Nechť $\mathcal{P}\in\mathcal{G}$ je ta permutace na množině $\mathfrak{u}$, která je identická na množině $\mathfrak{u}-\{e_1,e_2\}$, a nadto taková, že $\mathcal{P}(e_1)=e_2\ \&\ \mathcal{P}(e_2)=e_1$. Pak $\mathcal{P}\in\mathcal{H}(w_1)\cap\ldots\cap\mathcal{H}(w_n)$, tudíž $\widehat{\mathcal{P}}(\leq)=\leq$. Protože $\leq$ je lineární uspořádání na z, musí být buďto $e_1\leq e_2$ nebo $e_2\leq e_1$. Jinými slovy: alespoň jedna dvojice z dvojic $\langle e_1,e_2\rangle$ a $\langle e_2,e_1\rangle$ je v relaci $\leq$. V každém případě však také $\widehat{\mathcal{P}}$-obraz takovéto dvojice je v množině $\widehat{\mathcal{P}}(\leq)=\leq$. Protože rovnost $\widehat{\mathcal{P}}(\langle w,w'\rangle)=\langle\mathcal{P}(w),\mathcal{P}(w')\rangle$ je důsledkem definice zobrazení $\widehat{\mathcal{P}}$ pro libovolné $w,w'\in\mathfrak{u}$, je avšak tento obraz druhou z uvedených dvojic. Takže jsme získali $e_1\leq e_2\ \&\ e_2\leq e_1$. Ze slabé antisymetrie však v takovém případě dostáváme $e_1=e_2$, což je spor. Ukázali jsme proto, že z musí být konečná podle Tarského (protože $z-\{w_1,\ldots,w_n\}$ musí být maximálně jednoprvková). Každé lineární uspořádání na množině konečné podle Tarského je však dobré (viz např. 6.3 §6 kap. I [B-Š]), a tedy také dobré ve smyslu interpretace.

Přijali jsme předpoklad existence spočetné podmnožiny množiny $\mathfrak{u}$, pročež nemůže existovat n takové, že $\mathfrak{u}\approx n\ \&\ n\in\omega$. Tím spíše nemůže existovat $f\in\mathsf{HSym}\ \&\ \mathcal{F}nc(f)\ \&\ \mathcal{F}nc(f^{-1})\ \&\ \mathfrak{Dom}(f)\in\omega\ \&\ \mathfrak{Rng}(f)=\mathfrak{u}$, a tedy $\mathfrak{u}$ není konečná podle Tarského ve smyslu interpretace ♠ v teorii $\boldsymbol{ZF}\mathfrak{u}\mathcal{F}$ s výše popsanými fixacemi konstant $\mathcal{G},\mathcal{F}$ (viz např. 6.20 §6 kap. I [B-Š]).

Připomeňme, že množina je **konečná podle Dedekinda**[11)], jestliže ji není možné vzájemně jednoznačně zobrazit na její vlastní část, tj. konečnost podle Dedekinda je predikát definovaný pomocí formule

$$\neg(\exists y\subseteq x)[x\neq y\ \&\ (\exists f)(\mathcal{F}nc(f)\ \&\ \mathcal{F}nc(f^{-1})\ \&\ \mathfrak{Dom}(f)=x\ \&\ \mathfrak{Rng}(f)=y)].$$

Naším dalším cílem je ukázat, že ve smyslu interpretace *je* $\mathfrak{u}$ konečná podle Dedekinda.

Budiž $f\in\mathsf{HSym}$ vzájemně jednoznačné zobrazení $\mathfrak{u}$ na $y\subseteq\mathfrak{u}\ \&\ y\neq\mathfrak{u}$ (pak také množina $y=\mathfrak{Rng}(f)$ je prvek třídy HSym). Zvolme $w_1,\ldots,w_n\in\mathfrak{u}$ tak, že $\mathcal{H}(w_1)\cap\ldots\cap\mathcal{H}(w_n)\subseteq\mathcal{H}(f)$, a dále zvolme $e_1\in\mathfrak{u}-\{w_1,\ldots,w_n\}$ takové, že $f(e_1)\neq e_1$. Tato volba je možná neboť kdyby $f\restriction(\mathfrak{u}-\{w_1,\ldots,w_n\})$ byla identitou,

