PŘEDMLUVA

Tento text vznikl na základě (dvousemestrálních) přednášek konaných pro posluchače MFF a Katedry logiky FF UK. Týká se vztahů a vlastností nejdůležitějších axiomatických systémů teorie množin a rovněž dokazatelnosti a nedokazatelnosti formulí jazyka teorie množin v těchto axiomatických systémech. Výsledky byly dosaženy během 20. století, jejich výběr je pochopitelně subjektivní. Nicméně autor je přesvědčen, že alespoň na zařazení výsledků o nedokazatelnosti a nevyvratitelnosti axiomu výběru a hypotézy kontinua mezi ty nejvýznamnější by se shodla výrazná většina matematiků zabývajících se teorií množin.

Jako základní a nejdůležitější budeme zkoumat Zermelo-Fraenkelovu teorii množin ($\boldsymbol{ZF}$), vzhledem k této teorii budeme vztahovat všechny interpretace. Velmi významná je i Gödel-Bernaysova teorie ($\boldsymbol{GB}$)[1], v menší míře se budeme zabývat Kelley-Morseovou teorií ($\boldsymbol{KM}$), i když ukážeme, že tato „modifikace" Gödel-Bernaysovy teorie se od teorie $\boldsymbol{GB}$ podstatně liší.

Text předpokládá určité znalosti teorie množin a logiky. Tyto základy jsou shrnuty do prvního paragrafu a do začátku paragrafu druhého.

*

Představme nyní nejdůležitější výsledky popisované v jednotlivých paragrafech našeho textu:

§2 Ukážeme (autoreferenční) formuli, která je dokazatelná v Kelley-Morseově teorii množin a není dokazatelná v Zermelo-Fraenkelově teorii množin. Tím bude ukázáno, že teorie $\boldsymbol{KM}$ je ostře silnější než $\boldsymbol{ZF}$.

§3 Nahlédneme, že Gödel-Bernaysovu teorii množin je možné axiomatizovat jako teorii s konečně mnoha axiomy. Uvedený výsledek je poměrně překvapivý, protože teorie $\boldsymbol{GB}$ je často popisována jako teorie se schématem existence tříd, přičemž axiom zajišťující existenci třídy množin s určitou vlastností Φ je přidáván pro *každou* formuli Φ (jazyka teorie množin s třídami, v níž nejsou kvantifikovány třídové proměnné) — formulace s popsaným schématem existence tříd tudíž zdánlivě vyžaduje nekonečně mnoho axiomů.

§4 Teorie $\boldsymbol{ZF}$ a $\boldsymbol{GB}$ se od sebe na první pohled velice liší, neboť v Zermelo-Fraenkelově teorii se zabýváme pouze množinami a Gödel-Bernaysova teorie pojednává obecněji o třídách. Je dobře známo, že musí existovat třídy, které nejsou množinami, takže $\boldsymbol{GB}$ se zabývá mnohem rozsáhlejším systémem

[1] Ve čtvrtém paragrafu ukážeme, že tyto teorie „jsou stejně silné". Nicméně je třeba poznamenat, že zkoumání Gödel-Bernaysovy teorie má v Praze tradici; např. P. Vopěnka ukázal jak reformulovat Cohenovy myšlenky do této teorie a sestrojil tak příslušnou interpretaci v $\boldsymbol{GB}$; možnost existence interpretace v teorii $\boldsymbol{ZF}$ a neexistence odpovídající interpretace v $\boldsymbol{GB}$ zkoumal P. Hájek (viz [Há2]). Zkoumání interpretací v Gödel-Bernaysově teorii množin však v našem textu zcela pomineme.

objektů. Přes tuto rozdílnost jsou obě teorie stejně silné; přesněji a podrobněji: v teoriích $\boldsymbol{ZF}$ a $\boldsymbol{GB}$ jsou dokazatelné právě tytéž *množinové*[2] formule. Uvedený výsledek prokážeme jednak užitím modelového přístupu a jednak striktně finitními prostředky. Při využití nekonečných metod je prokázání výsledku podstatně jednodušší, obtíže druhého přístupu jsou však vynahrazeny skutečností, že omezením na finitní metody navíc popíšeme *algoritmus* transformující důkaz množinové formule v Gödel-Bernaysově teorii množin na důkaz téže formule v Zermelo-Fraenkelově teorii.
Konstrukci nekonečného modelu nám ulehčí užití výsledku z předcházejícího paragrafu.

