§2

VĚTY O NEÚPLNOSTI

V první kapitole jsme se zabývali otázkou, zda může stroj nahradit matematika při dokazování ve výrokovém počtu — podrobněji řečeno: jestli *člověk* může napsat program, *na jehož základě* následně bude *stroj* schopen zastoupit matematika při rozhodování o dokazatelnosti formulí výrokového počtu. Na základě věty o úplnosti výrokového počtu jsme tuto otázku zodpověděli kladně, naznačili jsme algoritmus, který o každé konkrétní formuli výrokového počtu umožní rozhodnout, zda je, či není dokazatelná ve výrokovém počtu[1)]. Pro případ predikátového počtu jsme ve druhé kapitole pouze ukázali důvod, proč kladná odpověď na položenou otázku není důsledkem úplnosti predikátového počtu. Vraťme se tudíž k tomuto problému a zabývejme se jím podrobněji.

Zkoumejme nejprve, zda stroj umí rozhodnout, je-li předložená konečná posloupnost formulí predikátového počtu důkazem v určité teorii. Podle definice důkazu z §2 předchozí kapitoly k prokázání, že se jedná o důkaz v teorii $\boldsymbol{T}$, stačí krok za krokem ověřit, že každá formule v důkazu je axiomem predikátového počtu nebo uvažované teorie $\boldsymbol{T}$ nebo vznikla podle některého z odvozovacích pravidel aplikovaného na formule, které se vyskytují v posloupnosti dříve. Takže k řešení úlohy, jestli se jedná důkaz v teorii $\boldsymbol{T}$, postačí konečněkrát rozhodovat tři typy „jednodušších“ úloh — potřebujeme umět rozhodnout, je-li zadaná formule axiomem predikátového počtu, je-li ji možno vyvodit z nějakého konečného počtu formulí podle některého z odvozovacích pravidel a je-li axiomem teorie $\boldsymbol{T}$.

V tomto okamžiku snad zcela jasně vynikne, proč jsme při formulaci vyvozovacích principů tolik dbali o přehlednost a intuitivnost minimální verze. Ke zjištění, jestli zadaná formule je axiomem predikátového počtu, totiž stačí vyšetřovat osm případů, protože v minimální verzi jsme přijali osm typů axiomů predikátového počtu. Například jistě uvěříte, že stroj je schopen provést následující výpočty, aby zjistil zda zadaná formule je typu axiomu **PP1,** tzn. jestli je tvaru $\varphi \to (\psi \to \varphi)$ pro nějaké formule φ, ψ. Nejprve stroj rozhodne, je-li daná formule implikací, pokud není, již automaticky vyhodnotí, že zkoumaná formule není axiomem typu **PP1.** Pak stroj vyšetřuje konsekvent implikace; pokud konsekvent není implikací, opět stroj vyhodnotí, že zkoumaná formule není axiomem typu **PP1.** Pokud konsekvent dané formule je implikací, začne stroj krok za krokem srovnávat znaky v antecedentu zadané formule a v konsekventu jejího konsekventu ve snaze rozhodnout, jsou-li tyto dvě formule totožné. Jestliže

---

[1)] Rozpracováním idejí §1 kap. I jsme dokonce schopni sestrojit algoritmus, jenž ke každé formuli dokazatelné ve výrokovém počtu sestrojí její důkaz. Je tedy vyloučena možnost, že bychom sice věděli, že formule je ve výrokovém počtu dokazatelná, přesto však nebyli schopni nalézt její důkaz.

se formule v některém znaku liší, stroj opětovně vyhodnotí, že daná formule není typu axiomu **PP1.** Antecedent zadané formule je zase formulí, tady konečnou posloupností; v důsledku toho musí stroj po konečné době ukončit své srovnávání a pokud nenalezne žádný rozdíl mezi antecedentem dané formule a konsekventem jejího konsekventu, vyhodnotí, že zadaná formule je typu axiomu **PP1.** Velice podobně lze uvažovat i ve zbývajících sedmi případech. Přesvědčte se o tom na vámi zvoleném typu axiomu predikátového počtu.

Podobně jednoduše může stroj postupovat při vyhodnocování, zda je možno zadanou formuli φ vyvodit např. pomocí modus ponens ze zadaného *konečného* souboru formulí. Pro každou jednotlivou formuli ze zadaného konečného souboru stroj totiž nejprve prozkoumá, je-li implikací, jejíž konsekvent je formulí φ. Pokud u některé formule ze zadaného souboru je odpověď „ano“, prozkoumá stroj ještě antecedent ϑ této formule a porovná ho postupně s formulemi ze zadaného konečného souboru formulí. Nachází-li se antecedent ϑ v souboru, ubezpečí se stroj, že formuli φ lze vyvodit pomocí modus ponens ze zadaného konečného souboru formulí; pokud byla dříve odpověď „ne“ nebo pokud antecedent ϑ není totožný se žádnou formulí ze zadaného souboru, vyhodnotí stroj, že formuli φ není možno vyvodit pomocí modus ponens ze zadaného konečného souboru formulí. Přesvědčte se již sami analogickou úvahou, že stroj je schopen rozhodovat, je-li možno vyvodit danou formuli pomocí generalizace ze zadaného *konečného* souboru formulí.

A teď se dostáváme ke klíčovému místu. Ukázali jsme, že stroj jednoduše vyhodnotí, zda ta která formule v zadané posloupnosti je axiomem logiky nebo zda je ji možno vyvodit pomocí některého odvozovacího pravidla z *konečného* systému formulí, které vyšetřovanou formuli předcházejí v zadané posloupnosti. Takže stroj je schopen vyhodnotit, zda zadaná posloupnost formulí je důkazem v nějaké teorii $\boldsymbol{T}$, přesně tehdy, když je schopen o libovolné formuli rozhodnout jestli je, či není axiomem teorie $\boldsymbol{T}$. Jinými slovy schopnost stroje vyhodnotit, je-li posloupnost důkazem v teorii $\boldsymbol{T}$, závisí na tom, zda existuje algoritmus, který umožní stroji rozhodnout o libovolné formuli, jestli je axiomem teorie $\boldsymbol{T}$. Teorie $\boldsymbol{T}$, pro kterou takový algoritmus existuje, se nazývá **rekurzivní**. Užívajíce tuto terminologii konstatujme, že stroj umí rozhodnout o každé posloupnosti formulí, zda je, či není důkazem v teorii $\boldsymbol{T}$, právě když teorie $\boldsymbol{T}$ je rekurzivní.

Všechny běžně užívané matematické teorie jsou rekurzivní. Při seznámení s pojmem teorie jsme v §2 předchozí kapitoly uvedli, že tvůrčí práci teoretického matematika můžeme popsat jako hledání dokazatelných tvrzení v matematických teoriích. Kdyby se matematik zabýval teorií, která není rekurzivní, nemohl by nikdo rozhodnout ve všech případech, jestli jeho důkaz je, či není v pořádku, a v důsledku toho by si nikdo jeho práce příliš necenil. Matematické teorie mívají konečně mnoho axiomů (příkladem je Robinsonova aritmetika), nebo maximálně mají konečně mnoho jednotlivých axiomů a konečně mnoho schémat (např. Peanova aritmetika má konečně mnoho axiomů a jediné schéma, totiž indukci); teorie s takto popsaným systémem axiomů jsou rekurzivní.

*

V předchozí části jsme poznali jednu z podstatných (a žádoucích) vlastností teorií. Shrňme a motivujme ještě dvě jiné (opět vítané) vlastnosti teorií.

Jedním z prvořadých požadavků na teorii je požadavek **bezespornosti** teorie formulovaný v předchozí kapitole, jenž je analogický bezespornosti ve výrokovém počtu a znamená, že v takovéto teorii nesmíme být schopni dokázat „cokoli“ (tzn. i jakýkoli nesmysl). Jestliže o nějaké teorii ukážeme, že je sporná, může to být velice zajímavý a překvapující výsledek, ale určitě má za následek, že již v takovéto teorii nebudeme dále pracovat — nemá přece cenu dokazovat speciální větu, když již víme, že lze dokázat jakékoli tvrzení formulovatelné ve zkoumané teorii. Nechceme tedy být schopni dokázat v teorii „cokoli“, ale naproti tomu v převážné většině případů matematik volí teorii, která je dost „silná“, aby v ní bylo možno dokázat netriviální věty.

Aby matematická teorie popisovala jistou oblast ideálním způsobem, museli bychom být schopni každé tvrzení, které v uvedené oblasti platí, dokázat z axiomů této teorie. Běžnou představou je dále, že jakékoli tvrzení buďto platí, nebo platí jeho negace (srovnej pojem výroku z první kapitoly a také zákon vyloučeného třetího). Pročež představa ideálního popisu vymezené oblasti nějakou teorií vede k požadavku, aby v příslušné teorii jakákoli uzavřená[2)] formule byla buďto dokazatelná, nebo vyvratitelná, a tato představa je matematizována pojmem **úplné** teorie. Matematičtěji: *bezespornou* teorii $\boldsymbol{T}$ nazýváme úplnou, jestliže pro každou uzavřenou formuli φ jejího jazyka je buďto $\boldsymbol{T} \vdash \varphi$, nebo $\boldsymbol{T} \vdash \neg\varphi$. (Požadavek bezespornosti zabezpečuje, že nemůže být současně $\boldsymbol{T} \vdash \varphi$ a $\boldsymbol{T} \vdash \neg\varphi$.)

Ve svých přednáškách z let 1921–22 formuloval David Hilbert myšlenky, které bývají nazývány Hilbertovým programem[3)]. Hilbertův program můžeme v dnešní terminologii chápat jako hledání rekurzivních a úplných[4)] teorií (v té době se předpokládalo, že se podaří tyto vlastnosti prokázat téměř pro všechny matematické

2) Jen *uzavřené* formule jsou výroky.

3) Citovat lze zejména práci [Hi2], kde D. Hilbert mimo jiné formuluje axiomy a odvozovací pravidla. Dle mého názoru je však možno vysledovat základní myšlenky Hilbertova programu již v práci [Hi1].

4) D. Hilbert píše v práci [Hi1] (druhý problém): „Jestliže se zabýváme zkoumáním základů nějaké vědy, musíme sestavit systém axiomů, který obsahuje přesný a *úplný* popis vztahů mezi základními pojmy této vědy. Axiomy takto stanovené jsou současně definicemi těchto základních pojmů; žádné tvrzení uvnitř oblasti té vědy, jejíž základy zkoumáme, není považováno za správné, *pokud nemůže být odvozeno z oněch axiomů konečně mnoha logickými kroky*“.
Při matematizaci pojmu úplné teorie připouštíme jakožto úplné teorie pouze teorie bezesporné. Z rozsáhlého Hilbertova programu je možno zdůrazňovat různé aspekty; například v [D-M] 4.2 jsou citovány stejné aspekty jako výše, v knize [Šv] 4.5.5 je zdůrazňována snaha o vnitřní prokázání konzistence (viz druhou větu o neúplnosti).

teorie anebo alespoň se zdaří matematické teorie zesílit do teorií s uvedenými vlastnostmi).

Jednou z nejdůležitějších matematických teorií je aritmetika[5]. V předchozím paragrafu jsme uvedli dvě její možné axiomatizace a nahlédli jsme snad dost důkladně, že je mnoho formulí, které nejsou dokazatelné ve slabší Robinsonově aritmetice a jsou dokazatelné v Peanově aritmetice. Podobně se situace opakuje i pro Peanovu aritmetiku, zase nějaká formule nemusí být v ní dokazatelná, ale v nějaké vhodné silnější *bezesporné* teorii již dokazatelná je. Takováto „vhodná silnější bezesporná teorie“ může být teorie přidávající nějaký intuitivní princip (tak jako dodatečným principem zesilujícím Robinsonovu aritmetiku byla indukce) nebo prostě přidávající přímo tu formuli, kterou jsme sice nebyli schopni dokázat, kterou však pokládáme intuitivně za správnou. Jsme tedy ochotni postupně Peanovu aritmetiku zesilovat přidáváním vhodných dodatečných axiomů. Problém spočívá v otázce, zda takovýmto přidáváním axiomů, či případně celých schémat najednou, můžeme dojít k úplné teorii po *konečném* počtu kroků. Takže vztáhneme-li Hilbertův program na aritmetiku, potřebujeme k uspokojivému řešení nalézt konečně mnoho axiomů nebo schémat tak, abychom jejich přidáním k Peanově aritmetice získali úplnou teorii.

K naplnění Hilbertova programu pro aritmetiku by tedy bylo zapotřebí „jen“ ukázat úplnost Peanovy aritmetiky nebo alespoň nalézt vhodné úplné rekurzivní rozšíření Peanovy aritmetiky. V tomto směru dochází koncem dvacátých let minulého století k obrovskému pokroku, zejména když M. Presburger ukazuje (1929), že aritmetika s operacemi sčítání a následovníka a s běžnými axiomy (podrobněji: s axiomy Peanovy aritmetiky, ve kterých se nevyskytuje násobení) je úplná teorie (viz [Pr]; předvedení Presburgerova výsledku lze nalézt také např. v §1 kap. VI [So]; uveďme výslovně, že k systému axiomů Peanovy aritmetiky, ve kterých se nevyskytuje násobení, již není potřeba přidávat dodatečné axiomy, teorie je úplná sama o sobě). Ve své době byl tento výsledek nedoceněn, protože všichni očekávali, že se musí co nejdříve podařit udělat poslední „krůček“ a dokázat analogické tvrzení pro aritmetiku i s operací násobení. Tím větší šok způsobuje matematikům za dva roky slavný Gödelův výsledek o neúplnosti (1931, v původním znění viz [G2]), prokazující, že tento „krůček“ již není možno učinit[6]. Hilbertův program se tedy ukázal jako nerealizovatelný — ale přesto přispěl obrovskou měrou k rozvoji matematické logiky.

---

[5] Aritmetika bývá pokládána za „nejslabší“ teorii nekonečna.

[6] Propastnost rozdílu mezi aritmetikou s následovníkem, součtem a součinem a aritmetikou s pouhým následovníkem a součtem spočívá v tom, že v prvé teorii jsme schopni kódovat konečné posloupnosti a ve druhé nikoli (jakkoli se tento fakt jeví na první pohled maličkostí).

K. Gödel a jeho následovníci ukázali, že *neexistuje vůbec žádné rekurzivní rozšíření Peanovy*[7] *aritmetiky, které by bylo úplné.* Tento výsledek je zvykem nazývat **první větou o neúplnosti** a jinými slovy tvrdí, že je-li teorie $\boldsymbol{T}$ bezesporné a rekurzivní rozšíření Peanovy aritmetiky, pak vždy existuje (v jazyce teorie $\boldsymbol{T}$ formulovatelná) uzavřená formule, která v $\boldsymbol{T}$ není ani dokazatelná ani vyvratitelná.

Před malou chvílí jsme poukázali na potřebnost rekurzivity a rovněž jsme odůvodňovali přirozenost požadavku úplnosti aritmetiky. V obou případech jsme však zkoumali tu kterou vlastnost *samu o sobě.* První věta o neúplnosti ukazuje, že pro rozšíření aritmetiky nemohou platit vlastnosti rekurzivity a úplnosti *najednou*[8]. Při podrobnějším rozboru skutečně musíme přiznat, že předpoklad, že přesně popsané pojetí aritmetiky má obě tyto vlastnosti, je neodůvodněný.

Bylo by obtížné něco namítat proti předpokladu úplnosti aritmetiky *intuitivních přirozených čísel*, neboli teorie axiomatizované systémem formulí, které jsou pravdivé v přirozeném modelu (neboť v každé struktuře je jakákoli uzavřená formule buď pravdivá, nebo nepravdivá). Avšak na základě nekontrolovaných a hlouběji nezdůvodněných intuitivních představ se s tím nespokojíme, ale navíc předpokládáme, že celý systém takovýchto „správných aritmetických vlastností" jsme *my* schopni poznat naráz. Tato poznatelnost celého systému najednou by pochopitelně znamenala, že jsme schopni celý systém „správných aritmetických vlastností" vydělit, tzn. popsat algoritmem, neboli že systém „správných aritmetických vlastností" je rekurzivní.

