Místo předmluvy

AUTOR S ČTENÁŘEM SHODU HLEDÁ

Máš rozum? „Mám.“
Proč ho tedy neužíváš?
Neboť když ten plní svou povinnost,
co jiného ještě chceš?
Marcus Aurelius, Hovory k sobě

Vážený čtenáři, následující body by měly ukázat, zda jsme schopni si porozumět (a také předvést několik příkladů problematiky, kterou se budeme v textu zabývat). Podle výsledku uvedeného minitestu vám autor nabízí tři možná pokračování (výstupy A–C).

1) Jestliže prvé, pak druhé. Avšak prvé. Tedy druhé. — Takto vyjadřovali jedno ze základních pravidel vyvozování důsledků již v antice. Rozumíte-li a souhlasíte-li, přejděte k bodu 3.

2) Pokud nebyl první bod zcela jasný, pokusme se ještě jednou: Přijmeme-li (uvěříme-li, považujeme-li za správné, pravdivé, atd.), že z jakéhosi předpokladu („prvé“) plyne jakýsi závěr („druhé“) a jestliže současně akceptujeme správnost předpokladu, musíme také přijmout správnost závěru. Například jsme-li přesvědčeni, že „Jestliže je Cyril doma, pak si čte.“ a nadto zjistíme, že „Cyril je doma.“, musíme vyvodit, že „Cyril si čte.“.

Zcela analogicky, jestliže nám někdo dokáže (v jakémkoli pořadí) tvrzení „Číslo $\mathfrak{c}$ je větší než *0*.“ a rovněž tvrzení „Je-li číslo $\mathfrak{c}$ větší než *0*, pak $\mathfrak{c}$ = *1*.“, nezbude nám než uznat, že dokázal také tvrzení „Číslo $\mathfrak{c}$ je rovné *1*.“.

Souhlasíte-li po dodatečném vysvětlení, přejděte k dalšímu bodu, jinak se znovu zamyslete nad prvními dvěma body; pokud neporozumíte ani na druhý pokus, přejděte k výstupu A.

3) Předpokládejme, že jsme přijali za správná tvrzení „Každý člověk je smrtelný.“ a „Sókrates je člověk.“ Umíte na základě těchto předpokladů přisoudit Sókratovi ještě jinou vlastnost než tu, že je člověkem[1)]? — Že je odpověď zcela jednoduchá! — Pochopitelně, když Sókrates je člověk, musí mít všechny vlastnosti, které má každý člověk, tedy např. musí být podle prvního přijatého předpokladu smrtelný. — Není-li tato úvaha zcela jasná, zamyslete se ještě jednou

1) Jedná se opět o klasický příklad, tentokrát však již ne antický.

a pokud opravdu nesouhlasíte ani poté, přejděte k výstupu A, jinak pokračujte dalším bodem.

4) Text nepředpokládá *žádné* předběžné znalosti. Jeho čtení však vyžaduje minimální schopnost a zejména *ochotu* myslet. Říká se, že „myšlení bolí“ — pokud nejste ochoten ani trochu námahy podstoupit, přejděte k výstupu A.

Jste ochoten se smířit s trochou formalismu? Například psát místo slova „prvé“ písmeno p, slovo „druhé“ nahrazovat písmenem q, vazbu „...jestliže, pak ...“ vyjadřovat např. znakem $\rightarrow$ a vazbu „není pravda, že ...“ zapisovat např. symbolem $\neg$? Bod 1) pak užívajíce uvedených znaků převedeme na tvar: Z tvrzení $\mathsf{p} \rightarrow \mathsf{q}$ a z tvrzení p vyvodíme tvrzení q.

Nahlížíte (nebo jste alespoň ochoten přijmout) fakt, že vyvození z daných předpokladů závisí na *tvaru* (struktuře) předpokladů, nikoli na jejich konkrétním obsahu? Například ve třetím bodě bychom z předpokladů „Každý homo je mortalis.“ a předpokladu „Sókrates je homo.“ měli vyvodit „Sókrates je mortalis.“ bez jakékoli znalosti významu latinských slovíček „homo“ a „mortalis“.

Nehodláme zápisu užívajícího znaky (symboly) nadužívat, avšak v některých případech činí jeho užití text mnohem přehlednější. Pokud zcela odmítáte jakýkoli symbolický zápis, přejděte k výstupu A, jinak pokračujte následujícím bodem.

5) A teď něco podstatně těžšího. Mám 3 vnoučata: Jakuba, Terezku a Kačenku. S vnukem bych rád mluvil, mám však tak málo času, že za ním dnes pojedu jen tehdy, když si *budu jist*, že je doma. Dozvěděl jsem se:

Je-li Jakub doma, není doma Terezka.
Jestliže je Kačenka doma, je doma i Terezka.
Není-li Kačenka doma, je doma Jakub.

Mám za vnukem jet? Mám za ním jet, pokud jsem se místo první informace dověděl:

Není-li Jakub doma, není doma ani Terezka.

Znáte již odpovědi? — Skutečně již víte, jak odpovíte? — Správná odpověď na první otázku je „ne“ a na druhou otázku „ano“. Pokud jste odpověděl jinak nebo pokud jste si nebyl s odpověďmi jist, bude vám k užitku si přečíst první paragraf kap. I. V takovém případě chápejte další body této ne-předmluvy jako představení některých okruhů, které pro vás knížka z bohatství logiky vybírá, a jejich čtení zakončete přechodem k bodu C. Jestliže si jste dostatečně jist, že vždy budete znát správnou odpověď na problémy podobné úlohám z tohoto bodu, pokračujte v našem minitestu s nadějí, že zvítězíte nad všemi léčkami v něm nastraženými (a propracujete se k výstupu B).

6) O jakési školní třídě jste získali následující informace:

Každý vysoký student umí anglicky.

Žádný student, který sedí vpředu, nečte básně.
Některý student, který rozumí fyzice, neumí anglicky.
Každý student, který nesedí vpředu, je vysoký.

Rozhodněte, zda z těchto informací lze vyvodit:

Některý student rozumí fyzice a nečte básně.

Jako variaci čtvrté informace uvažme větu:

Žádný vysoký student nesedí vpředu.

Změní se vaše odpověď, zaměníme-li čtvrtou informaci její variací?

Již jste si rozmyslel správné odpovědi? — Pokud jste neodpověděl „ano“ na první otázku nebo pokud jste nezjistil změnu odpovědi na „ne“ při záměně čtvrté informace za její variaci nebo pokud jste si nebyl dostatečně jist, je vhodné, abyste nahlédl do §1 kap. II. Neměl byste proto skončit bodem B, nýbrž bodem C.

7) V jakémsi městečku mají jen jednoho holiče a tvrdí, že ten holí přesně ty muže, kteří se neholí sami. Toto tvrzení se zdá rozumné do doby než si položíme otázku, zda holič holí sám sebe. Kdyby se holil, nesměl by se podle tvrzení holit a kdyby se neholil, musel by se holit. Takovéto paradoxy[2)] jsou známy od 4. stol. př. Kr. a jejich řešení bylo v průběhu staletí bezvýsledně věnováno mnoho úsilí. Proto se považuje za úspěch, že Bertrand Russell popsal důvod, který vede ke vzniku podobných paradoxů a dal tak návod (viz §2 kap. III), jak se paradoxům

[2)] Logické paradoxy pronikly i do krásné literatury; asi nejhezčí příklad je v 51. kap. Cervantovy knihy Duchaplný rytíř Don Quijote de la Mancha, kde je paradox podán jako otázka pro Sancho Panzu v roli vladaře:
Před Sancha předstoupil jakýsi muž a řekl: „Pane, velká řeka dělila panství na dvě části, …přes tu řeku vedl most a na jeho konci stála šibenice …a pán té řeky, toho mostu a celého toho panství vydal zákon, který zněl takto: ‚Kdokoli chce přejít po tomto mostě, musí nejdříve odpřisáhnout, kam má namířeno a co tam hodlá dělat; a jestliže bude přísahat podle pravdy, budiž ihned propuštěn na druhou stranu, selže-li však, ať zemře na této šibenici, a nikomu nebudiž udělována milost!‘ …Co se však jednou nestalo! Když vzali zase do přísahy jednoho člověka, prohlásil a odpřisáhl jim, že přišel jenom proto, aby skončil svou pozemskou pouť na té šibenici u mostu a za jinou záležitostí prý nepřišel. Soudcům byla ovšem ta přísaha divná a řekli si: ‚Pustíme-li toho muže svobodně na druhou stranu, pak nám tu právě křivě přísahal a podle zákona by měl skončit na šibenici, a jestliže ho dáme oběsit, sám přece přísahal, že sem přišel, aby zemřel na šibenici, a kdo podle pravdy přísahá, má být podle téhož zákona propuštěn bez překážek.‘ A teď je na vás, pane vladaři, abyste sám rozhodl, co by měli ti soudcové udělat s oním mužem, neboť dosud nevědí kudy kam a jde jim již z toho hlava kolem.“ Cervantův Sancho si uvědomil logický paradox a řekl: „…ten váš pocestný může zrovna tak lehce skončit na šibenici jako zůstat naživu, neboť pravda ho před smrtí ochrání a lež ho na smrt odsuzuje.“ Sancho proto doporučil onoho člověka propustit s (mimologickým) odůvodněním, ve kterém vědomě rezignuje na rozumové řešení úlohy: „Když mají soudci stejně mnoho důvodů k tomu, aby jej na hrdle potrestali, jako k tomu, aby jej osvobodili, ať ho jen nechají přejít volnou nohou na druhý břeh, neboť chvályhodnější je přece vždycky konat dobro než rozmnožovat zlo.“ a dodává, že je-li spravedlnost na váhách, je lépe upustit v oné věci od trestů a přiklonit se spíše k milosrdenství. (překlad Z. Šmíd)

vyhnout (od té doby, za celých sto let, se nenašel žádný nový paradox, který by vyžadoval další zdůvodňování). Jestliže neznáte Russellovo kritérium, přejděte na závěr k výstupu C.

8) Najít důkaz nějakého zadaného tvrzení může být stejně obtížné jako najít pověstnou „jehlu v kupce sena“. Možných důkazů v predikátovém počtu je dokonce nekonečně mnoho („kupka sena je nekonečně velká“) a zdá se proto těžko představitelné, že existují metody prokazující, že důkaz *zadaného* tvrzení vůbec neexistuje (metoda ukazující, že „jehla v kupce sena“ není, se musí vypořádat se skutečností, že „nekonečně velkou kupku se nám nikdy nepodaří postupným probíráním prohlédnout celou“). Nicméně metody, jež ukazují, že důkaz tvrzení v nějaké teorii nemůže existovat, jsou známy a popis nejběžnější z nich najde čtenář v prvním paragrafu třetí kapitoly. Ve druhém paragrafu téže kapitoly je při popisu Gödelových vět o neúplnosti aritmetiky předvedena jiná metoda, která vede k nalezení tvrzení, jež je nedokazatelné v zadané teorii samo a sobě, avšak navíc není v uvažované teorii dokazatelná ani jeho negace (tj. tvrzení, které získáme uvedením našeho tvrzení souslovím „není pravda, že …“). Gödelovy věty představují jeden z vrcholných výsledků dosažených ve dvacátém století, a to nejen v logice, avšak v celé matematice. Pokud se s těmito metodami chcete seznámit, přejděte k bodu C, jsou-li vám známy a i jinak jste úspěšně zvládli všechny nástrahy našeho minitestu, přejděte k výstupu B.

Výstup A) Autor se vám hluboce omlouvá, obává se, že přes veškerou snahu není schopen pro vás uspokojivě látku vysvětlit; ve druhém a třetím bodu se snažil na konkrétních případech objasnit vyvození závěru z předpokladů a neuspěl — nebo jste vy, čtenáři, odmítl nadále spolupracovat obávav se námahy či zápisu v symbolech. Nebyla by pro vás zajímavější nějaká poezie? Například krásné verše a příběhy Homéra? Začtěte se např. do XII zpěvu Odysseje, do veršů[3]:

K ostrovu Thrínakiji pak připluješ. Četná tam stáda
tučných ovcí a krav má Hélios, jež se tam pasou.
… pakli je přepadat budeš, tu zvěstuji záhubu tobě,
lodi i soudruhům tvým! A sám-li se záhubě vyhneš,
pozbudeš však svých druhů a vrátíš se pozdě a bídně.

Nenaříkejte, vážený čtenáři, že zde máme zase „Jestliže prvé, pak druhé.“, a smiřte se s tím, že logické usuzování se vyskytuje i v poezii — každý, kdo slyšel ten příběh dokonce už ví, že „prvé“ nastalo:

Hned z bohova skotu si přihnali nejlepší kusy,
které u temné přídi se pásaly korábu mého,
… a krávy skláli a stáhli, …

[3] překlad O. Vaňorný

a také je mu známo — a na základě logického vyvození ho to nepřekvapuje — že příběh pokračoval:

> Zároveň Kronovec zahřměl a mrštil do lodi bleskem:
> koráb se celý zvrátil, byv udeřen Diovým bleskem,
> sirný jej naplnil pach — vtom druhové vypadli z lodi.
> Oni jak rackové mořští kol černého korábu všichni
> vlnami zmítáni byli — však bůh jim odnímal návrat.

Když už i v těch nejslavnějších básních se objevují logická vyvození (pohádky ani nezkoušejte, tam jsou úvahy předvedeného druhu velice časté), nechcete se přemoci a přece jen to s logikou zkusit? — Opravdu ne? — Autor se tedy s vámi loučí, avšak Logika za vámi sebevědomě (a poněkud výsměšně) volá: Na shledanou!

Výstup B) Autor se obává, že vám v tomto textu mnoho nového nesdělí. Bude pochopitelně rád, pokud text prolistujete a něco zajímavého pro sebe objevíte. Nechcete však raději vzít do ruky knihu, která je vás více hodna? Je řada hezkých a podnětných knih, které vám otevřou dveře do překrásného světa matematické logiky; některé texty jsou dokonce v češtině. Co takhle začít s knihou [So] nebo s knihou [Šv]? Z cizojazyčných doporučuji zejména [Sh], o teorii modelů pak [Ch-K].

Výstup C) Ano, vám je tento text určen.

*

Nenechte se odradit řadou tabulek a zápisů v symbolech, které se objeví při zběžném prolistování, tabulky a diagramy jsou spíše ilustracemi napomáhajícími k pochopení textu. KNIHA JE PSÁNA JAKO STAVEBNICE, vy sám si rozhodnete do jakých podrobností chce v tom kterém okamžiku a v té které partii zajít. Základní text tvoří asi dvě třetiny knihy a není v něm příliš mnoho formalismu, tabulek, a dokonce ani mnoho složitějších úvah. Tento základní text získáte vynecháním dodatků k jednotlivým kapitolám, vypuštěním veškerého textu psaného petitem, navíc je možno vynechat některé úlohy a cvičení. Pokud se seznámíte s tímto základním textem, získáte celkový přehled o logice. Autor však doufá, že studium základního textu vzbudí ve vás, milý čtenáři, zájem o další poznatky a pro tento případ je připraven zbytek textu. Ten je možno číst spolu se základním textem, nebo se k jednotlivým částem vracet při opakovaném čtení podle libosti a času.

Než začnete číst, vznáší k vám autor jednu jedinou prosbu: až něčemu neporozumíte na prvý pokus, nenadávejte autorovi moc květnatě za neschopnost vám to lépe vysvětlit — vězte, že autor si sám mnohokrát naříkal nad svými schopnostmi a mnohokrát se snažil text učinit srozumitelnější; snad se nakonec shodneme.

* * *

V době psaní tohoto textu byla autorova práce podporována z grantu IAA 1019401 GA AV ČR a výzkumného záměru AV 0Z10190503. Kniha byla napsána v TEXu.

Ke knize vznesly řadu připomínek dvě skupiny studentů. První skupinu tvořili studenti H. Svobodová, P. Fiala a J.Vácha z Gymnázia Christiana Dopplera, kteří prokázali, že je možno knihu číst i bez předběžného výkladu. Studenti A. Nohejl a M. Volek z Gymnázia Jana Keplera a student A. Liška z Gymnázia J. Ortena v Kutné Hoře měli četbu ulehčenou předběžným výkladem, avšak jejich úkolem byla mnohem podrobnější kontrola textu. Práce druhé skupiny probíhala v rámci projektu Otevřená věda. Autor velmi děkuje všem uvedeným studentům za upozornění na mnohé chyby a nejasná místa v předběžném textu.

Děkuji své dceři M. Vomlelové, Ph.D. za program řešící úlohy typu „zebra“. Program mi umožnil v reálném čase sestrojit úlohy různé obtížnosti.

V Praze dne 24. dubna 2006 A. S.

ÚVOD

Rozum, právě tak jako oko, zatímco nám
umožňuje vidět a vnímat ostatní věci,
nezaznamenává sám sebe;
vyžaduje obratnost a úsilí
poodsunout ho na jistou vzdálenost
a učinit ho sobě samému objektem.
John Locke, Esej o lidském rozumu.

Lidé si váží rozumu, vždyť dokonce jako název pro sebe samé jako biologický druh zvolili označení „člověk rozumný". Lidská úcta k rozumu jde tak daleko, že již středověcí myslitelé „omezovali" Boží *všemohoucnost* rozumem (bezespornosti)[1]. Mnozí lidé se téměř „chlubí", že neumí matematiku (mnohokrát slyšíte „Já jsem měl vždy potíže s matikou."), avšak je nepravděpodobné, že bychom se setkali s člověkem, který by říkal „Já jsem se nikdy nenaučil logicky myslet."

Považujeme za samozřejmé, že umíme správně uvažovat, avšak téměř nikdy si neklademe výslovně otázky typu: Nemůže nastat situace, kdy samo usuzování nás dovede do neřešitelných rozporů? Co to doopravdy znamená něco dokázat? V jakém rozsahu může být při dokazování (matematikova) intuice nahrazena mechanickým kalkulem? Existují meze našeho usuzování? Shodujeme se všichni v tom, co je správné vyvozování? — Těmito a mnohými podobnými otázkami se zabývá logika a alespoň v minimální míře budou předmětem i tohoto textu.

Již na začátku však zdůrazněme, že v logice jde o to, *jak* usuzujeme (jak máme správně vyvozovat důsledky), a nikoli *na podkladě čeho* k závěrům přicházíme. Logika formuluje výslovně ty vyvozovací kroky, které pokládáme intuitivně za správné, a zkoumá takto vzniklý systém. Logika však nevyšetřuje jakým způsobem a proč volíme předpoklady. Ověřování předpokladů, z nichž vyvozujeme (odvozujeme, dokazujeme, atd.) důsledky, je otázkou zkušenosti, jiné vědy, nebo víry (přijímané někdy vědomě, často však podvědomě). V logice se dokonce nestaráme o to, zda a v jakém smyslu jsou předpoklady pravdivé, ale pouze o to, zda je správné *vyvození*. (Způsob vyvození může být v pořádku i v případě, že předpoklady nejsou správné.)

Na základě jejího středověkého chápání definujeme obvykle logiku jako vědu o správném usuzování (vyvozování důsledků), i když původní řecké chápání bylo poněkud širší („logos" — $\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$ — má více významů: řeč, slovo, myšlenka, ro-

[1] Sv. Tomáš Akvinský (1225–1274) v Teologické sumě shrnuje své stanovisko: „Musí se říci, že pod všemohoucnost Boží nespadá, co obsahuje odporování."

zum, smysl, atd.). Pokusíme se čtenáři předvést, že při zkoumání správného vyvozování — tedy při vyšetřování podstatné oblasti lidského rozumu — dosahuje matematická logika hlubokého poznání.

*

Několik slov k historii logiky nalezne čtenář v dodatku o kořenech logiky, teď učiňme jen několik zcela základních poznámek.

Za zakladatele logiky je všeobecně pokládán Aristotelés (384–322 př. Kr.), který svou naukou o sylogismech (viz §1 kap. II) položil základy *systematickému* zkoumání našeho způsobu vyvozování důsledků. Zkoumání logiky se rozvíjelo také v megarsko-stoické škole, za jejíhož prvního představitele se uvádí Eukleidés z Megary (†360 př. Kr.). Rozkvět logiky u Řeků trval asi 150 let.

Na antické výsledky navázali středověcí myslitelé, např. formulací dalších principů logiky. Vrchol středověké logiky je kladen krátce po jejích začátcích, tzn. do 13. stol.; po 14. stol. nastává útlum. Scholastická systematičnost ovlivnila nejen následující pojetí logiky, ale velice významně i její výuku.

V devatenáctém století začíná rozvoj *matematické* [2)] logiky, vyvolaný zejména potřebou upřesnit základy matematiky (obzvláště analýzy). Používání matematických metod a s ním spojená *idealizace* a *formalizace našeho vyvozování* se staly jedním z nejdůležitějších rysů matematické logiky. Při tomto přístupu zanedbáváme veškeré psychologické aspekty a zůstávají nám jen postupy, které je možno kdykoli znovu opakovat; dokonce ověřování, zda naše vyvozování bylo korektní, je již natolik mechanické, že je lze svěřit stroji (při hledání cesty, která vede k prokázání tvrzení, se však uplatňuje lidská intuice). Formalizace vyvozování (dokazování) jednak vede k přesnému vymezení, co vyvozováním rozumíme, a jednak umožní myslet o myšlení, přesněji řečeno myslet o formalizovaném myšlení. Zdůrazněme, že právě formalizace (matematizace) umožnila ukázat řadu hlubokých vět o našem (takto vymezeném) vyvozování. Za nejvýznamnější osobnosti počátků matematické logiky je nutno počítat Georgea Boolea (1815–1864) a Gottloba Fregeho (1848–1925). Mezi matematickými logiky vynikli obzvláště Bertrand Russell (1872–1970) a brněnský rodák Kurt Gödel (1906–1978).

*

V Kritice slov Karel Čapek s půvabem jemu vlastním napadá logiku: „O logickém důkazu je jediná pravda, že se nic nedá logicky dokazovat; což vám dokážu logicky. Buď dokazuji své tvrzení samými evidentními soudy; ale kdyby mé tvrzení plynulo evidentně z evidentních vět, bylo by samo evidentní, a tu by ovšem naprosto nepotřebovalo být dokazováno. Nebo dokazuji své tvrzení větami neevidentními, ale pak bych musel logicky dokazovat všechny tyto věty „usque ad infinitum“, …, z čehož logicky plyne, že logický důkaz je nemožný; a není-li tento

[2)] nazývané též symbolickou

logický důkaz naprosto přesvědčující, vidíte z toho, že logické dokazování opravdu za nic nestojí".

K. Čapek zpochybňuje samu podstatu logiky, neboť pojem důkazu je jedním z jejích nejdůležitějších pojmů. Pokud bychom však přijali Čapkovy výhrady, musili bychom revidovat náš přístup k mnohem širší oblasti zahrnující celé lidské rozumové vyvozování. Připomeňme, že Eukleidés (315–271 př. Kr.) ve svých Základech jako prvý vyvozuje z několika axiomů celou nauku (geometrii, ale protože aritmetiku chápe jako součást geometrie, je možno říci, že celou tehdejší matematiku). Deduktivní metoda však neovlivnila pouze matematiku a vědy blízké matematice (např. teoretickou fyziku), ale zasahuje — a to dokonce i ve své formalizované podobě — do velice mnoha oblastí lidského poznání; jako příklad uveďme knihu Barucha Spinozy Ethica more geometrico demonstrata z let 1662–1665, kde je podávána filozofie metodou věta – důkaz[3)].

Naštěstí není těžké nahlédnout, že Čapkovy námitky naprosto nereflektují lidskou zkušenost. Parafrázujeme-li jeho úvahu, můžeme také jednoduše „dokázat", že nikdy nedojdeme z Prahy do Prčic: při každém kroku se naše pozice změní jen málo a Prčice jsou od Prahy dost daleko. Chyba Čapkovy úvahy spočívá v tom, že mnoha (byť malými) kroky je možno urazit velkou vzdálenost, což řada účastníků pochodu na uvedené trase prakticky prokázala. Analogicky není možno popřít, že i pomocí evidentních důkazových kroků je možno dojít (je-li jich hodně) k tvrzením značně neevidentním.