11) V Zermelo-Fraenkelově teorii množin je dokazatelné, že každá množina konečná podle Tarského je také konečná podle Dedekinda (viz např. 6.4 kap. I [B-Š]). Máme-li k dispozici axiom výběru, je možno dokázat i druhou implikaci: Jestliže x není konečná podle Tarského, ukážeme matematickou indukcí, že každé přirozené číslo je možno vzájemně jednoznačně zobrazitelné do množiny x. Předpoklad **AC** zaručí, že množina x má nějakou mohutnost κ; evidentně $\omega\in\kappa$. Takže množinu ω můžeme vzájemně jednoznačně zobrazit na podmnožinu množiny x a na základě tohoto zobrazení sestrojíme vzájemně jednoznačné zobrazení množiny x na její *vlastní* část (ω lze vzájemně jednoznačně zobrazit např. na množinu sudých čísel), neboli x není konečná podle Dedekinda.

muselo by f zobrazovat konečnou množinu $\{w_1, \ldots, w_n\}$ na její vlastní část, což je vyloučeno pro jakékoli vzájemně jednoznačné zobrazení. Jako poslední fixaci prvku množiny $\mathfrak{u}$ vyberme urelement $e_2 \in \mathfrak{u} - \{w_1, \ldots, w_n, e_1, f(e_1)\}$ a na závěr zvolme ještě permutaci $\mathcal{P}$ na $\mathfrak{u}$, která je na $\mathfrak{u} - \{e_1, e_2\}$ identitou a $\mathcal{P}(e_1) = e_2$ (a následně $\mathcal{P}(e_2) = e_1$). Pak

$$\langle f(e_1), e_2\rangle = \langle \mathcal{P}(f(e_1)), \mathcal{P}(e_1)\rangle = \widehat{\mathcal{P}}(\langle f(e_1), e_1\rangle) \in \widehat{\mathcal{P}}(f) = f$$

protože $\mathcal{P}(f(e_1)) = f(e_1)$ (neboť $f(e_1)$ je různé jak od e_1, tak i od e_2), v důsledku $\langle f(e_1), e_1\rangle \in f$ & $\widehat{\mathcal{P}}(f) = f$ (výše jsme již uvedli, že pro libovolné $w, w' \in \mathfrak{u}$ je vždy $\widehat{\mathcal{P}}(\langle w, w'\rangle) = \langle \mathcal{P}(w), \mathcal{P}(w')\rangle$). Vztah $\langle f(e_1), e_2\rangle \in f$ je však ve sporu s triviálním vztahem $\langle f(e_1), e_1\rangle \in f$, neboť jsme předpokládali, že f je prostá funkce.

Kdyby existovala ve smyslu interpretace spočetná část $\mathfrak{u}$, bylo by možno ji ve smyslu interpretace lineárně uspořádat uspořádáním, které není dobré (např. jako záporná celá čísla). Naopak $\mathfrak{u}$ není ve smyslu interpretace vzájemně jednoznačně zobrazitelná do ω, protože $\mathfrak{u}$ není ve smyslu interpretace konečná podle Tarského, a tedy ji není možno ve smyslu interpretace vzájemně jednoznačně zobrazit na konečné přirozené číslo.

Pro zdůraznění předveďme na konkrétním příkladu prozkoumaném v aplikaci 1 základní ideu permutačních modelů. Množina urelementů $\mathfrak{u}$ je nekonečná a existuje mnoho lineárních uspořádání na jejích spočetných částech. Žádné lineární uspořádání na nekonečné části množiny $\mathfrak{u}$ však není dědičně symetrickou množinou (pří zvolených fixacích), takže je-li $\leq$ lineárním uspořádáním na části $\mathfrak{u}$ ve smyslu interpretace ♠, je ve skutečnosti $\leq$ lineárním uspořádáním na konečné části $\mathfrak{u}$, pročež je dobrým uspořádáním. Analogicky množina $\mathfrak{u}$ má spočetnou část, a proto existuje mnoho vzájemně jednoznačných zobrazení $\mathfrak{u}$ na její vlastní podmnožinu a mnoho vzájemně jednoznačných zobrazení ω do $\mathfrak{u}$. Žádné takové zobrazení však není dědičně symetrickou množinou.

Aplikace 2. Nechť množina $\mathfrak{u}$ je uspořádána uspořádáním $\triangleleft$ jako racionální čísla (tj. pracujme v $\boldsymbol{ZF}\mathfrak{u}$ s dodatečným axiomem „$\mathfrak{u}$ je spočetná“; obohaťme jazyk o novou konstantu $\triangleleft$ a přidejme axiom, zaručující zmíněnou vlastnost tohoto uspořádání). Grupa $\mathcal{G}$ budiž nyní grupou všech permutací $\mathcal{P}$ na množině $\mathfrak{u}$, které zachovávají uspořádání $\triangleleft$ (tj. $w' \triangleleft w \equiv \mathcal{P}(w') \triangleleft \mathcal{P}(w)$). Nechť $\mathcal{F}$ je filtr generovaný všemi *podgrupami grupy* $\mathcal{G}$ tvaru $\mathcal{H}(w)$ pro $w \in \mathfrak{u}$. Filtr $\mathcal{F}$ je tedy stejného tvaru jako v první aplikaci, ale pro jiné $\mathcal{G}$ (a tudíž i podgrupy $\mathcal{G}$ jsou jiné).

