Prostory funkcí
Malý přehled současné teorie

Miroslav Krbec (Praha)

krbecm@math.cas.cz

http://www.math.cas.cz/~krbecm

rozšířená verze kolokviální přednášky

Matematický ústav Slezské univerzity

Opava, 23. dubna 2008

1 Označení, základní pojmy

Základní prostory a označení:

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je měřitelná, $1 \leq p \leq \infty$.

Lebesgueův prostor $L_p(\Omega)$ je definován jako prostor všech měřitelných funkcí na Ω s konečnou normou $\|f\|_p =$
$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}$ pro $p < \infty$
$\|f\|_\infty = \|f\|_{L_\infty(\Omega)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)|$ pro $p = \infty$.

Známo: pro $1 < p < \infty$, $L_p(\Omega)$ prostory jsou separabilní a reflexivní Banachovy prostory; pro $p = 2$ dostáváme Hilbertův prostor se skalárním součinem $\int_\Omega f(x)g(x) \, dx$.

Prostor $L_1(\Omega)$ je separabilní, zatímco $L_\infty(\Omega)$ separabilní není (uvažuj např. charakteristické funkce koulí se středy v bodech hustoty Ω. Je-li $1 \leq p \leq \infty$, pak $p' = p/(p-1)$ obvykle značí *konjugovaný exponent* k p; přitom $p' = \infty$ pro $p = 1$ a $p' = 1$ pro $p = \infty$. Jestliže $1 < p < \infty$, pak $(L_p(\Omega))'$, duální prostor k $L_p(\Omega)$, je $L_{p'}(\Omega)$ a každý omezený lineární funkcionál F na $L_p(\Omega)$ má právě jednu reprezentaci v termínech duality, $f \mapsto < f, g >= \int_\Omega f(x)g(x)\,dx$ pro jednoznačně určené $g \in L_{p'}$. Na koncích škály, $p = 1$ nebo $p = \infty$, dualita dává pouze normu, tj.

$$\|f\|_p = \sup \left\{ \int_\Omega f(x)g(x)\,dx;\ \|g\|_{p'} \leq 1 \right\}.$$

Symbol $C^\alpha(\Omega)$, $0 < \alpha \leq 1$, označuje *Hölderův prostor*; pro $\alpha = 1$ je to prostor lipschitzovsky spojitých funkcí.

Nahradíme-li Lebesgueův integrál Bochnerovým integrálem, dostáváme prostory vektorových funkcí, speciálně např. pro funkce $f : \Omega \to X$, kde X je Banachův prostor a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, můžeme definovat $L_p(X) = L_p(\Omega, X)$ jako prostor všech funkcí $f : \Omega \to X$ s konečnou normou $\|f\|_p = \|f\|_{L_p(\Omega,X)}$ (obvyklá formule pro $p = \infty$). Prostor $C^\alpha(X)$ (nebo obšírněji $C^\alpha(\Omega, X)$) je prostor všech vektorových hölderovsky spojitých funkcí na Ω. Speciální případ: $X = \mathbb{R}^N$. Obecná reference (prostory vektorových funkcí): [19], [6], [7], [59].

Fundamentálním prostředkem moderní teorie je Fourierova transformace

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}^N,$$

a

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\cdot\xi} f(\xi)\, d\xi, \qquad \xi \in \mathbb{R}^N,$$

pro $f \in \mathcal{S}\,(\mathbb{R}^N)$, což je prostor rychle klesajících, nekonečněkrát spojitě diferencovatelných funkcí ($\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ je prostor tzv. temperovaných distribucí), $x \cdot \xi$ je skalární součin x a ξ v $\mathbb{R}^N$.

Někdy se vynechává multiplikativní konstanta před integrálem místo $(2\pi)^{-N/2}$ a $x \cdot \xi$ se nahrazuje výrazem $2\pi x \cdot \xi$. Důvodem jsou „hezké formule“ – to závisí na tom, k čemu transformace zrovna slouží.