Dokonce je možno říci, že právě rozložení důkazu do řady jednoduchých „kroků" způsobuje snadné ověření, zda důkaz jako celek je přesvědčivý.

* * *

Během dlouhého zkoumání korektního lidského vyvozování bylo shromážděno množství poznatků. Každý pisatel díla o logice musí (subjektivně) z tohoto bohatství vybírat to, co je podle jeho názoru nejdůležitější. Autor se přiznává k zaměření na výsledky matematické logiky. To však neznamená, že bychom zcela pomíjeli ostatní části logiky. Z hlediska matematického pojetí např. poklesl význam aristotelské sylogistiky, v textu ji však věnujeme více než jeden paragraf vzhledem k její aplikovatelnosti. Mnoho antických nebo scholastických zákonů vyvozování se ukazuje jako klíčová tvrzení rovněž pro matematickou logiku. Budeme se snažit upozornit na tato místa, jež jsou významná jak z intuitivního, tak i z formálního hlediska.

Autor se snažil vybrat do základního textu jen ta nejzákladnější a nejpodstatnější fakta; mnohdy je však těžké odolat a nezodpovědět ani ty otázky, které

[3)] Celý název českého vydání z r. 1926 zní: Ethika *po geometricku* vyložená, ve vydání v nakladatelství Dybbuk, Praha 2004 se název překládá Etika vyložená *způsobem užívaným v geometrii* ... Pro zajímavost uveďme první Spinozův axiom: „Vše co jest, jest buďto samo v sobě, anebo v něčem jiném."

si téměř jistě položí každý trochu zvídavější čtenář. Z toho důvodu připojujeme dodatky k jednotlivým kapitolám. Pro vážnější zájemce také zmiňujeme odkazy na literaturu, ve které lze nalézt prokázání uvedených tvrzení. Autor si je vědom, že je běžné uvádět citace[4)] v odborném textu a nikoli v textu určeném k základnímu seznámení s problematikou, a prosí tedy ty čtenáře, kterým by citace vadily, aby je prostě pominuli. Drobnějším písmem vyznačujeme ty části, které jsou o poznání méně důležité než zbytek textu.

*

Při výkladu zachováváme tradiční rozdělení na **výrokový** a **predikátový** počet, které se datuje již od antiky, neboť Aristotelés a jeho následovníci se zabývali význačnými aspekty predikátového počtu, megarsko-stoická škola pak počtem výrokovým. Stoikové dokonce kladou základy axiomatického přístupu k výrokovému počtu a předznamenávají tak přístup, který byl do důsledku doveden až v matematické logice.

Podle jiného hlediska dělíme logiku na **syntax**, ve které se budeme zabývat budováním formulí a vztahy mezi nimi, zejména dokazatelností, a **sémantiku**, v níž se budeme zajímat o význam formule, obzvláště o její pravdivost (podrobněji nahlédneme význam těchto pojmů v dalším textu). Zlatým hřebem je pak ukázání vztahu mezi sémantikou a syntaxí — dokazatelné jsou přesně[5)] všechny vždy pravdivé formule (viz první paragraf kapitoly I a §2 druhé kapitoly).

*

Kvantifikací proměnných a dalšími podstatnými vlastnostmi proměnných se budeme zabývat až ve druhé kapitole. Avšak velice důležitý pojem „proměnné“ užijeme již v první kapitole textu (výroková proměnná), a proto již teď krátce připomeňme, co si máme pod „proměnnou“ představovat. Předpokládejme, že máme jakýsi soubor objektů (soubor může být konečný i nekonečný); proměnná pak představuje blíže neurčený objekt z tohoto souboru („proměnná probíhá uvažovaný obor“). Například v bodě 3 z ne-předmluvy proměnná „člověk“ zastupovala kteréhokoli konkrétního člověka.

* * *

V textu budeme několikrát budovat objekty rekurzí (např. formule a důkazy výrokového počtu v kap. I, termy, formule a rovněž důkazy predikátového počtu ve druhé kapitole). Základní myšlenka je vždy stejná a velice jednoduchá, liší se jen její provedení. Protože se však v textu idea opakuje několikrát, zdá se vhodné

---

4) Odkazy budou směřovat zejména do česky psaných knih [So] a [Šv], v řadě případů budeme také citovat původní práci, ve které se výsledek poprvé objevil.

5) tzn. každá dokazatelná formule je vždy pravdivá a současně každá vždy pravdivá formule je dokazatelná

ji popsat jednou pro celý text, a to na jeho počátku. Pro popis zvolíme příklady mimo matematiku, které snad čtenáři ukáží, o jak prostou ideu jde.

Zkusme popsat rekurzí (pěší) pochod. Stavebním kamenem bude jeden krok, základním pochodem bude vykonání jednoho kroku (tj. jednokrokový „pochod“ již pokládáme za pochod) pravidlem pro rekurzivní vytváření pochodů bude „každý pochod můžeme prodloužit o jeden krok“. Doufám, že souhlasíte, že takto popíšeme naše chápání idealizovaného pochodu. Idealizace spočívá zejména v tom, že při definici zanedbáváme lidské omezení časem. Je jistě nemožné, aby reálný člověk udělal tolik kroků, kolik je atomů v naší sluneční soustavě. Ovšem pohled zanedbávající lidskou konečnost[6)] je příznačný pro celou matematiku — o dvou přímkách jen málo se lišících od rovnoběžek také prohlásíme, že se protnou, i když nikdy reálně nemůžeme dosáhnout jejich průsečíku.

V této knize budou všechny konstrukce rekurzí objektů toho kterého typu určeny zadáním tří parametrů, kterými jsou:

(1) *stavební kameny* (v předchozím případu kroky),

(2) *základní objekty* konstrukce (v předchozím případu pochod tvořený jediným krokem)

(3) a hlavně *pravidla určující jak* z již sestrojených objektů *vytvořit objekt nový* (v předchozím případě „prodloužením pochodu o jeden krok dostaneme opět pochod“).

Konstruované objekty budou ve všech našich případech řady stavebních kamenů, avšak nikoli jakékoli řady — jen ty řady stavebních kamenů, které můžeme vybudovat ze základních objektů užívajíce postupně pravidel pro tvorbu objektů.

Jako další pojem popišme lichokrokový pochod, a to tak, že stavebními kameny jsou znovu kroky a základním lichokrokovým pochodem je opětovně jednokrokový pochod. Pravidlem pro vytváření lichokrokových pochodů však budiž „každý lichokrokový pochod můžeme prodloužit o dvojici kroků“. Je každá trasa (systém kroků) vytvořitelná pochodem také sestrojitelná lichokrokovým pochodem? — Už znáte odpověď? — Žádná trasa pochodu se sudým počtem kroků není vytvořitelná lichokrokovým pochodem (uvědomte si, že základním lichokrokovým pochodem je jednokrokový pochod). Na druhé straně každý lichokrokový pochod je pochodem (místo přidání dvojkroku můžeme postupně dvakrát přidat jeden krok), pročež každá trasa lichokrokového pochodu je vytvořitelná pochodem.

Při popisu spojitelného pochodu znovu neměňme první dva parametry: stavební kameny budou opět kroky a základním spojitelným pochodem nechť je znovu jednokrokový pochod. Ze dvou již vytvořených spojitelných pochodů však dovolme vytvořit nový spojitelný pochod jejich prostým spojením (prodloužením). Jsou systémy tras pochodů a spojitelných pochodů stejné? — Víte již, co

[6)] V matematice běžně zaujímáme (přinejmenším) postoj, který by asi nejpřesněji odpovídal řeckým bohům: ti byli nesmrtelní, měli však vlastnosti podobné lidským.

odpovědět? — Protože připouštíme jednokrokové pochody, je zřejmě každý pochod také spojitelným pochodem (prodloužit pochod o jeden krok je totéž jako ho spojit s jednokrokovým pochodem). Nadto místo prodloužení spojitelného pochodu o jiný spojitelný pochod můžeme ho prodloužit o jeden krok a opět o jeden krok, atd., a to tolikrát, kolik kroků má přidávaný spojitelný pochod. Takto postupně (indukcí) zjistíme, že trasa každého spojitelného pochodu je rovněž trasou pochodu.

Ukázali jsme, že systémy tras pochodů a spojitelných pochodů jsou tytéž. Zkuste si však představit, že třídy vaší školy budou soutěžit o to, která vykoná za den pochod, který má nejvíce kroků. Pokud budou soutěžit podle pravidel pochodu, pojedou doprovodná vozidla kolem jdoucího zástupce třídy a při projevu únavy jej někdo vystřídá ve tvoření kroků — zbývající spolužáci se mohou zapojit pouze povzbuzováním. Při soutěži podle pravidel spojitelného pochodu bude soutěž probíhat zcela jinak. Spolužáci odhadnou úseky, které jsou schopni ujít, na jejich počátky se rozmístí a každý se bude snažit projít svůj úsek během jednoho dne. Pokud se spolužáci nepřecenili a každý skutečně svůj úsek překoná, podaří se jim vytvořit mnohonásobně delší trasu pochodu než v prvém případě.

Předchozí úvahy o spojitelném pochodu ukázaly, že je možná změna pravidel, která sice zachovává systém objektů sestrojitelných za pomoci původně uvažované rekurze, avšak mění systém objektů vytvořitelných vzhledem k nějakému omezení. V případě soutěže tříd o co nejdelší trasu pochodu byla takovým omezením vytvořitelnost pochodu během jednoho dne.

V našem textu budeme úvahy o konstrukci rekurzí aplikovat zejména na pojem důkazu. Navrhneme více možných systémů pravidel dovolujících z již vytvořených důkazů vytvářet důkazy další. Tyto jednotlivé systémy sice nebudou měnit systém formulí, které lze dokázat, avšak výrazně budou měnit sestrojitelnost důkazů vzhledem k určitým omezením. Omezením nebude sestrojitelnost důkazu během jednoho dne; jako omezení budeme uvažovat zejména přehlednost důkazu a jeho sdělitelnost jiným matematikům. Vzpomeňte si na poučení plynoucí z našeho triviálního příkladu, až se v §1 první kapitoly (a v §2 kap. II) změnou pravidel sice nezmění pojem dokazatelné formule, avšak dramaticky se změní přehlednost tvorby důkazů.

* * *

V ne-předmluvě jsme představili některé partie, kterými se budeme v předkládaném textu zabývat, není proto snad nutné nyní shrnovat obsah jednotlivých kapitol. Vhodné je však teď znovu výslovně upozornit na to, že třetí paragrafy kapitol I a II nejsou nezbytné pro pochopení dalšího textu. Druhý paragraf kap. II by měl být čten až po prostudování výrokového počtu, naproti tomu §1 druhé kapitoly je na ostatním textu téměř nezávislý. První dva paragrafy třetí kapitoly navazují na druhý paragraf kap. II, avšak v případě potřeby je možno druhý paragraf kap. III číst před prvním.

Nadto je třeba zdůraznit, že text začíná popisem naprostých základů matematické logiky, postupně však uvádí podstatné výsledky, a to zejména ve druhém paragrafu třetí kapitoly. Gödelovy věty o neúplnosti bývají mnohdy interpretovány bez pochopení jejich podstaty; ve snaze tyto vrcholné výsledky matematické logiky čtenáři přiblížit je v našem textu nejen přesně vyslovíme, avšak navíc dokonce ukážeme i metody jejich prokazování. Se stoupající závažností popisovaných výsledků roste i obtížnost čtení textu; pochopení některých částí třetí kapitoly již vyžaduje úsilí. Při experimentálním čtení textu nečinily studentům gymnázií potíže ani přípravné úvahy ke Gödelovým větám, ani jejich přesná matematická formulace, centrální myšlenky prokazování vět o neúplnosti (aplikace vlastností Gödelovy a Rosserovy formule) však zvládli až po opakovaném čtení. Je tudíž možné, že budete muset, vážený čtenáři, číst závěr druhého paragrafu třetí kapitoly několikrát. Úvahy, které na počátku třicátých let minulého století zaskočily celý matematický svět, se už autorovi nepodařilo vyjádřit jednodušeji.

V textu bude uvedena řada příkladů. Ty jsou rozděleny do tří skupin. *Příklady* jsou řešeny přímo v textu a slouží pro ilustraci definovaných pojmů. *Úlohy* jsou také obsaženy ve vlastním textu, avšak jejich řešení je nejprve ponecháno čtenáři; řešení x-té úlohy je pak uvedeno v poznámce pod čarou označené ux. Jednotlivé paragrafy jsou zakončeny *cvičeními*, jejichž stručná řešení jsou uvedena na konci textu. Zkušenost s prvními studenty, kteří četli text, ukázala, že větší zájem byl o úlohy formulované jako hlavolamy (v první kapitole např. „zebry“ a úlohy o Porcii). Úlohy zaměřené abstraktněji (žádající např. sestrojení důkazu) se zdály méně zajímavé. V matematice však jde velmi často právě o dokázání jakéhosi tvrzení a jednoduché úlohy ukládající sestrojení důkazu jsou přípravou na tuto matematickou činnost. Proto prosím, nespokojte se tím, že výsledky takovýchto úloh zkontrolujete, avšak skutečně se AKTIVNĚ SNAŽTE ŽÁDANÉ DŮKAZY SESTROJIT. Naproti tomu cvičení typu „zebra“ je v textu poměrně dost a čtenář si z nich může vybírat lehčí nebo těžší úlohy (např. cv. I-1.28, I-1.36, I-2.17–I-2.20) podle své potřeby a chuti.

*

Ve snaze o zpřehlednění textu používáme pro různé druhy objektů různé typy písma[7]; již podle druhu písma se pozná, zda se jedná o formuli výrokového (znak $\mathcal{A}, \ldots$) nebo predikátového počtu (znak $\varphi, \ldots$), o proměnnou výrokového (znak $\mathtt{p}, \ldots$) nebo predikátového počtu (znak $x, \ldots$), že mluvíme o funkci (znak $\mathfrak{F}, \ldots$) či predikátu (znak $\mathcal{P}, \ldots$) atd. Pokud by to čtenáři nevyhovovalo, nechť prostě zanedbává různost druhů písma.

Důležitá místa (definice a tvrzení) jsou zvýrazněna po obou stranách textu svislými čarami; silnějšími čarami jsou označeny čtyři nejvýznamnější výsledky matematické logiky zařazené do našeho textu.

[7] Shrnutí používaného značení je zařazeno na konec textu do rejstříku symbolů. Pro (intuitivní) přirozená čísla používáme znaky $m, n, \ldots$; nulu řadíme mezi přirozená čísla. Kladná (intuitivní) přirozená čísla označujeme pomocí symbolů $i, j, k, \ldots$

KAPITOLA I

VÝROKOVÝ POČET

Robot Radius: Nechci žádného pána.
Vím všechno sám.
Karel Čapek, RUR

§1

ZÁKLADY VÝROKOVÉHO POČTU

Výrokový počet (někdy se též hovoří o *výrokové logice*) je část logiky, kterou je možno přirovnat k mluvnickému rozboru souvětí. Při rozboru souvětí se obsahem jednotlivých vět nezabýváme, zajímají nás pouze vztahy vzniklé spojováním vět do souvětí. Podobně teď nebudeme analyzovat výrok sám o sobě, budeme zkoumat jen vztahy jednotlivých výroků s útvarem z nich složeným.

Výrokem rozumíme[1)] tvrzení (intuitivně řečeno oznamovací větu), které je dostatečně smysluplné, aby bylo *možno* říci, že je pravdivé nebo nepravdivé (nemusíme ale být schopni o pravdivosti rozhodnout; slovní spojení „Český kníže Bořivoj měl 1. 1. 880 rýmu.“ je výrok[2)]). Pravdivým výrokům je zvykem přiřazovat **pravdivostní hodnotu** 1, nepravdivým hodnotu 0.

Příklady pravdivých výroků: „Trosky Pompejí se nacházejí v Itálii.“, „17. 11. 1989 napadly policejní síly studenty.“, „Dvě různé kružnice se protínají nejvýše ve dvou bodech.“ a „Neexistuje racionální číslo, jehož druhá mocnina by byla rovna 2.“.

Příklady nepravdivých výroků: „Praha leží na Dunaji.“, „Český král Václav III. byl synem Přemysla Otakara II.“, „Čtverec má alespoň tři různé úhlopříčky.“ a „Druhá mocnina každého komplexního čísla je nezáporným reálným číslem.“.

---

1) Podané vysvětlení není přesná definice, ale pouhé vymezení, přesně tak jako v geometrii „přímka je délkou bez šířky“ nedefinuje přímku, ale pouze ukazuje, jak si máme přímku představovat. Pojem přímky je pro geometrii pojmem základním (nedefinujeme ho na základě jiných pojmů), chování přímek je popsáno axiomy. Analogicky se ve výrokovém počtu nesnažíme pojem výroku formálně definovat, ale „pouze“ zkoumáme jeho vlastnosti a vztahy výroků. Nemožnost definovat všechny pojmy je v principu věci: definovat mohu jen pomocí „jednodušších“ pojmů a musím tedy některé pojmy přijmout za zřejmé bez definice.

2) Jiný příklad volně podle Abélarda (1079-1142): „Počet hvězd je sudý.“.

Pro snazší vyjadřování budeme používat **výrokové proměnné** $\mathrm{p}, \mathrm{q}, \ldots$, které zastupují výroky (stejně jako v aritmetice užíváme proměnné zastupující čísla). Výroková proměnná tedy, intuitivně řečeno, představuje blíže neurčený výrok.

Z výroků je možno vytvářet výroky složitější, jež budeme nazývat **složenými výroky**.

V tomto paragrafu budeme zkoumat jen dva způsoby tvorby složitějších výroků: negaci a implikaci. Tím se lišíme od převážné většiny textů o výrokovém počtu, které zavádějí také další způsoby tvorby složených výroků hned v počátcích popisu výrokového počtu. K tomuto přístupu nás vede snaha o co nejrychlejší předložení významných výsledků matematické logiky. Čtenář nemusí mít obavy, že by byl ochuzen; dalšími způsoby budování složených výroků se budeme zabývat ve druhém paragrafu.

Negace matematizuje úpravu výroku prováděnou v běžné češtině obraty „Není pravda, že …“, „Neplatí, že …“ nebo vznikající změnou slovesa přidáním předpony „ne-“ (popř. z latiny převzaté „non …“). Negaci výroku p budeme označovat pomocí zápisu[3] $\neg\mathrm{p}$.

Například negací výroku „Karlova univerzita byla založena r. 1348.“ je výrok „Karlova univerzita nebyla založena r. 1348.“; pozor: negací *není* výrok typu „Karlova univerzita byla založena r. 1349.“. Slovní spojení „Karlova univerzita nebyla založena r. 1348.“ je výrok, má proto smysl vytvořit jeho negaci, což je výrok „Není pravda, že Karlova univerzita nebyla založena r. 1348.“. Poté pochopitelně nic nebrání znovu negovat posledně uvedený výrok; ve vytváření negací je samozřejmě možno neustále pokračovat. Srovnáním významu výroku a jeho dvojité negace se budeme zabývat na několika místech následujícího textu.

Nabídli jsme několik možností, jak vyjádřit negaci výroku v běžné mluvě. To předpokládá, že všechna tato vyjádření mají stejný význam. Ve většině případu je tomu skutečně tak: slovní spojení

„Není pravda, že Karlova univerzita byla založena r. 1348.“,
„Neplatí, že Karlova univerzita byla založena r. 1348.“,
„Karlova univerzita nebyla založena r. 1348.“

mají týž význam. V některých případech však může vyjádření pomocí „Není pravda, že … “ mít jiný význam než slovní spojení vzniklé přidáním předpony „ne-“ a v takovém případě negaci vyjadřuje pouze slovní spojení vzniklé uvozením „Není pravda, že … “ (nebo uvozením „Neplatí, že … “). Uvažujeme-li např. výrok

„Někdo je černovlasý.“

(jenž má význam „Existuje člověk, který má černé vlasy.“), pak negací je

[3] Používají se též zápisy $\sim\mathrm{p}$, $\overline{\mathrm{p}}$ a p'.

„Neplatí, že někdo je černovlasý.“

(ve významu „Nikdo nemá černé vlasy.“) a to je něco zcela jiného než výrok

„Někdo není černovlasý.“,

protože význam posledního výroku je týž jako výroku „Existuje člověk, který nemá černé vlasy.“. Zcela analogicky negací výroku „Přišla Eva a Jana.“ chceme vyjádřit, že alespoň jedna z nich nepřišla. Naproti tomu běžným významem slovního spojení „Nepřišla Eva a Jana.“ je, že nepřišla ani jedna.

Použití předpony „ne-“ může také připouštět více výkladů. Například význam věty „Každý není černovlasý.“ se podle české mluvnice[4)] určuje podle větného přízvuku a věta má buďto význam stejný jako výrok „Nikdo není černovlasý.“ (je-li zdůrazněno „každý“), nebo jako výrok „Někdo není černovlasý.“, tzn. „Ne-každý je černovlasý.“. Protože nechceme ponechat význam výroku na přízvuku (což by ostatně bylo v psaném textu obtížné) a ani na kontextu, budeme se vyhýbat používání slovním spojením tvaru „Každý není černovlasý.“. O významu negací výroků tvaru „Každý je černovlasý.“ a „Někdo je černovlasý.“ pojednáme rovněž v souvislosti s kvantifikací v §2 kap. II.

V běžném obchodě se prodávají různé druhy nápojů. Jistě si však umíte představit malý krámek, kde se prodávají jen dva druhy nápojů, např. cola a minerálka. Negaci výroku „Tento nápoj je cola.“ je pochopitelně výrok „Tento nápoj není cola.“. Avšak se znalostí poměrů v krámku můžeme uvedenou negaci vyjádřit také „Tento nápoj je minerálka.“. V běžném obchodě by takováto reformulace negace nebyla možná.

Nechť pro každý jednotlivý následující výrok je $\mathfrak{c}$ pevně dané číslo. Negací výroku „Číslo $\mathfrak{c}$ je menší nebo rovno 5.“ je výrok „Číslo $\mathfrak{c}$ není menší nebo rovno 5.“ a pracujeme-li v racionálních nebo reálných číslech, můžeme tuto negaci vyjádřit také „Číslo $\mathfrak{c}$ je (ostře) větší než 5.“. Pokud se naše úvahy týkají jen čísel přirozených (v takovém případě i zadané číslo $\mathfrak{c}$ musí být přirozené), můžeme negaci dokonce formulovat slovy „Číslo $\mathfrak{c}$ je větší nebo rovno 6.“; posledně uvedený výrok však nevyjadřuje negaci výroku „Číslo $\mathfrak{c}$ je menší nebo rovno 5.“ ani v oboru racionálních ani v oboru reálných čísel.

Úloha 1. Co je negací výroku „Tento trojúhelník je rovnostranný.“? Se znalostí geometrie vyjádřete negaci pomocí zcela jiných pojmů.

Úloha 2. Vyjádřete negaci výroku „Kvadratická rovnice $x^2 + 5x - 1 = 0$ má nejvýše dvě řešení.“ bez použití slova „dvě“. Prozkoumejte pravdivost výroku a jeho negace.

[4)] viz např. B. Havránek a A. Jedlička, Česká mluvnice, SPN, Praha 1988

[u1)] Negaci vyšetřovaného výroku, tj. výrok „Tento trojúhelník není rovnostranný.“ vyjádříme např. slovy „Alespoň dvě strany tohoto trojúhelníku mají různou délku.“ nebo slovním spojením „Alespoň jeden úhel tohoto trojúhelníka je různý od 60°.“ nebo pomocí „Alespoň dvě výšky tohoto trojúhelníku mají různé délky.“.

[u2)] Negaci popisuje např. spojení „Kvadratická rovnice $x^2 + 5x - 1 = 0$ má alespoň tři různá řešení.“. Původní výrok je pravdivý, jeho negace nikoli.