§5 Pátý paragraf pojednává o interpretacích jako prostředku pro ukazování relativní bezespornosti teorií. Konstrukce jednotlivých interpretací budou předváděny v §6–§8 a §10. Zkoumání mnoha jednotlivých interpretací se podstatně zjednoduší poté, co prokážeme pro potřebné formule tzv. absolutnost (tzn. že platí ve smyslu interpretace právě když platí ve skutečnosti).
Absolutnost omezených formulí bude rovněž využita v devátém paragrafu.

§6 Axiom fundovanosti odstraní možnost existence některých „nepřirozených“ množin jako na příklad množiny, která je svým vlastním prvkem. Nicméně teorie množin se přidáním tohoto axiomu nemohou změnit z teorií bezesporných na teorie sporné: teorie $\boldsymbol{ZF}$ je relativně bezesporná vzhledem k Zermelo-Fraenkelově teorii množin, ze které vypustíme axiom fundovanosti; analogický výsledek platí i pro teorie konečných množin. Potřebnou interpretaci sestrojíme omezením náležení a rovnosti na „množiny, které je možno vybudovat z prázdné množiny za použití pouhé potence“.

§7 Tento paragraf popisuje výsledek, který je v jistém smyslu protipólem předchozího. Zermelo-Fraenkelova teorie, ve které axiom fundovanosti nahradíme jeho negací je rovněž relativně bezesporná vzhledem k Zermelo-Fraenkelově teorii množin, ze které vypustíme axiom fundovanosti. Znovu platí podobný výsledek také pro teorie konečných množin, podrobnější analýza však v případě konečných množin ukáže ještě další zajímavá zesílení výsledku.
Znalost idejí §6 usnadní porozumění myšlenkám obsaženým v sedmém paragrafu.

§8 Fraenkel-Mostowského permutační modely jsou metodou prokazující relativní bezespornost zejména pro teorie s různými formami negace axiomu výběru. Ukážeme např. relativní bezespornost teorie $\boldsymbol{ZF}$ bez axiomu fundovanosti, avšak s dodatečným axiomem „existuje spočetná množina spočetných množin, jejíž sjednocení není spočetné“ nebo teorie $\boldsymbol{ZF}$ bez axiomu fundovanosti a s dodatečným axiomem „existuje množina, která je konečná podle Dedekinda, není však konečná podle Tarského“.

[2] tzn. formule vypovídající pouze o množinách

V tomto paragrafu velmi podstatně využíváme myšlenek z §6, omezujeme se totiž již od počátku na „množiny, jež lze vybudovat ze zadané množiny urelemenetů[3] pomocí pouhé potence". Jelikož pracujeme v teorii s urelementy, je vhodné si pro užití výsledků §8 uvědomit, že teorie s urelementy je podle výsledku sedmého paragrafu (relativně) bezesporná, avšak pro konstrukce uvedené v osmém paragrafu již není třeba znát způsob prokázání bezespornosti popsaný v §7.

§9 Zermelo-Fraenkelova teorie (jak nekonečných, tak také konečných) množin není konečně axiomatizovatelná (srovnejte s konečnou axiomatizovatelností Gödel-Bernaysovy teorie a s faktem, že teorie $\boldsymbol{ZF}$ a $\boldsymbol{GB}$ jsou stejně silné co se týče dokazatelnosti množinových formulí). Pro jakýkoli konečný fragment teorie $\boldsymbol{ZF}$ sestrojíme totiž uvnitř teorie množin model formalizace uvažovaného konečného fragmentu.

Pojem formalizace metamatematických formulí je připomenut v §2, a proto je výhodné, aby byl §9 čten až po druhém paragrafu. Naopak před čtením §10 by se čtenář měl seznámit s obsahem devátého paragrafu, protože v něm ukážeme rovněž metodu konstrukce modelu, ve kterém je nějaká daná formule absolutní a tuto konstrukci pak užijeme v §10. Model formalizace konečného fragmentu teorie $\boldsymbol{ZF}$ v teorii $\boldsymbol{ZF}$ sestrojíme na základě idejí šestého paragrafu.