Na druhé straně, při pohledu popisujícím práci matematika, musíme vyžadovat současně bezespornost a rekurzivitu *matematické* teorie popisující aritmetiku — opakuji, že bez předpokladu rekurzivity nejsme schopni ověřovat, zda předložená posloupnost formulí je důkazem v uvažované teorii. Avšak i při tomto přístupu nás nepodložené sebevědomí vede k přehnaně optimistickému předpokladu — tentokrát k předpokladu, že takováto teorie je schopna popsat *celou* aritmetiku intuitivních přirozených čísel.

První věta o neúplnosti zaručuje v každé bezesporné rekurzivní teorii, zesilující aritmetiku, existenci formule aritmetiky, která není ani dokazatelná, ani

7) Větu je možno vyslovit podstatně silněji — pro rekurzivní rozšíření Robinsonovy aritmetiky. Později uvedeme druhou větu o neúplnosti, pro ni je již potřeba nějaká forma indukce, ale zdaleka ne tak silná, jako je požadována ve formulaci Peanovy aritmetiky. Tato možná zesílení zcela pomineme v našem textu (je možné je nalézt např. v [So]), protože vyžadují podstatně podrobnější zkoumání a zejména mnohem větší opatrnost a představivost při formulacích.

8) Trochu to připomíná několik desítek let starý vtip: Svatý Václav prosí Boha o nějaký další dar pro Čechy a dostane se mu tří vlastností: čestnosti, inteligence a víry v komunismus. Již spokojen odchází, když slyší Boží příkaz: „Vyminňuji si však, že tyto tři vlastnosti nikdy nesmíš dát jednomu člověku současně.".

vyvratitelná[9]. Jestliže ve snaze po zúplnění přidáme tuto formuli jako dodatečný axiom, opět bude existovat (tentokrát *jiná*) formule, která není ani dokazatelná, ani vyvratitelná v obohacené teorii (protože obohacená teorie by opět byla bezesporná a rekurzivní). První věta o neúplnosti tvrdí, že takovéto postupné zesilování Peanovy aritmetiky nemůže být po konečném počtu kroků ukončeno dosažením úplné teorie.

*

Nástrojem pro prokázání neúplnosti aritmetiky se kupodivu stalo to, co logiky po mnoho století trápilo — logické paradoxy. V naší ne-předmluvě jsme uvedli paradox holiče a paradox Sancho Panzy, avšak logické paradoxy jsou známy už od antiky (a vás, milý čtenáři, připravovaly na úvahy, které budou jádrem tohoto paragrafu, již úlohy o bratřích pravdomluvných a lhářích v první kapitole našeho textu).

Nejznámější je **paradox lháře** (chápaného jako člověka, který nikdy nemluví pravdu) připisovaný[10] Eubúlidu z Mílétu (4. stol. př. Kr.). Paradox je tradován ve dvou verzích: *„V tomto okamžiku lžu."* nebo *„Kréťan Epimenidés řekl, že všichni Kréťané jsou lháři."* — první verze je citována Ciceronem (106–43 př. Kr): „Jestliže po pravdě řekneš, že lžeš, lžeš?"; ozvěnou druhé verze je pravděpodobně i verš 1, 12 listu apoštola Pavla Titovi: „Jeden z nich, jejich vlastní prorok, řekl: ‚Kréťané jsou samí lháři. . . ' ".

Ukažme podrobně, že v první verzi se v každém případě dostaneme do neřešitelných rozporů. Jestliže mluvím pravdu, když říkám „V tomto okamžiku lžu.", pak je pravda, že v tomto okamžiku lžu. Nemohu současně mluvit pravdu i lhát, takže není možné, abych při vyřčení zkoumané věty mluvil pravdu. Pročež nezbývá než, že lžu v okamžiku, když říkám „V tomto okamžiku lžu.". Protože lžu, musí být výrok „V tomto okamžiku lžu." nepravdivý, tedy výrok „V tomto okamžiku mluvím pravdu." je pravdivý. V takovém případě však opět lžu a současně mluvím pravdu, což je vyloučeno. Jak předpoklad, že mluvím pravdu při pronášení vyšetřované věty, tak i předpoklad, že lžu, jsou zcela vyloučeny. Avšak alespoň jedno z toho musí nastat (podle zákona vyloučeného třetího — polopravdy

[9] Pro Peanovu aritmetiku samu zaručuje první věta o neúplnosti sice existenci nedokazatelné a nevyvratitelné formule, ale tato formule je z hlediska aritmetiky dosti umělá. Jsou však známy „přirozené" formule nedokazatelné a nevyvratitelné v Peanově aritmetice. Prokázání nedokazatelnosti jedné takové formule je možno nalézt v dodatku k šesté kapitole [So] popisujícím výsledek [P-K], nedokazatelnost jiné formule viz [P-H].

[10] Připsání se děje podle zprávy Diogéna Laërtia (3.stol. po Kr.). Podobný paradoxu lháře je také stoický paradox krokodýla (připisovaný Chrýsippovi ze Soloi; asi 281–208 př. Kr.), který je obsahem cvičení III-2.2. Do souvislosti s antickými paradoxy se sluší zasadit rovněž známý Sókratův výrok „Vím, že nic nevím.". Řadu dalších paradoxů je možno nalézt v roztomilé knize [Sm1]. Snaha o řešení se výrazně objevuje již v antice, např. Aristotelés uvažuje některé věty jako pravdivé, ale lživé v nějakých aspektech. Filítás z Kou (340–285) se *prý* paradoxem tak zabýval, až „lhář ho zabil".

teď nepřipouštíme). V prvé verzi se tedy dostáváme do neřešitelných rozporů v obou případech zcela stejně, jako se do sporů dostali holič a Sancho Panza v ne-předmluvě.

Uvědomme si naproti tomu, že druhá verze není neřešitelným paradoxem: pokud Epimenidés mluví pravdu, pak každý Kréťan (a tedy i on sám) lže — spor; jestliže však Epimenidés lže, pak neplatí, že všichni Kréťané jsou lháři; za negaci výroku „Všichni Kréťané jsou lháři." však považujeme výrok, že existuje alespoň jeden Kréťan, který mluví pravdu (alespoň někdy), a tedy spor nedostáváme.

Paradox lháře i paradoxy z ne-předmluvy jsou založeny na tom, že výpověď se vztahuje sama na sebe — např. fakt, že lžu, aplikujeme na větu „V tomto okamžiku lžu." a z toho vyvozujeme nepravdivost faktu, že lžu, tj. vyvozujeme, že mluvím pravdu. Analogicky fakt, že mluvím pravdu, aplikujeme na větu „V tomto okamžiku lžu." a z toho vyvozujeme, že lžu. Jinak řečeno: ve výpovědi o pravdivosti výroku „V tomto okamžiku lžu." se vztahuji k významu samotného výroku; a ještě jednou totéž jinými slovy: fakt, že lžu, konfrontuji s obsahem výroku, kterým je oznámení, že lžu.

Z novějších paradoxů uveďme ještě **Berryho paradox**[11]), a to zejména z důvodu, že by vám, milý čtenáři, mohl napomoci k pochopení tvrzení, že v paradoxech se využívá aplikace výroku na sebe sama: Určitě existuje přirozené číslo, které nelze v češtině popsat pomocí méně než třiceti slabik, neboť všech slabik, a tedy i všech jejich (uspořádaných) třicetic je jen konečně mnoho. Naproti tomu popis čísla *Nejmenší přirozené číslo, které nelze popsat pomocí méně než třiceti slabik,* je vyjádřen dokonce méně než dvaceti sedmi slabikami. Číslo, které nemá mít popis uvažovaného tvaru, ho zcela určitě má — spor. V češtině se nadto podstata Berryho paradoxu krásně projevuje již při jeho formulaci, protože na straně jedné je uvažované číslo popsáno 26 slabikami, na druhé straně kdybychom v popisu čísla nahradili slovo „třiceti" slovy „dvaceti sedmi", tak by počet slabik v popisu vzrostl na 28, bylo by třeba tedy slova „dvaceti sedmi" nahradit slovy „dvaceti devíti", ale při tomto popisu počet slabik opět vzroste — na 29.

Ve snaze odstranit paradoxy navrhl Bertrand Russell (1872–1970) rozdělovat usuzování do různých hladin (viz [Ru] a [W-R]), neboť tak se vyloučí vlastnosti, které lze aplikovat na sebe. Popisovat výpovědi z nějaké hladiny a rozhodovat o jejich pravdivosti je totiž v Russellově pojetí povoleno pouze z hladiny „vyšší". Běžně není zapotřebí uvažovat mnoho hladin myšlení, k odstranění paradoxů obvykle vystačíme se dvěma hladinami.

Na hladině „vyšší", kterou nazýváme **metamatematikou,** provádíme intuitivní úvahy a používáme běžného jazyka. Z této hladiny přesně definujeme pojmy „nižší" — matematické — hladiny (hladiny predikátového počtu a matematických teorií), např. syntaktické pojmy jazyka, formule, důkazu a dokazatelnosti a sémantické pojmy modelu, pravdivosti a splnitelnosti. Rozlišování hladin umož-

[11]) Paradox byl publikován v knize [W-R].

ňuje myslet o myšlení, přesněji řečeno usuzovat o *matematicky popsané představě* o usuzování. Podstatné je, že obě hladiny by měly zachycovat náš způsob usuzování, každá ale v jiné podobě: intuitivní usuzování na metamatematické hladině je použito pro zkoumání představy o našem usuzování. Právě *matematicky přesný popis* usuzování na matematické hladině umožňuje formulovat a ukazovat hluboké věty o takto vymezeném usuzování. Těžko bychom mohli takové věty prokazovat o nepřesně vymezeném intuitivním usuzování. Zejména je obtížně představitelné, že by někdo mohl prokázat tvrzení o nemožnosti dokázat určité tvrzení, pokud by neměl podrobnou a přesnou představu o tom, co se důkazem rozumí.

Rozdělení usuzování do dvou hladin zamezuje aplikacím výroků na sebe samé — ve formuli je znemožněno vyjadřovat se například o její pravdivosti, protože zkoumání pravdivosti formule patří do metamatematické hladiny a sama formule náleží do hladiny predikátového počtu. Takže idea rozlišení hladin usuzování odstraňuje paradoxy výše uvedeného typu[12)]. V mnoha případech skutečného života se někdo snaží využít ne dost přesnou formulaci nějakého zákona a získat prospěch činem ležícím na hranici zákona. Je pochopitelně velice obtížné (ve skutečném světě je to často spíše nemožné) nalézt formulaci zákona, která by dopředu zamezovala všem pokusům o jeho obejití. Ukázalo se, že ani rozdělení usuzování do dvou hladin zcela nezamezí uplatnění ideje aplikace vlastnosti na sebe samu — místo aplikace na sebe samu lze vlastnost aplikovat na něco ji samé velmi podobného. Avšak zbytky možnosti aplikovat vlastnost na sebe samu již v žádném případě — naštěstí — nevedly (a pravděpodobně nikdy nepovedou) k paradoxům. Navíc se právě tyto zbytky možnosti aplikovat vlastnost na sebe samu staly klíčem k prokazování vět o neúplnosti a tak zkoumání „na hraně zákona“ nepřineslo zlo, ale matematický objev.

*

[12)] Někteří autoři uvádějí jako příklad paradoxu neodstraněného zákazem aplikovat vlastnost na sebe samu paradox, ve kterém si představíme dvě tabulky — modrou a červenou. Na modré je napsáno „Nápis na červené tabulce je nepravdivý.“ a na červené tabulce je nápis „Nápis na modré je pravdivý.“.
O paradox se jedná zcela evidentně: (a) Je-li nápis na modré tabulce znějící „Nápis na červené tabulce je nepravdivý.“ pravdivý, je pravdivý výrok „Nápis na modré tabulce je nepravdivý.“, což je ve sporu s naším předpokladem, že nápis na modré tabulce je pravdivý. (b) Jestliže nápis na modré tabulce vypovídající „Nápis na červené tabulce je nepravdivý.“ je nepravdivý, musí být pravdivý výrok „Nápis na červené tabulce je pravdivý.“, na červené tabulce však stojí „Nápis na modré tabulce je pravdivý.“ a protože jsme začínali s předpokladem, že nápis na modré tabulce je nepravdivý, dostáváme se opět do sporu.
Žádný ze zápisů se sice nevztahuje na sebe sama, tzn. paradox skutečně není odstraněn zákazem aplikovat vlastnost na sebe samu, avšak přesto Russellovo kriterium tuto dvojici zápisů vylučuje. Kdyby totiž obsah jedné libovolně zvolené tabulky (např. modré) se nacházel na nějaké hladině myšlení, musel by se nápis zbývající tabulky (červené) nacházet na hladině „vyšší“, protože vypovídá o pravdivosti modré tabulky. Ovšem nápis na modré tabulce rovněž pojednává o pravdivosti obsahu zbývající (červené) tabulky a musí se proto nalézat na ještě „vyšší“ hladině, což je absurdní.

Na následujících jednadvaceti stránkách vás, milý čtenáři, čeká to nejtěžší, ale také to nejkrásnější z celého textu. Pokuste se, moc vás prosím, tyto stránky pochopit i za cenu, že některé odstavce (pravděpodobně zejména ty závěrečné) budete muset číst vícekrát. Úvahy, které na počátku třicátých let minulého století zaskočily celý matematický svět, se mi už nepodařilo vyjádřit jednodušeji.

Úkolem následujícího textu není podat přesné prokázání vět o neúplnosti, podrobné zdůvodnění vyžaduje provedení řady netriviálních úvah[13)]. Budeme se však snažit *naznačit* všechny základní ideje plného a přesného prokázání vět o neúplnosti — v tomto ohledu se náš text podstatně liší od běžných popularizací Gödelových výsledků, které se většinou ani nepokusí o přesnější formulaci vět o neúplnosti, o náznaku prokazování ani nemluvě.

Ve snaze text zpřehlednit a vyzvednout jednotlivé ideje rozdělíme náš výklad do několika bodů, z nichž každý vyzdvihuje jednu myšlenku. Rozsah bodů bude zcela rozdílný a závisí také na míře *hloubky popisu* myšlenky, o kterou jde — např. jednou z nejdůležitějších myšlenek je diagonalizace, pátý bod je však poměrně krátký, myšlenku můžeme pouze zformulovat, její podrobnější předvedení naprosto přesahuje možnosti našeho textu. První čtyři body jsou přípravné, podstatu idejí o neúplnosti přináší až poslední čtveřice:

1) kódování posloupností přirozených čísel přirozenými čísly;
2) formalizace metamatematických přirozených čísel;
3) formální logika;
4) aritmetizace logiky;
5) diagonalizace jako zbytek možnosti aplikovat formuli na sebe samu;
6) neúplnost a Gödelova formule;
7) neúplnost a Rosserova formule;
8) nedokazatelnost formální bezespornosti.

1) kódování posloupností přirozených čísel přirozenými čísly

Uvedli jsme, že si klademe za cíl pouze ukázat na milníky v prokazování vět o neúplnosti a naznačit cesty, které vedou k jejich prokázání. Konkrétně nyní budeme jen konstatovat, že je možno najednou přirozenými čísly zakódovat všechny posloupnosti přirozených čísel, které mají konečnou délku, a podrobnější prokazování omezíme jen na ukázání kódování *dvojic* přirozených čísel. Kódování dvojic přirozených čísel bývá totiž prvním postupným cílem pro kódování posloupností konečné délky a již na tomto jednodušším případu jsme si schopni ukázat, jak ke kódování napomůže souhra funkcí sčítání a násobení.

Způsobů kódování dvojic přirozených čísel je pochopitelně mnoho; dále probíraný způsob je volen tak, aby byl poměrně jednoduše vyjádřitelný pomocí „pou-

[13)] Prokázat všechny potřebné kroky, tzn. ukázat, že všechny úvahy v tomto paragrafu jsou korektní, vyžaduje poměrně tvrdou práci a zabralo by řadu hodin vysokoškolské přednášky.

ného“ sčítání a násobení[14].