Na základě dvou výroků můžeme vytvořit také výrok popsaný v běžné řeči obraty „Jestliže …, pak …“, „Z … plyne …“[5], „… implikuje …“. Tento způsob sestrojení nového výroku se matematizuje **implikací**. Pro implikaci vytvořenou na základě výroků p, q (pořadí je podstatné!) je zvykem používat[6] soustavy znaků $(\mathsf{p} \to \mathsf{q})$. Místo „$\mathsf{p}$ implikuje q“ říkáme také, že „p je **postačující podmínkou** pro q“ nebo že „q je **nutnou**[7] **podmínkou** pro p“. První výrok v implikaci budeme nazývat **antecedent**, někdy se také užívá *předpoklad implikace*, či *premisa*; pro druhý výrok budeme užívat název **konsekvent**, někteří autoři používají *důsledek*, nebo *závěr implikace*.

Implikaci $(\mathsf{q} \to \mathsf{p})$ nazýváme **obrácenou implikací** k implikaci $(\mathsf{p} \to \mathsf{q})$. Pozor: obrácená implikace mívá naprosto jiný význam než původní implikace. Zmiňme ještě jeden způsob vyjadřování implikace: pro implikaci $(\mathsf{p} \to \mathsf{q})$ užíváme slovní spojení „p jen tehdy, když q“ a obrácenou implikaci $(\mathsf{q} \to \mathsf{p})$ popisujeme[8] slovy „p tehdy, když q“. Tato slovní spojení se používají zejména, nastane-li současně jak implikace, tak také obrácená implikace; pak se užívají obraty „p tehdy, a jen tehdy, když q“ nebo „p právě tehdy, když q“.

Například implikací složenou z výroku „U moře bývá písek.“ a z výroku „$2 + 2 = 5$.“ je výrok „Jestliže u moře bývá písek, pak $2 + 2 = 5$.“ Obrácenou implikací k uvedené je implikace „Z toho, že $2+2 = 5$, plyne, že u moře bývá písek.“. Pozor: vědomě jsme zvolili případ ukazující, že mezi antecedentem a konsekventem implikace nemusí být viditelná souvislost a že implikaci je možno vytvářet jak z pravdivých, tak také z nepravdivých výroků.

Úloha 3. Vyjádřete implikaci „Prší-li, jsem doma.“ co nejvíckrát pomocí jiných slovních spojení. Vytvořte obrácenou implikaci a znovu ji alespoň třikrát různě formulujte. Je význam obou implikací týž?

Úloha 4. Utvořte implikaci z výroků „Trojúhelník je rovnostranný.“ a „Trojúhelník má alespoň dvě výšky stejně velké.“ a také obrácenou implikaci. Je některá z nich v běžné geometrii pravdivá?

---

[5] viz terminologickou poznámku na konci rejstříku symbolů

[6] Někdy se pro označení implikace používá též symbolu $\Rightarrow$, případně $\supset$.

[7] Termín „nutná podmínka“ asi není tak intuitivní jako „postačující podmínka“; poznamenejme proto, že v dalším textu nahlédneme, že implikace $(\mathsf{p} \to \mathsf{q})$ má z jistých hledisek stejný význam jako implikace $(\neg\mathsf{q} \to \neg\mathsf{p})$, takže nenastane-li q, nenastane ani p, tzn. k tomu, aby nastalo p je „nutné“, aby nastalo q.

[8] Zde *není* slovní spojení „tehdy, když“ míněno jako časové určení!

[u3] Např. „Z toho, že prší plyne, že jsem doma.“ nebo „Postačující podmínkou pro to, abych byl doma, je déšť.“ a také „Déšť implikuje, že jsem doma.“. Obrácenou implikaci můžeme formulovat např. „Jsem-li doma, prší.“ nebo „Nutnou podmínkou pro to, abych byl doma, je déšť.“ nebo „Postačující podmínkou pro déšť je moje přítomnost doma.“. Význam není týž, obrácená implikace žádá, abych nebyl doma nikdy, když neprší.

[u4] Výrok „Je-li trojúhelník rovnostranný, má alespoň dvě výšky stejně velké.“ je pravdivý;

Negace výroku je výrok a výrokem je rovněž implikace vzniklá spojením jakýchkoli dvou výroků. Tyto složené výroky následně mohou sloužit jako základ pro tvorbu další negace nebo implikace a tak můžeme pokračovat k stále složitějším a složitějším výrokům. Například pro dva výroky $\mathtt{p}, \mathtt{q}$ můžeme vytvořit negaci $\neg\mathtt{p}$ a pak implikaci $(\neg\mathtt{p} \to \mathtt{q})$. Nic nám však nebrání začít implikací a vytvořit $(\mathtt{p} \to \mathtt{q})$, a tento výrok následně negovat, tzn. vytvořit výrok $\neg(\mathtt{p} \to \mathtt{q})$. Pak můžeme ze vzniklých výroků vytvořit implikaci, tu pak negovat atd.

Výroky obsažené v předchozím příkladu také vysvětlují potřebu užití závorek kolem implikace. Pokud bychom vynechali závorky, budou zápisy $(\neg\mathtt{p} \to \mathtt{q})$ a $\neg(\mathtt{p} \to \mathtt{q})$ zcela totožné. Závorky popisují způsob výstavby, jinak řečeno: rozhodují, jak zápis číst. Řadu symbolů $(\neg\mathtt{p} \to \mathtt{q})$ čteme: jestliže neplatí $\mathtt{p}$, pak $\mathtt{q}$, avšak $\neg(\mathtt{p} \to \mathtt{q})$ čteme: neplatí, že z $\mathtt{p}$ plyne $\mathtt{q}$.

Označují-li $\mathtt{p}, \mathtt{q}$ po řadě pravdivé výroky „Voda se vaří při 100^{o}C." a „Veverka je savec.", pak formule $(\neg\mathtt{p} \to \mathtt{q})$ označuje pravdivý složený výrok „Jestliže se voda nevaří při 100^{o}C, je veverka savec." (pravdivost výroku je zaručena mj. pravdivostí konsekventu — podrobnější rozbor viz o několik stránek dále při popisu sémantiky výrokového počtu). Naproti tomu formule $\neg(\mathtt{p} \to \mathtt{q})$ označuje nepravdivý výrok „Neplatí: vaří-li se voda při 100^{o}C, je veverka savec.", (jehož nepravdivost nahlédneme okamžitě z pravdivosti implikace „Jestliže se voda vaří při 100^{o}C, je veverka savec." — v posledně zmíněné implikaci je opět pravdivý konsekvent); význam popsaných složených výroků je tedy zcela jistě různý.

*

První pojem matematické logiky, který budeme definovat rekurzí, bude pojem formule výrokového počtu. Tento pojem slouží k popisu složených výroků vzniklých ze zadaných výroků[9)].

Formulí výrokového počtu je jakýkoli zápis, který dokážeme sestrojit rekurzí s následujícími parametry[10)]:

Stavební kameny: znaky pro výrokové proměnné $\mathtt{p}, \mathtt{q}, \ldots$, znaky $\neg$ a $\to$ a závorky (jakožto pomocné symboly);
Základní formule: znaky pro výrokové proměnné;
Pravidla pro vytváření dalších formulí:

(a) je-li $\mathcal{A}$ formule výrokového počtu, je formulí výrokového počtu také její negace $\neg\mathcal{A}$,

(b) jestliže $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ jsou formule výrokového počtu, je formulí výrokového počtu rovněž implikace $(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$ z nich vytvořená.

---

obrácená implikace nikoli.

9) Podrobněji: jestliže do formule výrokového počtu dosadíme za výrokové proměnné nějaké konkrétní výroky, dostaneme složený výrok vytvořený z výroků zadaných a naopak tímto způsobem dostaneme všechny složené výroky vytvořené ze zadaných výroků.

10) V tomto paragrafu se zabýváme pouze formulemi výrokového počtu vytvořenými pomocí negace a implikace; ve druhém paragrafu připustíme nadto konjunkci, disjunkci a ekvivalenci. Po rozšíření povolených spojek se pochopitelně zvětší i systém formulí výrokového počtu.

Pro formule výrokového počtu budeme používat znaky $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}, \dots$

Řady zápisů

$$\mathrm{p}, \mathrm{q}, (\mathrm{p} \to \mathrm{q}), \neg(\mathrm{p} \to \mathrm{q}), \neg\mathrm{p}, (\neg\mathrm{p} \to \neg(\mathrm{p} \to \mathrm{q}))$$
$$\mathrm{p}, \neg\mathrm{p}, \mathrm{q}, (\mathrm{p} \to \mathrm{q}), \neg(\mathrm{p} \to \mathrm{q}), (\neg\mathrm{p} \to \neg(\mathrm{p} \to \mathrm{q}))$$

ukazují příklady posloupností postupně vznikajících formulí výrokového počtu, jejichž posledním členem je zápis $(\neg\mathrm{p} \to \neg(\mathrm{p} \to \mathrm{q}))$ (v první posloupnosti nejprve užijeme dvakrát pravidlo o základních formulích a pak postupně pravidla (b), (a), opět (a) tentokrát aplikované na prvý člen posloupnosti a (b) aplikované na poslední dva členy dosud sestrojené posloupnosti v obráceném pořadí). Konstrukce kterékoli z těchto posloupností prokazuje, že zápis $(\neg\mathrm{p} \to \neg(\mathrm{p} \to \mathrm{q}))$ je formulí výrokového počtu.

Naproti[11)] tomu např. zápis $(\mathrm{p} \to\to \mathrm{q})$ nemůže být formulí výrokového počtu podle naší definice, protože podle ní v každé formuli výrokového počtu kolem znaku $\to$ musí být opět formule výrokového počtu, avšak žádná formule výrokového počtu ani nezačíná ani nekončí znakem $\to$.

Jestliže bude ze souvislosti patrné, že se jedná o formule výrokového počtu, zamlčíme někdy slova „výrokového počtu". Umluvme se také, že budeme vynechávat závorky v zápisu formulí, pokud to neohrozí čitelnost zápisu. Poznamenejme, že pro usnadnění čtení se v matematickém textu běžně používá více typů závorek.

Úloha 5. Rozhodněte, zda zápisy $(\neg\mathrm{p} \to \neg\mathrm{q})$ a $\neg(\mathrm{p} \to \neg\neg\mathrm{p})$ jsou formulemi výrokového počtu a své rozhodnutí zdůvodněte.

Úloha 6. Prokažte, že zápis $\big([\mathrm{p} \to (\neg\neg\mathrm{q} \to \neg\mathrm{p})] \to \mathrm{p}\big)$ je formulí výrokového počtu. Existuje více posloupností zápisů prokazujících, že zadaný zápis je formulí?

[11)] V osmém bodě ne-předmluvy jsme slíbili, že ukážeme neexistenci důkazů určitých tvrzení. Výpověď, že určitý zápis není formulí je analogický, avšak mnohem jednodušší případ. Prohlašujeme totiž, že neexistuje posloupnost formulí postupně vznikajících z výrokových proměnných podle pravidel (a) a (b) pro vytváření formulí, a to posloupnost končící zadaným zápisem.

[u5)] Oba zápisy jsou formulemi výrokového počtu a následující posloupnosti formulí ukazují vytváření našich formulí rekurzí:

$$\mathrm{p}, \mathrm{q}, \neg\mathrm{p}, \neg\mathrm{q}, (\neg\mathrm{p} \to \neg\mathrm{q}),$$
$$\mathrm{p}, \neg\mathrm{p}, \neg\neg\mathrm{p}, (\mathrm{p} \to \neg\neg\mathrm{p}), \neg(\mathrm{p} \to \neg\neg\mathrm{p})$$

— při tvorbě první posloupnosti použijeme nejprve pravidlo (a) na obě základní formule a na závěr pravidlo (b) na takto vniklé formule; ve druhém případě použijeme pravidlo (a) nejprve na základní formuli a poté na takto vniklou formuli, pak pravidlo (b) na základní formuli a na poslední člen dosud sestrojené posloupnosti a nakonec pravidlo (a) na poslední člen posloupnosti.

[u6)] Posloupností zaručující, že zkoumaný zápis je formulí výrokového počtu, je např.

Úloha 7. Ukažte, že zápisy $(p \to r))$ a $(p \to qp)$ nejsou formulemi.

Úloha 8. Ukažte, že zápis $[p \to (q \to p) \to q]$ není formulí.

* * *

Příklad 1. Zajisté znáte Shakespearova Benátského kupce. A pravděpodobně si také vzpomínáte, že o výběru ženicha pro Porcii rozhodovala zkouška, v níž nápadník měl uhodnout ve které skřínce se skrývá Porciina podobizna, neboť jak říká Nerissa Porcii: „Váš otec byl povždy ctnostný muž. A lidé svatého života mívají v smrti šťastná vnuknutí. Proto v luterii se třemi skřínkami, zlatou, stříbrnou a olověnou … nemůže zvolit tu pravou, než kdo vás doopravdy miluje.“[12]. Nápadník musí přísahat, že pokud neuhodne, nikdy se neožení.

R. J. Smullyan v knize [Sm] (kterou velmi doporučuji pro její krásné hádanky) uvažuje „luterii“, ve které by ženich byl vybírán nikoli podle toho, jak je ctnostný, ale jen podle logičnosti jeho uvažování. Předložme nyní několik variací na hádanky uváděné Smullyanem.

Porcie přivede nápadníka ke třem skřínkám a sdělí mu, že nejvýše jeden z nápisů na skříňkách je pravdivý. A pak už jen čeká na rozhodnutí o svém osudu (a o osudu nápadníka). Kterou skřínku byste si vybrali vy, abyste se mohli oženit, a to dokonce s krásnou a chytrou Porcií?

zlatá	stříbrná	olověná
Podobizna není v této skřínce.	Podobizna není v olověné skřínce.	Podobizna je v této skřínce.

Už jste vybrali tu pravou? — V olověné podobizna být nemůže, protože by pak byly pravdivé nápisy jak na zlaté skřínce, tak i na olověné. Když už víme, že

posloupnost

$$q, \neg q, \neg\neg q, p, \neg p, (\neg\neg q \to \neg p), [p \to (\neg\neg q \to \neg p)], \big([p \to (\neg\neg q \to \neg p)] \to p\big).$$

Ovšem stejnou službu vykoná rovněž např. posloupnost

$$p, q, \neg p, \neg\neg p, \neg q, \neg\neg q, (\neg\neg q \to \neg p),$$
$$(\neg\neg q \to \neg\neg p), [p \to (\neg\neg q \to \neg p)], \big([p \to (\neg\neg q \to \neg p)] \to p\big),$$

ve které je jiné pořadí členů a některé členy navíc. Naproti tomu posloupnost

$$p, \neg\neg p, q, \neg q, [p \to (\neg\neg q \to \neg p)], \big([p \to (\neg\neg q \to \neg p)] \to p\big)$$

není dostatečně vhodným popisem konstrukce naší formule.

[u7] První zápis není dobře uzávorkován, každá formule má stejně pravých jako levých závorek; v druhém zápise se vyskytují bezprostředně za sebou dvě výrokové proměnné a žádné z našich pravidel tvorby formulí toto nepovoluje.

[u8] Počet levých a pravých závorek je stejný, přesto však zápis není dobře uzávorkován — můžeme číst jednak $\big([p \to (q \to p)] \to q\big)$, avšak také $\big(p \to [(q \to p) \to q]\big)$. Nemůže se vám proto podařit sestrojit potřebnou posloupnost.

[12] překlad E. A. Saudka

podobizna není v olověné, pak víme, že na stříbrné je pravdivý nápis. Kdyby byla podobizna ve stříbrné skřínce, byl by pravdivý také nápis na zlaté skřínce, což je zadáním vyloučeno. Podobizna proto musí být ve zlaté skřínce. Pro kontrolu si uvědomme, že v takovém případě je text na zlaté i olověné skřínce nepravdivý a pravdivý je jen na stříbrné skřínce.

Následující odstavec se bude snažit přesvědčit o výhodách symbolického zápisu ty čtenáře, kteří nejsou jeho příznivci. Podobně budeme vedle sebe používat slovní a symbolický zápis při řešení úloh 9 a 10. Nechť z, s a o vyjadřují po řadě výroky „Podobizna je ve zlaté skřínce.“, „Podobizna je ve stříbrné skřínce.“ a „Podobizna je v olověné skřínce.“

Na řádku (i) uvádíme u každého z výroků $\mathsf{z}, \mathsf{s}, \mathsf{o}$ ty z vyšetřovaných výroků a jejich negací, které jsou v daném případě pravdivé (např. za předpokladu výroku z — uložení podobizny do zlaté skřínky — je pochopitelně pravdivý výrok z a negace výroků s a o):

$$(i) \qquad \mathsf{z}:\ \mathsf{z}, \neg\mathsf{s}, \neg\mathsf{o} \qquad \mathsf{s}:\ \neg\mathsf{z}, \mathsf{s}, \neg\mathsf{o} \qquad \mathsf{o}:\ \neg\mathsf{z}, \neg\mathsf{s}, \mathsf{o}.$$

Při zadání našeho příkladu jsou na jednotlivých skřínkách výroky: $\neg\mathsf{z}, \neg\mathsf{o}, \mathsf{o}$. Prostým srovnáním posledně uvedené trojice výroků s trojicemi v (i) zjistíme, že trojice ze zadání se shoduje *nejvýše v jednom* výroku pouze s jednou trojicí, a to s příslušející uložení portrétu do zlaté skřínky.

Úloha 9. Nápadníci Porcie se moc nehrnuli a ti, co přišli, neuspěli. I začala Porcie zvažovat, jestli otec skutečně nařídil, jaké mají být nápisy na skřínkách, a zda by neměla dávat hádanku lehčí — sama měla tolik inteligence (vzpomeňte, jak později převlečená za mladého soudce brilantně zachránila Antonia), že hádanky nejen řešila, avšak bez zaváhání i vytvářela. A tak si připravovala nové nápisy a při zadávání úlohy chtěla nápadníkovi oznámit, že přesně jeden nápis je pravdivý.

zlatá	stříbrná	olověná
Podobizna je ve stříbrné skřínce.	Podobizna je v olověné skřínce.	Podobizna je v této skřínce.

Kterou skřínku vyberete při tomto zadání? Kdybychom ponechali z původního zadání slova „nejvýše jeden z nápisů na skříňkách je pravdivý“ byla by úloha jednoznačně řešitelná?

u9) Kdyby byla podobizna v olověné skřínce, byly by pravdivé nápisy na stříbrné a olověné skřínce, pročež tam být nemůže. Takže nápisy na stříbrné i olověné skřínce jsou nepravdivé, pravdivý musí být zápis na zlaté skřínce (tato úvaha je podmíněna tím, že víme, že alespoň jeden nápis je pravdivý), a tudíž je podobizna ve stříbrné skřínce. (V tomto případě je pravdivý nápis na zlaté skřínce a žádný jiný.) Pokud víme pouze, že nejvýše jeden nápis je pravdivý, nevyloučíme možnost ukrytí podobizny ve zlaté skřínce.
Pomocí symbolů: Na skřínkách jsou zapsány výroky: $\mathsf{s}, \mathsf{o}, \mathsf{o}$. Tato trojice se z trojic z (i)

Úloha 10. Současně si však Porcie připravila také trochu těžší úlohu pro případ, kdyby se nápadník nejevil přijatelným. Takového chtěla zavést před skřínky

zlatá	stříbrná	olověná
Podobizna není v této skřínce.	Podobizna není ve zlaté skřínce.	Podobizna je v této skřínce.

a oznámit mu, že alespoň jeden nápis je pravdivý a alespoň jeden je nepravdivý. Pořád však nebyla spokojená, pro naprosto nepřijatelné nápadníky chtěla vymyslet ještě něco těžšího, ale když on mezitím přišel Bassanio a ...

Příklad 2. Obávám se, že hádanku, jež vám nyní předložím, již znáte, je však tak hezká, že ji nemohu pominout. Na rozcestí dvou cest stojí dva bratři, z nichž jeden vždy mluví pravdu a druhý nikdy pravdu neřekne, avšak vy nevíte, který je který. Chcete se jich zeptat, která z cest vede k cíli vašeho putování. Pokud smíte položit dvě otázky, je vaše úloha jednoduchá. — Opravdu? — Jak se zeptáte? Stačí položit jakoukoli otázku, u které je jasná odpověď, např. „Je 2+2=4?“. Podle odpovědi poznáte, zda mluvíte s pravdomluvným nebo s lhářem, a pak se už prostě zeptáte, která cesta vede k vašemu cíli. Pravdomluvnému uvěříte a dáte se cestou, kterou ukáže; při odpovědi lháře se dáte přesně tou druhou, než vám poradil. Teď je však úloha těžší: smíte se zeptat jen jednoho bratra, a to jen jednou, a nadto otázkou, na kterou je odpověď ano–ne! Na co se zeptáte? — Ještě se zamyslete a nečtěte řešení, které následuje.

Nedaří se? — Otázka, která váš problém vyřeší zní: „Co mi řekne váš bratr, když se ho zeptám, zda tato cesta vede k mému cíli?“. Při odpovědi „Ne.“ se tou cestou dáte, při odpovědi „Ano.“ vykročíte tou druhou. Pokud bratr odpovídajícího je lhář, dá vám totiž nesprávnou odpověď a odpovídající, který je pravdomluvný, jeho odpověď zopakuje, celkově tudíž dostanete nesprávnou odpověď. Pokud bratr odpovídajícího je pravdomluvný, dá správnou odpověď a lhář odpovídající jako druhý jeho odpověď zneguje. I v tomto případě dostanete nepravdivou odpověď. Divíte se ještě, že vám doporučuji udělat přesně opak toho, co vám poradí bratři ve své dvoj-odpovědi[13)]?

shoduje v přesně jednom případě pouze při uložení portrétu do stříbrné skřínky; v nejvýše jednom výroku se shoduje při schování portrétu do stříbrné nebo zlaté skřínky.

[u10)] Kdyby podobizna byla ve zlaté skřínce, nebyl by žádný nápis pravdivý, tam se tudíž nacházet nemůže. Kdyby se podobizna nacházela v olověné skřínce, byly by všechny nápisy pravdivé, takže podobizna musí být ve stříbrné skřínce. (V tomto případě je nepravdivý výrok na olověné skřínce a žádný jiný.)
Pomocí symbolů: Nyní jsou na skřínkách zapsány výroky $\neg z, \neg z, o$; tato trojice se s trojicemi z (i) shoduje alespoň v jednom výroku a neshoduje alespoň v jednom výroku pouze při vložení portrétu do stříbrné skřínky.

[13)] Uvedená otázka není jediná, která řeší úlohu. Můžeme se také jednoho z bratří dotázat: „Odpovíte mi ano na otázku, zda tato cesta vede k mému cíli?“ Je-li dotázaný pravdo-

Úloha 11. Teď o dvou bratrech víme pouze, že každý z nich buď vždy mluví pravdu nebo vždy lže (tedy buď oba jsou pravdomluvní nebo oba lháři nebo jeden pravdomluvný a druhý lhář). Zeptáte se prvního, zda je lhář nebo pravdomluvný. Odpovědi však nerozumíte, a proto se zeptáte druhého „Co říkal tvůj bratr?“. Dostanete odpověď, že prvý se prohlásil za lháře. Je druhý z bratří lhář nebo je pravdomluvný? Co můžete říci o prvním?

Úloha 12. Každý ze dvou bratří je opět buď notorický lhář, nebo vždy mluví pravdu. První z nich prohlásí: „Alespoň jeden z nás je lhář.“ Kdo jsou tito bratři?

Úloha 13. Ze tří bratří je každý zase buď notorický lhář, nebo vždy mluví pravdu. První ze tří bratří vyhlásí: „Moji bratři jsou lháři.“, druhý ho částečně podpoří s prohlášením, že třetí bratr je lhář, avšak třetí označí za lháře prvního z bratří. Kdo jsou tito bratři?