Je zcela zřejmé, že ve smyslu interpretace ♠ (v teorii $\boldsymbol{ZF}\mathfrak{u}\mathcal{F}$ s konstantami $\triangleleft, \mathcal{G}, \mathcal{F}$ definovanými jak výše uvedeno a s formulemi (♠♠) jakožto axiomy) lze tedy množinu $\mathfrak{u}$ lineárně uspořádat ($\mathcal{H}(\triangleleft) = \mathcal{G}$, a proto $\triangleleft \in \mathsf{HSym}$). Předpokládejme, že $\leq \in \mathsf{HSym}$ a že $\leq$ je dobré uspořádání na množině $\mathfrak{u}$ ve smyslu vyšetřované interpretace. Pak existují urelementy $w_1, \ldots, w_n$ tak, že $\mathcal{H}(w_1) \cap \ldots \cap \mathcal{H}(w_n) \subseteq \mathcal{H}(\leq)$. Množina $\mathfrak{u} - \{w_1, \ldots, w_n\}$ je prvkem třídy HSym, neboť

$$\mathcal{P} \in \mathcal{H}(w_1) \cap \ldots \cap \mathcal{H}(w_n) \to \widehat{\mathcal{P}}(\mathfrak{u} - \{w_1, \ldots, w_n\}) = \mathfrak{u} - \{w_1, \ldots, w_n\}.$$

Zcela evidentně $\mathfrak{u} - \{w_1, \ldots, w_n\} \neq \emptyset$, takže by vlastnost dobrého uspořádání měla zaručit existenci $w \in \mathfrak{u} - \{w_1, \ldots, w_n\}$, které je v této množině nejmenší vzhledem k dobrému uspořádání $\leq$. Protože uspořádání $\triangleleft$ je husté a bez největšího a nejmenšího prvku, je možno volit $e \in \mathfrak{u} - \{w_1, \ldots, w_n, w\}$ tak, aby pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ platilo $w \triangleleft w_i \equiv e \triangleleft w_i$. V důsledku tohoto způsobu volby urelementu e existuje permutace $\mathcal{P} \in \mathcal{G}$ tak, že $\mathcal{P} \restriction \{w_1, \ldots, w_n\}$ je identitou a $\mathcal{P}(w) = e$. Volba permutace $\mathcal{P}$ zaručuje $\widehat{\mathcal{P}}(\leq) = \leq$ a dále společně s volbou w jako nejmenšího prvku množiny $\mathfrak{u} - \{w_1, \ldots, w_n\}$ zaručují $\mathcal{P}^{-1}(w) \in \mathfrak{u} - \{w_1, \ldots, w_n\}$ a $\langle w, \mathcal{P}^{-1}(w)\rangle \in \leq$. Dostáváme tudíž

$$\langle e, w\rangle = \langle \mathcal{P}(w), w\rangle = \widehat{\mathcal{P}}(\langle w, \mathcal{P}^{-1}(w)\rangle \in \widehat{\mathcal{P}}(\leq) = \leq,$$

což je ve sporu s volbou w jakožto nejmenšího prvku množiny $\mathfrak{u} - \{w_1, \ldots, w_n\}$ v uspořádání $\leq$, protože $\mathcal{P}(w) = e \neq w$.

Analogicky[12)] jako v předchozí aplikaci ukážeme, že množina $\mathfrak{u}$ *je* ve smyslu interpretace konečná podle Dedekinda.

Aplikace 2′. Budeme uvažovat stejnou grupu jako v předchozím případě, ale změníme filtr.