Připomeňme *Hölderovu nerovnost*, spojující normy v páru prostorů L_p a $L_{p'}$ ($p' = p/(p-1)$ pro $1 < p < \infty$, $p' = 1$ pro $p = \infty$ a $p' = \infty$ pro $p = 1$),

$$\int_\Omega f(x)g(x)\,dx \leq \|f\|_p\,\|g\|_{p'},$$

kdykoliv pravá strana má smysl.

Dále připomínáme *Minkowského nerovnost*: Jestliže $1 \leq p \leq \infty$, $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^N$ jsou měřitelné, a f je měřitelná a nezáporná na $\Omega_1 \times \Omega_2$, potom

$$\left(\int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} f(x,y)\,dx\right)^p dy\right)^{1/p} \leq \int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} f(x,y)^p\,dy\right)^{1/p} dx.$$

Známá trojúhelníková nerovnost $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ se obvykle také nazývá Minkowského nerovnost.

Poznámka: Někdy se používá prostor $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ všech C^∞ funkcí (reálných či komplexních) s kompaktním nosičem v $\mathbb{R}^N$ k němu duální prostor *distribucí* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. *Temperované distribuce* jsou však podstatně důležitější.

Analogické pojmy lze definovat pro vektorové funkce. Je-li X Banachův prostor, pak $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N, X) = \mathcal{S}(X)$ na $\mathbb{R}^N$ s topologií danou seminormami

$$\|\varphi\|_{k,\ell} = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \max_{|\alpha| \le \ell} \left(1 + |x|^k\right) \|D^\alpha \varphi(x)\|_X, \tag{1.1}$$

kde k a ℓ probíhají celé $\mathbb{N}$.

Nechť X a Y jsou Banachovy prostory, potom lineární zobrazení $f : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N, X) \to Y$ se nazývá *temperovaná distribuce* s hodnotami v Y, jestliže pro každá celá a nezáporná čísla k a ℓ existuje $c > 0$ takové, že

$$\|f(\varphi)\|_Y \leq c\|\varphi\|_{k,\ell}$$

pro každé $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N, X)$. Píšeme $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N, X, Y)$ nebo jednodušeji $f \in \mathcal{S}'(X, Y)$. Prostor $\mathcal{S}'(X, Y)$ je *prostor temperovaných distribucí*; je úplný vzhledem ke slabé topologii indukované dualitou $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^N, X), \mathcal{S}'(X, Y))$.

Pro $X = Y$ se užívá označení $\mathcal{S}'(X)$ místo $\mathcal{S}'(X, X)$. Je-li $X = Y = \mathbb{R}^1$ (nebo $\mathbb{C}$), pak (1.1) se změní v

$$\|\varphi\|_{k,\ell} = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \max_{|\alpha| \leq \ell} \left(1 + |x|^k\right) |D^\alpha \varphi(x)|,$$

a prostory $\mathcal{S}\ (\mathbb{R}^N, X)$, resp. $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N, X, Y)$ se obvykle značí $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, resp. $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.

Nechť X je Banachův prostor, nechť $f \in \mathcal{S}'(X)$ a $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ je multiindex. Potom *slabá derivace* (nebo také *distributivní derivace*) řádu α temperované distribuce f je temperovaná distribuce definovaná takto:

$$D^\alpha f(\varphi) = (-1)^\alpha f(D^\alpha \varphi), \qquad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

V $\mathbb{R}^N$ a pro f a $D^\alpha f$ regulární distribuce to znamená, že

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x) D^\alpha \varphi(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^N} D^\alpha f(x) \varphi(x)\, dx$$

pro všechna $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

Několik poznámek o konvolucích: Pro $f_1 \in L_1(\mathbb{R}^N)$ a $f_2 \in L_p(\mathbb{R}^N)$, kde $1 \le p \le \infty$, je *konvoluce* definovaná jako

$$f_1 * f_2(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f_1(y) f_2(x-y)\, dy, \qquad x \in \mathbb{R}^N. \tag{1.2}$$

To má smysl díky Minkowského nerovnosti a $f_1 * g_2 \in L_p(\mathbb{R}^N)$. Podobně, Hölderova nerovnost implikuje, že pro $f_1 \in L_p(\mathbb{R}^N)$ a $f_2 \in L_{p'}$ ($p' = p/(p-1)$), máme $f_1 * f_2 \in L_\infty(\mathbb{R}^N)$.