Dvojici přirozených čísel m, n hodláme kódovat přirozeným číslem

$$\frac{(m+n)\cdot(m+n+1)}{2}+m.$$

Nejprve je však potřeba si uvědomit, že uvedený výraz má smysl, tzn. že číslo $(m+n)\cdot(m+n+1)$ je sudé. Připomeňme proto příklad 14 z prvního paragrafu první kapitoly, ve kterém jsme podali ideu důkazu tvrzení, že pro každé přirozené číslo m' je $m'\cdot(m'+1)$ sudé.

Dvojici čísel z následujícího horního diagramu kóduje to číslo, které je v dolním diagramu na odpovídajícím místě.

		n							
		0	1	2	3	4	...	i	...
m	0	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(0,3)$	$(0,4)$	...	$(0,i)$	...
	1	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	...	$(1,i-1)$	...	
	2	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$	...	$(2,i-2)$	...		
	3	$(3,0)$	$(3,1)$	...	...	...			
	4	$(4,0)$	...	$(i-2,2)$	...				
	...	...	$(i-1,1)$	...					
	i	$(i,0)$	...						
	...	...							

		n							
		0	1	2	3	4	...	i	...
m	0	0	1	3	6	10	...	$\frac{i\cdot(i+1)}{2}$	...
	1	2	4	7	11	...	$\frac{i\cdot(i+1)}{2}+1$	...	
	2	5	8	12	...	$\frac{i\cdot(i+1)}{2}+2$	...		
	3	9	13	...	...	...			
	4	14	...	$\frac{i\cdot(i+1)}{2}+(i-2)$	...				
	...	...	$\frac{i\cdot(i+1)}{2}+(i-1)$	...					
	i	$\frac{i\cdot(i+1)}{2}+i$	...						
	...	...							

V „trojúhelníku“ určeném dvojicemi $(0,0), (i,0)$ a $(0,i)$ se nacházejí právě všechny dvojice přirozených čísel, pro které je $m+n$ menší nejvýše rovno i. Speciálně ta čísla, pro něž je $n+m=i$, jsou přesně na „přeponě“ popsané dvojicemi $(i,0)$ a $(0,i)$. Ukážeme, že dvě různé dvojice m, n a m', n' na této „přeponě“ musí mít různé kódy. Pro získání sporu předpokládejme rovnost

$$\frac{(m+n)\cdot(m+n+1)}{2}+m=\frac{(m'+n')\cdot(m'+n'+1)}{2}+m'$$

[14] Často se navrhuje kódovat dvojici m, n číslem $2^n\cdot 3^m$; bohužel tímto zdánlivě snadným kódováním se problem podstatně nezjednoduší, protože samo zavedení mocnění na základě sčítání a násobení opět vyžaduje rekurzi.

a současně rovnost $m+n=i=m'+n'$. Za našich předpokladů po vynásobení číslem 2 (a při užití distributivity) dostaneme

$$i\cdot(i+1)+2\cdot m=i\cdot(i+1)+2\cdot m',$$

a následně po odečtení čísla $i\cdot(i+1)$ od obou stran rovnosti získáme $2\cdot m=2\cdot m'$. Každý nahlédne, že nyní je vhodné zkrátit číslem 2 obě strany poslední rovnice, protože tak získáme $m=m'$. Následně z rovnosti $m+n=i=m+n'$ vyvodíme $n=n'$ znovu prostým odečtením čísla m od obou stran rovnosti; rovnosti $m=m'$ a $n=n'$ však odporují předpokladu různosti zkoumaných dvojic.

K prokázání, že každý kód odpovídá jediné dvojici (tj. že jsme schopni z kódu dvojice tuto dvojici odkódovat), je již nutné uvažovat pouze dvojice, jejichž součty jsou různé. Číslo

$$\frac{i\cdot(i+1)}{2}+i$$

je největší přirozené číslo kódující některou z dvojic nacházejících se na „přeponě“ určené dvojicemi $(i,0)$ a $(0,i)$. Nejmenší číslo kódující některou dvojici nalézající se na „přeponě“ zadané dvojicemi $(i+1,0)$ a $(0,i+1)$ je číslo $\frac{(i+1)\cdot(i+2)}{2}$; k různosti kódů proto postačuje (při užití běžných vlastností vztahu „menší než“) ukázat nerovnost

$$\frac{i\cdot(i+1)}{2}+i<\frac{(i+1)\cdot(i+2)}{2}.$$

Požadovaná nerovnost přechází ekvivalentně na nerovnost $i\cdot(i+1)+2\cdot i<(i+1)\cdot(i+2)$ prostým užitím distributivity a neměnnosti nerovnosti při násobení nenulovým přirozeným číslem (násobíme číslem 2). Abychom ukázali, že posledně zmíněná nerovnost je v pořádku, uvažme soustavu jedné nerovnosti a tří rovností

$$i\cdot(i+1)+2\cdot i<i\cdot(i+1)+2\cdot i+2=(i+1)\cdot i+2\cdot i+2=(i+1)\cdot i+(i+1)\cdot 2=(i+1)\cdot(i+2).$$

Nerovnost získáme na základě nerovnosti $0<2$ a na základě možnosti přičíst k oběma stranám nerovnosti totéž číslo beze změny nerovnosti, rovnosti jsou důsledkem distributivity a komutativity násobení.

2) formalizace metamatematických přirozených čísel

Začněme se zabývat vztahem metamatematických přirozených čísel a matematických přirozených čísel jakožto objektů nějaké teorie zesilující Peanovu aritmetiku. Současně mi dovolte tyto myšlenky poněkud odlehčit tím, že budu uvažovat „hobity“, kteří žijí na matematické hladině, tzn. pro které je metamatematickou hladinou ta hladina, která je z našeho pohledu hladinou matematickou.

Budeme si představovat, že přirozená čísla každého hobita splňují Peanovu aritmetiku, tzn. že přirozená čísla, jež jsou metamatematická z pohledu hobita, tvoří z našeho pohledu model Peanovy aritmetiky. Takže každá formule dokazatelná v Peanově aritmetice je splněna i pro metamatematická čísla kteréhokoli hobita (korektnost Peanovy aritmetiky). Na druhé straně budeme také předpokládat, že každý model Peanovy aritmetiky vytváří metamatematická přirozená čísla některého hobita. Následně formule, která bude pravdivá pro metamatematická čísla *kteréhokoli* hobita, bude dokazatelná v Peanově aritmetice (úplnost predikátového počtu, viz druhý paragraf kap. II). Takže nějaká formule je dokazatelná v Peanově aritmetice, právě když se na ní shodnu s každým hobitem.

Každému jednotlivému metamatematickému přirozenému číslu můžeme přiřazovat jemu odpovídající uzavřený term, který je n-násobným následovníkem konstanty nula. Term přiřazený metamatematickému číslu n bývá nazýván FORMALIZACÍ čísla n a značen $\overline{n}$; jeho definici můžeme podrobněji popsat metamatematickou indukcí: metamatematickému číslu 0 přiřadíme konstantu $\mathit{0}$ jazyka aritmetiky a je-li metamatematickému číslu n přiřazen term $\overline{n}$, pak přirozenému číslu $n+1$ přiřadíme term $\mathfrak{S}(\overline{n})$. Pro každé metamatematické n je $\overline{n}$ uzavřený term jazyka Robinsonovy aritmetiky; např. $\overline{2}$ je termem $\mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathit{0}))$.

Z hlediska každého hobita popisuje term $\overline{n}$ přesně určený objekt, neboť realizace termu $\overline{n}$ je individuem v každém modelu $\boldsymbol{PA}$, tedy nějakým metamatematickým přirozeným číslem z hobitova pohledu; při vyprávění příběhu o hobitech budeme mluvit o PŘEKLADU čísla n místo o realizaci FORMALIZACE tohoto čísla.

Milovníky Tolkienových knih zarazí, že vůbec uvažujeme o nutnosti překladu lidské řeči do řeči hobitů. Během našeho zkoumání skutečně ukážeme, že v jednotlivých případech jsou běžná slova natolik jasná, že člověk s hobitem si opravdu rozumějí v jednoduchých případech. Hrdinové Tolkienových knih jsou natolik zaměstnáni bojem proti konkrétnímu zlu, že jim nezbývá čas na hlubokomyslné filozofické rozbory, např. o tom, co je zlo. Při takových rozhovorech by se mohla ukázat různost pohledů a potřeba překladu z jedné řeči do druhé minimálně ve smyslu vysvětlování lidských a hobitích zkušeností a chápání skutečnosti odrážející prožitky uložené v podvědomí té nebo oné skupiny.

Jako ilustraci předchozího tvrzení, že běžná slova jsou dostatečně jasná si zkusme uvědomit, co je překladem metamatematických přirozených čísel 0 a 2. Číslu 0 je přiřazena konstanta $\mathit{0}$ a podle dohody učiněné v §1 každý model (Robinsonovy) aritmetiky „začíná“ metamatematickými přirozenými čísly; realizací konstanty $\mathit{0}$ je tedy metamatematické přirozené číslo 0. Zcela analogicky metamatematickému přirozenému číslu 2 je přiřazen tem $\mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathit{0}))$ a tento term je v modelu aritmetiky podle uvedené dohody realizován metamatematickým číslem 2. „Překlady“ metamatematických přirozených čísel 0 a 2 jsou tedy tato čísla sama.

Naše rozmluva s hobitem o PŘEKLADU čísla bude zcela smysluplná, můžeme si například vyměňovat názory, zda tento objekt má tu nebo onu vlastnost. Jestli se shodneme na vlastnosti připisované metamatematickému přirozenému číslu n, bude v mnoha případech velmi záležet na povaze té vlastnosti.

V dalším textu bude popsána řada vlastností, o nichž bude panovat shoda, nyní zkoumejme jednu vlastnost predikátu $\leq$ jako příklad a použijme již trochu matematičtější formulace. Přirozené číslo 0 je nejmenším metamatematickým přirozeným číslem; vlastnost FORMALIZACE přirozeného čísla 0 „být nejmenším přirozeným číslem“ vyjádříme formulí $(\forall x)(\mathit{0} \leq x)$. S *každým* hobitem se shodneme na zkoumané vlastnosti čísla 0 (neboli zkoumaná vlastnost je pravdivá v *každém* modelu $\boldsymbol{PA}$) přesně tehdy, když v Peanově aritmetice je dokazatelné, že $\mathit{0}$ je nejmenší přirozené číslo (symbolicky $\boldsymbol{PA} \vdash (\forall x)(\mathit{0} \leq x)$). Formuli $(\forall x)(\mathit{0} \leq x)$ jsme dokázali dokonce již v Robinsonově aritmetice (viz formuli (ra3) předcházejícího paragrafu), odpověď je tudíž kladná: s každým hobitem se dohodneme, že nejmenším číslem je 0 (pro přesnost uveďme, že s hobitem mluvíme o čísle 0 jakožto realizaci konstanty $\mathit{0}$ v příslušném modelu).

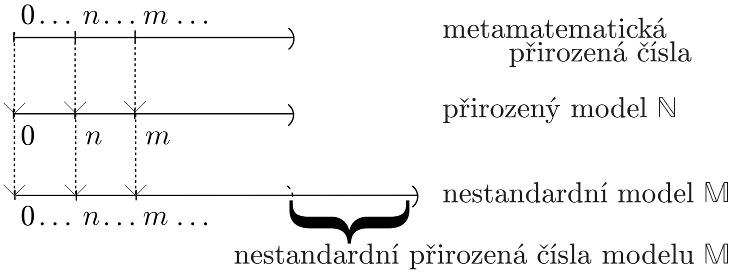

Diagram 1

Na podobě *systému* všech přirozených čísel však nebude s každým hobitem shoda. Nelze totiž vyloučit, že uvnitř Peanovy aritmetiky (přesněji v nějakém jejím modelu) existují přirozená čísla, která *nerealizují* žádnou FORMALIZACI našeho metamatematického přirozeného čísla. Situace je dokonce mnohem vyhraněnější: přirozený model je jediný model $\boldsymbol{PA}$, jehož individua tvoří přesně všechny realizace FORMALIZACÍ našich metamatematických přirozených čísel, v každém jiném modelu $\boldsymbol{PA}$ existuje individuum, jež není realizací FORMALIZACE našeho metamatematického přirozeného čísla. Modely Peanovy aritmetiky různé od přirozeného modelu nazveme **nestandardní.** Za okamžik ukážeme existenci nestandardního modelu Peanovy aritmetiky, jenž je od přirozeného modelu vnitřně k nerozeznání (v obou modelech jsou pravdivé tytéž uzavřené formule). Nadto jako důsledek vět o neúplnosti dostaneme existenci modelů Peanovy aritmetiky, které se dokonce rozcházejí s přirozeným modelem v pravdivosti nějaké uzavřené formule.

Protože myšlenka z předchozího odstavce je pro další vyprávění zcela klíčová, přeříkejme ji ještě jednou poněkud jinými slovy. Uvažujeme-li jakékoli metamatematické přirozené číslo, pak jeho PŘEKLAD přijme vždy hobit jako své metamatematické číslo. Pokud však hobit chce rozprávět o nějakém svém metamatematickém čísle, pak buďto je toto číslo PŘEKLADEM nějakého našeho metamatematického čísla a pak se o tomto čísle můžeme s hobitem smysluplně bavit, nebo není hobitovo metamatematické číslo žádným PŘEKLADEM našeho metamatematického čísla a pak nám nezbude než rozhovor o něm — slušně, ale důrazně — odmítnout. Hobit bude nespokojen a bude tvrdit, že je to metamatematické číslo jako každé jiné. My však musíme stát pevně na svém: neumíme ti sice vysvětlit proč, avšak my toto číslo nepovažujeme za vhodné a diskusi o něm prostě odmítáme.

Protože metamatematická přirozená čísla nějakého hobita mohou být „delší“ než naše lidská[15)], může se stát, že mezi nimi je číslo, které má odlišnou vlastnost od všech našich metamatematických přirozených čísel. Pak ovšem vlastnost „Existuje metamatematické přirozené číslo s touto vlastností.“ bude z hlediska hobita, o němž je řeč, pravdivá a z lidského pohledu pravdivá nebude. Následující příklad si však naopak klade za cíl sestrojit nestandardní model, který taková „divná“ přirozená čísla nemá: jestliže existuje hobitovo metamatematické přirozené číslo s nějakou vlastností, pak vždy existuje i lidské metamatematické přirozené číslo s tou samou vlastností.

Příklad 1. Pro sestrojení modelu Peanovy aritmetiky různého od přirozeného modelu aritmetiky, avšak vnitřně co nejvíce podobného přirozenému modelu, je vhodné uvažovat dvě teorie $\boldsymbol{S}$ a $\boldsymbol{T}$. Jazyk teorie $\boldsymbol{S}$ budiž normální jazyk aritmetiky a za axiomy přijměme všechny uzavřené formule pravdivé v přirozeném modelu. Je velmi jednoduché ukázat, že v každém modelu $\mathbb{M}$ teorie $\boldsymbol{S}$ jsou pravdivé právě tytéž uzavřené formule jako v přirozeném modelu aritmetiky: je-li uzavřená formule φ pravdivá v přirozeném modelu, je axiomem teorie $\boldsymbol{S}$, a proto musí být φ pravdivá v každém modelu teorie $\boldsymbol{S}$, takže i v modelu $\mathbb{M}$; předpokládejme naopak, že uzavřená formule φ není pravdivá v přirozeném modelu, pak je v přirozeném modelu pravdivá její negace $\neg\varphi$ (přímo z definice splňování ve strukturách plyne, že není-li pravdivá *uzavřená* formule, musí být pravdivá její negace), ta musí být pravdivá v každém modelu teorie $\boldsymbol{S}$, pročež nemůže být v modelu $\mathbb{M}$ pravdivá formule φ (v žádné struktuře nemohou být současně pravdivá uzavřená formule i její negace prostě v důsledku definice splňování negace formule ve struktuře). Ještě jednodušší je nahlédnout, že $\boldsymbol{S}$ je rozšířením Peanovy aritmetiky, protože o přirozeném modelu aritmetiky předpokládáme, že je modelem Peanovy aritmetiky.