* * *

V sémantice výrokového počtu budeme zkoumat pravdivostní hodnotu složeného výroku v závislosti na pravdivostních hodnotách jeho složek. Celou sémantiku naprosto rozhodujícím způsobem ovlivní přirozený požadavek, aby hodnota složeného výroku *nezáležela na ničem jiném než na pravdivostních hodnotách jeho složek.* Přijetí tohoto předpokladu umožní mj. popsat pravdivostní hodnoty složených výroků pomocí tabulek pravdivostních hodnot.

Naším prvním úkolem je popsat pravdivostní hodnoty složených výroků vzniklých pomocí negace a implikace. Kromě slovního vyjádření je vyjádříme v tabulkách 1 a 2 představujících **základní tabulky pravdivostních hodnot** pro negaci a implikaci. Na přirozené chápání pravdivosti negace a implikace jsme

mluvný, odpoví po pravdě na otázku, zda tato cesta vede k cíli (pokud cesta vede k cíli, odpoví ano; jestliže nevede, odpoví ne) a tuto pravdivou odpověď při odpovědi na otázku, zda odpoví ano, pouze zopakuje. Je-li však lhář odpoví nepravdivě (pokud cesta vede k cíli, odpoví ne; jestliže nevede, odpoví ano) a tuto nepravdivou odpověď při odpovědi na otázku, zda odpoví ano, změní, takže pokud cesta vede k cíli, odpoví celkově ano; jestliže nevede, odpoví celkově ne. Nezávisle na tom, kterého bratra se dotazujeme, dostáváme na právě zkoumanou dvoj-otázku pravdivou odpověď. Další řešení je uvedeno v úloze 10 druhého paragrafu.

$^{u11)}$ Je-li první lhář, odpoví nepravdivě, že je pravdomluvný. Jestliže je pravdomluvný, odpoví po pravdě, že je pravdomluvný. Takže odpověď prvého zcela jistě vždy zní „Pravdomluvný.“. Druhý je tudíž lhář. O prvním nelze rozhodnout.
Uvědomme si, že otázka „Jsi lhář?“ má velice zvláštní charakter - je „samovztažná“ (při odpovědi „lžu“ vypovídám o této odpovědi samotné) a nelze na ni odpovědět „ano“, a to ani v případě, že pravdu mluvíme, ani v případě, že pravdu nemluvíme (jiné podobné „samovztažné“ formulace jsme uvedli v bodě 7 naší ne-předmluvy); tuto „samovztažnost“ budeme podrobněji rozebírat ve druhém paragrafu třetí kapitoly.

$^{u12)}$ Je-li mluvící lhář, je mezi bratry alespoň jeden lhář, a proto lhář takovouto větu vyslovit nesmí. Mluvící je pravdomluvný, druhý z bratří musí být lhář.

$^{u13)}$ První bratr nemůže být pravdomluvný, protože by druhý byl lhář, avšak oba tvrdí o třetím bratru, že je lhář. Protože první z bratří je lhář, musí třetí mluvit pravdu a následně je druhý lhářem.

se již v předchozím textu odvolávali, nyní pouze toto obvyklé pojetí popíšeme výslovně.

Je přirozené pokládat negaci výroku za nepravdivou, jestliže původní výrok pokládáme za pravdivý, a naopak v případě, že nějaký výrok pokládáme za nepravdivý, jeho negaci pokládáme za pravdivou. Ostatně na takovémto pojetí negace byly založeny předchozí příklady a úlohy a vy, čtenáři, jste jistě souhlasil, když jste dočetl až sem. Popsané pojetí pravdivosti negace vyjadřuje první tabulka.

p	$\neg\mathsf{p}$
0	1
1	0

Tabulka 1

Hodnocení pravdivosti implikace v závislosti na ohodnocení pravdivosti výroků, z nichž je implikace složena, již nemusí být tak zřejmé, avšak již jsme zdůraznili, že pravdivostní hodnotu implikace musíme určit *jednoznačně pouze* v závislosti na pravdivostních hodnotách výroků do ní vstupujících. Řeknu-li „Jestliže bude zítra pršet, pak budu celý den doma.“ a druhý den venku lije a já jsem z domova pryč, pak jsem lhal; jestliže lije a jsem doma, pak jsem mluvil pravdu; jestliže svítí sluníčko, pak mohu dělat cokoli a vždy jsem mluvil pravdu, protože o tom, co budu dělat, když bude hezky, jsem nic netvrdil[14)]. V souladu s intuitivním chápáním důsledku nám tedy nezbude než implikaci pokládat za nepravdivou jenom v případě, že antecedent je pravdivý a konsekvent je nepravdivý. Přesně toto chápání je doložitelné již v megarsko-stoické škole[15)]. Nicméně spor o význam implikace pokračoval až do 20. stol., a to včetně, většinou však probíhá *vně* matematické logiky.

p	q	$\mathsf{p} \to \mathsf{q}$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Tabulka 2

Implikace „Je-li $\mathsf{c} > 2$, je $\mathsf{c}^2 > 4$.“ je pravdivá pro každé reálné číslo c — nemůže být současně $\mathsf{c} > 2$ (pravdivý antecedent) a $\mathsf{c}^2 \leq 4$ (nepravdivý konsekvent). Naproti tomu ostatní případy pravdivosti a nepravdivosti antecedentu a konsekventu jsou možné, a skutečně nastanou. Například pro $\mathsf{c} = 3$ je pravdivý jak antecedent, tak také konsekvent. V případě nepravdivosti antecedentu může být konsekvent jak pravdivý (např. pro $\mathsf{c} = -3$), tak také nepravdivý (např. pro $\mathsf{c} = 1$).

V souvislosti s pravdivostí implikace vznikají často dohady o implikacích typu „Jestliže $1 + 1 = 3$, pak $2 + 2 = 5$.“ V první řadě je třeba si uvědomit, že uvedená implikace je (složený) výrok, protože vzniká z (nepravdivých) výroků $1+1 = 3$ a $2+2 = 5$ podle pravidla (b) pro vytváření formulí výrokového počtu. Nadto je pravdivá, protože

14) Gramatika rozlišuje věty příčinné, které (podle pravidel českého pravopisu) vyjadřují „příčinu (důvod) obsahu věty řídící“ a jsou připojovány spojkami protože, poněvadž, že, jelikož a věty podmínkové, které vyjadřují „podmínku, při které může nastat děj věty řídící“ a které se připojují spojkami jestliže, -li, kdyby, jestli, když. Není vhodné formalizovat implikací věty příčinné: větu „Přišel jsem pozdě, protože nejela tramvaj.“ budeme brát za lživou v případě, že tramvaje jezdily.

15) u Filóna z Megary (kolem 300 př. Kr.), podrobněji viz dodatek o kořenech logiky

antecedent je nepravdivý. Přesto se nám podvědomě zdá tato implikace „podezřelá“, zřejmě právě proto, že *předem víme* o nepravdivosti antecedentu. Právě vzhledem k nepravdivosti antecedentu nemůže být pravdivost implikace ovlivněna pravdivostí, nebo nepravdivostí konsekventu. Pročež implikace *nemůže posloužit* k rozhodnutí zda je konsekvent pravdivý, či nepravdivý. A právě to zapříčiňuje pocit „podezřelosti“ implikace. Přesně stejně bychom se s velikým překvapením dívali na člověka, který by nám na pláži při blankytně modrém nebi oznamoval, že „Prší-li, jsem doma.“, a to bez ohledu na pravdivost jeho výroku. Pokud by stejné prohlášení učinil v okamžiku, kdy nevíme, jaké je počasí, přijali bychom jeho sdělení se zájmem (a z jeho nepřítomnosti doma vyvodili, že neprší).

Oblíbeným způsobem výpočtu pravdivostních hodnot dané formule (v závislosti na pravdivostních hodnotách proměnných, které se v ní vyskytují) jsou **tabulky pravdivostních hodnot**[16]. Jednu z nich ukazuje následující příklad (jenž je výpočtem pravdivostních hodnot formule $\mathtt{p} \to [\mathtt{q} \to \neg(\mathtt{p} \to \neg\mathtt{q})]$), ve kterém každý řádek přísluší jednomu ohodnocení dvojice výrokových proměnných $\mathtt{p}, \mathtt{q}$ a v každém políčku se nachází pravdivostní hodnota formule uvedené v záhlaví sloupce při tomto ohodnocení. Je zapotřebí si uvědomit, že existují přesně čtyři různá ohodnocení dvojice výrokových proměnných $\mathtt{p}$ a $\mathtt{q}$, proto má následující tabulka čtyři řádky. Obecně tabulka pravdivostních hodnot formule vytvořené z k výrokových proměnných má 2^k řádků a tolik sloupců, kolik kroků jsme použili při vytvoření dané formule rekurzí. Každé vyplnění jednotlivého políčka v následujících tabulkách je naprosto triviální aplikací tabulek 1 a 2. V celém textu je však tak málo rozsáhlejších výpočtů, že tabulky pravdivostních hodnot představují nejrozsáhlejší kalkulace celé knihy.

Prohlásili jsme, že vyplnění políčka je zcela evidentní, pro jistotu však podrobněji popišme způsob vyplnění např. prvních dvou políček v prvním řádku následující tabulky. Ve sloupci se záhlavím $\neg\mathtt{q}$ si uvědomíme, že v tomto řádku předpokládáme, že proměnná $\mathtt{q}$ nabývá hodnoty 0, takže podle prvé tabulky musí být pravdivostní hodnotou formule $\neg\mathtt{q}$ jednička. Do políčka v sloupci se záhlavím $\mathtt{p} \to \neg\mathtt{q}$ máme napsat pravdivostní hodnotu implikace, jejíž antecedent (výroková proměnná $\mathtt{p}$) má hodnotu 0 a jejíž konsekvent (formule $\neg\mathtt{q}$) má hodnotu 1. Nahlédnutím do druhé tabulky (druhý řádek) zjistíme, že jsme povinni políčko vyplnit znakem 1.

$\mathtt{p}$	$\mathtt{q}$	$\neg\mathtt{q}$	$\mathtt{p}\to\neg\mathtt{q}$	$\neg(\mathtt{p}\to\neg\mathtt{q})$	$\mathtt{q}\to\neg(\mathtt{p}\to\neg\mathtt{q})$	$\mathtt{p}\to[\mathtt{q}\to\neg(\mathtt{p}\to\neg\mathtt{q})]$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1

Tabulka 3

[16] Tabulky pravdivostních hodnot zavedl Ch. S. Peirce (1839–1914), jenž prý si přál, aby jeho jméno bylo čteno [Piərs].

Tautologií (nebo podrobněji *výrokovou tautologií*) nazýváme formuli $\mathcal{A}$ výrokového počtu, jejíž pravdivostní hodnota je 1 při *každém* ohodnocení výrokových proměnných, které se v ní vyskytují. **Kontradikcí** nazýváme formuli, jejíž pravdivostní hodnota je 0 při každém ohodnocení výrokových proměnných, jež se v ní vyskytují. Kontradikce jsou negacemi tautologií.

Tautologie jsou formule, které nabývají pravdivostní hodnoty 1 nezávisle na konkrétním ohodnocení výrokových proměnných. Jedná se tedy o „vždy pravdivé“ formule, tzn. o formule jejichž pravdivost je zaručena pouze jejich formou (strukturou formule) a nikoli pravdivostí nebo nepravdivostí výroků, z nichž je vytvořena. Analogicky kontradikce nabývají pravdivostní hodnoty 0 nezávisle na ohodnocení výrokových proměnných, a představují tudíž „vždy nepravdivé“ formule.

Z tabulky 3 nahlédneme, že formule výrokového počtu $p \to [q \to \neg(p \to \neg q)]$ je tautologií, formule $q \to \neg(p \to \neg q)$ nikoli.

Pro plné porozumění dalšímu textu je vhodné vyšetřit pravdivost několika formulí. To bude úkolem následujícího příkladu a úloh 14–17.

Příklad 3. Prokažte, že formule **VP2** tvaru $[p\to(q\to r)]\to[(p\to q)\to(p\to r)]$ je tautologií. Tato formule je někdy nazývána **Fregeův zákon.**

Ve zkoumané formuli se vyskytují tři výrokové proměnné, takže její tabulka pravdivostních hodnot bude mít $2^3 = 8$ řádků; sestavování tabulek pravdivostních hodnot je natolik jednoduché, že už i tu následující by se měl nejprve pokusit čtenář sestavit sám.

p	q	r	$q\to r$	$p\to(q\to r)$	$p\to q$	$p\to r$	$(p\to q)\to(p\to r)$	**VP2**
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabulka 4

Úloha 14. Prokažte, že formule **VP1** tvaru $p \to (q \to p)$ a rovněž formule **VP3** tvaru $(\neg p \to \neg q) \to (q \to p)$ jsou tautologiemi. Jak se liší tabulky

---

u14)

p	q	$q\to p$	**VP1**	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p\to\neg q$	**VP3**	$\neg q\to\neg p$	$(q\to p)\to(\neg q\to\neg p)$
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	1	0	0	1	1	1	1

Tabulka A

pravdivostních hodnot formule $\neg p \to \neg q$ a formule $q \to p$? Ukažte, že formule $(q \to p) \to (\neg q \to \neg p)$ *není* tautologií.

Úloha 15. Ukažte, že formule $\neg p \to (p \to q)$, tzv. **zákon Dunse Scota**, je tautologií.

Úloha 16. Uvědomte si, že pravdivostní hodnoty formule $\neg\neg p$ jsou přesně ty samé jako pravdivostní hodnoty p. Ukažte, že výrokové formule $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ nabývají týchž hodnot (při ohodnocení výrokových proměnných, které se v nich vyskytují), právě když je pravdivá jak implikace $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$, tak také obrácená implikace $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$.

Úloha 17. Sémanticky (tj. tabulkou pravdivostních hodnot) prokažte **tranzitivitu implikace**, tzn. že tautologií výrokového počtu je formule

$$(p \to q) \to [(q \to r) \to (p \to r)].$$

*

Příklad 4. Uvažujme variaci úlohy o vnoučatech z ne-předmluvy a označme výroky „Jakub je doma.“, „Terezka je doma.“ a „Kačenka je doma.“ po řadě písmeny j, t a k. Předpokládejme pravdivost výroků:

(1) Jestliže není Jakub doma, není doma ani Terezka, tzn. $\neg j \to \neg t$.
(2) Jestliže je Kačenka doma, je doma i Terezka, tj. $k \to t$.
(3) Není-li doma Kačenka, je doma Jakub, tzn. $\neg k \to j$.

Tabulky pravdivostních hodnot formulí $\neg p \to \neg q$ a $q \to p$ se liší pouze svým záhlavím, hodnoty na jednotlivých řádcích jsou stejné.

u15)

p	q	$\neg p$	$p \to q$	$\neg p \to (p \to q)$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

Tabulka B

u16) První tvrzení je triviální aplikací první tabulky. Druhé tvrzení získáme prohlédnutím druhé tabulky: pravdivost implikace $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zaručí, že při ohodnoceních, při nichž formule $\mathcal{A}$ nabývá hodnotu 1, musí rovněž formule $\mathcal{B}$ nabývat pravdivostní hodnotu 1 a pravdivost obrácené implikace $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$ zajistí, že při ohodnoceních, při nichž formule $\mathcal{B}$ nabývá hodnotu 1, musí rovněž formule $\mathcal{A}$ nabývat pravdivostní hodnotu 1.

u17) Tranzitivita implikace bývá nazývána *zákon hypotetického sylogismu* (pokládáme za samozřejmé: jestliže z prvního tvrzení plyne druhé a z druhého plyne třetí, pak z prvého tvrzení již určitě musí plynout třetí) a uvádí ho již Theofrastos z Eresu (asi 371–286). Pokud byste chtěl vyjádřit tranzitivitu implikace pomocí spojky „a“ — kteroužto formulaci jsme právě uvedli jako samozřejmé — konzultujte prosím čtvrtý příklad druhého paragrafu.
Kromě prostého ověření tabulkou pravdivostních hodnot můžeme také prokázání provést následující úvahou. Implikace $p \to r$ je nepravdivá, pouze pokud p je pravdivá a současně r nepravdivá. Z pravdivosti p a z pravdivosti implikace $p \to q$ však vyvodíme pravdivost q a z pravdivosti implikace $q \to r$ nám následně nezbude než vyvodit pravdivost formule r. Za předpokladu pravdivosti implikací $p \to q$ a $q \to r$ je tedy implikace $p \to r$ určitě pravdivá.

Chceme zjistit, zda existuje ohodnocení výrokových proměnných takové, že j je nepravdivé, avšak všechny předpoklady (1)–(3) jsou pravdivé (v takovém případě domů za Jakubem nepojedu, neboť nemusí být doma). Stačí tedy vyšetřovat jen čtyři případy pro různá ohodnocení proměnných t a k. (Jakmile při nějakém ohodnocení zjistíme, že některý ze složených výroků $\neg j \to \neg t$ a $k \to t$ je při daném ohodnocení nepravdivý, nemusíme již pro toto ohodnocení vyhodnocovat další složené výroky.)

j	t	k	¬j	¬t	¬k	¬j → ¬t	k → t	¬k → j
0	0	0	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	1	0	
0	1	0	1	0	1	0		
0	1	1	1	0	0	0		

Tabulka 5

Spočítali jsme, že Jakub nemůže nebýt doma (tj. je doma; tedy má smysl za ním jet domů). Nicméně si ještě ověřme, zda jsme nezadali sporné předpoklady, tzn. zda vůbec existuje ohodnocení, při kterém je Jakub doma.

j	t	k	¬j	¬t	¬k	¬j → ¬t	k → t	¬k → j
1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	
1	1	0	0	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	1	1	1

Tabulka 6

Po nabytí určitého cviku *nebudete většinou potřebovat tabulky skutečně vypisovat* (a tuto možnost si ponecháte jen pro případ absolutní nouze). Předvedení úvah, které můžeme provést místo vyplňování tabulky 5, bude úkolem příkladu 5, který poslouží i jako motivace pro některá dodatečná odvozovací pravidla.

* * *

Nejdůležitějším pojmem syntaxe je pojem **důkazu**. Před tím, než se začneme zabývat důkazy ve výrokovém počtu, zkusme formulovat, jak bychom si z intuitivního pohledu představovali zcela přesný důkaz v tom nejobecnějším případě.

Při dokazování se snažíme z tvrzení přijatých za správné dokázat další. Přitom užíváme jakýchsi principů vyvozování (dokazování), které by nám měla popsat a zaručit logika.

Začněme zcela triviálním příkladem. Představme si, že přijmeme za správné tvrzení

(1) Jestliže byla Martina v práci, upravila (počítačový) program.

Dále máme k jejím schopnostem takovou důvěru, že přijímáme

(2) Upravila-li Martina program, je program v pořádku.

Nakonec se dovíme, že

(3) Martina byla v práci.

Zcela evidentní úvahou dospějeme na základě předpokladů (1)–(3) k závěru, že program je v pořádku; zkusme však trochu podrobněji rozebrat, jak toto tvrzení nahlédneme: Nejprve z tvrzení (1) a (3) vyvodíme, že Martina upravila program, a poté na základě posledně uvedeného tvrzení a na základě předpokladu (2) vyvodíme, že program je v pořádku.

Naše usuzování je tedy možno strukturovat do velice jednoduchých kroků, které na sebe postupně navazují. V každém jednotlivém kroku vyvodíme z předpokladů přijatých na počátku a z již dokázaných tvrzení nějaké (další) tvrzení. Při jednom dokazovacím kroku nemusíme použít všechny předpoklady ani všechna již dokázaná tvrzení, můžeme užít jen ta z nich, která se nám právě hodí. Mějte tento jednoduchoučký příklad na paměti, když se nyní budeme ptát, co musí logika ozřejmit, aby ospravedlnila naše vyvozování (odvozování, dokazování).

V první řadě nám logika musí nabídnout (konečný) seznam **odvozovacích**[17] **pravidel**. Ta ukazují, jak bezprostředně vyvodit další tvrzení z tvrzení již dokázaných (příp. přijatých).

Po rozboru na začátku textu (vzpomeňte „Jestliže prvé, pak druhé. Avšak prvé. Tedy druhé.“) a také po prozkoumání našeho konkrétního příkladu se snad shodneme na tom, že dokážeme-li (příp. přijmeme-li jako předpoklad) jakoukoli formuli $\mathcal{P}$, a dokážeme-li (příp. přijmeme-li) současně také implikaci $\mathcal{P} \to \mathcal{Q}$, musíme považovat za dokázanou rovněž formuli $\mathcal{Q}$. Uvedené základní odvozovací pravidlo se tradičně nazývá **modus ponens** a česky *pravidlo odloučení*[18].

(Za okamžik uvidíme, že při jistém pojetí důkazů výrokového počtu bude stačit shoda na tomto jediném odvozovacím pravidlu; v §2 kap. II uvidíme, že pro predikátový počet postačí k pravidlu modus ponens přidat jedno jediné další odvozovací pravidlo. Avšak také — byť poněkud později v současném paragrafu — nahlédneme, že přijmeme-li vhodných odvozovacích pravidel více, zrychlí a zjednoduší se naše dokazování.)

Dohoda o tom, jak postupovat dále z již dokázaných tvrzení, pochopitelně nestačí. Musíme se rovněž dohodnout, z čeho začneme, tedy na **předpokladech**[19]. Je totiž zřejmé, že při zdůvodňování nějakého tvrzení se nemohu do nekonečna

[17] též *dedukčních*

[18] Z implikace $\mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ *odloučíme* $\mathcal{P}$ a zůstane $\mathcal{Q}$.

[19] V diskusích běžného života obvykle tyto předpoklady neformulujeme přesně, jsou přítomny v našem uvažování pouze implicitně a právě toto běžné neujasnění základních východisek vede v mnoha diskusích k nedorozuměním, neboť co pro jednoho diskutujícího je zcela zřejmé (a na čem staví svou argumentaci), může být pro druhého nejasné, nebo dokonce nepřijatelné. Naproti tomu v matematické logice žádáme, aby předpoklady, které můžeme v důkaze použít, byly vymezeny naprosto přesně, a to na počátku.

odvolávat na stále zřejmější a zřejmější fakta: někdy musím již prohlásit, že tato fakta jsou (alespoň pro mne) tak zřejmá, že je již nebudu dokazovat; pokud má být diskuse smysluplná, musíme se s partnerem shodnout na předpokladech[20].

Většina předpokladů v běžné diskusi se týká předmětu, o který jde. (V našem příkladu o programu Martiny byly takovéto všechny předpoklady.) Nicméně některé předpoklady se mohou týkat správného vyvozování. Tyto předpoklady budeme nazývat **axiomy logiky**.

Shrňme, že principy správného usuzování může popisovat logika dvojím způsobem: jako odvozovací pravidla a jako axiomy logiky. Matematicky přesnou definici pojmu důkazu uvedeme o několik stránek dále. Pojem důkazu závisí na volbě systému vyvozovacích principů, tato volba je pro pojetí důkazu rozhodující a k ní se bude vztahovat hlavní výsledek uvedený v paragrafu. Důkaz je následně popsán prostě rekurzí. Při konstrukci důkazů rekurzí zastávají odvozovací pravidla úlohu pravidel pro prodlužování důkazů; předpoklady a axiomy logiky hrají úlohu základních důkazů.

Systémů je možno v literatuře najít celou řadu, my si pro výrokový počet ukážeme dva[21], a už ty se budou rozcházet v počtu axiomů a pravidel. První bude minimalizovat počet pravidel a rozmanitost bude soustředěna do systému axiomů, druhý naopak bude mít bohatší systém pravidel a minimální systém axiomů výrokového počtu. V každém případě však od systémů principů usuzování požadujeme, aby *popisovaly, a to úplně, způsob lidského vyvozování*, a v tomto ohledu jejich volba naprosto nemůže být nahodilá — podstatným cílem logiky již od antiky bylo popsat ty principy, kterými se řídí lidské usuzování. Tedy přes svou různost musí být jednotlivé systémy principů vyvozování „stejně silné“.