Triviálně: jestliže $f_1, f_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, potom $f_1 * f_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Definice v (1.2) má smysl i v dalších důležitých případech. Např. když f_1 i f_2 mají kompaktní nosič v $\mathbb{R}^N$ a $f_i \in L_{p_i}$, $i = 1, 2$, potom po rozšíření f_1 a f_2 nulou na celé $\mathbb{R}^N$, konvoluce $f_1 * f_2$ je v $L_{\max\{p_1, p_2\}}$ (Minkowského a Hölderova nerovnost).

Pojem konvoluce lze rozšířit pro $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ a $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$; položíme

$$f * \varphi(x) = f(\varphi(x - \cdot)), \qquad x \in \mathbb{R}^N. \tag{1.3}$$

To lze dále zobecnit pro dvojice tvořené temperovanou distribucí a funkcí s hodnotami v libovolném normovaném lineárním prostoru E, kdykoliv $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ je hustý v E.

Ještě obecněji, nechť X je Banachův prostor. Pro $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N, X)$ a $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ definujeme konvoluci $f * \varphi$ jako v (1.3).

Youngova nerovnost:

Jestliže $f_1 \in L_p(\mathbb{R}^N)$ a $f_2 \in L_r(\mathbb{R}^N)$, kde $1 < p < r' < \infty$, pak $f_1 * f_2 \in L_q\mathbb{R}^N$, kde $1/q = 1/p - 1/r'$.

Nechť $f : \Omega \to \mathbb{R}^1$ je měřitelná. Potom definujeme *distribuční funkci* pro f jako

$$m(f,\lambda) = \operatorname{meas}\{x \in \Omega; |f(x)| > \lambda\}, \qquad \lambda > 0.$$

Funkce $m(f,\cdot)$ je měřitelná, nerostoucí a spojitá zprava na $(0,+\infty)$. *Nerostoucí přerovnání* funkce f je zobecněná inverse funkce $m(f.,)$, t.j.

$$f^*(t) = \inf\{\lambda; m(f,\lambda) \leq t\}, \qquad t > 0.$$

Funkce f^* je nerostoucí a spojitá zprava na $(0,+\infty)$.

Užitečné cvičení: uvažujme $g(t) = \sum_j c_j \chi_{I_j}(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$, kde $\{I_j\}$ je konečná posloupnost disjunktních intervalů v $\mathbb{R}^1$. Pak $g^*(t) = c_i$ na intervalu délky $\operatorname{meas} I_j$ a směrem od počátku doprava jsou hodnoty c_j seřazeny v nerostoucím pořádku.

Příbuzným pojmem je sférické radiálně nerostoucí přerovnání (*sférická symetrizace*): místo přerovnání f^* na $(0,+\infty)$ uvažujeme $f^\#(x) = f^*(\omega_N|x|^N)$ pro $x \in \mathbb{R}^N$, přitom ω_N je míra jednotkové koule v $\mathbb{R}^N$. Zřejmě $\|f^\#\|_{L_q(\mathbb{R}^N)} = \|f^*\|_{L_q(0,+\infty)}$ pro každé q, $1 \le q \le \infty$.

Idea symetrizace: konec 19. stol. Steiner a Schwartz.

Systematické studium a užití: Hardy a Littlewood (viz [30]), příbuzné pojmy rovněž hodně používány. Reference např.: Kawohl [35].

Alternativní formule (viz [36], dávající jinou pěknou geometrickou představu:

$$f^*(t) = \sup_{\operatorname{meas} E = t} \inf_{x \in E} |f(x)|, \qquad t > 0.$$

Aplikace na věty o vnoření, souvislosti s nejlepší konstantou, isoperimetrickou nerovností a další: Talenti [68].