Pro $z \subseteq \mathfrak{u}$ definujme grupu

$$\mathcal{K}(z) = \{\mathcal{P} \in \mathcal{G}; (\forall w \in z)(\mathcal{P}(w) = w)\} \ (= \bigcap\{\mathcal{H}(w); w \in z\})$$

a nechť

$$\mathcal{F} = \{\mathcal{I}; \text{„}\mathcal{I} \text{ je podgrupa grupy } \mathcal{G}\text{“} \ \& \ (\exists w \in \mathfrak{u})(\mathcal{K}(\{e; e \triangleleft w\}) \subseteq \mathcal{I})\}.$$

Zřejmě takto definovaný filtr je nadmnožinou filtru z předchozí aplikace (neboť grupa $\mathcal{K}(\{e; e \triangleleft w\})$ je podgrupou jakékoli grupy tvaru $\mathcal{H}(w_1) \cap \ldots \cap \mathcal{H}(w_n)$, kde $w_1, \ldots, w_n$ je konečně mnoho prvků množiny $\mathfrak{u}$ s vlastností $w_1 \triangleleft w \ \& \ldots \& \ w_n \triangleleft w$), pročež nyní máme více dědičně symetrických množin. Nicméně analogickou úvahou jako v minulé aplikaci ukážeme, že $\mathfrak{u}$ nelze dobře uspořádat.

Naproti tomu nyní ve smyslu interpretace *není* množina $\mathfrak{u}$ konečná podle Dedekinda, k čemuž stačí ukázat, že ve smyslu interpretace je ω vzájemně jednoznačně zobrazitelné do množiny $\mathfrak{u}$. Uvedené plyne z toho, že

$$(\exists f \in \mathsf{HSym})(\mathcal{F}nc(f) \ \& \ \mathcal{F}nc(f^{-1}) \ \& \ \mathfrak{Dom}(f) = \omega \ \& \ \mathfrak{Rng}(f) \subseteq \mathfrak{u})$$

— je-li $\mathfrak{Rng}(f) \subseteq \{e; e \triangleleft w\}$, je totiž $\mathcal{K}(\{e; e \triangleleft w\}) \subseteq \mathcal{H}(f)$.

Aplikace 3. Pracujme opět v $\boldsymbol{ZF}\mathfrak{u}$ s dodatečným axiomem „$\mathfrak{u}$ je spočetná“. Pak existuje vzájemně jednoznačné f zobrazení ω^2 na $\mathfrak{u}$ a položíme-li $\mathfrak{u}_n = f''(\{n\} \times \omega)$, je $\{\mathfrak{u}_n; n \in \omega\}$ rozkladem[13)] množiny $\mathfrak{u}$; fixujme tento rozklad.

[12)] Při volbě e_2 budeme žádat, aby pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ platilo $e_1 \triangleleft w_i \equiv e_2 \triangleleft w_i$ a současně $e_1 \triangleleft f(e_1) \equiv e_2 \triangleleft f(e_1)$; automorfizmus $\mathcal{P}$ budiž identitou na $\{w_1, \ldots, w_n, f(e_1)\}$.

[13)] tj. $\bigcup\{\mathfrak{u}_n; n \in \omega\} = \mathfrak{u} \ \& \ (\forall n, m \in \omega)[(n \neq m \rightarrow \mathfrak{u}_n \cap \mathfrak{u}_m = \emptyset) \ \& \ \mathfrak{u}_n \neq \emptyset]$

Grupa $\mathcal{G}$ budiž grupou všech permutací $\mathcal{P}$ na množině $\mathfrak{u}$ převádějících každé $\mathfrak{u}_n$ na sebe, tj. $\mathcal{P}''\mathfrak{u}_n = \mathfrak{u}_n$ (zdůrazněme však, že při definici grupy naprosto nevyžadujeme, aby permutace $\mathcal{P}$ byla identitou na nějakém $\mathfrak{u}_n$).

Nechť $\mathcal{F}$ je filtr generovaný všemi grupami permutací identických na množině $\mathfrak{u}_n$ pro nějaké $n \in \omega$, tj.

$$\mathcal{F} = \{\mathcal{I};\ \text{„}\mathcal{I}\text{ je podgrupa grupy }\mathcal{G}\text{“ } \& \ (\exists n \in \omega)(\mathcal{K}\Big(\bigcup\{\mathfrak{u}_m; m \in n\}\Big) \subseteq \mathcal{I})\}$$
$$(= \{\mathcal{I};\ \text{„}\mathcal{I}\text{ je podgrupa grupy }\mathcal{G}\text{“ } \& \ (\exists f)[\mathfrak{Dom}(f) \in \omega \ \& \ \mathcal{F}nc(f) \ \&$$
$$\& \ \mathfrak{Rng}(f) \subseteq \omega \ \& \ (\forall m \in \mathfrak{Dom}(f))(\mathcal{K}(\mathfrak{u}_{f(m)}) \subseteq \mathcal{I})]\}).$$