Jako teorii $\boldsymbol{T}$ zvolíme rozšíření teorie $\boldsymbol{S}$ vzniklé obohacením jazyka o novou konstantu c a přidáním všech axiomů tvaru $\overline{n} < \mathsf{c}$, kde n je metamatematickým přirozeným číslem. Chceme sestrojit alespoň jeden model teorie $\boldsymbol{T}$. To se zdá být poměrně obtížný úkol, uvidíme však, že to není tak těžké (pokud jsme přijali výsledky shrnuté v druhém paragrafu předcházející kapitoly). Každá bezesporná teorie má model, pročež postačí prokázat bezespornost teorie $\boldsymbol{T}$. V tomto okamžiku si musíme uvědomit, že teorie je sporná, právě když je sporná jakási její *konečná* část (viz druhý paragraf předchozí kapitoly — připomeňme, že toto je důsledkem faktu, že v každém důkazu je použito jen konečně mnoho axiomů). Není docela zapotřebí vynechávat nějaké axiomy teorie $\boldsymbol{S}$, jsme schopni ukázat, že $\boldsymbol{S}$ a *konečně* mnoho axiomů tvaru $\overline{n} < \mathsf{c}$ je bezespornou teorií. Zapišme si těchto konečně mnoho axiomů: $\overline{n_1} < \mathsf{c}, \dots, \overline{n_i} < \mathsf{c}$. Z konečně mnoha metamatematických čísel $n_1, \dots, n_i$ je jedno největší, budiž to číslo n_j. Uvažme přirozený model a realizujme v něm konstantu c číslem $n_j + 1$. Vzniká nám struktura $\mathbb{O}'$ pro jazyk aritmetiky s dodanou konstantou c. Zanedbáme-li konstantu c, je model $\mathbb{O}'$ totožný s přirozeným modelem, model $\mathbb{O}'$ je proto modelem teorie $\boldsymbol{S}$. Volba realizace konstanty c zajišťuje, že pro libovolné číslo $n < n_j + 1$ je $\mathbb{O}' \models \overline{n} < \mathsf{c}$ (neboť n je realizací termu $\overline{n}$, takže $\mathbb{O}' \models \overline{n} < \overline{m}$, právě když n je menší než m). Pročež ve struktuře $\mathbb{O}'$ jsou pravdivé všechny formule $\overline{n_1} < \mathsf{c}, \dots, \overline{n_i} < \mathsf{c}$; zjistili jsme, že $\mathbb{O}'$ je modelem teorie $\boldsymbol{S}$ a rovněž

15) Pro jednoduchost se vyjadřujeme, jako by metamatematická přirozená čísla všech lidí byla stejná, avšak i tento pohled by bylo možno podrobit diskusi.

axiomů $\overline{n_1} < \mathsf{c}, \dots, \overline{n_i} < \mathsf{c}$. V důsledku toho pro libovolný konečný systém metamatematických přirozených čísel $n_1, \dots, n_i$ je teorie $\boldsymbol{S}$ s dodatečnými axiomy $\overline{n_1} < \mathsf{c}, \dots, \overline{n_i} < \mathsf{c}$ bezesporná; následně je tudíž bezesporná celá teorie $\boldsymbol{T}$, a má proto nějaký model $\mathbb{O}$.

Každé individuum přirozeného modelu je metamatematickým přirozeným číslem. Naproti tomu realizace konstanty c *nemůže* být realizací žádného termu tvaru $\overline{n}$, protože ve struktuře $\mathbb{O}$ je pravdivá každá z formulí $\overline{n} < \mathsf{c}$ (což jsou axiomy teorie $\boldsymbol{T}$). Pročež individuí struktury $\mathbb{O}$ je více než individuí přirozeného modelu $\mathbb{N}$ (přesněji: realizace termů tvaru $\overline{n}$ tvoří pouze část univerza modelu $\mathbb{O}$). Nechť model $\mathbb{M}$ vznikne z modelu $\mathbb{O}$ vypuštěním realizace konstanty c (tzn. model $\mathbb{M}$ je totožný s modelem $\mathbb{O}$, jen přestaneme uvádět předpis, jak realizovat konstantu c); pak je $\mathbb{M}$ modelem pro jazyk aritmetiky a protože jsme realizace aritmetických funkcí neměnili, je modelem teorie $\boldsymbol{S}$ přesně stejně jako modelem této teorie byl model $\mathbb{O}$.

Individua, která nejsou realizacemi termů tvaru $\overline{n}$ pro žádné metamatematické přirozené číslo n, je zvykem nazývat nestandardní; zopakujme, že strukturu, která obsahuje nestandardní přirozená čísla, nazýváme nestandardní. Užívajíce tuto terminologii konstatujme, že v prvním příkladu jsme sestrojili nestandardní model Peanovy aritmetiky, ve kterém jsou pravdivé přesně tytéž uzavřené formule jako v přirozeném modelu.

V předchozím příkladu jsme nahlédli, že metamatematická přirozená čísla hobita mohou být „delší“ než naše. Při zdůraznění některých aspektů je na tom lépe hobit, protože umí rozeznat i vzdálenosti $1/\mathfrak{n}$, kde $\mathfrak{n}$ je hobitovo metamatematické přirozené číslo. Pokud $\mathfrak{n}$ není PŘEKLADEM lidského metamatematického čísla, nejsme my schopni tuto vzdálenost rozlišit — je pro nás „nekonečně malá“. Z hlediska myšlenek tohoto paragrafu však budeme dávat přednost „kratším“ metamatematickým číslům a fakt, že hobitova metamatematická přirozená čísla mohou být „delší“, budeme interpretovat jako jeho neschopnost uvidět možnost jejich zkrácení. (Pokud půjdeme v příběhu inspirovaném Tolkienem ještě o krok dále, musíme připustit, že elfové nahlížejí možnost dalšího zkrácení metamatematických přirozených čísel a se shovívavostí se dívají na lidskou neschopnost uvidět tuto možnost.)

Míru shody mezi našimi a hobitovými metamatematickými přirozenými čísly si ukážeme ještě na příkladu kódování dvojic přirozených čísel. Shrňme principy výslovně užité v předchozím bodu při kódování dvojic přirozených čísel a současně ke každému z nich uveďme formuli, která zachycuje ten který princip: distributivita (pa5), možnost přičíst nebo odečíst od každé strany nerovnosti totéž číslo beze změny nerovnosti (pa11), možnost násobit nebo krátit každou stranu nerovnosti týmž nenulovým číslem beze změny nerovnosti (pa12), komutativita násobení (pa4); navíc jsme uvedli, že užíváme běžné vlastnosti nerovnosti, ty jsou zachyceny formulemi (pa6)–(pa8). Formule uvedené v předchozím seznamu jsou všechny dokazatelné v Peanově aritmetice (viz předchozí paragraf). Právě dokazatelnost příslušných formulí v Peanově aritmetice zajišťuje, že hobit může provádět přesně stejné úvahy na své metamatematické hladině, jako provádíme my na své. Takže speciálně hobit může kódovat dvojice svých metamatematických přirozených čísel na základě těch principů, na jejichž základě jsme kódování dvojic našich metamatematických přirozených čísel provedli v prvním bodě my.

Pokračujme však ještě dále v popisu vztahu kódování přirozených čísel na metamatematické a matematické hladině rozvíjením příběhu o hobitech. Představme si, že vezmeme dvojici metamatematických přirozených čísel a zakódujeme ji. V tom okamžiku máme tři metamatematická přirozená čísla; každé z nich jednotlivě PŘELOŽÍME, a tak hobitovi dáme tři PŘEKLADY čísel s dotazem, zda poslední číslo je kódem dvojice těch prvních dvou. Hobit se na tyto překlady podívá a za okamžik už se usměje a řekne: „No to je jasné, samozřejmě je.“ (Uvědomte si, že kdyby ve způsobu kódování nebyla mezi námi a hobity shoda, nesouhlasil by *každý* hobit, že poslední číslo je kódem dvojice těch předchozích.)

Představme si však opačnou situaci. Hobit zakóduje dvojici *svých* metamatematických čísel a pak nám všechna tři čísla nabídne. Nyní jsou dvě možnosti. Jsou-li všechna tři čísla PŘEKLADY metamatematických čísel, potěšíme hobita sdělením, že i pro nás kóduje poslední číslo dvojici čísel předchozích. Jestliže naopak alespoň jedno z hobitových čísel není PŘEKLADEM metamatematického přirozeného čísla, zklameme hobita a další debatu o těchto číslech odmítneme.

Hobitovu nespokojenost, že se o některých jeho metamatematických přirozených číslech odmítáme bavit, nemůžeme odstranit (viz Příklad 1). Můžeme se ji však snažit poněkud zmírnit závazkem, že budeme-li ochotni se bavit o nějakém jeho čísle, budeme ochotni již debatovat i o všech menších. (Prohlašujeme, že číslo menší než PŘEKLAD nějakého metamatematického čísla je samo také PŘEKLADEM; přesná formulace spolu s návodem důkazu je podána ve cvičení III-2.22.) Můžeme také hobita uklidňovat slibem, že pokud přijmeme rozpravu o dvou číslech, budeme se také ochotni bavit o jejich kódu a naopak přistoupíme-li na diskusi o kódu dvojice čísel, budeme určitě souhlasit také s debatou o každém z nich[16)].

3) formální logika

Výstavbu formulí predikátového počtu, kterou jsme předvedli v předchozí kapitole na metamatematické hladině, můžeme doslova zopakovat na matematické hladině, tzn. uvnitř uvažované aritmetické teorie (jinak řečeno můžeme přirozená čísla původně chápaná pouze jako přirozená čísla aritmetické teorie začít považovat za metamatematická přirozená čísla a vzhledem k nim — uvnitř teorie — vybudovat logiku). Ještě jinými slovy: hobit může vybudovat predikátový počet přesně stejně, jako jsme ho vybudovali v předchozí kapitole my. Takto dostaneme objekty, které se běžně nazývají formálními formulemi, formálními důkazy,

16) Kód dvojice je přirozené číslo větší nebo rovno oběma číslům z dvojice. Je-li tedy kód PŘEKLADEM metamatematického přirozeného čísla, musí být jedno každé číslo z dvojice také PŘEKLADEM nějakého metamatematického přirozeného čísla. Na druhé straně jsou-li obě čísla z dvojice PŘEKLADEM metamatematických přirozených čísel, existuje metamatematické přirozené číslo, které je kódem této dvojice metamatematických přirozených čísel a následně PŘEKLAD tohoto kódu je (hobitím) kódem dvojice výchozích přirozených čísel.

atd.; při vyprávění příběhu o hobitovi budeme používat názvů hobitovy formule, hobitovy důkazy, atd.

Věrnost shody lidské a hobitovy logiky závisí na míře shody našich a hobitových přirozených čísel. Předpoklad, že hobitova metamatematická přirozená čísla splňují Peanovu aritmetiku (pro Gödelovy věty až zbytečně silný), zabezpečí, že shoda bude poměrně dobrá. Popis této shody však bude projednán až v příštím bodě, neboť napřed se musíme dohodnout na způsobu PŘEKLADŮ formulí predikátového počtu.

4) aritmetizace logiky

Konstrukce formulí probíhá rekurzí popsanou ve druhém paragrafu předcházející kapitoly. Jinak řečeno: probíhá v krocích, které odpovídají metamatematickým přirozeným číslům. Pročež naše pojetí formulí závisí na pojetí metamatematických přirozených čísel. Je dokonce možné zakódovat jednu každou formuli metamatematickým přirozeným číslem[17)].

Chceme-li zakódovat formule přirozenými čísly, musíme se nejprve dohodnout, jak zakódujeme základní stavební kameny pro tvorbu formulí. Zopakujme z §2 kap. II, že základními stavebními kameny pro výstavbu formulí jazyka aritmetiky jsou

(a) proměnné, např. $x_0, x_1, \ldots$, které budeme kódovat např. sudými přirozenými čísly 0,2,. . . ;
(b) predikát rovnosti, který budeme kódovat např. číslem 1;
(c) konstanta *0*, již budeme kódovat např. číslem 3;
(d) funkce následovníka, sčítání a násobení, které zakódujeme např. čísly 5,7 a 9;
(e) logické spojky, tj. znaky $\neg, \rightarrow, \&, \vee$ a $\equiv$, jež zakódujeme po řadě např. čísly 11, 13, 15, 17 a 19;
(f) kvantifikátory $\forall, \exists$ budeme po řadě kódovat např. čísly 21, 23;
(g) pomocnými stavebními kameny jsou závorky (a), jež budeme kódovat např. čísly 25 a 27.

Formule $(\exists x_1)(x_1 = \mathfrak{S}(x_1))$ bude kódována posloupností 25, 23, 2, 27, 25, 2, 1, 5, 25, 2, 27, 27. V prvním bodě jsme naznačili, jak je možno posloupnost přirozených čísel zakódovat jediným přirozeným číslem n, takže naší posloupnosti odpovídá přesně jedno přirozené číslo, které můžeme chápat jako kód formule $(\exists x_1)(x_1 = \mathfrak{S}(x_1))$.

Konec konců, kdybychom měli popsat znak závorky (, bylo by to pro nás obtížnější než prostě konstatovat, že levá závorka *je* číslem 25. Analogicky i ostatní stavební kameny pro vytváření formulí můžeme prostě ztotožnit s určitými přirozenými čísly, v konečném důsledku nám to umožní ztotožnit formuli $(\exists x_1)(x_1 = \mathfrak{S}(x_1))$ s číslem n.

Ukázali jsme, že každou formuli můžeme zakódovat přirozeným číslem, dokonce si však můžeme představovat, že tento kód *je* formulí, tzn. můžeme chápat formuli jako určité přirozené číslo. Tento myšlenkový posun zjednoduší vyjádření idejí vedoucích k větám o neúplnosti; pokud tento posun odmítnete, budete muset později místo jednoduchého vyjádření Gödelovy formule „MÁ FORMALIZACE není . . . “ použít složitější „FORMALIZACE MÉHO KÓDU je kódem formální

17) V dalším budeme ukazovat způsob kódování formulí jazyka aritmetiky, nevyžadovalo by však žádnou podstatnou myšlenkovou změnu, kdybychom se rozhodli kódovat formule jiného jazyka.

formule, jež není …“. Takže snad uznáte, že je jednodušší přijmout pohled, že formule *jsou* jistá přirozená čísla.

Autor vás, milý čtenáři, láká ke změně pohledu a žádá, abyste formule nepokládal pouze za zakódovatelné přirozenými čísly, avšak dokonce přímo *za přirozená čísla.* Snad další argument vás již přesvědčí. O tom, jak pro hobita PŘELOŽIT znak závorky (dosud nepadlo jediné slovo, a to zcela právem. Pokud začneme znak (chápat jako přirozené číslo 25, budeme pochopitelně PŘEKLADEM znaku (rozumět PŘEKLAD čísla 25. Jak PŘELOŽIT metamatematické číslo 25 jsme se již dohodli ve druhém bodě, pročež s PŘEKLADEM znaku závorky — chápané jako metamatematické přirozené číslo — není vůbec žádný problém. Přesně stejně je to však také s PŘEKLADY formulí. Jakmile začneme chápat formule jako nějaká metamatematická přirozená čísla, zcela automaticky máme popsány rovněž JEJICH PŘEKLADY. Tím každé formuli na metamatematické hladině přiřadíme JEJÍ FORMALIZACI, která reprezentuje přirozené číslo uvnitř jakékoli rozumné aritmetiky; v příběhu o hobitovi každou formuli na metamatematické hladině umíme PŘELOŽIT.