Pro zajímavost: $\|\Phi(\nabla u^{\#})\|_1 \leq \|\Phi(\nabla u)\|_1$ pro každou lipschitzovsky spojitou u a konvexní neklesající Φ takovou, že $\Phi(0) = 0$.

Někdy je užitečné pracovat s integrálním průměrem

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(\tau)\, d\tau.$$

Zásadní vlastnost spojující f a f^* je *stejná měřitelnost*, t.j. máme $m(f^*,t) = m(f,t)$, $t > 0$. Fubiniho věta pak implikuje, že $\|f^*\|_{L_p(0,+\infty)} = \|f\|_{L_p(\Omega)}$, $1 \leq p < \infty$ a $\|f\|_{L_\infty(\Omega)} = \|f^*\|_{L_\infty(0,+\infty)}$.

Marcinkiewiczův prostor (nebo též *slabý* L_p-prostor) $L_p^*(\Omega)$ je definovaný jako prostor všech měřitelných funkcí f na Ω s konečnou (kvazi)normou

$$\|f\|_{L_p^*(\Omega)} = \sup_{\lambda>0} \lambda m(f,\lambda)^{1/p} = \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t), \quad 1 \leq p < \infty, \tag{1.4}$$

resp. pro $p = \infty$

$$\|f\|_{L_\infty^*(\Omega)} = \sup_{t>0} f^*(t).$$

Triviálně $L_p(\Omega) \hookrightarrow L_p^*(\Omega)$ a $L_\infty^*(\Omega) = L_\infty(\Omega)$.

Je-li $p > 1$, potom slabý L_p-prostor může být ekvivalentně definován pomocí f^{**} místo f^{*}. Jede odhad je lehký – plyne z bodového odhadu $f^{**} \geq f^{*}$, který je navíc nezávislý na p. Obrácená nerovnost (pro integrály) plyne z Hardyho nerovnosti a vysvětluje restrikci $p > 1$ (konstanta na pravé straně se chová řádově jako $(p-1)^{-1}$ pro $p \to 1$).

Pro úplnost: Lze dokázat, že f^{**} je ekvivalentní nerostoucímu přerovnání maximální funkce Mf funkce f (Herzova věta, viz např. [11], Chapter 3). Připomeňme, že *maximální operátor* je pro lokálně integrovatelnou funkci f jako

$$Mf(x) = \sup \frac{1}{\operatorname{meas} Q} \int_Q |f(y)|\, dy, \qquad x \in \mathbb{R}^N, \tag{1.5}$$

kde supremum se bere přes všechny krychle obsahující x, s hranami rovnoběžnými se souřadnými osami.

Platí jistá $\mathbb{R}^N$ analogie Hardyovy nerovnosti, totiž *maximální nerovnost*: Pro $1 < p \leq \infty$, funkce Mf je v $L_p(\mathbb{R}^N)$ právě tehdy, když $f \in L_p(\mathbb{R}^N)$. Jestliže $f \in L_1(\mathbb{R}^N)$, potom obecně $Mf \notin L_1(\mathbb{R}^N)$, nicméně $f \in L_1(\mathbb{R}^N)$ implikuje $Mf \in L_1^*$. (Toto společně s triviální omezeností M v $L_\infty(\mathbb{R}^N)$ dává maximální nerovnost – použije se Marcinkiewiczova interpolační věta.) Další analýza implikuje. že Mf je integrovatelná přes množinu $\{Mf > 1\}$ právě tehdy, když $|f| \log^+ |f|$ je integrovatelná (Steinova věta). Je to rovněž těsně spojeno s Herzovou větou, tj. s ekvivalencí $(Mf)^* \sim f^{**}$.

Reference: např. [29], [11], [25]. Existuje rozsáhlá literatura věnovaná studiu diferencovatelnosti reálných funkcí více proměnných vzhledem k různým bázím.

Výklad teorie prostorů obecnějších něž jsou slabé L_p-prostory (*Lorentzovy prostory* $L_{pq}(\Omega)$) lze nalézt např. v [17], [12], Chapters 1 a 5, [11], Chapter 4.