Vlastnost (c) pro filtr $\mathcal{F}$ plyne ze vztahu $\mathcal{P}\mathcal{K}(\mathfrak{u}_n)\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{K}(\mathfrak{u}_n)$ platného pro každé $n \in \omega$ v důsledku volby grupy $\mathcal{G}$. (Podrobněji: ze vztahu $\mathcal{Q} \in \mathcal{K}(\mathfrak{u}_n)$ a z faktu, že $\mathcal{P}$ je vzájemně jednoznačné zobrazení $\mathfrak{u}$ na sebe, vyvodíme rovnost

$$\mathcal{P}(\mathcal{Q}(\mathcal{P}^{-1}(w))) = \mathcal{P}(\mathcal{P}^{-1}(w)) = w$$

pro každé $w \in \mathfrak{u}_n$ a naopak každé $\mathcal{Q} \in \mathcal{K}(\mathfrak{u}_n)$ je tvaru $\mathcal{P} \circ \mathcal{R} \circ \mathcal{P}^{-1}$ pro nějaké $\mathcal{R} \in \mathcal{K}(\mathfrak{u}_n)$ — stačí totiž položit $\mathcal{R} = \mathcal{P}^{-1} \circ \mathcal{Q} \circ \mathcal{P}$). Vlastnost (d) je zřejmá, protože pro každé $w \in \mathfrak{u}_n$ je $\mathcal{K}(\mathfrak{u}_n) \subseteq \mathcal{H}(w)$.

Triviálně je $\mathfrak{u}_n \in \mathsf{HSym}$ pro každé $n \in \omega$, ale navíc je každé $\mathfrak{u}_n$ spočetné ve smyslu interpretace (je-li f vzájemně jednoznačné zobrazení mezi ω a $\mathfrak{u}_n$, je $\mathcal{H}(f) \supseteq \mathcal{K}(\mathfrak{u}_n)$, a tedy $f \in \mathsf{HSym}$). Pro zobrazení g přiřazující každému $n \in \omega$ množinu $\mathfrak{u}_n$ je zcela zřejmě $\mathcal{H}(g) = \mathcal{G}$ (v důsledku volby $\mathcal{G}$ máme pro každé $n \in \omega$ rovnost $\widehat{\mathcal{P}}(\mathfrak{u}_n) = \mathfrak{u}_n$, takže získáme rovněž $\widehat{\mathcal{P}}(\langle \mathfrak{u}_n, n\rangle) = \langle \mathfrak{u}_n, n\rangle$, pročež opět zcela jasně $g \in \mathsf{HSym}$). Ve smyslu interpretace je tedy $\mathfrak{u}$ sjednocení spočetně mnoha spočetných množin (zopakujme, že formule definující predikát $z = \bigcup x$ je absolutní).

Zbývá nám ukázat pouze, že množina $\mathfrak{u}$ není spočetná ve smyslu interpretace. Jestliže h je vzájemně jednoznačné zobrazení mezi množinami ω a $\mathfrak{u}$ ve smyslu interpretace, je h vzájemně jednoznačné zobrazení mezi ω a $\mathfrak{u}$. Navíc musí existovat $n \in \omega$ tak, že $\mathcal{K}(\bigcup\{\mathfrak{u}_m; m \in n\}) \subseteq \mathcal{H}(h)$. Zvolme nyní $\mathcal{P} \in \mathcal{K}(\bigcup\{\mathfrak{u}_m; m \in n\})$ různé od identity. Pak musí existovat $w \in \mathfrak{u}$ tak, že $\mathcal{P}(w) \neq w$ (v důsledku čehož $w \notin \bigcup\{\mathfrak{u}_m; m \in n\}$), avšak označíme-li v takovém případě $l = h^{-1}(w) \in \omega$, je

$$\langle w, l\rangle \in h \ \& \ \langle \mathcal{P}(w), l\rangle = \langle \mathcal{P}(w), \widehat{\mathcal{P}}(l)\rangle = \widehat{\mathcal{P}}(\langle w, l\rangle) \in \widehat{\mathcal{P}}(h) = h,$$

což je ve sporu s předpokladem, že h je funkcí.

*

Na závěr poznamenejme, že A. Mostowski dokázal (viz [Mo1]) užitím permutačních modelů dokonce, že teorie $\boldsymbol{ZFA}$, $\neg\mathbf{AC}$ (tj. „existuje množina, kterou nelze *dobře* uspořádat“), „každou množinu lze *lineárně* uspořádat“ je relativně bezesporná vzhledem k $\boldsymbol{ZF}$.