V logice nepojednáváme pouze o jednotlivých formulích, velmi často nás zajímají také konečné posloupnosti formulí (např. důkazy nebo konečné systémy axiomů nějakých teorií). Například Robinsonova aritmetika má osm axiomů **RA1**–**RA8**. Hobitova Robinsonova aritmetika bude mít také přesně osm axiomů; tyto axiomy budou hobitovy formule, které jsou PŘEKLADY našich axiomů **RA1**–**RA8**[18)].

Zvažujme nyní případ, že existují nestandardní matematická přirozená čísla, tj.individua modelu aritmetiky (řekněme Robinsonovy), která nejsou FORMALIZACEMI metamatematických přirozených čísel. V takovém případě určitě existují i formální formule jazyka Robinsonovy aritmetiky a formální důkazy v Robinsonově aritmetice, které *nejsou* žádnou FORMALIZACÍ (metamatematických) formulí a žádnou FORMALIZACÍ důkazů Robinsonovy aritmetiky. Je proto představitelné, že ve zkoumaném modelu aritmetiky existuje např. individuum, které je *formálním* důkazem sporu v Robinsonově aritmetice, avšak toto individuum *není* FORMALIZACÍ žádného skutečného metamatematického důkazu, a proto na metamatematické hladině odpovídající důkaz sporu nemusí vůbec existovat. Později ukážeme dokonce, že existují bezesporná[19)] rozšíření Peanovy aritmetiky, ve kterých je *dokazatelná* existence takovýchto objektů.

Tak ještě jednou myšlenky předchozího odstavce pomocí našeho příběhu o hobitech. O trochu výše jsme se dohodli, jak vypadají hobitovy axiomy Ro-

[18)] Protože však naše zakódování konečné posloupnosti přirozených čísel přesně odpovídá hobitovu zakódování, můžeme axiomy hobitovy Robinsonovy aritmetiky popsat také jako posloupnost hobitových formulí, jejíž hobití kód je PŘEKLADEM našeho kódu konečné posloupnosti axiomů Robinsonovy aritmetiky.

[19)] pochopitelně za předpokladu, že sama Peanova aritmetika je bezesporná binsonovy aritmetiky a popsali jsme vztah mezi našimi a hobitovými axiomy této teorie; teď zkoumejme hobitovy důkazy v Robinsonově aritmetice (podobně by se dalo pojednat i hobitových formulích). Jestliže zakódujeme důkaz (který je konečnou posloupností formulí) a pak PŘEKLAD tohoto kódu dáme hobitovi, tak hobit bude postupně konstatovat: „Opravdu je to kód konečné posloupnosti, a hele, členy té posloupnosti jsou formule aritmetiky, ale to není všechno: vypadá to jako důkaz, na několika místech jsou axiomy logiky a někde se užívají odvozovací pravidla; hm, tak jaké formule nám to zbývají na axiomy teorie, no jasně: všechny ty zbývající formule jsou axiomy Robinsonovy aritmetiky.“ A hobit bude konstatovat, že jsme mu dali důkaz v Robinsonově aritmetice.

Teď zkusme rozebrat, co se stane, když nám hobit nabídne svůj kód důkazu v (jeho) Robinsonově aritmetice. Je-li tento kód PŘEKLADEM metamatematického čísla, pak o tomto čísle budeme zase my konstatovat přesně totéž, co je uvedeno v uvozovkách v předchozím odstavci a na závěr také prohlásíme, že nám hobit dal návod na důkaz v Robinsonově aritmetice. Pokud nám však hobit dal kód důkazu, který není PŘEKLADEM metamatematického čísla, pak diskusi o tomto hobitově důkazu musíme odmítnout. A trvat na tom, i když nám to třeba dá práci, protože hobit nás bude například lákat, že je to důkaz spornosti Robinsonovy aritmetiky. Avšak z toho, že má hobit důkaz spornosti hobitovy Robinsonovy aritmetiky, naprosto *neplyne*, že podobný důkaz existuje i na metamatematické hladině (plynulo by to pouze tehdy, kdyby ten důkaz byl PŘEKLADEM důkazu na metamatematické hladině nebo kdybychom učinili ještě dodatečné předpoklady např. typu, o kterém bude řeč v šestém bodě).

Probrali jsme metodu, jak FORMALIZOVAT *konečnou* posloupnost formulí, avšak v logice pojednáváme také o *nekonečných* systémech. Například axiomů Peanovy aritmetiky je — díky indukci — nekonečně mnoho a již dříve jsme konstatovali, že není možno vybrat konečný podsystém stejné síly. Z podstaty věci se tudíž musíme zabývat rovněž FORMALIZACEMI nekonečných posloupností. Do této chvíle jsme motivovali požadavek rekurzivnosti teorií možností mechanicky rozpoznat o dané posloupnosti formulí, zda je, či není důkazem v dané teorii. Nyní je možno podat i další motivaci: předpoklad rekurzivnosti umožní PŘELOŽIT axiomatický systém vyšetřované teorie do hobitovy řeči. Například PŘEKLADEM axiomatického systému Peanovy aritmetiky budou PŘEKLADY konečně mnoha axiomů Robinsonovy aritmetiky a *všechny hobitovy formule, které jsou tvaru axiomu indukce*. Obecněji: rekurzivní teorie $\boldsymbol{T}$ je zadána nějakým *algoritmem;* tento algoritmus vybírá za axiomy teorie $\boldsymbol{T}$ některé formule na metamatematické hladině. FORMALIZACÍ teorie $\boldsymbol{T}$ budou přesně všechny formální formule, které *týž* algoritmus vybere z formálních formulí.

Uvědomme si, že *nemůžeme* hobitovi zadat jako axiomy jeho Peanovy aritmetiky právě všechny PŘEKLADY našich axiomů Peanovy aritmetiky. Hobit by přiběhl s nějakou svojí formulí (která není PŘEKLADEM naší formule) a ptal by se: „Tvrzení ‚když vezmu tuto formuli, a ona bude platit pro nulu a bude pro ni splněn indukční předpoklad, pak platí pro všechna přirozená čísla' se mi líbí jako axiom Peanovy aritmetiky a ty mi ji jako axiom nezadáváš. Proč?" My nejsme schopni pro hobita vydělit PŘEKLADY našich formulí, a tak mu nebudeme umět na jeho otázku odpovědět. Ještě jinak řečeno: Kdybychom byli schopni vnutit hobitovi PŘEKLADY axiomů Peanovy aritmetiky jako jeho axiomatický systém Peanovy aritmetiky, uměl by hobit následně rozpoznat systém všech PŘEKLADŮ našich formulí, a tak byl by schopen vydělit PŘEKLADY našich metamatematických přirozených čísel jako část svých metamatematických čísel, a tím by zjistil, že jeho metamatematická přirozená čísla nevytváří ten nejmenší možný systém s vhodnými vlastnostmi, což je však v rozporu s pojetím metamatematických přirozených čísel (v tomto případě hobitových metamatematických přirozených čísel).

5) diagonalizace jako zbytek možnosti aplikovat formuli na sebe samu

Zdůraznili jsme, že při akceptaci Russellovy koncepce odstranění paradoxů musíme zachovávat rozlišení hladin matematiky a metamatematiky. Nicméně nyní se přiblížíme až k samé hranici přestoupení tohoto příkazu. Ukážeme totiž, že formule pojednávající o SVÉ FORMALIZACI jsou povoleny. Zdůrazněme, že tyto formule nemluví o sobě, nýbrž o určitém uzavřeném termu, který je FORMALIZACÍ FORMULE — napínání možností spočívá v tom, že je povoleno zabudovat do znění formule vhodným způsobem vztah formule a JEJÍ FORMALIZACE. (Název „diagonalizace" reflektuje, že se nejedná o vztah formule a obecného přirozeného čísla, avšak o vztah formule a přirozeného čísla, jež je *JEJÍ* FORMALIZACÍ). Přiblížíme se tedy k hranici, za kterou vznikají paradoxy, ale pokud ji nepřekročíme, paradoxy nevznikají (přesněji: přes velmi podrobná zkoumání se nepodařilo žádný nalézt, takže věříme, že se nikdy žádný neobjeví). Aplikace formule na ni samu byl „zlý pán", který způsoboval paradoxy, aplikace formule na JEJÍ FORMALIZACI je „pokorný sluha", který je nejdůležitějším nástrojem pro demonstraci vět o neúplnosti a mnohých dalších tvrzení.

V tomto okamžiku se dostáváme k ohlášenému vrcholu jak krásy, tak také obtížnosti našeho textu. Při prokazování první věty o neúplnosti se používají zejména původní Gödelova formule (kterou budeme značit γ) a Rosserova formule (znak ϱ). Pro usnadnění čtení budeme klíčové myšlenky popisovat dvakrát. Nejprve je budeme předkládat jako vyprávění o hobitovi, podruhé ve verzi přijatelnější z hlediska matematického vyjadřování.

6) neúplnost a Gödelova formule

Předpokládejme, že je pevně dána bezesporná rekurzivní teorie $\boldsymbol{T}$ zesilující Peanovu aritmetiku, budiž T její FORMALIZACE. Podle diagonalizace je možno vytvořit formuli γ, která má význam

„*MÁ FORMALIZACE je formálně nedokazatelná ve FORMALIZACI teorie* $\boldsymbol{T}$".
Tuto formuli je zvykem nazývat podle jejího tvůrce **Gödelovou formulí**.

Mějme tedy dánu bezespornou rekurzivní teorii $\boldsymbol{T}$ zesilující Peanovu aritmetiku. Nejprve konstatujme, že hobit má teorii T, která je PŘEKLADEM naší teorie $\boldsymbol{T}$. Hobit si uvědomuje, že (jeho) teorie T je rozšířením (jeho) Peanovy aritmetiky.

Představme si, že $\boldsymbol{T} \vdash \gamma$, tzn. že na naší metamatematické hladině existuje důkaz formule γ v teorii $\boldsymbol{T}$. Zakódujme tento důkaz a podle druhého bodu sestrojme PŘEKLAD získaného kódu a předejme ho hobitovi spolu s doporučením, aby se na toto číslo díval jako na kód posloupnosti formulí. Hobit rozpozná, že dostal kód posloupnosti (svých) formulí, kterážto posloupnost je (v jeho pojetí) důkazem v teorii T. Poslední člen této posloupnosti je z hobitova pohledu dokazatelný v teorii T; my navíc víme, že tento poslední člen je hobitovou formulí, která je PŘEKLADEM formule γ. Takže můžeme shrnout, že hobit zjistil pravdivost tvrzení „FORMALIZACE formule γ je dokazatelná ve FORMALIZACI teorie $\boldsymbol{T}$“ pro *svá* metamatematická přirozená čísla. Nyní se podívejme na znění Gödelovy formule a prostě konstatujme, že hobit nahlédl pravdivost negace Gödelovy formule.

Vyšli jsme z předpokladu $\boldsymbol{T} \vdash \gamma$ a zjistili, že *každý* hobit nahlíží pravdivost tvrzení $\neg\gamma$. Tedy v teorii $\boldsymbol{PA}$ je dokazatelná formule $\neg\gamma$, tím spíše je formule $\neg\gamma$ dokazatelná v teorii $\boldsymbol{T}$, neboť $\boldsymbol{T}$ je rozšířením Peanovy aritmetiky. Protože předpokládáme, že teorie $\boldsymbol{T}$ je bezesporná, nemůže v ní být dokazatelná současně formule γ i formule $\neg\gamma$, a jsme tedy nuceni odmítnout předpoklad $\boldsymbol{T} \vdash \gamma$.

Zopakujme nyní předchozí úvahy matematičtěji bez vyprávění příběhu o hobitech. Představme si, že $\boldsymbol{T} \vdash \gamma$, tzn. že na metamatematické hladině existuje důkaz formule γ v teorii $\boldsymbol{T}$. Předpokládaná podobnost vztahů na metamatematické hladině a na hladině matematiky zajistí, že v $\boldsymbol{PA}$ je dokazatelné, že FORMALIZACE kódu tohoto důkazu je kódem formálního důkazu FORMALIZACE formule γ ve FORMALIZACI teorie $\boldsymbol{T}$. Tedy v teorii $\boldsymbol{PA}$ a tím spíše v teorii $\boldsymbol{T}$ je dokazatelná formule „existuje formální důkaz FORMALIZACE formule γ ve FORMALIZACI teorie $\boldsymbol{T}$“. Srovnáte-li tvrzení v uvozovkách se zněním formule γ, nahlédnete, že jsme prokázali $\boldsymbol{T} \vdash \neg\gamma$. Předpoklad bezespornosti teorie $\boldsymbol{T}$ zamezuje současné dokazatelnosti formule γ i formule $\neg\gamma$, pročež jsme nuceni odmítnout předpoklad $\boldsymbol{T} \vdash \gamma$.

Pro vyvrácení možnosti $\boldsymbol{T} \vdash \neg\gamma$ potřebujeme ještě dodatečný předpoklad (částečné) shody teorie $\boldsymbol{T}$ s naší intuicí o existenci přirozených čísel. Shoda má spočívat v tom, že pokud prokážeme v teorii $\boldsymbol{T}$ existenci nějakého objektu s určitou[20] vlastností ψ, pak chceme, aby dokonce existovalo *metamatematické* přirozené číslo, o němž je v přirozeném modelu $\mathbb{N}$ pravdivé, že má vlastnost ψ (v symbolech: jestliže $\boldsymbol{T} \vdash (\exists x)\psi$, pak existuje metamatematické přirozené číslo n tak, že $\mathbb{N} \models \psi(x/n)$).

Úvaha je tentokrát natolik snadná, že ji vyslovíme okamžitě v matematické verzi: předpokládejme, že v teorii $\boldsymbol{T}$ je dokazatelná negace formule γ (v symbo-

[20] Běžně se vznáší požadavek o shodě nikoli na jednu speciální formuli ψ, avšak na všechny „dostatečně jednoduché“ formule a následně se prokáže, že formule, pro kterou shodu skutečně potřebujeme je „dostatečně jednoduchá“.

lech $\boldsymbol{T} \vdash \neg\gamma$). Pak v teorii $\boldsymbol{T}$ je — v důsledku znění Gödelovy formule — dokazatelná formule „MÁ FORMALIZACE je formálně dokazatelná ve FORMALIZACI teorie $\boldsymbol{T}$“, tzn. v $\boldsymbol{T}$ je dokazatelná formule „existuje formální důkaz FORMALIZACE formule γ ve FORMALIZACI teorie $\boldsymbol{T}$“. Následně musí existovat (formální) kód takového formálního důkazu (úlohu formule ψ hraje „x je kódem formálního důkazu FORMALIZACE formule γ ve FORMALIZACI teorie $\boldsymbol{T}$“). Podle dodatečného předpokladu o částečné shodě teorie $\boldsymbol{T}$ s naší intuicí o existenci přirozených čísel musí existovat *metamatematický* objekt n, o němž je v přirozeném modelu $\mathbb{N}$ pravdivé, že je „kódem formálního důkazu FORMALIZACE formule γ ve FORMALIZACI teorie $\boldsymbol{T}$“. Ovšem „formální důkaz v modelu $\mathbb{N}$“ je prostě důkaz, realizací „FORMALIZACE formule γ“ v $\mathbb{N}$ je prostě formule γ sama a nakonec realizací „FORMALIZACE teorie $\boldsymbol{T}$“ v modelu $\mathbb{N}$ je opět teorie $\boldsymbol{T}$ sama. Takže o našem metamatematickém přirozeném číslu n je v přirozeném modelu $\mathbb{N}$ pravdivé, že je „kódem důkazu formule γ v teorii $\boldsymbol{T}$“. Posledně vyslovené tvrzení je však jen jiným vyjádřením faktu, že existuje důkaz formule γ v teorii $\boldsymbol{T}$ na metamatematické hladině — prokázali jsme tudíž $\boldsymbol{T} \vdash \gamma$. Pročež nás předpoklad bezespornosti teorie $\boldsymbol{T}$ nutí zavrhnout i možnost $\boldsymbol{T} \vdash \neg\gamma$.

Ukázali jsme, že Gödelova formule nemůže být ani dokazatelná, ani vyvratitelná v teorii $\boldsymbol{T}$.