Teď tudíž stojíme před úkolem vybrat nějaké formule výrokového počtu, které přijmeme za popis správného usuzování. Musíme je vybrat tak, abychom se s kýmkoli „logicky uvažujícím“ shodli, že takovéto principy jsou přijatelné, musíme je tedy být schopni intuitivně odůvodnit.

Čtenáři, který přijal náš předcházející popis pravdivosti složených výroků, je možno poskytnout ještě jedno vodítko při výběru logických axiomů: musí to být tautologie. Je přece nemyslitelné, abychom správnou úvahou vyvodili jakožto obecně správné tvrzení, které by nebylo pravdivé při určitém ohodnocení výroků. Tím spíše je vyloučeno vzít za *základ* vyvozování tvrzení, které není vždy pravdivé. (Požadavek, aby z axiomů výrokového počtu — tj. bez užití mimologických předpokladů — bylo možno vyvodit jen vždy pravdivá tvrzení se nazývá

[20] Při volbě předpokladů nejsme po formální stránce nijak omezeni, při nevhodné volbě se může „pouze“ stát, že z nich dokážeme jakýkoli nesmysl (tj. že předpoklady jsou sporné). Je však jasné, že z intuitivního hlediska nejsou jednotlivé systémy předpokladů rovnocenné. V obecném případě je popis vhodné volby závislý na filozofickém pojetí pravdy a skutečnosti, a přesahuje tedy rámec matematické logiky.

[21] Řadu dalších příkladů systémů najde čtenář např. v knihách [So], [Šv] a [Pe].

korektnost výrokového počtu.)

Stop! Požadavek pravdivosti se přece nemůže týkat jen výběru axiomů, avšak také odvozovací pravidlo musí z tautologií vyvozovat jen tautologie. A my jsme již o jednom pravidlu prohlásili, že ho hodláme přijmout. Takže nyní musíte, milý čtenáři, zjistit, zda modus ponens vyvozuje z tautologií výhradně jen tautologie. — Už to máte? — Pochopitelně, je to zcela prosté: základní tabulka pravdivostních hodnot pro implikaci zajistí, že je-li $\mathcal{P}$ pravdivé a je-li implikace $\mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ pravdivá (obojí nastane jen v posledním řádku tabulky 2), pak je pravdivá rovněž $\mathcal{Q}$. Modus ponens tedy vyhovuje požadavku, že z tautologií můžeme dokázat jen tautologie.

Sémantika výrokového počtu nám tedy ukáže, které formule nemáme přijímat za axiomy, ale nepomůže v pozitivním výběru.

V lidském usuzování je možno vysledovat mnoho správných dokazovacích postupů a v průběhu vývoje logiky bylo velmi mnoho vyvozovacích principů formulováno a vyučováno (stále s možností nalézání dalších a dalších principů). Je možno se obrátit do historie logiky a vybrat ty principy, které považovala z výrokového počtu za důležité antická a/nebo scholastická logika, nebo ty principy, které formulovala logika 19. stol. Vždy však budeme stát před dvěma otázkami:

(a) zda nevybíráme axiomů zbytečně moc — pokud bychom si s partnerem skutečně chtěli na počátku diskuse ověřit, že máme stejné pojetí vyvozování, nechceme věnovat většinu času pro diskusi odsouhlasování jednotlivých položek příliš bohatého seznamu vyvozovacích principů;
(b) zda vybíráme vše podstatné, tzn. vše, co je potřebné pro lidské vyvozování.

Odpovědi na tyto otázky dala až matematická logika.

Zabývejme se nejprve prvním problémem. V průběhu zkoumání vyvozování bylo popsáno mnoho a mnoho desítek vyvozovacích principů, avšak málokdo by v dnešní době byl ochoten se učit vyjmenovávat všechny tyto principy (i když ve středověku bylo vyjmenovávání mnoha pravidel logiky součástí výuky). V našem textu ukážeme jen zlomek bohatství klasických pravidel (přičemž u nejdůležitějších z nich uvedeme i jejich klasické názvy), ale dnes nás už ani nenapadne předpokládat, že se je bude čtenář učit jako násobilku. Principy budeme uvádět jako *příklady* toho, co máme *používat* (tj. jako příklady toho, o čem máme *vědět*, že užití při vyvozování důsledků *je v pořádku a v souladu s běžným chápáním vyvozování*), ale nikoli jako zákony, jejichž seznam by bylo potřeba odříkávat.

Takže i pokus využít historie logiky nám přinese jen ukázání slepé uličky — není praktické vzít za axiomy všechny principy poznané a formulované v průběhu vývoje logiky. Moderní logika je si vědoma, že musí dát jen několik principů — kolik jich, milý čtenáři, snesete? Budete smlouvat jako Abraham o počet spravedlivých v biblickém vypravování o zániku Sodomy a Gomory? Nestačilo by 50, a nemohlo by jich být alespoň o 5 méně, nebo nestačilo by 40, a co kdyby jich bylo jen 30 nebo 20, a vůbec nestačilo by v celé logice jen 10 principů? Nesmlouvejte však příliš, protože na druhou stranu požadujeme, aby námi vybrané principy popsaly naše vyvozování úplně, tzn. *v celé jeho šíři.*

A v poslední větě jsme se dotkli druhého a mnohem závažnějšího problému než je nadbytečnost některých axiomů, totiž otázky, zda jsme na nějaký princip nezapomněli. Co když existuje princip, který všichni podvědomě přijímáme, avšak dosud nikdy ho logika výslovně neformulovala?

A v tomto okamžiku se dostáváme k jednomu z vrcholů tohoto paragrafu.

Ukážeme tři formule výrokového počtu, o kterých se pokusíme intuitivně zdůvodnit, že by již vzhledem ke své struktuře měly být považovány za správné. Na druhé straně matematická logika ukázala (tzv. věta o úplnosti[22)]), že pokud přijmeme tyto tři axiomy a přijmeme modus ponens jako odvozovací pravidlo, jsme již schopni *dokázat všechny tautologie* výrokového počtu[23)]. Výše jsme argumentovali, že nechceme dokázat nějakou formuli, která není tautologií, a nyní tvrdíme, že všechny žádané formule dokážeme. Náš výběr vyvozovacích principů tedy zajistí *úplný* popis lidského vyvozování, pokud se týká formulí vyšetřovaných v tomto paragrafu.

Věta o úplnosti má dalekosáhlé důsledky, u dvou z nich se nyní zastavíme podrobněji. Naše čtyři principy vyvozování pro výrokový počet „plně postačí“ k dokázání všech žádaných formulí výrokového počtu (tj. tautologií), neboli jakýkoli jiný vyvozovací princip, který je formalizací intuitivně správného vyvozovacího kroku (speciálně tedy i každý dodatečný axiom logiky popisující intuitivně pravdivé tvrzení), je dovoditelný ze zvolených základních vyvozovacích principů.

Vyjádřeme předchozí tvrzení pro výrokový počet ještě jinými slovy. Přidáme-li k námi zvoleným axiomům výrokového počtu a k jedinému odvozovacímu pravidlu výrokového počtu jakýkoli další vyvozovací princip, jsou jen dvě možnosti:

(a) Buďto i „důkazy“, ve kterých je tento vyvozovací princip povolen, umožní dokázat jen (vždy) pravdivé formule výrokového počtu. Pak však je dodatečný vyvozovací princip zbytečný, neboť tytéž formule je možno dokázat i bez něho.

22) Původní větu o úplnosti pro výrokový počet dokázal E. L. Post v práci [Po].

23) pro jistotu: v jejichž konstrukci je použita pouze implikace a negace; až v příštím paragrafu přidáme další spojky, přidáme spolu s nimi i další axiomy, jež chování těchto spojek popisují

(b) Nebo se pomocí nějakého „důkazu“ povolujícího i dodatečný vyvozovací princip podaří dokázat nějakou formuli výrokového počtu, která není (vždy) pravdivá. Pak však je tento vyvozovací princip nepřijatelný. Již jsme přece uvedli, že by odporovalo naší intuici o pojmu dokazatelnosti, kdybychom dokázali nepravdivý výrok. Dokonce bychom považovali za absurdní, kdybychom dokázali nějakou formuli výrokového počtu, která by byla nepravdivá byť jen při jediném ohodnocení výrokových proměnných, ze kterých je vytvořena.

Tímto pochopitelně nezpochybňujeme užitečnost různých jiných vyvozovacích principů. Dodatečné principy mohou totiž velice urychlovat a zpřehledňovat důkazy, a proto v další části tohoto paragrafu jich několik nejdůležitějších uvedeme. Tvrdíme však, že takovéto postupy jsou již nahraditelné pomocí vybraných základních vyvozovacích principů. Některé principy je vhodné formulovat až s pomocí spojek popsaných v §2, je proto přirozené jejich představení odložit až do citovaného paragrafu.

Druhým důsledkem věty o úplnosti je, že *vyplnění tabulky pravdivostních hodnot představuje algoritmus* (mechanický výpočet), *který rozhoduje, zda formule výrokového počtu je dokazatelná či nikoli.* Dokonce je možno napsat algoritmus, který k dokazatelným formulím výrokového počtu příslušný důkaz sestrojí. Pro tvorbu důkazů ve výrokovém počtu lze napsat program, a pak už stačí pouhý stroj a není potřeba intuice matematika. Tedy z hlediska výrokového počtu matematika zcela *nahradí robot*[24)]. Ke zcela jiným závěrům dojdeme však v případě predikátového počtu.

Přes to, že konstrukci důkazů ve výrokovém počtu lze ponechat stroji, budeme se seznamovat s metodami konstrukce důkazů ve výrokovém počtu. Zadržte, čtenáři, a nezačněte se hned rozčilovat nad zbytečně vynaloženou námahou. Naprosto to není mrhání časem. Klíč je skryt v poslední větě předchozího odstavce. V predikátovém počtu budeme potřebovat důkazy sestrojovat a *víme, že algoritmus pro konstrukci důkazů v predikátovém počtu neexistuje.* Techniky, které budeme objasňovat na závěr tohoto paragrafu, jsou užívány především pro dokazování v predikátovém počtu.

Část textu následující po uvedení tří typů axiomů je psána petitem ze dvou důvodů. První je trochu alibistický: plním slib, že nebudu používat příliš formálních zápisů uznávaje, že konkrétní tvar axiomů bude pro mnohé čtenáře méně zajímavý, než sdělení, že existuje několik málo formulí, které postačí k popisu lidského vyvozování (pokud se týká oboru vymezeného výrokovým počtem). Takže je sice vhodné axiomatiku uvést (v predikátovém počtu přijmeme axiomy týchž

[24)] Je nyní jasný výběr motta kapitoly? Poznamenejme dále, že zkoumanou otázkou až dosud bylo, zda existuje důkaz. Pokud položíme otázku, zda existuje důkaz, který má nějakou vlastnost (např. je dostatečně jednoduchý), přestane být konstrukce takovéhoto důkazu triviálním problémem.

typů), avšak umožnit odpůrcům formálních zápisů, aby nemuseli význam těchto axiomů zkoumat — čtenáře, kterého by odrazoval následující popis tří axiomů a jejich intuitivní objasňování, prosím, aby následující petitem psanou část prostě přeskočil. Druhý důvod je závažnější: krása našeho prvého systému principů vyvozování ve výrokovém počtu spočívá v tom, že máme jediné pravidlo a jen tři typy axiomů. Přesně ve stejném bodě však spočívá i jeho nevýhoda — systém je příliš okleštěný a dokazování v něm je obtížné. Proto o několik stránek dále popíšeme jiný systém, který bude mnohem „uživatelsky přívětivější".

Čtenář již pravděpodobně z požadavku, aby axiomy výrokového počtu byly tautologiemi, odhaduje, že v předchozích úlohách jsme na něm požadovali, aby zjistil, že jsou tautologiemi formule těch tvarů, které teď přijmeme za axiomy.

Za **axiomy výrokového počtu** navrhujeme přijmout všechny formule, které jsou některého ze tří následujících tvarů, kde $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ a $\mathcal{R}$ označují *jakékoli* formule výrokového počtu:

VP1 $$\mathcal{P} \to (\mathcal{Q} \to \mathcal{P}),$$
VP2 $$[\mathcal{P} \to (\mathcal{Q} \to \mathcal{R})] \to [(\mathcal{P} \to \mathcal{Q}) \to (\mathcal{P} \to \mathcal{R})],$$
VP3 $$(\neg\mathcal{P} \to \neg\mathcal{Q}) \to (\mathcal{Q} \to \mathcal{P}).$$

Uvedli jsme, že přijaté axiomy je třeba intuitivně zdůvodnit, pokusme se tedy o to:

VP1: Jestliže přijmeme nějaké tvrzení $\mathcal{P}$ jako předpoklad, pak pro nás toto přijaté tvrzení již plyne z čehokoli, tzn. dostáváme implikaci $\mathcal{Q} \to \mathcal{P}$ — jinými slovy: předpoklad $\mathcal{P}$ implikuje implikaci $\mathcal{Q} \to \mathcal{P}$. Jestliže prší, pak z čehokoli plyne, že prší. Zdůrazněme, že tuto úvahu provedeme i v případě, kdy nevíme, zda první tvrzení je správné (pravdivé), a dokonce axiom přijímáme, i když $\mathcal{P}$ samo o sobě nepřijímáme za správné — např. $\neg\mathcal{Q} \to (\mathcal{Q} \to \neg\mathcal{Q})$ je axiomem nezávisle na tom, zda tvrzení $\mathcal{Q}$ akceptujeme jako správné nebo ne!

Prof. Hejný vyprávěl příběh ukazující, jak snadno se člověk nechá unést emocemi. Jeden student vytvořil (přesně podle tvaru axiomu **VP1**) výrok „Z toho, že jsi blbec, plyne, že, jestliže jsem moudrý, ty jsi blbec." Podle očekávání kdokoli byl tázán, odpověděl, že je to nepravda, dokonce drzost a urážka (a neuvědomil si, že výrok, že je blbec, je jen předpokladem implikace a nikoli vyhlašovaným faktem).

VP2: Tento axiom prostě popisuje relativizaci pravidla modus ponens. K trochu podrobnějšímu vysvětlení zopakujme, že pravidlem modus ponens vyvozujeme na základě nějaké implikace, řekněme $\mathcal{Q} \to \mathcal{R}$ a antecedentu implikace, tedy v našem případě $\mathcal{Q}$. Nyní obě tyto formule relativizujme, tj. přijměme za předpokladu $\mathcal{P}$. To, že $\mathcal{Q}$ přijímáme za předpokladu $\mathcal{P}$, vyjádříme implikací $\mathcal{P} \to \mathcal{Q}$, jejíž antecedent je $\mathcal{P}$ a jejíž konsekvent je $\mathcal{Q}$. Přesně stejně přijetí $\mathcal{Q} \to \mathcal{R}$ za předpokladu $\mathcal{P}$ vyjádříme implikací $\mathcal{P} \to (\mathcal{Q} \to R)$, jejíž antecedent je $\mathcal{P}$ a jejíž konsekvent je tentokrát implikace $\mathcal{Q} \to \mathcal{R}$. Za uvedených dvou předpokladů akceptujeme relativizovaný závěr pravidla modus ponens, tedy relativizaci tvrzení $\mathcal{R}$ (jestliže jsme relativizovali výchozí formule, je nezbytné relativizovat i závěr, což by mělo být intuitivně zcela zřejmé) — relativizací je zase implikace, jejímž antecedentem je opětovně $\mathcal{P}$ a jejímž konsekventem je tvrzení $\mathcal{R}$. Aby podobnost co nejvíce vynikla, sepišme ji do tabulky:

modus ponens	Z formulí	$\mathcal{Q} \to \mathcal{R}$,	$\mathcal{Q}$	vyvodíme	$\mathcal{R}$.
VP2	Formule	$\mathcal{P} \to (\mathcal{Q} \to \mathcal{R})$,	$\mathcal{P} \to \mathcal{Q}$	implikují	$\mathcal{P} \to \mathcal{R}$.

Tranzitivita implikace je velmi intuitivním požadavkem (viz ostatně úlohu 17) a současně je viditelně pouhým zjednodušením axiomu **VP2** (je oslabením vznikajícím vynecháním relativizace implikace $\mathcal{Q} \to \mathcal{R}$ a smysl neměnícím prohozením prvních dvou implikací). I toto pozorování může být použito k motivaci **VP2**.

VP3: Předpokládejme, že jsme přijali za správné jak tvrzení $\neg\mathcal{P} \to \neg\mathcal{Q}$, tak také $\mathcal{Q}$. Kdybychom přidali ještě tvrzení $\neg\mathcal{P}$ jakožto předpoklad, dostali bychom najednou $\mathcal{Q}$ (jeden z předpokladů) a rovněž $\neg\mathcal{Q}$ (aplikací modus ponens na zbylé předpoklady). Podle tabulky 1 však víme, že nemůže být najednou pravdivý výrok $\mathcal{Q}$ a jeho negace $\neg\mathcal{Q}$. Z předvedeného vyvodíme, že nesmíme současně přijmout všechny tři naše předpoklady. Ze dvojice výroků $\mathcal{P}$ a $\neg\mathcal{P}$ je však vždy jeden pravdivý a když není pravdivý $\neg\mathcal{P}$, musí být pravdivý $\mathcal{P}$. Je tudíž přirozené z předpokladů $\neg\mathcal{P} \to \neg\mathcal{Q}$ a $\mathcal{Q}$ vyvozovat $\mathcal{P}$. Vyvozování tohoto typu je formalizováno axiomem **VP3**. Uvedený princip je obrácením implikace $(\mathcal{Q} \to \mathcal{P}) \to (\neg\mathcal{P} \to \neg\mathcal{Q})$, tradičně nazývané **zákonem transpozice**, který přijímali již Aristotelés i Stoici; Aristotelés dokonce uvádí výslovně axiom **VP3** jako správnou úvahu. V úlohách 14 a 16 jste měli nahlédnout, že jak axiom **VP3**, tak také zákon transpozice jsou tautologiemi.

Při zachování modus ponens jako jediného odvozovacího pravidla by bylo možno přijmou místo našich tří axiomů jediný axiom (viz např. [Me]), zaplatili bychom však ztrátou přehlednosti — formulace axiomu není příliš intuitivní:

$$[([(\mathcal{P} \to \mathcal{Q}) \to (\neg\mathcal{R} \to \neg\mathcal{S})] \to \mathcal{R}) \to \mathcal{T}] \to [(\mathcal{T} \to \mathcal{P}) \to (\mathcal{S} \to \mathcal{P})].$$

Ve třetím paragrafu připojíme k problému minimalizace vyvozovacích principů ještě jednu poznámku v souvislosti se Shefferovou operací.

*

Ve výrokovém počtu definujeme rekurzí **důkaz** z nějakého systému předpokladů $\mathfrak{T}$:

Stavební kameny: formule výrokového počtu.
Základní důkazy: důkazy skládající se z jediného axiomu výrokového počtu nebo z jediného předpokladu ze zadaného systému $\mathfrak{T}$.
Pravidla pro prodlužování důkazů:
- (a) modus ponens,
- (b) možnost připojit za důkaz jiný důkaz (opět důkaz z předpokladů $\mathfrak{T}$).

Pro velikou důležitost pojmu důkazu zopakujme nyní jeho definici ještě jinými slovy:

Je-li $\mathfrak{T}$ jakýkoli systém formulí výrokového počtu, pak **důkazem ze systému předpokladů $\mathfrak{T}$** rozumíme konečnou posloupnost formulí $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_k$ výrokového počtu takovou, že pro každé i menší nebo rovno k má formule $\mathcal{D}_i$ *některý* z následujících tvarů:

- (i) $\mathcal{D}_i$ je axiomem výrokového počtu — kdykoli smíme užít axiom výrokového počtu,

(ii) $\mathcal{D}_i$ je jedním z předpokladů systému $\mathcal{T}$ — kdykoli smíme užít jeden z předpokladů[25)],
(iii) $\mathcal{D}_i$ vznikne aplikací dedukčního pravidla modus ponens na dvě formule v posloupnosti předcházející (podrobněji: existují j, j' *menší* než i takové, že $\mathcal{D}_{j'}$ je formulí tvaru $\mathcal{D}_j \to \mathcal{D}_i$) — kdykoli smíme aplikovat modus ponens na některé formule, které *v důkazu předcházejí*.

Posloupnost[26)] $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_k$, vyhovující výše uvedené podmínce, nazýváme také **důkazem** (té poslední) **formule** $\mathcal{D}_k$ ze systému předpokladů $\mathcal{T}$. Formuli $\mathcal{A}$ výrokového počtu nazýváme **dokazatelnou** ze systému předpokladů $\mathcal{T}$, jestliže existuje její důkaz z uvedeného systému předpokladů. Dokazatelnost formule $\mathcal{A}$ ze systému předpokladů $\mathcal{T}$ značíme $\mathcal{T} \vdash \mathcal{A}$.

Dokazatelností ve výrokovém počtu rozumíme dokazatelnost bez předpokladů (tj. pro prázdný systém $\mathcal{T}$) a v souhlase s předchozím ji značíme $\vdash \mathcal{A}$. Formuli nazveme **vyvratitelnou** ze systému předpokladů $\mathcal{T}$, jestliže její negace je dokazatelná ze systému předpokladů $\mathcal{T}$. Systém formulí výrokového počtu $\mathcal{T}$ nazýváme **sporný** (též *inkonzistentní*), jestliže existuje formule $\mathcal{B}$ taková, že ze systému předpokladů $\mathcal{T}$ je dokazatelná jak sama formule $\mathcal{B}$, tak také její negace $\neg\mathcal{B}$ (neboli existuje-li formule současně dokazatelná i vyvratitelná ze systému $\mathcal{T}$). Systém formulí, který není sporný, nazýváme **bezesporný** (též *konzistentní*). (Jiný popis sporných systémů předpokladů nalezne čtenář v úloze 25.)

Je nutné poznamenat, že nebývá — dokonce ani v matematice — zvykem vytvářet důkazy tak, aby přesně vyhovovaly uvedené definici, bylo by to velmi zdlouhavé a špatně čitelné, avšak každý správný důkaz *musíme být schopni* předělat na důkaz vyhovující výše uvedené definici. Teď uvedeme jediný důkaz v celém našem textu, který je skutečně posloupností mající vlastnost vyžadovanou v definici důkazu. Je to důkaz naprosto triviálního tvrzení $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ (doufám ve váš souhlas, že z faktu, že prší, plyne, že prší). Na tomto důkazu by čtenář měl nahlédnout již uvedený fakt, že otázka prozkoumání, zda uvedená posloupnost formulí je důkazem, je skutečně zcela mechanickou záležitostí (i když náročnou na pozornost). Na druhé straně ale čtenář pravděpodobně také prožije (pokud

[25)] Na konci úvodu jsme na příkladu pochodu motivovali, že je možno změnou pravidla pro tvorbu nových objektů nezměnit výsledný systém objektů, ale změnit jen „rychlost“ konstrukce. Analogicky při zkoumání pojmu důkazu rekurze s pravidlem umožňujícím přidat najednou celý důkaz a rekurze s pravidly umožňujícími přidat důkaz vytvořený jen z jedoho axiomu nebo jen z jednoho předpokladu vytvářejí týž pojem důkazu; tedy (b) předchozí definice odpovídá možnostem (i) a (ii) současně.

[26)] Zápis důkazu ve tvaru $\mathcal{D}_1 \to \mathcal{D}_2 \to \ldots \to \mathcal{D}_k$ není vhodný, protože vypadá jako (neuzávorkovaná) implikace, avšak zejména $\mathcal{D}_{i+1}$ nemusí být důsledkem právě poslední předcházející formule $\mathcal{D}_i$, ale libovolných předcházejících formulí, takže zápis *nelze* chápat ani jako soustavu implikací $\mathcal{D}_i \to \mathcal{D}_{i+1}$.
V literatuře lze často také najít definice důkazu, kde formule nejsou uspořádány v řadě, ale jsou uspořádány „jako strom“, tj. uspořádání se může větvit. Každá z definic má své výhody i nevýhody, vedou však k témuž pojmu dokazatelnosti.

se odhodlá projít následujícím textem psaným petitem), že volba formulí výrokového počtu, které důkaz vytvářejí, je méně triviální a že vhodné užití toliko našich omezených prostředků vyvozování vyžaduje jistou zkušenost a intuici.