§10 Slavná Gödelova konstrukce konstruovatelných množin je popsána v desátém paragrafu. Tímto způsobem se podařilo prokázat relativní bezespornost teorie $\boldsymbol{ZF}$ se zobecněnou hypotézou kontinua a s velmi silnou formou axiomu výběru vzhledem k Zermelo-Fraenkelově teorii množin.

Možnost omezit se na konstruovatelné množiny je využita i při formulaci výsledků v §12.

§11 Jedenáctý paragraf začíná popisovat proslavenou Cohenovu konstrukci modelů a je proto nezbytný pro celý zbytek textu.

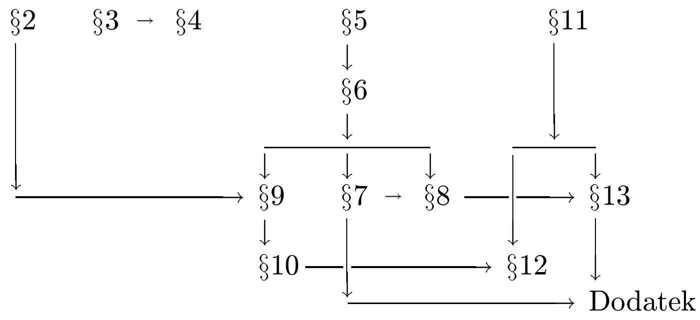
§12 Motivací pro vznik cohenovských generických rozšíření byla snaha prokázat relativní bezespornost Zermelo-Fraenkelovy teorie s negací hypotézy kontinua vzhledem k $\boldsymbol{ZF}$. Tato konstrukce je předvedena v popisovaném paragrafu jako druhá. (V sestrojeném modelu se navíc v maximální možné míře nemění mohutnost potence ostatních kardinálních čísel). Jako první aplikace byla zvolena možnost „kolapsovat" kardinální číslo, tj. přidat takové zobrazení, že původní kardinální číslo přestane být číslem kardinálním (avšak i nadále zůstává být ordinálním číslem).

§13 Cohenovu konstrukci je možno také užít pro prokázání relativní bezespornosti teorie $\boldsymbol{ZF}$ s negací axiomu výběru vzhledem k samotné teorii $\boldsymbol{ZF}$.

[3] tzn. vybudovat z množiny, pro jejíž každý prvek x máme $x = \{x\}$

Při této konstrukci se užije rovněž idea „permutací“, takže je vhodné (nikoli nutné) se nejdříve seznámit s idejemi osmého paragrafu.
Jako dodatek je připojena obecnější konstrukce ukazující, jak lze mnohé nezávislosti dokázané permutačními modely (viz §8; tedy nezávislosti vzhledem k Zermelo-Fraenkelově teorii množin bez axiomu fundovanosti) transformovat na předvedení nezávislosti vzhledem k celé teorii ***ZF***.

Z předchozího popisu je zřejmé, že mnohé partie textu jsou na sobě nezávislé. Abychom čtenáři usnadnili orientaci vyznačme *nejdůležitější* závislosti graficky v následujícím diagramu. Přitom je nutno zdůraznit, že v diagramu neuvádíme všechny závislosti. Například v závěru desátého paragrafu při srovnávání možných popisů konstruovatelných množin se odvoláváme na §3, protože však takovéto srovnání není zapotřebí k pochopení základní konstrukce, neuvádíme samozřejmě v našem diagramu závislost §10 na třetím paragrafu. V diagramu rovněž nevyznačujeme, že axiomatiky jednotlivých teorií, předpokládané znalosti z logiky a nejzákladnější definice a tvrzení teorie množin jsou soustředěny do prvního paragrafu a do začátku paragrafu 2; na tyto znalosti v dalším textu navazujeme zcela volně. Závislost čtvrtého paragragu na §3 a také závislost §8 na sedmém paragrafu vyjadřujeme „menší šipkou“, neboť v obou případech využíváme výsledek z předchozího paragrafu, nikoli však konstrukci.



*

Autor upřímně děkuje recenzentům za podněty, které přispěly ke zkvalitnění textu. K odstranění mnohých nedostatků přispěla i řada studentů; autor je vděčen všem, zejména pak R. Honzíkovi a J. Starému, jejichž připomínky byly obzvláště podnětné.