Elementární vlastnosti se přenášejí i na obecnější vektorové prostory.

Omezené (sub-)lineární zobrazení $T : L_p(\Omega_1) \to L_q(\Omega_2)$ se nazývá *typu* (p,q). Číslo $\|T\| = \sup\{\|Tf\|_q; \|f\|_p \le 1\}$ je norma T. Jestliže cílový prostor nahradíme prostorem $L_q^*(\Omega_2)$, pak T se nazývá *slabého typu* (p,q). Explicitně: Existuje $c > 0$ tak, že pro všechna $f \in L_p(\Omega_1)$ a všechna $\lambda > 0$,

$$m(Tf,\lambda) \le c^q \lambda^{-q} \|f\|_p^q \tag{1.6}$$

(což je ekvivalentní nerovnosti $\|Tf\|_{L_q^*(\Omega)} \le c\|f\|_{L_p(\Omega_1)}$). „Nejlepší“ c v (1.6) je (kvazi)norma of T.

V našem kontextu je důležitost Marcinkiewiczových prostorů dána tím, že jsou přirozenými cílovými prostory – speciálně pro reprezentační integrální operátory v teorii Sobolevových prostorů.

Stručné připomenutí klasických Sobolevových prostorů

Několik způsobů, jak je definovat:

- prostory s distributivními derivacemi
- zúplnění prostoru hladkých funkcí (známá Meyersova-Serrinova věta dává ekvivalenci)
- Beppo-Leviho prostory

Reference: např. [1], [39].

Vzhledem k hustotě hladkých funkcí lze pracovat s funkcemi, které mají klasické derivace.

Připomenutí: Podle Meyersovy-Serrinovy věty lze aproximovat funkce ze Sobolevova prostoru na nějaké oblasti, řekněme Ω, definovaného pomocí distributivních derivací funkcemi z $C^\infty(\Omega)$. Situace je však naprosto jiná, chceme-li aproximovat funkcemi z $C^\infty(\overline{\Omega})$.

Regularizace funkcí ze Sobolevových prostorů: Pro jednoduchost nechť nejprve $f \in L_p(\mathbb{R}^N)$. Je známo, že pak existuje $f_0 \in L_p(\mathbb{R}^N)$ s kompaktním nosičem tak, že $\|f - f_0\|_p$ je libovolně malé. Nechť

$$\psi(x) = \begin{cases} \exp(-1/(1-|x|^2)), & |x| \le 1, \\ 0, & \text{jinde,} \end{cases}$$

a položme $\varphi(x) = \psi(x)\,(\|\psi\|_1)^{-1}$. Funkce φ je *standardní regularizátor*. Pro $x \in \mathbb{R}^N$ a $\varepsilon > 0$ definujme systém

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-N}\varphi(x/\varepsilon). \tag{1.7}$$

Pak funkce φ_ε jsou $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon \subset \{|x| \le \varepsilon\}$ a $\|\varphi_\varepsilon\|_1 = 1$ pro všechna $\varepsilon > 0$. Uvažujme funkce $f_\varepsilon(x) = f * \varphi_\varepsilon(x)$. Není těžké dokázat, že $f_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ a $f_\varepsilon \to f$ in $L_p(\mathbb{R}^N)$ pro $\varepsilon \to 0$ (užije se Minkowského nerovnost a L_p-spojitost v průměru funkce f). Podobně když f má distributivní derivaci $D^\beta f \in L_p(\mathbb{R}^N)$, tak potom $D^\beta f_\varepsilon \to D^\beta$ v $L_p(\mathbb{R}^N)$. Navíc, když $f \in W_p^k(\mathbb{R}^N)$, t.j. když $D^\alpha f \in L_p(\mathbb{R}^N)$ pro všechna $|\alpha| \le k$, potom lze aproximovat f funkcí $\widetilde{f}$ s kompaktním nosičem a blízko f v příslušné normě Sobolevova prostoru. Následně lze uvažovat $\widetilde{f} * \varphi_\varepsilon$ a dokázat tak hustotu $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ ve $W_p^k(\mathbb{R}^N)$.