Následující posloupnost je důkazem formule $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ ve výrokovém počtu:

(1)	$(\mathcal{A} \to [(\mathcal{A} \to \mathcal{A}) \to \mathcal{A}]) \to ([\mathcal{A} \to (\mathcal{A} \to \mathcal{A})] \to (\mathcal{A} \to \mathcal{A}))$,	**VP2**, do kterého dosadíme za formule $\mathcal{P}$ a $\mathcal{R}$ formuli $\mathcal{A}$ a za formuli $\mathcal{Q}$ dosadíme formuli $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$,
(2)	$\mathcal{A} \to [(\mathcal{A} \to \mathcal{A}) \to \mathcal{A}]$,	**VP1**, do kterého dosadíme za $\mathcal{P}$ formuli $\mathcal{A}$ a za $\mathcal{Q}$ dosadosadíme formuli $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$,
(3)	$[\mathcal{A} \to (\mathcal{A} \to \mathcal{A})] \to (\mathcal{A} \to \mathcal{A})$,	modus ponens užitý na formule (1) a (2),
(4)	$\mathcal{A} \to (\mathcal{A} \to \mathcal{A})$,	**VP1**, do kterého dosadíme za $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$ formuli $\mathcal{A}$,
(5)	$\mathcal{A} \to \mathcal{A}$,	modus ponens užitý na formule (3) a (4).

* * *

Vraťme se nyní k příkladu 4 a ukažme si, jak trochou přemýšlení podstatně urychlíme řešení a vyhneme se nudnému a únavnému vyplňování tabulek. Nadto v následujících třech příkladech označíme některé úvahy vykřičníkem a případně v hranatých závorkách i odkazem na princip, který budeme formulovat v závěrečné části paragrafu. Označené úvahy by měly posloužit zejména jako motivace dodatečných vyvozovacích principů, při jejichž formulaci se již nebudeme odvolávat na sémantiku (tzn. na tabulky pravdivostních hodnot).

Příklad 5. Bez využití tabulek pravdivostních hodnot chceme zjistit, zda při přijetí systému výroků uvedených v zadání příkladu 4 musí být Jakub doma (přesněji a podrobněji: chceme předvést, že není možné, aby nebyl doma). K našim předpokladům přidejme tedy předpoklad, že Jakub skutečně není doma — cílem je ukázat, že tato vzniklý systém předpokladů je sporný.

Protože předpokládáme, že Jakub není doma, nesmí být doma ani Terezka (užíváme první předpoklad, tj. implikaci $\neg \mathrm{j} \to \neg \mathrm{t}$ a modus ponens). Druhý předpoklad „Jestliže je Kačenka doma, je doma i Terezka.“, tzn. implikaci $\mathrm{k} \to \mathrm{t}$ můžeme přeformulovat na implikaci $\neg \mathrm{t} \to \neg \mathrm{k}$ (!) — [viz zákon transpozice] neboli na „Není-li Terezka doma, není doma ani Kačenka.“. Implikace je tranzitivní (!) a tedy dostáváme $\neg \mathrm{j} \to \neg \mathrm{k}$, tzn. „Není-li Jakub doma, není doma ani Kačenka.“. Uplatníme-li tranzitivitu implikace na náš poslední předpoklad (tj. na implikaci $\neg \mathrm{k} \to \mathrm{j}$), dostaneme implikaci $\neg \mathrm{j} \to \mathrm{j}$, tzn. „Není-li Jakub doma, je doma.“ a z toho vyvodíme (pomocí modus ponens) j. Ukázali jsme, že systém je sporný — vyvodili jsme výrok „Jakub je doma.“ a současně jsme předpokládali že „Jakub není doma.“. Shrňme: náš původní předpoklad, že Jakub není doma, vede ke sporu, takže Jakub je doma (!) — [důkaz sporem].

Pokud jste při prvním čtení nevyřešili úlohy v pátém bodě ne-předmluvy, vraťte se k nim nyní.

V sedmdesátých a osmdesátých letech minulého století se objevovaly v časopisech hádanky s názvem „zebra" — prý proto, že první slavná hádanka tohoto typu se týkala mj. zebry (snad se jedná o cv. I-1.36). Nechť se proto i v našem prvním případu vyskytují zvířata. (V zadáních běžných hádanek typu „zebra" se však vyskytuje podstatně méně implikací než v našich úvodních hádankách o zoo a o studentkách, které tvoří přechod od předchozích úloh o vnoučatech, ve kterých byly všechny základní informace zadány ve tvaru implikací, k obvyklým „zebrám", v nichž se implikace nevyskytuje vůbec a které jsou v našem textu reprezentovány zejména úlohami o kamarádech-tábornících, milovnících umění a domech obývaných nájemníky různých národností — tento seznam je řazen podle vzrůstajícího počtu objektů a tím podle povšechně vzrůstající obtížnosti úloh[27].)

Při řešení složitějších „zeber" doporučuji vyrobit si tabulku a do ní *postupně* zaznamenávat zjištěné důsledky. Důsledky původně zadaných podmínek a nově nalezených skutečností je třeba hledat *opakovaně*, neboť na základě nově zjištěné skutečnosti můžeme dojít aplikací zadaných podmínek k novým poznatkům, případně můžeme zjistit, že nějaký údaj je vynucen tím, že všechny ostatní možnosti jsou již vyloučeny. V našem textu však nebudeme graficky takovéto tabulky předvádět, protože ukazování jejich postupných změn by neúměrně prodloužilo text; omezíme se proto jen na slovní popis. Pokud již nebudete v získávání nových důsledků schopni pokračovat, můžete nalézt místo, kde jsou jen dvě možnosti a zkusit nejprve přidat jednu možnost jako dodatečný předpoklad a prozkoumat důsledky a poté přidat druhý možný předpoklad a opět prozkoumat jeho důsledky a tím se pokusit zjistit, že jedna možnost je vyloučena, protože vede ke sporu[28].

Úlohy typu „zebra" bývají zakončeny poměrně jednoduchou otázkou, např. v následujícím příkladu se ptáme „Ve které zoo chystají ubytování zebře?". Chceme-li otázku upřesnit, tak žádáme nalezení *všech* možných řešení (je-li jich pro uvažované vlastnosti více než jedno), nebo případné konstatování, že úloha nemá vůbec žádné řešení.

V hádankách jsou některé podmínky zadány výslovně a očíslovány, mnoho dalších

[27] Záleží však také na počtu vlastností a struktuře podmínek; v tomto paragrafu lze za nejobtížnější pokládat cvičení I-1.28 a I-1.36. Ve snaze užít „zeber" k procvičení různých spojení výroků předkládáme řadu úloh tohoto typu také ve druhém paragrafu. Úlohy o studentkách, fotbalistech a gratulantkách vyšetřují více než jednu vlastnost a na rozdíl od běžných „zeber" obsahují alespoň jednu implikaci nebo některé spojení výroků zkoumané ve druhém paragrafu (pořadí opět zohledňuje rostoucí počet objektů). Znovu opakuji, že cvičení typu „zebra" je v textu dostatek, není teba vyřešit všechny; vyberte si, vážený čtenáři, těžší nebo lehčí podle své chuti a schopnosti.

[28] Hezky a podrobně popsaný návod řešení „zeber" zejména s méně než třemi vlastnostmi nalezne čtenář v knize [B-H].

informací není pochopitelně přímo vyjádřeno. Jestliže například v následujícím případu uvažujeme čtyři zvířata jedoucí do čtyřech měst, žádáme bez výslovného zdůraznění, aby např. jedno zvíře nejelo do dvou měst a aby do jednoho města nejela dvě zvířata. Zadáváme tedy implicitně mnoho dalších implikací typu „Jede-li žirafa do Brna, nejede žirafa do Prahy.“ a také typu „Jede-li žirafa do Brna, nejede antilopa do Brna.“. Tvrzení zadaná bez výslovného zdůraznění budeme používat intuitivně; doufáme, že pro motivaci dodatečných vyvozovacích principů je dostatečný podrobnější rozbor důsledků výslovně uvedených podmínek.

Příklad 6. Do zoo ve Dvoře Králové, Olomouci, Brně a Praze přijíždějí čtyři zvířata: žirafa, zebra, antilopa a velbloud. Víme:

(1) Pokud žirafa nejede do Prahy, jede tam velbloud.
(2) Antilopa nebude žít v Brně.
(3) Jestliže velbloud nemíří do Dvora Králové, bude žít žirafa v Olomouci.

V našich podmínkách (1)–(3) se nevyskytuje žádný údaj o zebře. Přesto otázka zní: „Ve které zoo chystají ubytování zebře?“.

Nyní si můžete sepsat všechny možnosti, kam které zvíře jede. Těchto možností je $4! = 24$ (určíte-li místo pobytu prvního zvířete — jednu ze čtyř možností — zbývají na druhé zvíře tři možnosti, atd.). Pro těchto 24 případů můžete zkoumat pravdivost složených výroků (1)–(3) a touto mechanickou cestou dojdete k cíli. Ukažme však, že trocha uvažování opět vede ke správné odpovědi s mnohem menší námahou (a mechanickou cestu si necháme jen pro případ naprosté bezradnosti).

Zkoumejme dvě možnosti podle toho, zda velbloud míří do Dvora Králové, nebo ne:

(I) Velbloud jede do Dvora Králové, pak podle (1) musí žirafa do Prahy (!) — [důkaz sporem]. Antilopa směřuje do Olomouce (2) a následně připravují zebře ubytování v Brně.

(II) Velbloud nejede do Dvora Králové, pak bude žít žirafa v Olomouci (3). Velbloud musí do Prahy (1) a antilopa do Dvora Králové (2). Zebře opět chystají ubytování v Brně.

Odpověď tudíž[29] zní: „Ubytování zebře chystají v brněnské zoo.“

Uvědomme si však, že jsme nerozhodli např. zda žirafa jede do Prahy nebo do Olomouce, neboť požadavky (1)–(3) nevyloučí žádnou z těchto možností (viz po řadě případy (I) a (II)). Možným řešením je totiž jak rozmístění zvířat: žirafa Praha, velbloud Dvůr Králové, antilopa Olomouc a zebra Brno, tak také rozmístění zvířat: žirafa Olomouc, velbloud Praha, antilopa Dvůr Králové a zebra Brno.

Následující úlohy jsou velice lehké.

[29] Podrobnější rozbor zde užité triviální úvahy týkající se vyšetření více možností provedeme ve druhém paragrafu — [důkaz rozborem případů].

Úloha 18. Čtyři zvířata z předchozího příkladu opět jedou do zoo uvedených v předchozím příkladu. Nyní víme:

(1) Antilopa nejede do žádné z moravských zoo[30)].
(2) Pokud velbloud míří do Olomouce, směřuje žirafa do Brna.
(3) Nejede-li žirafa do Prahy, jede antilopa do Olomouce.

Otázka opět zní: „Ve které zoo chystají ubytování zebře?“. Můžete navíc rozhodnout, kam vezou antilopu?

Úloha 19. O našich čtyřech cizokrajných zvířatech nyní víme:

(1) Nejede-li žirafa do Prahy, míří velbloud do Brna.
(2) Nepřipravují-li domov antilopě v Praze, směřuje velbloud do Olomouce.
(3) Velbloud bude žít ve Dvoře Králové.

Umíte z těchto informací určit, kam putuje zebra?

Úloha 20. Ze tří studentek (Jana, Eva a Marie) má každá ráda jiný předmět (matematiku, angličtinu a dějepis) a má jinou barvu vlasů (černou, hnědou a světlou). Víme:

(1) Jana nemá v oblibě dějepis.
(2) Černovláska dává přednost angličtině.
(3) Milovnice matematiky nemá světlé vlasy.
(4) Má-li Jana černé vlasy, je oblíbeným předmětem Marie matematika.
(5) Eva není světlovlasá.

Určete oblíbené předměty a barvu vlasů jednotlivých dívek.

Při více vlastnostech se v hádankách typu „zebra“ dramaticky zvyšuje počet všech kombinací. Řešení zcela mechanickým výpočtem se tudíž stává ještě obtížnějším (při třech objektech a třech vlastnostech v následující úloze by byl počet případů $3! \cdot 3! \cdot 3! = 216$. Naproti tomu následující úloha se ukáže strašně jednoduchá, pokud ji neřešíte mechanicky.

[30)] Matematizace tohoto slovního vyjádření s jasným významem směřuje k disjunkci; tvrzení bylo zařazeno jako upozornění na problematiku, které bude věnován příští paragraf. Bez disjunkce vyjádříme popisované tvrzení pomocí dvou tvrzení obsahujících negaci — uvedením dvou zoo, do nichž antilopa nejede.

[u18)] Podle (1) a (3) jede žirafa do Prahy. Následně v důsledku (2) velbloud nemíří do Olomouce, kam nemůže jet ani antilopa podle (1). Pročež zebře chystají ubytování v Olomouci, neboť žádné jiné zvíře tam jet nemůže. Navíc antilopa musí do Dvora Králové (1), takže velbloud směřuje do Brna. Rozmístění zvířat je určeno jednoznačně.

[u19)] Nikoli. Důvodem není, že určení je nedostatečné, a proto zebra může jet do více měst, avšak právě naopak: informací je příliš mnoho, vytvářejí sporný systém, takže ať jede zebra kamkoli, nevyhovíme všem předpokladům.

[u20)] Kdyby Jana měla ráda angličtinu, musela by mít podle (2) černé vlasy; v důsledku (4) by pak Marie preferovala matematiku a následně dle (3) by měla hnědé vlasy, tuto možnost však vylučuje podmínka (5). Takže Jana v důsledku (1) miluje matematiku a má podle (2) a (3) hnědé vlasy, Eva musí být v důsledku (5) černovláskou a nadto podle (2) musí mít v oblibě angličtinu.

Úloha 21. Partu tří kamarádů tvoří Petr, Tomáš a Jan a jejich příjmení jsou Červený, Modrý a Bílý. Na výlety nosí každý z nich jednu z tábornických potřeb (sekerku, kotlík a stan) a každý dává přednost jinému sportu (horolezectví, cyklistika a jízda na divoké vodě). Víme:

(1) Stan nosí cyklista.
(2) Tomáš se nejmenuje Bílý.
(3) Petr je horolezcem.
(4) Červený nosí sekerku.
(5) Bílý není vodákem.
(6) Petr nenosí kotlík.

Otázka zní: Jak se jmenuje křestním jménem i příjmením ten z chlapců, který nosí kotlík? Druhá otázka: Které předpoklady nepotřebujete, abyste určili, jak se jmenuje ten, kdo nosí sekerku?

Příklad 7. Milovníci umění se jmenují Josef, Antonín, František a Pavel, hrají na různé nástroje (housle, violu, violoncello a basu), přou se o své oblíbené autory (Čapka, Haška, Kunderu a Seiferta). O vystoupení, kdy hráli víceméně v řadě, jsme se dověděli:

(1) Pavel hraje na housle.
(2) Josef obdivuje Haška.
(3) Violista preferuje Čapka.
(4) František stojí nejvíce vlevo.
(5) Violoncellista není milovníkem Haška.
(6) Vpravo hned vedle basisty stojí violoncellista.
(7) Obdivovatel Kundery stojí hned vlevo vedle milovníka Seiferta.

Popište, kterého spisovatele má nejraději ten který hudebník a v jakém pořadí naši milovníci umění stojí. Bude mít úloha více řešení, vynecháme-li v sedmé podmínce slovíčko „hned“?

Zjistěme nejprve křestní jméno violoncellisty. V důsledku podmínek (5) a (2) se nemůže jmenovat Josef (!) — [důkaz sporem a „dvojitou negaci lze vynechat“]. Na základě podmínek (4) a (6) vyloučíme jméno František (!) — [důkaz sporem a „dvojitou negaci lze vynechat“]. Podmínka (1) znemožňuje, aby se jmenoval Pavel. Violoncellista se tudíž jmenuje Antonín.

Violista se nemůže jmenovat ani Pavel (1), ani Josef (2) a (3) (!) — [důkaz sporem a „dvojitou negaci lze vynechat“], a dokonce ani Antonín, protože to je

[u21] Petr je horolezcem (3), a tedy nemůže nosit stan (1) ani kotlík (6); nosí tudíž sekerku a následně se jmenuje Červený (4). Pro zjištění jména nositele sekerky jsme nepotřebovali podmínky (2) a (5). Tomáš Modrý (2) je vodákem (5); následně nosí kotlík (1). (Pomocí protipříkladů si můžete ověřit, že po vynechání kteréhokoli z požadavků (1), (3), (4) a (6) již není jméno nositele sekerky určeno jednoznačně.)

jméno violoncellistovo. Pročež violista se jmenuje František a následně Josef hraje na basu (1).

Ze zjištěného můžeme odvodit, že violoncellista Antonín má rád Kunderu. On ani houslista Pavel totiž nemilují Čapka (3), ani Haška (2), musí tedy mít rádi Kunderu a Seiferta. Takže musí stát hned vedle sebe a milovník Kundery se nachází hned vlevo do milovníka Seiferta (7). Hned vlevo od violoncellisty je však basista Josef — milovník Haška (6), což určuje, že Antonín dává přednost Kunderovi.

Naši milovníci umění stojí v pořadí zleva doprava: Violista František milující Čapka, basista Josef preferující Haška, violoncellista Antonín, který má rád Kunderu, a houslista Pavel obdivující Seiferta.

Pokud v sedmé podmínce vynecháme slovo „hned“, bude řešením také pořadí: violista František milující Čapka, houslista Pavel obdivující Kunderu, basista Josef preferující Haška a violoncellista Antonín, který má rád Seiferta.

* * *

Teď přistoupíme k popisu možných dodatečných principů dokazování, které zpřehledňují demonstrace a usnadňují nalezení potřebných důkazů. Potřeba takovýchto prostředků je zcela očividná, neboť důkaz naprosto triviálního tvrzení $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ měl pět kroků, plně provedené důkazy složitějších tvrzení by byly velice těžko průhledné a přetěžce bychom pro každé jednotlivé tvrzení hledali znovu a znovu metodu konstrukce důkazu. Zopakujme, že v matematické logice bylo sice ukázáno, že při užívání těchto principů nedokážeme nic, co by nebylo dokazatelné bez nich, avšak sami nahlédnete, jak se dokazování zjednoduší — pochopitelně pokud se dodatečné principy naučíte používat. Některé principy jsme snad motivovali v předchozích příkladech (a jejich využití ještě upřesníme), důvody pro užívání ostatních uvedeme při jejich formulaci.

Uvedli jsme, že užívání dodatečných principů dokazování velmi zjednoduší prokazování dokazatelnosti zadaných formulí, avšak i tak zůstane prokazování dokazatelnosti jednotlivých formulí záležitostí vyžadující jistý vhled do problematiky. Závěr paragrafu je proto o poznání obtížnější než předcházející text a rovněž obtížnější než převážná část následujícího paragrafu.

Důkaz sporem a důkaz rozborem případů jsou v matematice tak běžná odvozovací pravidla, že by neměly potřebovat přílišné vysvětlování. Běžnost těchto pravidel naopak způsobuje, že kdybychom nebyli schopni zaručit možnost použití těchto vyvozovacích prostředků, pokládali bychom náš systém za „slabý“ (uveďme však, že např. intuicionistická logika — viz závěr textu — nepřipouští důkaz sporem). Důkazem sporem se budeme zabývat za okamžik, důkaz rozborem případů pojednává o disjunkci a je tedy nutné jeho popis odložit do příštího paragrafu, nicméně jeho nejdůležitější speciální případ — důkaz neutrální formulí — probereme ještě v tomto paragrafu.

Zbývající dvě odvozovací pravidla — důkaz dedukcí a důkaz nahrazením[31] se mohou čtenáři zdát na první pohled nedůležitá. Z hlediska logiky je však důkaz dedukcí pravděpodobně nejdůležitějším a nejaplikovatelnějším odvozovacím pravidlem, o čemž se bude snažit čtenáře přesvědčit příklady 8, 9 a úlohy 22, 23, které ukazují některé další vyvozovací principy jako jednoduché důsledky důkazu dedukcí. Právě v tom tkví význam důkazu dedukcí: s jeho pomocí se dokáží pomocné vyvozovací principy a teprve ty se využijí při aplikacích. Zopakujme z úvodu, že pro osvojení užívání vyvozovacích principů je velice žádoucí, abyste si, milý čtenáři, alespoň některé důkazy z následujících úloh a cvičení SESTROJIL SÁM a nespokojil se pouze s pasivní kontrolou jejich správnosti.

Jestliže $\mathcal{T}$ je jakýkoli systém formulí výrokového počtu a $\mathcal{A}$ je jakákoli formule téhož počtu, pak $\mathcal{T}, \mathcal{A}$ značí systém formulí $\mathcal{T}$ rozšířený o formuli $\mathcal{A}$ (tj. předpokladem systému $\mathcal{T}, \mathcal{A}$ je jednak jakýkoli předpoklad systému $\mathcal{T}$ a jednak předpoklad $\mathcal{A}$).

Důkaz dedukcí. Jestliže ze systému předpokladů $\mathcal{T}, \mathcal{A}$ dokážeme formuli $\mathcal{B}$, pak pouze z předpokladů $\mathcal{T}$ dokážeme implikaci $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$, tzn. v symbolech: je-li $\mathcal{T}, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$, je $\mathcal{T} \vdash \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Jinými slovy: Princip umožňuje z existence důkazu ze systému předpokladů $\mathcal{T}, \mathcal{A}$ obsahujícího formuli $\mathcal{A}$ vyvodit existenci důkazu ze systému $\mathcal{T}$, který ji již neobsahuje. Dokážeme-li za předpokladu $\mathcal{A}$ formuli $\mathcal{B}$, jsme schopni *bez předpokladu* $\mathcal{A}$ dokázat implikaci $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

Příklad 8. Ukažme si, jak se aplikací pravidla důkazu dedukcí jednoduše dokáže formule $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$: Zcela evidentně $\mathcal{A} \vdash \mathcal{A}$, neboť jako důkaz poslouží jednočlenná posloupnost — prostě napíšeme předpoklad $\mathcal{A}$ (tj. použijeme pravidlo o základních důkazech). Nyní aplikujme důkaz dedukcí (při kteréžto aplikaci je systém předpokladů označený $\mathcal{T}$ prázdný); dostáváme $\vdash \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ a jsme proto hotovi. Není to „trochu“ jednodušší než petitem psaný důkaz o několik odstavců výše?!

Příklad 9. Při dokazování jsme zvyklí, že **„vše dokázané lze použít k** (dalšímu) **dokazování“.** Nemožnost užívat takovýto princip by naprosto nabourala naší představu o dokazování. V následujícím odstavci si ukážeme, že je vše v souladu s naší intuicí, neboť tento princip plyne z principu důkazu dedukcí.