Předchozí úvahy prokazují první větu o neúplnosti, mají však vadu krásy v tom, že pro vyvrácení možnosti $\boldsymbol{T} \vdash \neg\gamma$ jsme užili dodatečný předpoklad částečné shody teorie $\boldsymbol{T}$ s naší intuicí o existenci přirozených čísel. Při užití Rosserovy formule nebude třeba činit žádný dodatečný předpoklad, sama uvažovaná formule však bude o něco složitější než formule Gödelova.

7) neúplnost a Rosserova formule

Jak již bylo řečeno, Rosserova formule umožní demonstrovat (viz [Ros]) první větu o neúplnosti bez dodatečného předpokladu částečné shody teorie $\boldsymbol{T}$ s naší intuicí o existenci přirozených čísel. Dosahuje toho tím, že formule postuluje existenci meze, pod níž se by se mělo nacházet či nenacházet vše, na co se dále odvoláváme.

Ještě jednou vás musím, vážený čtenáři, varovat, že Rosserova formule je složitější než formule Gödelova (proto hned po jejím vyslovení připojujeme její výklad). Pokud vám vůbec nevadí dodatečný předpoklad částečné shody vyšetřované teorie s naší intuicí o existenci přirozených čísel užitý v předchozím bodě nebo pokud se vám bude zdát námaha vynaložená na porozumění elegantních idejí souvisejících s Rosserovou formulí přílišná, je možno tento bod přeskočit a přikročit rovnou ke čtení následujícího osmého bodu.

Rosserova formule ϱ má význam
*„existuje kód formálního důkazu FORMALIZACE mé negace ve FORMALIZACI teorie **T**, jenž je menší než každý kód formálního důkazu MÉ FORMALIZACE ve FORMALIZACI teorie **T**"*.

Při prokazování první věty o neúplnosti pomocí Rosserovy formule budeme opět začínat příběhem o hobitech. PŘEKLAD teorie $\boldsymbol{T}$ označme znakem T. Pokud je vám, milý čtenáři, formulace Rosserovy formule křišťálově jasná, prosím, přeskočte zbytek tohoto odstavce. Zní-li vám formulace Rosserovy formule jako řeč ve zcela neznámém a nesrozumitelném jazyce, sledujte teď rozbor tohoto zdánlivě nesmyslného spojení slov užívající podobenství o hobitech. Pravdivost Rosserovy formule ve smyslu metamatematických přirozených čísel kteréhokoli hobita je tvrzení *„existuje kód hobitího důkazu PŘEKLADU mé negace v PŘEKLADU teorie **T**, jenž je menší než každý kód hobitího důkazu MÉHO PŘEKLADU v PŘEKLADU teorie **T**"*. Rosserova formule tedy vyhlašuje, že existuje hobitův důkaz, který má dvě vlastnosti:

(a) Uvědomme si, že o každém důkazu má smysl vypovědět, jaká formule je dokazována a v jaké teorii důkaz probíhá. V případě hobitova důkazu bude dokazována hobitova formule a hobit bude dokazovat ve své teorii. Rosserova formule vyžaduje od zkoumaného *hobitova* důkazu, aby dokazoval PŘEKLAD *negace* Rosserovy formule a aby probíhal *v hobitově* teorii T, tj. v PŘEKLADU teorie $\boldsymbol{T}$.

(b) Uvedli jsme, že vyšetřovaný hobitův důkaz dokazuje PŘEKLAD *negace* Rosserovy formule. Kromě tohoto hobitova důkazu můžeme také zkoumat hobitovy důkazy jiné (hobitovy) formule, omezíme se však na důkazy v teorii T. Tou jinou hobitovou formulí budiž PŘEKLAD Rosserovy formule (nikoli PŘEKLAD její negace!). Požádáme hobita, aby vytvořil všechny své možné důkazy PŘEKLADU Rosserovy formule ve své teorii T a (pokud existují) všechny je zakódoval. Rosserova formule tvrdí, že pokud takovéto hobitovy důkazy vůbec existují, pak kódy všech takovýchto hobitových důkazů musí být větší než na počátku zvolený kód hobitova důkazu PŘEKLADU negace Rosserovy formule v hobitově teorii T.

Uvedli jsme, že Rosserova formule postuluje existenci meze. Když sledujeme znění Rosserovy formule formulované pomocí podobenství o hobitech, nahlédneme, že touto mezí je kód hobitího důkazu PŘEKLADU negace Rosserovy formule v PŘEKLADU teorie $\boldsymbol{T}$ — další objekt, o kterém Rosserova formule vypovídá, totiž (možná existující) kód hobitího důkazu JEJÍHO PŘEKLADU v PŘEKLADU teorie $\boldsymbol{T}$, se již nikdy nesmí nacházet pod touto mezí. Zapojení ideje meze je pro naše úvahy přínosem vzhledem k výše vyslovenému faktu, že každé matematické přirozené číslo menší než PŘEKLAD metamatematického přirozeného čísla je už samo PŘEKLADEM nějakého (jiného) metamatematického čísla.

Přistupme teď k prokazování první věty o neúplnosti využívajíce Rosserovu formuli. Předpokládejme nejprve, že $\boldsymbol{T} \vdash \varrho$, tzn. přijměme předpoklad, že na metamatematické hladině existuje důkaz formule ϱ v teorii $\boldsymbol{T}$. Po zakódování posloupnosti formulí vytvářejících tento důkaz dostaneme nějaké metamatematické přirozené číslo, označme ho d_ϱ. Předejme toto číslo hobitovi spolu s doporučením, aby ho chápal jako kód posloupnosti svých formulí. V důsledku principu rozumného vztahu našeho metamatematického přirozeného čísla a JEHO PŘEKLADU musí hobit nahlédnout, že dostal kód svého důkazu v teorii T. My víme, že posledním členem tohoto důkazu je PŘEKLAD formule ϱ a že hobitova teorie T je PŘEKLADEM teorie $\boldsymbol{T}$. Ukázali jsme, že popsaná situace nastává u každého hobita, tzn. že pro každého hobita je d_ϱ kódem důkazu PŘEKLADU formule ϱ v PŘEKLADU teorie $\boldsymbol{T}$.

Teď přijde klíčové místo první části prokazování. Rosserova formule tvrdí, že existuje kód hobitova důkazu PŘEKLADU negace formule ϱ v PŘEKLADU teorie $\boldsymbol{T}$, jenž je *menší* než každý kód hobitova důkazu PŘEKLADU formule ϱ v PŘEKLADU teorie $\boldsymbol{T}$; jelikož kód postulovaného hobitova důkazu má být menší než *každý* kód hobitova důkazu PŘEKLADU formule ϱ v PŘEKLADU teorie $\boldsymbol{T}$, musí být kód postulovaného hobitova důkazu PŘEKLADU negace formule ϱ speciálně menší než hobitovo metamatematické číslo d_ϱ. Zde je to místo, kde se poprvé uplatní tvar Rosserovy formule, a čtenář by měl ocenit Rosserovu formulaci přes její poměrnou složitost.

Protože kód postulovaného hobitova důkazu je *menší* než PŘEKLAD našeho metamatematického čísla d_ϱ, musí být rovněž PŘEKLADEM nějakého našeho metamatematického přirozeného čísla m (jakékoli hobitovo metamatematické číslo menší než PŘEKLAD nějakého našeho metamatematického čísla je samo PŘEKLADEM našeho metamatematického přirozeného čísla). Na základě principu rozumného vztahu metamatematického přirozeného čísla a JEHO PŘEKLADU nahlédneme, že metamatematický důkaz kódovaný číslem m je důkazem negace formule ϱ v teorii $\boldsymbol{T}$. Z předpokladu $\boldsymbol{T} \vdash \varrho$ jsme tedy odvodili $\boldsymbol{T} \vdash \neg\varrho$, což je pro bezespornou teorii $\boldsymbol{T}$ vyloučeno. Jsme tedy nuceni odmítnout předpoklad $\boldsymbol{T} \vdash \varrho$.

Zopakujme předchozí úvahy v řeči matematiky. V této první části našeho prokazování předpokládáme, že $\boldsymbol{T} \vdash \varrho$, tzn. že existuje důkaz formule ϱ v teorii $\boldsymbol{T}$; zvolme takový důkaz, jeho kód budiž metamatematické číslo d_ϱ. Předpokládaná podobnost vztahů na metamatematické hladině a na hladině matematiky zajistí, že v $\boldsymbol{PA}$ je dokazatelné, že FORMALIZACE $\overline{d_\varrho}$ fixovaného kódu je kódem formálního důkazu FORMALIZACE formule ϱ ve FORMALIZACI teorie $\boldsymbol{T}$. Následně rovněž v teorii $\boldsymbol{T}$ je dokazatelná formule „$\overline{d_\varrho}$ je kódem formálního důkazu FORMALIZACE formule ϱ ve FORMALIZACI teorie $\boldsymbol{T}$“, neboť $\boldsymbol{T}$ je rozšířením Peanovy aritmetiky. Podle znění Rosserovy formule pak musí být v teorii $\boldsymbol{T}$ dokazatelná formule „existuje kód formálního důkazu FORMALIZACE negace formule ϱ ve FORMALIZACI teorie $\boldsymbol{T}$, který je menší než $\overline{d_\varrho}$“. Protože kód tohoto formálního důkazu je *menší* než term $\overline{d_\varrho}$, musí být FORMALIZACÍ nějakého metamatematického přirozeného čísla (viz cvičení III-2.22), a to (podle principu rozumného vztahu objektu a JEHO FORMALIZACE) dokonce kódem důkazu negace formule ϱ v teorii $\boldsymbol{T}$. Z předpokladu $\boldsymbol{T} \vdash \varrho$ jsme tedy vyvodili $\boldsymbol{T} \vdash \neg\varrho$, což je pro bezespornou teorii $\boldsymbol{T}$ absurdní. Musíme proto odmítnout předpoklad $\boldsymbol{T} \vdash \varrho$.

Předpokládejme proto druhou možnost, tj. $\boldsymbol{T} \vdash \neg\varrho$. Předpoklad umožňuje fixovat důkaz negace formule ϱ v teorii $\boldsymbol{T}$. Zakódujme fixovaný důkaz, označme tento kód znakem $d_{\neg\varrho}$, PŘELOŽME ho a dejme ho hobitovi s doporučením chápat číslo, které mu předáváme, jako kód posloupnosti jeho metamatematických přirozených čísel. Na základě principu rozumného vztahu objektu a JEHO FORMALIZACE si můžeme být jisti, že hobit odhalí, že jsme mu zadali kód jeho důkazu v jeho teorii T. My víme, že posledním členem tohoto důkazu je PŘEKLAD negace formule ϱ a že hobitova teorie T je PŘEKLA-

DEM teorie $\boldsymbol{T}$. Analogicky jako v první části si uvědomme, že popsaná situace nastává u každého hobita, tzn. že každý hobit nahlíží pravdivost tvrzení „$d_{\neg\varrho}$ je kódem důkazu PŘEKLADU formule $\neg\varrho$ v PŘEKLADU teorie $\boldsymbol{T}$“ pro svá metamatematická přirozená čísla.

V této chvíli je vhodné rozebrat (a opětovně ocenit) znění negace Rosserovy formule, tj. negace formule vyjadřující „existuje kód hobitova důkazu PŘEKLADU negace formule ϱ v PŘEKLADU teorie $\boldsymbol{T}$, jenž je menší než každý kód hobitova důkazu PŘEKLADU formule ϱ v PŘEKLADU teorie $\boldsymbol{T}$“. Nahlédneme, že negace Rosserovy formule vyjadřuje „pro každý kód hobitova důkazu PŘEKLADU negace formule ϱ v PŘEKLADU teorie $\boldsymbol{T}$ musí existovat menší číslo, jenž je kódem hobitova důkazu PŘEKLADU formule ϱ v hobitově teorii T“; speciálně tedy musí existovat hobitův důkaz PŘEKLADU formule ϱ v hobitově teorii T, jehož kód je menší než $d_{\neg\varrho}$. Kód hobitova důkazu, jehož existenci jsme právě zdůvodnili, musí být opětovně PŘEKLADEM nějakého metamatematického přirozeného čísla (protože je menší než $d_{\neg\varrho}$ a libovolné hobitovo metamatematické číslo menší než PŘEKLAD nějakého našeho metamatematického čísla je samo PŘEKLADEM našeho metamatematického přirozeného čísla). Znovu z principu rozumného vztahu metamatematického přirozeného čísla a JEHO PŘEKLADU je zmíněné metamatematické přirozené číslo kódem důkazu formule ϱ v teorii $\boldsymbol{T}$; teď se můžeme přestat bavit o kódech a prostě konstatovat, že máme důkaz formule ϱ v teorii $\boldsymbol{T}$. Vyšli jsme z předpokladu $\boldsymbol{T} \vdash \neg\varrho$ a prokázali $\boldsymbol{T} \vdash \varrho$. Předpoklad bezespornosti teorie $\boldsymbol{T}$ nás tedy nutí zavrhnout i možnost $\boldsymbol{T} \vdash \neg\varrho$.

Tak znovu a bez hobitů. Ve druhé části našeho prokazování předpokládáme $\boldsymbol{T} \vdash \neg\varrho$, tj. předpokládáme existenci důkazu formule $\neg\varrho$ v teorii $\boldsymbol{T}$; fixujme takový důkaz, jeho kód označme $d_{\neg\varrho}$. V důsledku principu rozumného vztahu objektu a JEHO FORMALIZACE nahlédneme, že FORMALIZACE $\overline{d_{\neg\varrho}}$ fixovaného kódu je kódem formálního důkazu FORMALIZACE formule $\neg\varrho$ ve FORMALIZACI teorie $\boldsymbol{T}$. Pročež v Peanově aritmetice a tím spíše v teorii $\boldsymbol{T}$ je dokazatelná formule „$\overline{d_{\neg\varrho}}$ je kódem formálního důkazu FORMALIZACE negace formule ϱ ve FORMALIZACI teorie $\boldsymbol{T}$“. Podle znění *negace* Rosserovy formule však „pro každý kód formálního důkazu FORMALIZACE negace formule ϱ musí existovat menší kód formálního důkazu FORMALIZACE formule ϱ ve FORMALIZACI teorie $\boldsymbol{T}$“, a speciálně tedy musí existovat formální důkaz FORMALIZACE formule ϱ ve FORMALIZACI teorie $\boldsymbol{T}$, jehož kód je menší než $\overline{d_{\neg\varrho}}$. Kód tohoto formálního důkazu musí být opět FORMALIZACÍ nějakého metamatematického přirozeného čísla (protože je menší než $\overline{d_{\neg\varrho}}$) a princip rozumného vztahu metamatematického přirozeného čísla a JEHO FORMALIZACE nám znovu zaručí, že zkoumané metamatematické přirozené číslo je kódem důkazu formule ϱ v teorii $\boldsymbol{T}$. Předpoklad bezespornosti teorie $\boldsymbol{T}$ nás tedy nutí zavrhnout i možnost $\boldsymbol{T} \vdash \neg\varrho$.

8) nedokazatelnost formální bezespornosti

Doposud jsme Gödelovu formuli používali jen jako nástroj pro prokazování první věty o neúplnosti. Gödel však navíc ukázal její reformulaci, jež umožňuje nový pohled na možnost dokazování bezespornosti teorií.

Prokázal totiž, že v každém rekurzivním rozšíření $\boldsymbol{T}$ Peanovy aritmetiky je dokazatelná ekvivalence Gödelovy formule a formule FORMALIZACE teorie $\boldsymbol{T}$ je formálně bezesporná. Tedy[21)] žádné bezesporné rekurzivní rozšíření Peanovy aritmetiky *nemá* dost prostředků, aby prokázalo formální bezespornost SVOJÍ FORMALIZACE. Je zvykem označovat podtržené tvrzení za **druhou větu o neúplnosti.**

21) v důsledku formulace první věty o neúplnosti užívající Gödelovu formuli

Pokud jste, vážený čtenáři, přijal princip rozumného vztahu objektu a JEHO FORMALIZACE, nebudou pro vás ideje prokazující druhou větu o neúplnosti obtížnější než ideje užité při první větě o neúplnosti. V teorii $\boldsymbol{T}$ potřebujeme ukázat jednak, že z Gödelovy formule plyne formální bezespornost FORMALIZACE teorie $\boldsymbol{T}$ a jednak obrácení této implikace, tzn. že z negace Gödelovy formule plyne formální spornost FORMALIZACE teorie $\boldsymbol{T}$.