Potřebujeme odůvodnit, že z dokazatelnosti $\mathcal{T} \vdash \mathcal{A}$ (tzn. z existence důkazu formule $\mathcal{A}$ ze systému předpokladů $\mathcal{T}$) a z dokazatelnosti $\mathcal{T}, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$ (tj. existence

[31] V souladu se slovním spojením „důkaz sporem“ a jinými podobnými budeme *názvy* dodatečných odvozovacích pravidel vytvářet spojením slova důkaz a běžného označení věty logiky, která ukazuje, že uvedené odvozovací pravidlo lze přidat do systému principů vyvozování, v našem konkrétním případě se jedná o věty o dedukci a o nahrazení. Prokázání vět o dedukci, o nahrazení, o důkazu sporem a o neutrální formuli lze nalézt např. v §2 kap. I [So].

důkazu formule $\mathcal{B}$ za použití dodatečného předpokladu $\mathcal{A}$) plyne $\mathcal{T} \vdash \mathcal{B}$ (tj. že existuje důkaz formule $\mathcal{B}$ ze systému předpokladů $\mathcal{T}$ *bez dodatečného předpokladu* $\mathcal{A}$). Vše je opět zcela triviální. Podle důkazu dedukcí z druhé předpokládané dokazatelnosti plyne existence důkazu formule $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ z předpokladů $\mathcal{T}$. Za tento důkaz připojme důkaz formule $\mathcal{A}$ ze systému předpokladů $\mathcal{T}$ a dostaneme důkaz ze systému předpokladů $\mathcal{T}$ podle pravidla (b) pro prodlužování důkazů (členy takto sestrojeného důkazu je jak formule $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$, tak také formule $\mathcal{A}$). Za takto vzniklý důkaz připojme formuli $\mathcal{B}$ (prosté užití pravidla modus ponens, tj. pravidla (a) pro prodlužování důkazů). A jsme hotovi, sestrojili jsme důkaz z předpokladů $\mathcal{T}$, jehož posledním členem je formule $\mathcal{B}$.

Úloha 22. Prokažte tranzitivitu implikace syntakticky, tj. pro libovolné formule $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ a $\mathcal{R}$ dokažte ve výrokovém počtu formuli $(\mathcal{P} \to \mathcal{Q}) \to [(\mathcal{Q} \to \mathcal{R}) \to (\mathcal{P} \to \mathcal{R})]$. Návod: užijte trojnásobně důkaz dedukcí, a to na formule $\mathcal{P} \to \mathcal{Q}, \mathcal{Q} \to \mathcal{R}, \mathcal{P}$.

Úloha 23. Dokažte zákon Dunse Scota $\neg p \to (p \to q)$. Návod: Užijte axiom **VP1** volíce postupně za formule $\mathcal{P}, Q$ negace odpovídajících výrokových proměnných, tzn. formule $\neg p$ a $\neg q$; užijte **VP3** a tranzitivitu implikace.

Zatím sice dlužíme intuitivní vysvětlení zákona Dunse Scota, ten je však velmi přirozený: jestliže přijmeme negaci předpokladu p, pak ze samotného předpokladu p již plyne cokoli. Nejste-li doma, pak určitě z předpokladu, že doma jste, už plyne cokoli si vymyslíme. Jinou, snad dokonce přirozenější, formulaci tohoto zákona popíšeme ve formuli (*iii*) následujícího paragrafu.

Úloha 24. Ukažte, že po přijetí pravidla důkazu dedukcí již můžeme z našeho systému vyvozovacích principů vypustit první dva axiomy **VP1, VP2.**

*

---

u22) Uvažme, že ze systému předpokladů $\mathcal{P} \to \mathcal{Q}, \mathcal{Q} \to \mathcal{R}, \mathcal{P}$ jsou pomocí modus ponens postupně dokazatelné formule $\mathcal{Q}$ a $\mathcal{R}$. Pak již stačí na dokazatelnost $\mathcal{P} \to \mathcal{Q}, \mathcal{Q} \to \mathcal{R}, \mathcal{P} \vdash \mathcal{R}$ třikrát použít důkaz dedukcí (nejprve užitím na formuli $\mathcal{P}$ získáme $\mathcal{P} \to \mathcal{Q}, \mathcal{Q} \to \mathcal{R} \vdash \mathcal{P} \to \mathcal{R}$, druhým užitím důkazu dedukcí obdržíme $\mathcal{P} \to \mathcal{Q} \vdash (\mathcal{Q} \to \mathcal{R}) \to (\mathcal{P} \to \mathcal{R})$ a třetí aplikací dostaneme žádanou dokazatelnost formule $(\mathcal{P} \to \mathcal{Q}) \to [(\mathcal{Q} \to \mathcal{R}) \to (\mathcal{P} \to \mathcal{R})]$ bez jakýchkoli předpokladů).

u23) Popsaným užitím axiomu **VP1** dostanete $\neg p \to (\neg q \to \neg p)$. Axiom **VP3** aplikujeme na výrokové proměnné p, q a obdržíme $(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$. Uvedené aplikace axiomů jsou pochopitelně dokazatelné ve výrokovém počtu, pročež tranzitivita implikace zajistí dokazatelnost formule $\neg p \to (p \to q)$ ve výrokovém počtu.

u24) Evidentně $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \vdash \mathcal{P}$ (sepsání předpokladu, tj. pravidlo (ii) konstrukce důkazů) a nyní stačí dvakrát použit důkaz dedukcí: nejprve získáme $\mathcal{P} \vdash \mathcal{Q} \to \mathcal{P}$ a poté $\vdash \mathcal{P} \to (\mathcal{Q} \to \mathcal{P})$. Pro prokázání dokazatelnosti druhé formule uvažme, že $\mathcal{P}, \mathcal{P} \to (\mathcal{Q} \to \mathcal{R}), \mathcal{P} \to \mathcal{Q} \vdash \mathcal{Q}$ (užijeme modus ponens), $\mathcal{P}, \mathcal{P} \to (\mathcal{Q} \to \mathcal{R}), \mathcal{P} \to \mathcal{Q} \vdash \mathcal{Q} \to \mathcal{R}$ (opět modus ponens), $\mathcal{P}, \mathcal{P} \to (\mathcal{Q} \to \mathcal{R}), \mathcal{P} \to \mathcal{Q} \vdash \mathcal{R}$ (předchozí výsledky, „vše dokázané lze použít k dokazování“ a modus ponens), a nyní třikrát důkaz dedukcí: poprvé $\mathcal{P} \to (\mathcal{Q} \to \mathcal{R}), \mathcal{P} \to \mathcal{Q} \vdash \mathcal{P} \to \mathcal{R}$, podruhé $\mathcal{P} \to (\mathcal{Q} \to \mathcal{R}) \vdash (\mathcal{P} \to \mathcal{Q}) \to (\mathcal{P} \to \mathcal{R})$ a na závěr třetí aplikací důkazu dedukcí získáme $\vdash [\mathcal{P} \to (\mathcal{Q} \to \mathcal{R})] \to [(\mathcal{P} \to \mathcal{Q}) \to (\mathcal{P} \to \mathcal{R})]$.

Výroková proměnná představuje blíže neurčený výrok a můžeme tudíž uvažovat o jejím nahrazení výrokem. Máme-li jakoukoli dokazatelnou formuli a nahradíme-li v ní výrokovou proměnnou nějakým výrokem, je velice intuitivní, že dostaneme opět správné tvrzení. Například víme, že formule $\mathtt{p} \to \mathtt{p}$ je dokazatelná, je tedy přirozené vyvodit, že také výpověď „Jestliže prší, pak prší." je správná. Ovšem rovněž jakákoli formule výrokového počtu představuje nějaký (zatím ne zcela přesně určený) výrok a z toho důvodu je přirozené, že nahrazením výrokové proměnné jakoukoli formulí výrokového počtu dostaneme z formule dokazatelné ve výrokovém počtu opět formuli dokazatelnou ve výrokovém počtu. Podstatné však je, že výrokovou proměnnou musíme při jednom nahrazování nahradit všude, a to touž formulí. Kdybychom v dokazatelné formuli $\mathtt{p} \to \mathtt{p}$ proměnnou $\mathtt{p}$ v prvém případě nahradili výrokem „Prší." a ve druhém případě výrokem „Svítí sluníčko." dostali bychom zřejmě nesprávný výrok „Jestliže prší, pak svítí sluníčko." Pro jistotu zopakujme popsaný vyvozovací princip trochu formálněji.

Důkaz nahrazením. Je-li výroková formule $\mathcal{A}$ dokazatelná ve výrokovém počtu (tzn. bez předpokladů) a vznikne-li formule $\mathcal{C}$ nahrazením *všech* výskytů jedné výrokové proměnné ve formuli $\mathcal{A}$ jakousi formulí $\mathcal{B}$, je formule $\mathcal{C}$ dokazatelná.

Axiomy **VP1–VP3** jsme vyslovili ve tvaru platném pro jakékoli formule $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}$ a ve stejném duchu jsme formulovali tranzitivitu implikace v úloze 22. Naproti tomu v úloze 23 jsme zákon Dunse Scota formulovali jen jako jednu formuli tvaru $\neg\mathtt{p} \to (\mathtt{p} \to \mathtt{q})$ a nikoli ve tvaru, že pro libovolné formule $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ je dokazatelná formule $\neg\mathcal{P} \to (\mathcal{P} \to \mathcal{Q})$. Nedopustili jsme se neobratnosti a jsme schopni obecnější tvar odvodit z tvaru speciálního? Obecnou metodu, jak ze speciálního příkladu odvodit obecné pravidlo popíše následující příklad. Vědomi si možnosti získat obecný případ pomocí pravidla důkaz nahrazením z případu speciálního — z jedné určité formule — budeme v dalším textu všechna pravidla (zákony) formulovat v co nejjednodušším a nejpřehlednějším speciálním tvaru (viz např. formulace příkladu 11 a úloh 26 a 27).

Příklad 10. Podle výsledku úlohy 23 je ve výrokovém počtu dokazatelný zákon Dunse Scota ve tvaru formule $\neg\mathtt{p} \to (\mathtt{p} \to \mathtt{q})$. Ukážeme, že jsou-li $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ jakékoli formule výrokového počtu, je obecnější tvar zákona Dunse Scota, tzn. formule $\neg\mathcal{P} \to (\mathcal{P} \to \mathcal{Q})$, dokazatelný ve výrokovém počtu užitím důkazu nahrazením.

Prostým užitím důkazu nahrazením aplikovaným na proměnnou $\mathtt{p}$ a formuli $\mathcal{P}$ nahlédneme, že formule $\neg\mathcal{P} \to (\mathcal{P} \to \mathtt{q})$ je dokazatelná ve výrokovém počtu. Následně podle téhož pravidla je dokazatelná ve výrokovém počtu rovněž formule $\neg\mathcal{P} \to (\mathcal{P} \to \mathcal{Q})$[32].

[32] Pokud se vám předchozí úvaha nezdá dostatečně odůvodněná, jste naprosto v právu. Ano, je tam potřebný další předpoklad, který nebyl výslovně zmíněn. Takže přijali-li jste

Úloha 25. Ukažte, že systém předpokladů $\mathcal{T}$ je sporný, právě když je z něho dokazatelná každá formule výrokového počtu.

*

Ze všech důkazových prostředků se ve školách nejvíce mluví o důkazu sporem, proto snad formulace ani užití tohoto odvozovacího pravidla nepotřebuje nadbytečné zdůvodňování. Zopakujme jen intuici stojící za tímto vyvozovacím principem: jestliže z negace nějakého tvrzení $\mathcal{A}$ dovodíme něco nesprávného, pak princip důkazu sporem nám dovolí uzavřít, že nemůže být udržitelný náš původní předpoklad $\neg\mathcal{A}$, tzn. že jsme dokázali výchozího tvrzení $\mathcal{A}$.

Důkaz sporem[33]. Je-li systém předpokladů $\mathcal{T}, \neg\mathcal{A}$ sporný, je formule $\mathcal{A}$ dokazatelná ze systému předpokladů $\mathcal{T}$.

Prosím čtenáře, aby si uvědomil, že důkaz sporem je svou strukturou dosti výjimečný. Běžně z předpokladů, které pokládáme za správné, vyvozujeme další tvrzení, při důkazu sporem naopak předpokládáme platnost toho, co chceme vyvrátit.

předchozí argumentaci jako zcela správnou, hledejte slabé místo nyní. — Nevidíte-li ho, napovím, že předpoklad je třeba k druhému užití důkazu nahrazením. — Předpokládáme, že ve formuli $\mathcal{P}$ se nevyskytuje proměnná q. Pokud by se totiž proměnná q ve formuli $\mathcal{P}$ vyskytovala, dostaneme po jejím nahrazením formulí $\mathcal{Q}$ jakousi formuli $\mathcal{P}'$ a (v případě, že q je různé od $\mathcal{Q}$) nikoli formuli $\mathcal{P}$ samotnou. Druhým nahrazením tudíž získáme toliko formuli $\neg\mathcal{P}' \rightarrow (\mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{Q})$ a ne požadovanou formuli $\neg\mathcal{P} \rightarrow (\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q})$.

Předveďme si předchozí námitku na příkladu, kdy formule $\mathcal{P}$ je prostě výrokovou proměnnou q. Při této volbě dostáváme prvním nahrazením $\neg\mathsf{q} \rightarrow (\mathsf{q} \rightarrow \mathsf{q})$ a druhým $\neg\mathcal{Q} \rightarrow (\mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q})$ a nikoli žádané $\neg\mathsf{q} \rightarrow (\mathsf{q} \rightarrow \mathcal{Q})$. Naším dosazováním jsme sice prokázali dokazatelnost formule, avšak jiné, než jsme chtěli.

Protože jsem však předpoklad zamlčel, je pravděpodobné, že tvrzení platí — i když jeho prokázání vyžaduje ještě další ideu. Je teď na vás tvrzení dokázat i pro formule $\mathcal{P}$, ve kterých se vyskytuje proměnná q. — Pokud se nedaří, prozradím, že stačí užít navíc důkaz nahrazením užitý na výchozí formuli $\neg\mathsf{p} \rightarrow (\mathsf{p} \rightarrow \mathsf{q})$. — Snad nápověda stačila. — Nejprve nahradíme v zákonu Dunse Scota proměnnou q nějakou proměnnou q', která se nevyskytuje ani v zákonu Dunse Scota, ani v některé z formulí $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$. Tímto nahrazením dostaneme formuli $\neg\mathsf{p} \rightarrow (\mathsf{p} \rightarrow \mathsf{q}')$, která je podle důkazu nahrazením dokazatelná ve výrokovém počtu. Na tuto formuli nyní aplikujeme úvahu popsanou v textu nahrazujíce proměnnou p formulí $\mathcal{P}$ a proměnnou q' formulí $\mathcal{Q}$ (formule $\mathcal{P}$ neobsahuje proměnnou q', tj. dodatečně požadovaná podmínka platí). Prvním nahrazením získáme formuli $\neg\mathcal{P} \rightarrow (\mathcal{P} \rightarrow \mathsf{q}')$, druhým nahrazením obdržíme žádanou formuli $\neg\mathcal{P} \rightarrow (\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q})$. Dvojnásobná aplikace důkazu nahrazením vzhledem k popsaným nahrazením nás ubezpečí o dokazatelnosti posledně zmíněné formule ve výrokovém počtu.

[u25] Je-li ze systému předpokladů $\mathcal{T}$ dokazatelná jakákoli formule výrokového počtu, je speciálně pro jakkoli zvolenou formuli $\mathcal{C}$ dokazatelná jak ona sama, tak také její negace $\neg\mathcal{C}$. Předpokládejme naopak, že $\mathcal{T} \vdash \mathcal{C}$ a současně $\mathcal{T} \vdash \neg\mathcal{C}$. Buď dána zcela libovolná formule $\mathcal{D}$. Formule $\neg\mathcal{C} \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D})$ je dokazatelná podle předchozího příkladu ve výrokovém počtu, a tudíž tím spíše z předpokladů $\mathcal{T}$. Takže stačí dvakrát použít pravidlo „vše dokázané lze použít k dokazování“ (a modus ponens) a získáme $\mathcal{T} \vdash \mathcal{D}$.

[33] Důkaz sporem se také nazývá *reductio ad absurdum*.

Pokud jste v závěru čtvrtého příkladu souhlasil s tvrzením „Jakub nemůže nebýt doma, tj. Jakub je doma.“ jako jasným bez odvolání na sémantiku, pak přijímáte, že dva zmíněné výroky mají stejný význam, neboli souhlasíte s **„dvojitou negaci lze vynechat“** a současně s **„dvojitou negaci lze přidat“.** V takovém případě výsledky příkladu 11 a úlohy 26 jen potvrdí vaše očekávání. Pokud jste ve čtvrtém příkladu měli pochybnosti, zda nepoužíváme nepovolené triky, měly by tyto pochybnosti být odstraněny výsledky následujícího příkladu a úlohy.

Příklad 11. Ukážeme dokazatelnost formule $\neg\neg p \to p$ ve výrokovém počtu. K tomu účelu si nejprve uvědomíme, že systém $\neg\neg p, \neg p$ je sporný, neboť je v něm dokazatelná jak formule $\neg p$, tak také její negace $\neg\neg p$. Pak aplikujeme důkaz sporem na formuli $\neg p$ a zjistíme, že $\neg\neg p \vdash p$. Nyní již postačuje užít důkaz dedukcí, abychom obdrželi žádanou dokazatelnost $\neg\neg p \to p$ ve výrokovém počtu.

Úloha 26. Ukažte dokazatelnost formule $p \to \neg\neg p$ ve výrokovém počtu. Návod: při použití výsledku předchozího příkladu nejdřív ukažte, že systém $\neg\neg\neg p, p$ je sporný.

Úloha 27. Prokažte dokazatelnost formule $(p \to q) \to [(p \to \neg q) \to \neg p]$ ve výrokovém počtu. Návod: Nahlédněte spornost teorie se systémem předpokladů $(p \to q)$, $(p \to \neg q)$, $\neg\neg p$.

Úloha 28. Ukažte, že po přijetí pravidla důkazu sporem již můžeme z našeho systému vyvozovacích principů vypustit třetí axiom **VP3.**

Ukažme si, jak by probíhaly úvahy o jménech jednotlivých milovníků umění z počátku příkladu 7 přesně na základě vyslovených odvozovacích pravidel. Účelem následujícího odstavce není vás nutit provádět úvahy tak složitě, avšak ukázat, jak v případě nutnosti převést intuitivní úvahu provedenou v příkladu 7 na odvozovací pravidla popsaná v tomto paragrafu (o kterých si dovolíme předpokládat, že se na nich s partnerem diskuse shodnete). Za předpokladu našich podmínek (1)–(7) se snažíme zjistit jméno violoncellisty.

Nejprve k našim podmínkám přidejme předpoklad „Není pravda, že violoncellista se nejmenuje Josef.“ Podle pravidla, že dvojitou negaci můžeme vynechat, je z našeho systému dokazatelné, že violoncellista se jmenuje Josef. Podle podmínky (2) violoncellista Josef obdivuje Haška, což je ve sporu s předpokladem (5).

$^{u26)}$ Z předchozího příkladu (nahrazením výrokové proměnné p formulí $\neg p$) dostaneme $\vdash \neg\neg\neg p \to \neg p$; z našeho systému předpokladů je tudíž dokazatelná jak formule p, tak také formule $\neg p$. Důkaz sporem aplikujte na formuli $\neg\neg\neg p$, čímž obdržíte $p \vdash \neg\neg p$ a poté užijte důkaz dedukcí.

$^{u26)}$ K prokázání spornosti uvedeného systému užijte výsledek příkladu 11 a trojnásobně modus ponens. Poté z důkazu sporem obdržíme $(p \to q)$, $(p \to \neg q) \vdash \neg p$ a na závěr stačí využít dvakrát důkaz dedukcí.

$^{u28)}$ Systém předpokladů $\neg q \to \neg p, p, \neg q$ je sporný, důkaz sporem aplikujte na formuli $\neg q$; získáte $\neg q \to \neg p, p \vdash q$ a následně použijte dvakrát důkaz dedukcí aplikovaný nejprve na formuli p a poté na formuli $\neg q \to \neg p$.

Nyní použijeme důkaz sporem a nahlédneme, že ze systému předpokladů (1)–(7) je dokazatelné „Violoncellista se nejmenuje Josef.". Zcela analogickou úvahu provedeme ještě o jménu František: K předpokladům (1)–(7) přidáme předpoklad „Není pravda, že violoncellista se nejmenuje František." a užitím pravidla, že dvojitou negaci můžeme vynechat, a důkazu sporem dokážeme, že violoncellista se nejmenuje František — v důsledku podmínek (4) a (6). Navíc tatáž pravidla spolu s podmínkou (1) vyloučí, aby se jmenoval Pavel. Dokázali jsme, že violoncellista se jmenuje Antonín, protože pro něho jiné jméno nezbývá.

Velice podobné úvahu použijeme ke zjištění jména violisty: Nejprve — užívajíce pravidlo, že dvojitou negaci lze vynechat — ukážeme, že podmínky (1)–(7) spolu s předpokladem „Není pravda, že violista se nejmenuje Pavel" vytvářejí sporný systém předpokladů, z čehož vyvodíme, že violista se nejmenuje Pavel — v důsledku (1). K vyloučení možnosti, že violista se jmenuje Josef použijeme podmínky (2) a (3), předpoklad „Není pravda, že violista se nejmenuje Josef" a opět pravidlo „dvojitou negaci lze vynechat" a důkaz sporem. Navíc se violista nemůže jmenovat ani Antonín, protože to je jméno violoncellistovo (při podrobnějším dokazování nám nezbude než se znovu odvolat na neustále používané principy, že dvojitou negaci lze vynechat, a na důkaz sporem). Pročež violista se jmenuje František a následně Josef hraje na basu (1).

Příklad 12. Neexistuje racionální číslo, jehož druhá mocnina by byla číslo 2.

Pro důkaz sporem předpokládejme, že takové číslo existuje, a představme si ho ve tvaru p/q, kde p a q jsou nesoudělná přirozená čísla (a $q \neq 0$). Pak $p^2/q^2 = (p/q)^2 = 2$, tj. $p^2 = 2q^2$. Číslo p^2 je sudé. Z aritmetiky použijeme, že v takovém případě musí být sudé rovněž samotné číslo p, takže p musí být tvaru$2r$ pro vhodné přirozené číslo r. Uvedené dále zaručí $4r^2 = (2r)^2 = p^2 = 2q^2$, neboli $2r^2 = q^2$. Pročež číslo q^2 a následně také číslo q jsou sudá. Z našeho systému je proto dokazatelný jak výrok „p a q jsou nesoudělná", kterýžto je předpokladem o číslech p, q, tak také výrok „p a q jsou soudělná" (obě jsou dělitelná číslem 2), tzn. systém předpokladů s jediným předpokladem „Existuje racionální číslo, jehož druhá mocnina je rovna 2." je sporný. Podle principu „dvojitou negaci lze vynechat" je sporný rovněž systém předpokladů s jediným předpokladem „Není pravda, že neexistuje racionální číslo, jehož druhá mocnina by byla číslo 2." Nyní použijeme princip důkazu sporem a obdržíme dokazatelnost tvrzení „Neexistuje racionální číslo, jehož druhá mocnina by byla číslo 2.".

Příklad 13. Ve výrokovém počtu dokažme formuli $(\mathsf{p} \to \mathsf{q}) \to (\neg\mathsf{q} \to \neg\mathsf{p})$ nazývanou zákonem transpozice.

Formule $(\neg\neg\mathsf{p} \to \neg\neg\mathsf{q}) \to (\neg\mathsf{q} \to \neg\mathsf{p})$ je případem axiomu **VP3** (vzniklým nahrazením $\mathcal{P}$ formulí $\neg\mathsf{p}$ a nahrazením $\mathcal{Q}$ formulí $\neg\mathsf{q}$). Takže uvedená formule je dokazatelná ve výrokovém počtu.

Přijměme předpoklad $\mathsf{p} \to \mathsf{q}$. Podle výsledku příkladu 11 víme, že formule $\neg\neg\mathsf{p} \to \mathsf{p}$ je dokazatelná. Užijeme-li náš předpoklad a tranzitivitu implikace, získáme dokazatelnost $\neg\neg p \to q$ z našeho předpokladu. Naprosto analogicky uvážíme-li dokazatelnost formule $q \to \neg\neg q$ (úloha 26 a důkaz nahrazením) a předchozí dokazatelnost, získáme z našeho předpokladu pomocí tranzitivity implikace formuli $\neg\neg p \to \neg\neg q$. Prokázali jsme dokazatelnost $p \to q \vdash \neg\neg p \to \neg\neg q$, takže při užití důkazu dedukcí získáme $\vdash (p \to q) \to (\neg\neg p \to \neg\neg q)$.