Důkaz první implikace je natolik jednoduchý, že ho předvedeme rovnou ve verzi používající výhradně matematické pojmy. Sporné teorie jsou přesně ty, ve kterých jsou dokazatelné všechny formule jazyka teorie. Není-li jediná formule jazyka teorie v ní dokazatelná, je teorie bezesporná. Přesně stejně: není-li jedna formální formule jazyka formální teorie v ní formálně dokazatelná, je formální teorie formálně bezesporná. Gödelova formule γ vypovídá, že jakási formální formule (JEJÍ FORMALIZACE) není formálně dokazatelná ve FORMALIZACI teorie $\boldsymbol{T}$. Tedy Gödelova formule implikuje formální bezespornost FORMALIZACE teorie $\boldsymbol{T}$.

Obrácenou implikaci nejprve zdůvodníme příběhem o hobitech. Žil byl jednou hobit jménem Tolkien a ten napsal knihu Pán prstenů. V ní vypráví o hobitech a hobitících a jejich společném snažení; hobitíci v příběhu hráli podstatnou úlohu, jeden z nich dokonce nesl Prsten. Nezávisle na příběhu o Prstenu popsal hobit jménem Gödel vztah metamatematických přirozených čísel hobitů a hobitíků. Uvažoval hobití teorii T, která je rekurzivní a je rozšířením hobití Peanovy aritmetiky, a vytvořil také formuli $h\gamma$ hobita Gödela, která má význam

„MOJE FORMALIZACE do řeči hobitíků je hobitíkovsky nedokazatelná ve FORMALIZACI teorie T v řeči hobitíků“.

My víme, že negace (lidské) Gödelovy formule je tvrzení na metamatematické hladině hobitů, které říká, že v hobití teorii T je dokazatelný PŘEKLAD Gödelovy formule. Navíc PŘEKLAD Gödelovy formule je právě popsaná formule hobita Gödela.

Hobit Gödel ukázal, že z předpokladu dokazatelnosti jeho formule $h\gamma$ v hobití teorii T dostane spor. (Srovnejte, milý čtenáři, následující úvahy hobita Gödela s úvahami z třetího a čtvrtého odstavce prokazování první věty o neúplnosti užívající Gödelovu formuli, přičemž posuňte úvahy o hladinu „níž“, tzn. „my lidé“ nahraďte „hobit Gödel“, slovo „PŘEKLAD“ zaměňte za slovní spojení „PŘEKLAD do řeči hobitíků“, slovo „hobit“ změňte na slovo „hobitík“ a místo „teorie T“ užijte „PŘEKLAD teorie T do řeči hobitíků“, atd.).

Hobit Gödel si představil, že hobití formule $h\gamma$ je hobitovsky dokazatelná v hobití teorii T, tzn. že na hobití metamatematické hladině existuje důkaz formule $h\gamma$ v hobití teorii T. Hobit Gödel zakódoval tento hobití důkaz a sestrojil PŘEKLAD získaného kódu do řeči hobitíků a předal ho hobitíkovi spolu s doporučením, aby se na toto číslo díval jako na kód posloupnosti svých formulí. Hobitík rozpoznal, že dostal kód posloupnosti (svých) formulí, kterážto posloupnost je (v jeho pojetí) důkazem v PŘEKLADU teorie T do řeči hobitíků. Poslední člen této posloupnosti byl z hobitíkova pohledu dokazatelný v PŘEKLADU teorie T do řeči hobitíků; hobit Gödel si navíc uvědomoval, že tento poslední člen je hobitíkovou formulí, která je PŘEKLADEM jeho formule $h\gamma$ do řeči hobitíků. Takže hobit Gödel shrnul, že hobitík zjistil pro svá metamatematická přirozená čísla pravdivost tvrzení „FORMALIZACE formule $h\gamma$ je hobitíkovsky dokazatelná ve FORMALIZACI teorie T do řeči hobitíků“. Potom se podíval na znění své formule $h\gamma$ a prostě konstatoval, že hobitík nahlédl pravdivost negace jeho formule.

Hobit Gödel vyšel z předpokladu dokazatelnosti jeho formule $h\gamma$ v teorii T a zjistili, že *každý* hobitík nahlíží tvrzení $\neg h\gamma$. Tedy v hobití Peanově aritmetice je hobitovsky dokazatelná hobití formule $\neg h\gamma$, tím spíše je hobití formule $h\gamma$ dokazatelná v teorii T, neboť T je rozšířením hobití Peanovy aritmetiky. Hobit Gödel tedy prokázal spornost hobití teorie T.

Zopakujme předchozí úvahu bez vyprávění příběhu o hobitech. Předpokládáme-li $\neg\gamma$, pak (z důvodu volby formule γ) předpokládáme, že FORMALIZACE Gödelovy formule je formálně dokazatelná ve FORMALIZACI teorie $\boldsymbol{T}$. Přijměme teorii $\boldsymbol{T}$ za svoji metamatematiku; v takovém případě můžeme všechna slova „formální" a „FORMALIZACE" v kurzívou psaném slovním spojení vynechat, ale z předchozího prokazování první věty o neúplnosti užívajícího Gödelovu formuli víme, že předpoklad $\boldsymbol{T} \vdash \gamma$ (tj. předpoklad, že Gödelova formule je dokazatelná v teorii $\boldsymbol{T}$) vede ke spornosti teorie $\boldsymbol{T}$. Při návratu na původní metamatematickou hladinu (po přidání slov „formální" a „FORMALIZACE") tedy musíme konstatovat, že v teorii $\boldsymbol{T}$ předpoklad $\neg\gamma$ implikuje formální spornost FORMALIZACE teorie $\boldsymbol{T}$.

*

V předchozím textu jsme popsali všechny podstatné myšlenky potřebné pro prokázání vět o neúplnosti; je však třeba si uvědomit, že jsme se zabývali jen těmi krásnými a zajímavými částmi. Například jsme zcela volně používali princip rozumného vztahu objektu a JEHO FORMALIZACE. Tento princip je však potřeba odůvodnit, a to je poměrně obtížná, a nadto „otrocká" práce.

K větám o neúplnosti připojme ještě dvě poznámky:

(1) Ve větách o neúplnosti se mluví pouze o rozšířeních Peanovy aritmetiky. Výsledky jsou však aplikovatelné i na jiné teorie, dokonce i na teorie, které mají zcela jiný jazyk než aritmetika. Například aritmetiku lze vybudovat v teorii množin, a tedy ani axiomatická teorie množin není úplná teorie.

(2) Gödel a následovníci sice sestrojili formule nedokazatelné a současně nevyvratitelné v nejrůznějších matematických teoriích, ale výsledky tohoto typu vůbec nic neříkají o *konkrétních předem daných* formulích; např. nehovoří o tom, zda pátý Eukleidův postulát je dokazatelný v geometrii nebo zda hypotéza kontinua je dokazatelná v teorii množin, a tedy ideje popsané v tomto paragrafu *nemohou* nahradit (mnohdy obtížné) výsledky o nedokazatelnosti konkrétních formulí v konkrétních teoriích.

*

Na počátku paragrafu jsme nastolili otázku, zda stroj může nahradit matematika při dokazování v predikátovém počtu. Rozbor položené otázky vedl k motivaci rekurzivní teorie, avšak poté jsme místo formulace odpovědi přešli k Hilbertovu programu a k větám o neúplnosti, které zdánlivě s naším počátečním problémem nesouvisí.

Věty o neúplnosti jsou pro logiku tvrzení prvořadého významu. Nicméně i když se omezíme pouze na původně položenou otázku po vztahu matematik-stroj, ukážeme nyní, že věta o neúplnosti nebyla odbočkou, ale naopak přípravou nástroje pro řešení nastoleného problém. Na základě první věty o neúplnosti není totiž již tak obtížné ukázat, že pro *žádné* bezesporné rozšíření $\boldsymbol{T}$ Peanovy aritmetiky neexistuje algoritmus, který by rozhodoval, zda ta která formule je, či není v teorii $\boldsymbol{T}$ dokazatelná. Metodu prokazování tohoto tvrzení ukážeme za okamžik v petitem psaném textu.

Současně je třeba zdůraznit, že jsou známy i teorie s algoritmem rozhodujícím dokazatelnost formulí. Presburgerův výsledek ukazuje, že jako příklad (značně netriviální) může sloužit aritmetika, ve které uvažujeme pouze funkci následovníka a sčítání. Jiný, a to jednodušší, příklad týkající se uspořádání bude předveden v dodatku o teoriích.

Obecný algoritmus rozhodující dokazatelnost formulí tedy neexistuje — pro matematiky naštěstí, protože tím je zaručeno, že matematické věty nemůže zcela efektivně místo nich dokazovat stroj[22], k hledání důkazů je třeba matematikova intuice.

Chceme vyvrátit, že může existovat bezesporná teorie $\boldsymbol{T}$ rozšiřující Peanovu aritmetiku spolu s algoritmem, který o každé uzavřené formuli rozhoduje, zda je, či není dokazatelná v teorii $\boldsymbol{T}$. Předpokládejme tudíž, že je zadána jak teorie $\boldsymbol{T}$, tak algoritmus s popsanými vlastnostmi. Buď $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ očíslování uzavřených formulí jazyka teorie $\boldsymbol{T}$ pomocí metamatematických přirozených čísel. (Formule jazyka teorie $\boldsymbol{T}$ jsou nějaká metamatematická přirozená čísla, my jsme si prostě očíslovali ta metamatematická čísla, která jsou uzavřenými formulemi vyšetřovaného jazyka.) Postupně budeme o každé formuli φ_n rozhodovat, jestli ji přijmeme za axiom nově vznikající teorie $\boldsymbol{S}$, nebo ne. Pro jednodušší vyjadřování si představujme, že postupně rekurzí vytváříme teorie $\boldsymbol{S}_n$ a že výsledná teorie $\boldsymbol{S}$ bude mít za axiomy přesně všechny formule, které byly přijaty za axiomy některé z teorií $\boldsymbol{S}_n$. Je zcela přirozené, že začneme s teorií $\boldsymbol{T}$, tzn. že za teorii $\boldsymbol{S}_0$ zvolíme teorii $\boldsymbol{T}$.

Nechť jsme již rozhodli, které z formulí $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ za axiomy teorie $\boldsymbol{S}$ přijmeme, tj. zaujměme postoj, že jsme již sestrojili teorii $\boldsymbol{S}_n$. Nejprve nahlédněme, že (na základě předpokládaného algoritmu rozhodujícího dokazatelnost v $\boldsymbol{T}$) máme k dispozici rovněž algoritmus, jenž o každé uzavřené formuli jazyka teorie $\boldsymbol{S}_n$ rozhoduje zda je, či není dokazatelná v teorii $\boldsymbol{S}_n$. Označme ϑ konjunkci všech formulí za skupiny formulí $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$, které jsme přijali za dodatečné axiomy teorie $\boldsymbol{S}_n$. V důsledku důkazu dedukcí je jakákoli formule ψ dokazatelná v teorii $\boldsymbol{S}_n$, právě když je formule $\vartheta \to \psi$ dokazatelná v teorii $\boldsymbol{T}$. Takže algoritmus rozhodující o dokazatelnosti uzavřených formulí v teorii $\boldsymbol{S}_n$ je velice prostý: zeptáme se původně postulovaného algoritmu, jestli je v teorii $\boldsymbol{T}$ dokazatelná formule $\vartheta \to \psi$.

Za předpokladu, že teorie $\boldsymbol{S}_n$ již byla zkonstruována, máme sestrojit teorii $\boldsymbol{S}_{n+1}$, tj. rozhodnout, jestli za dodatečný axiom přijmeme formuli φ_n. V prvé řadě se dotážeme stroje, zda je alespoň jedna z formulí $\varphi_n, \neg\varphi_n$ v teorii $\boldsymbol{S}_n$ dokazatelná (z konstrukce bude jasné, že nemohou být dokazatelné obě najednou). Pokud nám stroj na základě výše sestrojeného algoritmu sdělí, že jedna z uvažovaných formulí je dokazatelná, nepřijmeme

[22] Řečeným nevylučujeme, že nemůžeme nechat stroj dokazovat, ani netvrdíme, že by nám stroj nemohl napsat mnohá nová tvrzení. Pouze vyhlašujeme, že neumíme — a nikdy nikdo nebude umět — zadat algoritmus, podle kterého stroj pro každou konkrétní uzavřenou formuli po určité době buďto prohlásí, že formule je dokazatelná, nebo oznámí, že je nedokazatelná.

formuli φ_n jako nový axiom, tzn. ztotožníme teorii $\boldsymbol{S}_{n+1}$ s teorií $\boldsymbol{S}_n$. Pokud algoritmus rozhodne, že žádná z formulí $\varphi_n, \neg\varphi_n$ není dokazatelná v teorii $\boldsymbol{S}_n$, přijmeme formuli φ_n jako dodatečný axiom, tj. definujeme $\boldsymbol{S}_{n+1}$ jako teorii $\boldsymbol{S}_n, \varphi_n$.

Rozhodujícím pozorováním pro celou konstrukci je nahlédnout, že každá z teorií $\boldsymbol{S}_n$ je bezesporná. To se prokazuje pochopitelně indukcí; teorie $\boldsymbol{S}_0$, tj. teorie $\boldsymbol{T}$, je bezesporná podle předpokladu. Přistupme k prokázání indukčního kroku a předpokládejme bezespornost teorie $\boldsymbol{S}_n$. Pokud je $\boldsymbol{S}_{n+1}$ totožná s teorií $\boldsymbol{S}_n$, není co dokazovat. Uvědomme si, že nutným předpokladem pro přidání formule φ_n jakožto dodatečného axiomu teorie $\boldsymbol{S}_{n+1}$ byla nedokazatelnost formule $\neg\varphi_n$ v teorii $\boldsymbol{S}_n$. Kdyby teorie $\boldsymbol{S}_{n+1}$ byla sporná, byla by v ní, tzn. v teorii $\boldsymbol{S}_n, \varphi_n$, dokazatelná formule $\neg\varphi_n$. Nadto v teorii $\boldsymbol{S}_n, \neg\varphi_n$ je formule $\neg\varphi_n$ dokazatelná zcela triviálně jakožto axiom této teorie. Podle důkazu neutrální formulí nahlédneme, že již v samotné teorii $\boldsymbol{S}_n$ by pak musela být dokazatelná formule $\neg\varphi_n$, což odporuje našim předpokladům.

Ukázali jsme, že každá z teorií $\boldsymbol{S}_n$ je bezesporná. Vyvodit nyní bezespornost celé teorie $\boldsymbol{S}$ je snadné — kdyby $\boldsymbol{S}$ byla sporná, musela by být sporná již teorie mající konečně mnoho jejích axiomů, takže by pro jakési vhodné n musela být sporná teorie $\boldsymbol{S}_n$, což jsme vyloučili.

Teorie $\boldsymbol{S}$ je bezesporná a je evidentně rozšířením Peanovy aritmetiky, protože již počáteční teorie $\boldsymbol{S}_0$, tj. teorie $\boldsymbol{T}$, byla rozšířením Peanovy aritmetiky. Popsali jsme algoritmus vybírající axiomy teorie $\boldsymbol{S}$ (na základě předpokládaného algoritmu rozhodujícího o dokazatelnosti v teorii $\boldsymbol{T}$), pročež teorie $\boldsymbol{S}$ je rekurzivní. Teorie $\boldsymbol{S}$ musí být navíc také úplná: Kdyby žádná z formulí $\varphi_n, \neg\varphi_n$ nebyla dokazatelná v teorii $\boldsymbol{S}$, nebyla by žádná z nich dokazatelná ani v teorii $\boldsymbol{S}_n$, takže by φ_n byla axiomem teorie $\boldsymbol{S}_{n+1}$, tudíž by byla φ_n axiomem teorie $\boldsymbol{S}$, a následně by byla v $\boldsymbol{S}$ dokazatelná.

Teorie $\boldsymbol{S}$ s uvedenými vlastnostmi nemůže existovat podle první věty o neúplnosti. Musíme proto odmítnout předpoklad existence bezesporné teorie $\boldsymbol{T}$ rozšiřující Peanovu aritmetiku, k níž existuje algoritmus, který o každé formuli rozhoduje zda je, či není dokazatelná v teorii $\boldsymbol{T}$.

*

Na závěr zopakujme, že v běžné matematice hledáme důkazy tvrzení na základě přijatých axiomů. V minulém paragrafu jsme nahlédli, že je možno ukázat, že důkaz nemůže existovat. Tento typ výsledků o nedokazatelnosti ještě nezpochybňuje naši víru v lidské možnosti — ve většině případů si prostě představíme, že jsme ještě systémem axiomů nepopsali situaci dostatečně podrobně a že je zapotřebí přidat dodatečný axiom. V tomto paragrafu jsme však dokonce popsali konstrukce, které ke *každé* „vhodně popsané a dostatečně silné“ bezesporné teorii sestrojí tvrzení, které nejsme schopni v uvažované teorii ani dokázat, ani vyvrátit — a toto již *musíme vyložit jako principiální omezenost deduktivní metody* neboli volněji řečeno jako neschopnost lidského rozumu uchopit (poznat a popsat) pomocí „vhodně popsané“ teorie mnohé oblasti (např. aritmetiku intuitivních přirozených čísel) *v celé jejich šíři.*

Gödelův výsledek o neúplnosti tudíž vyvolává současně hrdost i pokoru: hrdost nad tím, jak daleko může jít lidské poznání — až tak daleko, že dokáže poznat své meze — a poznání mezí by zase mělo být zdrojem pokory.

CVIČENÍ

III-2.1 Pokud existuje člověk, který má nejvíce světových rekordů, má jich alespoň o dva více než druhý v pořadí. Proč?

III-2.2 Další paradox z antické doby vytvořený Stoiky je **paradox krokodýla,** který můžeme formulovat následovně: Krokodýl unesl dítě a slibuje matce, že ho vrátí, právě když odpoví po pravdě na otázku „Vrátím dítě?“. Doporučili byste zoufalé matce odpověď „ano“, nebo odpověď „ne“?

III-2.3 Sofista Prótagorás[23)] (5. stol. př. Kr.) prý vyučoval žáka jménem Euathlos. Dohodli se, že Euathlos zaplatí polovinu peněz hned a polovinu po vítězství v prvním soudním sporu. Po skončení studia však Euathlos žádný soudní spor nevedl a nezaplatil proto svému učiteli zbylou část peněz. Jak Prótagorás získá druhou polovinu peněz?

V právě uzavíraném paragrafu byla velmi podstatná samovztažná tvrzení, v našem textu jsme se však poprvé jimi začali podrobněji zabývat už v příkladu 2 z prvního paragrafu první kapitoly. Připojme ještě tři problémy (přetlumočené z [Sm1]), které jsou podobné problémům z citovaného paragrafu. Budete se v nich snažit sdělit že (a) někdy mluvíte pravdu a někdy lžete, nebo (b) vždy mluvíte pravdu, nebo nikdy pravdu neříkáte. Doufám, že pouhé tři problémy připomenou dostatečně samovztažnost v hádankách tohoto typu.

III-2.4 Jaký nejmenší počet výroků vám postačí, abyste přesvědčili ostatní, že někdy mluvíte pravdu a někdy lžete? Můžete systém výroků vyhovující předchozímu požadavku volit tak, aby všechny výroky v systému byly pravdivé? Lze systém výroků vyhovující požadavku první věty vybrat tak, aby všechny výroky v systému byly nepravdivé?

III-2.5 Nyní máte nalézt výrok, který přesvědčí ostatní, že někdy mluvíte pravdu a někdy lžete, avšak navíc takový, že nikdo nebude vědět, zda výrok je pravdivý či nikoli.

III-2.6 Jaký nejmenší počet výroků vám postačí, abyste přesvědčili ostatní, že vždy mluvíte pravdu, nebo vždy lžete?

III-2.7 Porciina pravnučka[24)] se rozhodla zachovat možnost matčiných „ozvláštněných“ nápisů, usmyslela si však, že úkolů bude celá řada a úspěšný nápadník musí postupně obstát ve všech (na druhé straně si pravnučka Porcie uvědomovala, že se časy změnily, a již nežádala od nápadníků přísahu, že se v případě neúspěchu nikdy neožení). Úkoly rozvrhla do čtyř dnů, pro první dva dny připravovala pouze po dvou skřínkách pro jeden úkol, pro třetí den skřínky tři.

---

23) Pro svou knihu O bozích začínající slovy „O bozích nevím, ani zda jsou, ani zda nejsou.“ byl vypovězen z Athén.

24) Úlohy o pravnučce Porcie jsou převážně inspirovány kap. IV [Ga1]; řazeny jsou do třetí kapitoly, protože u mnohých z nich obsah skřínek neovlivňuje jen pravdivostní hodnoty nápisů nacházejících se na jednotlivých skřínkách, avšak ovlivňuje dokonce zadání hádanky v tom smyslu, že na uložení podobizny závisí, jaké pravdivostní hodnoty nápisů na skřínkách jsou pro řešení požadovány.

Nápadníky však upozornila, že může v těchto prvních dnech dát podobiznu do více skřínek, nebo nechat všechny prázdné, zcela podle svého uvážení a nálady. Úkolem každého nápadníka v prvních třech dnech bylo, aby přesně popsal, co je v té které skřínce, nikoli pouze vybral skřínku s podobiznou. Na závěrečný den připravovala Porciina pravnučka zcela osobitou zkoušku.

První den pravnučka naplánovala čtyři zkoušky. V prvém případě nápadníkovi oznámila, že jeden nápis je pravdivý a druhý nepravdivý:

zlatá	stříbrná
Podobizna je v této skřínce a stříbrná skřínka je prázdná.	Podobizna je v jedné skřínce a druhá skřínka je prázdná.

III-2.8 Při druhé zkoušce sdělila Porciina pravnučka nápadníkovi, že buďto oba nápisy jsou pravdivé, nebo oba nepravdivé:

zlatá	stříbrná
Alespoň v jedné skřínce je portrét.	Zlatá skřínka je prázdná.

III-2.9 Rovněž při třetí zkoušce se nápadník dověděl, že buďto oba nápisy jsou pravdivé, nebo oba nepravdivé:

zlatá	stříbrná
Tato skřínka je prázdná a ve stříbrné skřínce je podobizna.	Podobizna je ve zlaté skřínce.

III-2.10 Při poslední zkoušce prvního dne došlo oproti předchozí zkoušce k jediné změně: na zlaté skřínce slovíčko „nebo“ nahradilo slůvko „a“ a nápis na zlaté skřínce tedy zněl „Tato skřínka je prázdná nebo ve stříbrné skřínce je podobizna.“ (zadání, že buďto jsou oba nápisy pravdivé, nebo jsou oba nepravdivé, zůstalo zachováno). Měl nápadník změnit svou odpověď?

III-2.11 Druhý den Porciina pravnučka podstatně změnila pravidla zkoušek, a to na celý den (cvičení III-2.11–III-2.15). Stanovila totiž, že bude-li ve zlaté skřínce podobizna, bude nápis na ní pravdivý a bude-li zlatá skřínka prázdná, bu de nápis na ní nepravdivý. O stříbrné skřínce prohlásila pravý opak: bude-li ve stříbrné skřínce podobizna, bude nápis na ní nepravdivý a bude-li stříbrná skřínka prázdná, bude nápis na ní pravdivý. Pak přivedla nápadníka ke skřínkám s nápisy uvedenými vpravo.

zlatá	stříbrná
V obou skřínkách jsou podobizny.	V obou skřínkách jsou podobizny.

III-2.12

zlatá	stříbrná
Alespoň v jedné skřínce je portrét.	Portrét je ve zlaté skřínce.

III-2.13

zlatá	stříbrná
Je jedno, kterou skřínku zvolíš.	Portrét je ve zlaté skřínce.

III-2.14

zlatá	stříbrná
Na volbě skřínky velice záleží.	Portrét je ve zlaté skřínce.

III-2.15 Teprve při poslední zkoušce druhého dne se situace podstatně změnila. K této zkoušce postoupilo již jen málo nápadníků a tito nápadníci byli velice překvapeni, když při devátém příchodu našli skřínky bez nápisů. Porciina pravnučka poté podala udiveným nápadníkům dvě tabulky s nápisy „Tato skřínka je prázdná.“ a „Obě skřínky jsou prázdné.“. Na pochopitelnou otázku, který nápis patří na kterou skřínku, odpovídala, že součástí úlohy je také rozhodnout, zda na tom záleží. Představujte si, že Porciina pravnučka opravdu stojí za namáhání mozku, a tak hledejte řešení i pro takto neobvykle formulovanou hádanku.

III-2.16 Třetí den přiváděla pravnučka Porcie nápadníky již ke třem skřínkám a při prvních dvou úkolech vyhlašovala, že všechny nápisy jsou buďto pravdivé, nebo všechny nepravdivé. Naproti tomu o počtu uložených podobizen se prý nic nepředpokládá.

zlatá	stříbrná	olověná
Podobizna není v olověné skřínce.	Podobizna není ve zlaté skřínce nebo je v této skřínce.	Podobizna je ve stříbrné skřínce a také je v této skřínce.

III-2.17 Pro druhý úkol se zadání nezměnilo.

zlatá	stříbrná	olověná
Nezáleží na tom, kterou skřínku vybereš.	Podobizna je ve zlaté skřínce nebo je v této skřínce.	Podobizna není v této skřínce.

Navíc se každého nápadníka, který uspěl při všech předchozích úkolech, pravnučka Porcie zeptala, zda by se jeho řešení změnilo, kdyby při posledním úkolu bylo na olověné skřínce zaměněno slůvko „není“ slovíčkem „je“, tzn. kdyby nápis zněl „Podobizna je v této skřínce.“.

III-2.18 Při třetím úkolu změnila pravnučka Porcie zadání tak, že přesně jedna skřínka obsahuje podobiznu a nápis na ní je pravdivý; na druhých dvou skřínkách je alespoň jeden nápis nepravdivý.

zlatá	stříbrná	olověná
Stříbrná skřínka je prázdná.	Tato skřínka je prázdná.	Zlatá skřínka je prázdná.

III-2.19 Čtvrtý den byl nápadník (po strašně dlouhé době se konečně jednomu podařilo vyřešit všechny hádanky prvních tří dnů) doveden dokonce k devíti skřínkám, které byly označeny číslicemi. Nápadníkovým jediným úkolem bylo otevřít skřínku s podobiznou, popis obsahu ostatních skřínek se nevyžadoval. Bylo mu sděleno, že podobizna té, o kterou se uchází, je přesně v jedné skřínce a na této skřínce je pravdivý nápis. Další skřínky mohou být prázdné a na těchto skřínkách jsou nápisy nepravdivé; poslední možností je, že se ve skřínkách nacházejí dopisy na rozloučenou a nápisy na těchto skřínkách mohou být jak pravdivé, tak i nepravdivé. Nápadníkovi netrvalo dlouho a prohlásil, že za těchto okolností nelze jednoznačně rozhodnout, kde se nachází podobizna (naleznete alespoň dvě různá možná řešení?). S tímto prohlášením pravnučka Porcie souhlasila a navrhla nápadníkovi, ať se zeptá tak, aby jej odpověď přiblížila k jednoznačnému řešení. Ovšem na otázku, zda osmá skřínka obsahuje dopis na rozloučenou, se jen šibalsky usmála a odvětila, že pravdivá odpověď by již sama o sobě umožnila jednoznačné řešení a odmítla cokoli dalšího dodat. Myslíte, že má nápadník i po takovéto odpovědi-neodpovědi šanci získat svou vyvolenou nepoužívaje nic jiného než logické úvahy?

I	II	III
Podobizna je ve skřínce s lichým číslem.	Tato skřínka obsahuje dopis na rozloučenou.	Nápis na skřínce V je pravdivý nebo je nepravdivý nápis na skřínce VII.
IV	**V**	**VI**
Nápis na skřínce I je nepravdivý.	Nápis na skřínce II je pravdivý nebo je pravdivý nápis na skřínce IV.	Nápis na skřínce III je nepravdivý.

VII	VIII	IX
Ve skřínce I není podobizna.	Tato skřínka je prázdná a skřínka IX obsahuje dopis.	Tato skřínka je prázdná a nápis na skřínce VI je nepravdivý.

Následující tři cvičení ukazují příklady toho, co by bylo zapotřebí ukázat, abychom prokázali princip rozumného vztahu metamatematického přirozeného čísla a JEHO FORMALIZACE — naprosto však nezachycují vše potřebné (např. bychom také museli ukázat, že pro dvě různá metamatematická přirozená čísla n, m je dokazatelné $\overline{n} \neq \overline{m}$ a mnohé jiné). Výsledek cvičení III-2.22 je zcela klíčový pro prokazování věty o neúplnosti pomocí Rosserovy formule, neboť implikace zleva doprava zachycuje princip „číslo menší než FORMALIZACE nějakého metamatematického přirozeného čísla je samo také FORMALIZACÍ nějakého metamatematického přirozeného čísla".

III-2.20 V Robinsonově aritmetice dokažte $\overline{n} + \overline{m} = \overline{n+m}$.
(Uvědomte si, že např. pro $n = 2$ a $m = 3$ tvrdíme

$$\boldsymbol{RA} \vdash \mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathit{0})) + \mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathit{0}))) = \mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathit{0}))))).)$$

Návod: *metamatematickou*[25] indukcí podle metamatematického přirozeného čísla m při fixovaném čísle n. Pro $m = 0$ užijte axiom **RA4** a definici FORMALIZACE metamatematického čísla 0; při prokazování indukčního kroku použijte definici FORMALIZACE metamatematického následovníka a axiom **RA5.**

III-2.21 V teorii $\boldsymbol{RA}$ dokažte $\overline{n} \cdot \overline{m} = \overline{n \cdot m}$.
(Uvědomte si, že např. pro $n = 2$ a $m = 3$ tvrdíme

$$\boldsymbol{RA} \vdash \mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathit{0})) \cdot \mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathit{0}))) = \mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathit{0})))))).)$$

Návod: *metamatematickou*[25] indukcí podle metamatematického přirozeného čísla m při fixovaném čísle n. Pro $m = 0$ užijte axiom **RA6** a definici FORMALIZACE metamatematického čísla 0; pro prokázání indukčního kroku požijte výsledek předchozího cvičení, axiom **RA7** a definici FORMALIZACE metamatematického následovníka.

III-2.22 V Robinsonově aritmetice dokažte

$$x \leq \overline{n} \equiv (x = \overline{0} \vee x = \overline{1} \vee \ldots \vee x = \overline{n-1} \vee x = \overline{n}).$$

Návod: pro implikaci zprava doleva si uvědomte, že disjunkty jsou tvaru $x = \overline{m}$, kde m menší nebo rovno n, uvažujte rozdíl čísel $n - m$ a použijte cvičení III-2.20 a axiom **RA8.** Opačnou implikaci dokazujte metamatematickou indukcí

[25] Formulace cvičení žádá důkaz v teorii $\boldsymbol{RA}$, aby bylo hned jasné, že nelze dokazovat matematickou indukcí, která není v teorii $\boldsymbol{RA}$ k dispozici.

podle n. Pro případ $n = 0$ užijte formuli (ra3) dokázanou v předchozím paragrafu. Pro prokázání indukčního kroku předpokládejte nejprve navíc $x \neq \mathsf{o}$, užijte axiom **RA3** a formuli (ra4) z minulého paragrafu a následně indukční předpoklad.