Pokud aplikujeme tranzitivitu implikace na výsledky předchozích dvou odstavců, nahlédneme požadovanou dokazatelnost implikace $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$ ve výrokovém počtu.

V předchozím příkladu jsme nahlédli dokazatelnost zákona transpozice, tj. formule $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$ ve výrokovém počtu. Obrácení zákona transpozice, tzn. formuli $(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$ jsme přijali dokonce jako axiom **VP3.** Již jsme zmínili, že správnost obou těchto formulí uvádí již Aristotelés v [A2]; dodejme však nyní, že tamtéž také zdůrazňuje *nesprávnost* implikace $(p \to q) \to (\neg p \to \neg q)$ (viz úlohu 14).

Ve vyvození z příkladu 13 byl nejrozsáhlejší prostřední odstavec, který ukazoval, že z předpokladu $p \to q$ je dokazatelná formule $\neg\neg p \to \neg\neg q$. Přitom principy „dvojitou negaci lze vynechat“ a „dvojitou negaci lze přidat“ spolu dohromady vyjadřují, že formule p je „stejně silná“ jako formule $\neg\neg p$. Pokud bychom věděli, že „stejně silné“ formule můžeme libovolně zaměňovat (což je intuitivně zcela přirozené), aplikovali bychom tento princip a nemuseli bychom užít úvah uvedených v citovaném odstavci. Dokazovací princip tohoto druhu bude vysloven v příštím paragrafu pod názvem „důkaz ekvivalencí“. Uvědomme si, že nahrazovaná část formule může být „zabudovaná hluboko“ v uvažované formuli. Naše úvahy v odstavci, na který se neustále odoláváme, byly možné jen proto, že nahrazovaná formule byla v prvém případě prostě antecedentem (závěrečné) implikace a v druhém případě konsekventem (závěrečné) implikace. Avšak princip, který hodláme vyslovit v následujícím paragrafu, umožní dokonce nahrazení „libovolně hluboko“ ve formuli.

Z implikace $p \to q$ jsme vyvodili implikaci $\neg q \to \neg p$. Takže z implikace $p \to q$ a $\neg q$ vyvodíme[34] $\neg p$ (užitím modus ponens na formuli $\neg q \to \neg p$).

Naproti tomu při pravdivé implikaci $p \to q$ a pravdivé formuli $\neg p$ může být q pravdivé i nepravdivé a zcela analogicky při pravdivé implikaci $p \to q$ a pravdivé formuli q může být p pravdivé i nepravdivé (ověřte si v tabulce 2). Abychom si tato fakta lépe zapamatovali, shrneme je do čtyř tvrzení:

Z implikace $p \to q$ a z formule p můžeme vyvodit formuli q (modus ponens);
Z implikace $p \to q$ a z formule $\neg p$ nemůžeme vyvodit ani formuli q ani formuli $\neg q$;
Z implikace $p \to q$ a z formule q nemůžeme vyvodit ani formuli p ani formuli $\neg p$;
Z implikace $p \to q$ a z formule $\neg q$ můžeme vyvodit formuli $\neg p$ (modus tollens).

*

[34] Toto odvozovací pravidlo se nazývá **modus tollens**.

V tomto paragrafu již zbývá uvést jediné dodatečné odvozovací pravidlo.

Důkaz neutrální formulí. Jestliže z předpokladu $\mathcal{T}, \mathcal{A}$ dokážeme formuli $\mathcal{B}$ a současně z předpokladu $\mathcal{T}, \neg\mathcal{A}$ dokážeme tutéž formuli $\mathcal{B}$, je formule $\mathcal{B}$ dokazatelná už ze systému předpokladů $\mathcal{T}$ samotného.

Příklad 14. Ukažme, že pokud alespoň jedno z přirozených čísel n a $n+1$ je sudé, je sudé alespoň jedno z čísel $n+1, n+2$. (Následně indukcí lze dokázat, že pro libovolné přirozené číslo n je alespoň jedno z čísel $n, n+1$ sudé.)

Jestliže n je sudé, tj. je tvaru $2k$ pro nějaké přirozené číslo k, je rovněž číslo $n+2 = 2k+2 = 2(k+1)$ sudé (z aritmetiky používáme zákon distributivity) a toto číslo se ve dvojici $n+1, n+2$ vyskytuje.

Není-li n sudé (tzn. je-li liché), musí být podle předpokladu sudé číslo $n+1$, které se ve dvojici $n+1$, $n+2$ vyskytuje.

Na závěr použijeme důkaz neutrální formulí, přičemž úlohu formule $\mathcal{A}$ z formulace tohoto principu hraje výrok „Přirozené číslo n je sudé.“.

CVIČENÍ

I-1.1 Žalobce prohlásil: „Pokud je obžalovaný vinen, pak měl společníka.“ Obhájce protestuje, že to není pravda. Pomohl obhájce obžalovanému při prokazování jeho neviny?

I-1.2 Jsou zápisy (a) $(\neg\neg(p \to q) \to \neg(q \to p))$; (b) $)q \to p($; (c) $((p \to q) \to q \to (\neg\neg p \to \neg q))$; (d) $(p \neg \to q)$; (e) $p(\to)q$ formulemi?

I-1.3 Ukažte, že (a) $(p \to q) \to (p \to \neg q)$; (b) $(\neg p \to q) \to (\neg q \to p)$; (c) $\neg(p \to q) \to p$; (d) $\neg(p \to q) \to q$ jsou formule výrokového počtu. Sestrojte tabulky pravdivostních hodnot těchto formulí. Je některá z nich tautologií?

I-1.4 Prokažte, že formule $(p \to q) \to [(q \to r) \to r]$ není tautologií. Srovnejte intuitivní význam této formule a tranzitivity implikace.

I-1.5 Porcie s Bassaniem žili spokojeně a když jejich dcera dorostla, usoudila Porcie, že zkouška jejího otce vůbec nebyla špatná, a proto připravila pro svou dceru znovu tři skřínky. Dcera každému nápadníkovi prozradila, že na žádné skřínce není více než jeden nepravdivý nápis.

zlatá	stříbrná	olověná
Podobizna je ve stříbrné skřínce.	Podobizna není v této skřínce.	Podobizna není v této skřínce.
Portrétista je z Benátek.	Podobizna je ve zlaté skřínce.	Portrétista je z Florencie.

Jak budete volit?

I-1.6 Protože však Porciina dcera chtěla mít co největší jistotu o inteligenci nápadníka, připravila sama také tři skřínky a nápadníka, který vyřešil matčin úkol, zavedla ještě ke svým třem skřínkám a nyní mu oznámila, že na jedné skřínce jsou oba nápisy pravdivé, na druhé oba nepravdivé a na poslední jeden pravdivý a druhý nepravdivý.

zlatá	stříbrná	olověná
Podobizna není ve stříbrné skřínce.	Podobizna není v této skřínce.	Podobizna je v této skřínce.
Podobizna je v olověné skřínce.	Podobizna je ve zlaté skřínce.	Podobizna je ve stříbrné skřínce.

Kterou skřínku vyberete teď?

I-1.7 Porciina dcera zvažovala také úlohu s téměř stejnými nápisy jako v předchozí zkoušce

zlatá	stříbrná	olověná
Podobizna není ve stříbrné skřínce.	Podobizna není v této skřínce.	Podobizna není v této skřínce.
Podobizna je v olověné skřínce.	Podobizna je ve zlaté skřínce.	Podobizna je ve stříbrné skřínce.

a se zadáním, že na jediné skřínce jsou oba nápisy nepravdivé. Jak byste řešili tuto úlohu?

V následujících čtyřech cvičeních je každý z bratří buďto notorický lhář nebo vždy mluví pravdu.

I-1.8 Jednoho ze tří bratří se zeptáte „Kolik je mezi vámi pravdomluvných?“ Odpovědi nerozumíte, ptáte se proto druhého, co říkal bratr. Druhý odpoví: „Bratr říkal, že je mezi námi jediný pravdomluvný.“ Avšak třetí bratr tvrdí: Nevěřte druhému, ten lže. Kdo jsou druzí dva bratři?

I-1.9 První ze tří bratří řekne: „Všichni jsme lháři.“ a druhý odporuje: „Právě jeden z nás je pravdomluvný.“. Kdo jsou tito bratři? Umíte určit, kdo budou bratři, jestliže v odpovědi druhého nahradíme slovo „pravdomluvný“ slovem „lhář“?

I-1.10 Zeptáte se jednoho ze dvou bratří: „Je mezi vámi pravdomluvný?“ On odpoví, vy rozumíte a hned znáte správnou odpověď na svou otázku. Kdo jsou tito dva bratři? — Úloha má opravdu jednoznačné řešení. — Návod: klíčem jsou slova „hned znáte správnou odpověď“.

I-1.11 Jedinou otázkou (na kterou je odpověď ano–ne) položenou jednomu ze dvou bratří máte zjistit zda druhý bratr je pravdomluvný.

I v následujících čtyřech cvičeních jeden každý bratr buďto vždy mluví pravdu, nebo vždy pravdu nemluví. V těchto cvičeních se jedná o tvrzení vzniklá implikací a většina z nich je převzata z knihy [Sm].

I-1.12 Jeden ze dvou bratrů prohlásí: „Jsem-li pravdomluvný, je pravdomluvný i můj bratr.“. Kdo jsou tito bratři?

I-1.13 První z bratří řekne: „Jsem-li pravdomluvný, dva a dva jsou ... “. Poslednímu slovu bohužel nebylo rozumět; uměl byste ho doplnit a rozhodnout zda mluvící je pravdomluvný, nebo lhář? Druhý naopak vyhlásí „Jestliže jsem lhář, „dva a dva jsou ... ““. Poslední slovo jste zase nezachytil, avšak váš společník tvrdí, že to bylo buďto tři nebo čtyři. Umíte určit, které z těch dvou slov to bylo a zda druhý bratr je pravdomluvný, nebo lhář? Teprve třetí bratr mluvil zřetelně a uvedl dokonce dvě tvrzení: „Je mi 18 let.“ „Je-li mi 18 let, chodím do gymnázia.“ Jste schopen vyvodit jestli je třetí bratr pravdomluvný, nebo lhář?

I-1.14 Jeden ze dvou bratrů pronese: „Je-li můj bratr pravdomluvný, jsem lhář.“ Kdo jsou tito bratři?

I-1.15 První ze tří bratří prohlásí: „Druhý bratr je pravdomluvný.“ a druhý dodá: „Pokud je první bratr pravdomluvný, je pravdomluvný i třetí.“ Kdo jsou tito bratři?

I-1.16 Do zoo ve Dvoře Králové, Olomouci, Brně a Praze přijíždějí čtyři zvířata (žirafa, zebra, antilopa a velbloud). Víme:

(1) Nemíří-li velbloud do Olomouce, bude antilopa ubytována v Brně.
(2) Jede-li velbloud do Olomouce, směřuje žirafa do Prahy.
(3) Antilopa nejede do Brna.

Popište budoucí rozmístění zvířat do jednotlivých zoo.

I-1.17 Při zachování jak zadání, tak také formulace úkolu z předchozího cvičení změňme informace následovně:

(1) Nemíří-li velbloud do Prahy, nejede zebra do Brna.
(2) Nejede-li velbloud do Brna, jede antilopa do Prahy.
(3) Zebra nejede do Dvora Králové.
(4) Pokud nechystají ubytování antilopě v Praze, očekávají tam žirafu.
(5) Pokud jede zebra do Olomouce, má velbloud namířeno do Dvora Králové.

Čtyři party nestejně velkých kamarádů v následujících cvičeních jsou různé, avšak vždy je tvoří chlapci stejných křestních jmen (Petr, Tomáš a Jan) a stejných příjmení (Červený, Modrý a Bílý) a na výlety každý z nich nosí jednu z tábornických potřeb (sekerku, kotlík a stan). Poslední parta musí druhy svých výletů měnit, aby vyhověla tužbám jednotlivých kamarádů; jeden z nich je totiž vodák, druhý horolezec a třetí cyklista.

I-1.18 Údaje o první partě jsou velice jednoduché:

(1) Jan se nejmenuje Bílý.

(2) Červený nenosí stan.
(3) Modrý nosí kotlík.
(4) Petr nosí sekerku.

Jak se jmenuje celým jménem ten, kdo nosí stan?

I-1.19 O druhé partě jsme získali informace:

(1) Jan se jmenuje Bílý.
(2) Petr nosí stan.
(3) Bílý nenosí sekerku.
(4) Modrý nosí kotlík.

Umíte určit, jak se jmenuje celým jménem ten, kdo nosí sekerku?

I-1.20 O kamarádech ze třetí party víme:

(1) Tomáš je větší než ten, který nosí sekerku.
(2) Petr je menší než Červený.
(3) Modrý je větší než ten, co nosí stan.
(4) Jan není ani nejmenší ani největší.

Otázky: a) Jak velký je Bílý vzhledem k ostatním kamarádům?
b) Můžete určit, jak je velký nositel kotlíku?
c) Můžete zjistit poměrnou velikost nositele sekerky?

I-1.21 K podmínkám z předchozího cvičení přidejte podmínku

(5) Petr nenosí stan.

a za takto změněných podmínek zodpovězte znovu otázky b) a c) z předchozího cvičení.

I-1.22 O poslední partě jsme se dověděli:

(1) Vodák je větší než Bílý.
(2) Petr je menší než ten, který nosí stan.
(3) Tomáš není horolezcem.
(4) Červený je větší než Modrý.
(5) Bílý nenosí sekerku.
(6) Tomáš je menší než Bílý.

Určete celá jména jednotlivých kamarádů, jejich oblíbené činnosti, poměrnou velikost a tábornické potřeby, které nosí.

V následujících třech cvičeních se jedná o tři trojice různě starých studentek stejných jmen (Jana, Eva a Marie), z nichž má každá ráda jiný předmět (matematiku, angličtinu a dějepis) a má jinou barvu vlasů (černou, hnědou a světlou).

I-1.23 O první trojici studentek jsme se dověděli:

(1) Eva nemá černé vlasy.
(2) Má-li Jana ráda dějepis, preferuje černovláska angličtinu.
(3) Nemá-li milovnice matematiky černé vlasy, má Marie vlasy hnědé.

(4) Jana nemiluje angličtinu.

Umíte určit oblíbené předměty a barvy vlasů Evy a Jany?

I-1.24 O druhé trojici studentek víme:

(1) Marie nemá ráda slunečnice.
(2) Jestliže má Marie ráda dějepis, je černovlasá.
(3) Matematiku i slunečnice miluje jedna a táž studentka.
(4) Má-li Jana v lásce dějepis, je oblíbeným předmětem Marie matematika.
(5) Nemiluje-li jedna studentka angličtinu i růže, má ráda matematička kopretiny.
(6) Nemá-li černovláska ráda růže, nemá milovnice slunečnic hnědé vlasy.
(7) Jana nemá v oblibě matematiku.

Uveďte oblíbené předměty a květiny, barvy vlasů jednotlivých dívek.

I-1.25 Můžete zjistit na základě informací

(1) Je-li oblíbeným předmětem černovlásky dějepis, jmenuje se Marie.
(2) Jana nemá světlé vlasy.
(3) Milovnice dějepisu je mladší než obdivovatelka matematiky.
(4) Světlovláska je starší než milovnice růží.
(5) Eva neobdivuje kopretiny.
(6) Matematička není ani nejmladší ani nejstarší
(7) Dává-li světlovláska přednost angličtině, miluje černovláska slunečnice.
(8) Milovnice růží nemá hnědé vlasy.

oblíbené předměty a květiny, barvy vlasů a pořadí narození jednotlivých dívek?

V každém z následujících třech cvičení se jedná o jinou skupinu milovníků umění, avšak vždy se jmenují Josef, Antonín, František a Pavel, hrají na různé nástroje (housle, violu, violoncello a basu), přou se o své oblíbené autory (Čapka, Haška, Kunderu a Seiferta) i o oblíbené impresionistické malíře (van Gogha, Gauguina, Moneta a Cézanna) a dokonce každý z nich má i svůj nejoblíbenější stavební sloh (románský, gotický, renesanční a barokní).

I-1.26 První skupina milovníků umění se postavila při hře do kruhu. Kromě informací o nástroji a oblíbeném spisovateli toho kterého milovníka umění nyní známe i některé údaje o prostorovém rozmístění:

(1) František je obdivovatelem Čapka.
(2) Violista preferuje Haška
(3) Josef nemá rád Kunderu.
(4) Pavel nehraje na basu.
(5) Vedle sebe jsou: (a) František a houslista,
(b) basista a milovník Čapka,
(c) Antonín a obdivovatel Kundery,

Na který nástroj hraje Pavel a kdo je jeho oblíbený spisovatel? Jsou vlastnosti milovníků umění zadány našimi podmínkami jednoznačně?

I-1.27 Poznatky získané o druhé skupině milovníků umění:

(1) Houslista má rád Kunderu.
(2) František nehraje na basu.
(3) Milovník Gauguina miluje i románský sloh.
(4) Haška i Moneta obdivuje táž osoba.
(5) Milovník Cézanna nemá rád Kunderu
(6) Antonín má nejraději baroko.
(7) Pavel miluje Seifertovy verše.
(8) František obdivuje Cézanova zátiší.
(9) Violista má rád van Gogha.
(10) Milovník gotiky není příznivcem Cézanna.

Na který nástroj hraje Antonín a kterého spisovatele, impresionistu a sloh má nejraději?

I-1.28 O třetí skupině milovníků umění, kteří hráli v řadě, jsme se dověděli:

(1) Antonín hraje na basu.
(2) Pavel nehraje na violu.
(3) Čapka i gotiku má rád týž hudebník.
(4) Moneta a baroko nemá rád týž hudebník.
(5) Houslista nemiluje renesanci.
(6) Violoncellista dává přednost Seifertovi.
(7) Milovník Čapka stojí vlevo hned vedle milovníka van Gogha.
(8) Hudebník zanícený pro renesanci stojí vlevo od milovníka baroka.
(9) Houslista stojí vlevo hned vedle obdivovatele Cézana.
(10) Obdivovatel Moneta stojí vpravo hned vedle čtenáře Haška.
(11) Violista stojí vpravo od Josefa.
(12) Milovník Kundery nestojí nejvíce vlevo.

Určete na který nástroj hraje a kterému spisovateli, slohu a impresionistovi dává přednost ten který milovník umění. Změní se řešení, jestliže přidáme do osmé nebo jedenácté podmínky slovo „hned“?

Patří k nejobtížnějším v tomto paragrafu, proto uvedeme návod možného začátku řešení. — Potřebujete ho však nezbytně? — Opravdu? — Návrh jak určit nástroje jednotlivých hudebníků: Poměrně jednoduše zjistíte, na který nástroj hraje František, a kterého spisovatele má nejraději houslista. To vám umožní zjistit, kterého spisovatele obdivuje hudebník stojící nejvíce vpravo, a následně jméno houslistovo.

I-1.29 Ve výrokovém počtu dokažte formuli $[\mathsf{p} \to (\mathsf{q} \to \mathsf{r})] \to [\mathsf{q} \to (\mathsf{p} \to \mathsf{r})]$ zachycující jistou komutativitu svázanou s implikací (tj. možnost zaměnit pořadí výrokových proměnných p a q); implikace sama komutativní pochopitelně není (význam implikace se může lišit od významu jejího obrácení).

I-1.30 Vyvoďte formuli $p \to (\neg p \to q)$ ze zákona Dunse Scota. Návod: použijte důkaz nahrazením, výsledek úlohy 26 a tranzitivitu implikace.

I-1.31 Ve výrokovém počtu dokažte formuli $(q \to r) \to \big((\neg p \to r) \to [(p \to q) \to r]\big)$. Návod: uvažte jednak systém předpokladů $(q \to r), (\neg p \to r), (p \to q), p$ a jednak systém $(q \to r), (\neg p \to r), (p \to q), \neg p$. Použijte důkaz neutrální formulí a na závěr důkaz dedukcí.

I-1.32 Důkaz dedukcí je jakousi implikací zaručující, že z dokazatelnosti $\mathfrak{T}, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$ plyne $\mathfrak{T} \vdash \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Je možno tuto implikaci obrátit, tj. prokázat, že z dokazatelnosti $\mathfrak{T} \vdash \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ plyne $\mathfrak{T}, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$?

I-1.33 Také důkaz sporem je jakousi implikací: ze spornosti systému předpokladů $\mathfrak{T}, \neg\mathcal{A}$ vyvozujeme dokazatelnost formule $\mathcal{A}$ ze systému předpokladů $\mathfrak{T}$. Znovu má smysl se ptát, zda tuto implikaci můžeme obrátit: můžeme z dokazatelnosti formule $\mathcal{A}$ ze systému předpokladů $\mathfrak{T}$ vyvodit spornost systému předpokladů $\mathfrak{T}, \neg\mathcal{A}$?

V následujících třech úlohách jsou obyvatelé pěti domů různých barev (bílý, žlutý, červený, modrý a zelený) různých národností (Angličan, Švéd, Nor, Dán a Němec), chovají různá zvířata (psa, kočku, koně, ptáka a zebru) a mají jak různé oblíbené nápoje (čaj, kávu, mléko, pivo a minerálku), tak také různé oblíbené sporty (fotbal, volejbal, šachy, plavání a tenis).

I-1.34 Domy jsou uspořádány v řadě a o jejich obyvatelích jsme se dověděli:

(1) Vlevo hned vedle Nora žije pes.
(2) Dán bydlí vpravo hned vedle bílého domu.
(3) Pták je chován vlevo ob jeden dům od koně.
(4) Zebra žije vpravo ob jeden dům od červeného.
(5) Angličan má žlutý dům.
(6) Prostřední dům je zelený.
(7) Němec nebydlí v bílém domě.
(8) Kočka patří do červeného domu.

Jaké zvíře chová Nor?

I-1.35 O obyvatelích našich pěti domů teď víme (v této úloze nezáleží na prostorovém rozložení domů):

(1) Angličan žije v zeleném domě.
(2) Pes nepatří do bílého domu.
(3) Obyvatel modrého domu je fotbalista.
(4) Šachista pije nejraději kávu.
(5) Obyvatel červeného domu preferuje pivo.
(6) Obyvatel červeného domu nechová ptáka.
(7) Tenista nechová psa.
(8) Švéd chová psa.
(9) Nor pije nejraději mléko.
(10) Volejbalista chová ptáka.
(11) Dán je plavec.
(12) Nor chová zebru.
(13) Dán nemiluje pivo.
(14) Obyvatel zeleného domu odmítá čaj.

První otázka zní: Kdo nejraději pije minerálku a jaké má další vlastnosti? Je-li více možností, uveďte všechny.
Vaším druhým úkolem je zjistit, kdo chová koně a jaké má další vlastnosti. Je-li více možností, uveďte všechny.

I-1.36 Závěrečné cvičení je variantou hádanky někdy označované jako „Einsteinův kvíz“. Nyní kromě následujících informací navíc víme, že domy jsou uspořádány v řadě:

(1) Angličan žije v červeném domě.
(2) Zelený dům stojí ihned nalevo od bílého.
(3) Obyvatel zeleného domu preferuje kávu.
(4) Fotbalista žije ve žlutém domě.
(5) Obyvatel prostředního domu pije mléko.
(6) Šachista žije vedle chovatele kočky.
(7) Nor bydlí vedle modrého domu.
(8) Švéd chová psa.
(9) Dán pije nejraději čaj.
(10) Plavec má nejraději pivo.
(11) Volejbalista chová ptáka.
(12) Nor bydlí v domě nejvíce vlevo.
(13) Chovatel koně bydlí vedle fotbalisty.
(14) Němec hraje tenis.

Odpovězte na otázku: „Kdo chová zebru?“.

Poznamenejme, že běžně se tato úloha zadává ještě s podmínkou „Soused šachisty pije nejraději minerálku.“, která je však nadbytečná. Pokud byste měli obtíže při řešení, použijte tuto informaci.