Jestliže Ω je oblast v $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, s lipschitzovskou hranicí $\partial\Omega$, potom postup je jenom formálně složitější: Napíšeme f jako $\sum f_i$, $f_i \in W_p^k(\Omega)$ s užitím vhodného rozkladu jednotky v Ω a po případné rotaci dostaneme případ, kdy buďto f_i má kompaktní nosič v Ω nebo f_i je nenulová v nějaké oblasti Ω_i, $\partial\Omega \cap \partial\Omega_i$ je neprázdná a je to graf lipschitzovské funkce. Pak uvažujeme funkci $f_{ih}(x) = f_i(x+h)$, $x \in \Omega$ a h dostatečně malé.

Snadno se ukáže, že $f_{ih} \to f_i$ v $W_p^k(\Omega)$ pro $h \to 0$ a pak stačí aproximovat f_{ih} pomocí $f_{ih} * \varphi_\varepsilon$. Tak dostaneme, že $C^\infty(\overline{\Omega})$ je hustý v $W_p^k(\Omega)$.

(Vše je jednodušší pro $N = 1$.)

2 Rychlokurs teorie interpolace

Připomeneme několik základních faktů z teorie interpolace.

Počátek teorie interpolace lze vystopovat od úvah o spojitosti bilineárních forem (Schur, M. Riesz). Abstraktní teorie je pak výrazným způsobem spojena se dvěma slavnými interpolačními větami: Riesz-Thorinova věta (komplexní interpolace), založená na Hadamardově principu a Marcinkiewiczova věta (reálná interpolace). Teorie se podstatným způsobem rozvinula v šedesátých létech, rovněž v souvislosti s pokrokem v teorii prostorů funkcí a je to dodnes živá disciplina s hlubokými výsledky i neřešenými problémy.

Základní problém je následující: Je dán (sub)lineární operátor T, spojitý mezi dvěma páry normovaných lineárních prostorů, řekněme $T : X_j \to Y_j$, $j = 1,2$, přičemž (X_1, X_2) a (Y_1, Y_2) jsou *kompatibilní* (nebo *kompatibilní dvojice prostorů*), tj. prostory v těchto párech jsou podprostory nějakého Hausdorffova topologického lineárního prostoru. Hledáme prostory X a Y takové, že $X_1 \cap X_2 \subset X \subset X_1 + X_2$ a $Y_1 \cap Y_2 \subset Y \subset Y_1 + Y_2$ a takové, že $T : X \to Y$ je spojitý. Prostory $X_1 \cap X_2$, resp. $X_1 + X_2$ jsou brány se standardními normami $\max\{\|x\|_{X_1}, \|x\|_{X_2}\}$, resp. $\inf\{\|x_1\|_{X_1} + \|x_2\|_{X_2}; x = x_1 + x_2,\ x_j \in X_j,\ j = 1,2\}$. Jestliže $X_1 \cap X_2 \subset X \subset X_1 + X_2$, pak prostor X se obvykle nazývá *intermediální* vzhledem ke dvojici (X_1, X_2). Podle toho, jaký kvantitativní vztah existuje mezi normami $\|T\|_{X_j \to Y_j}$, $j = 1,2$, a $\|T\|_{X \to Y}$, zavádí se další zpřesňující pojmy. Jestliže $\|T\|_{X\to Y} \le C \max_{j=1,2} \|T\|_{X_j\to Y_j}$, pak X a Y se nazývají *uniformní interpolační prostory*; pro $C = 1$ hovoříme o *exaktních interpolačních prostorech*. Pokud $\|T\|_{X\to Y} \le C\|T\|^{1-\theta}_{X_1\to Y_1}\|T\|^{\theta}_{X_2\to Y_2}$, pak X a Y se nazývají *interpolační prostory s exponentem* θ; je-li navíc $C = 1$, potom jde o *exaktní interpolační prostory s exponentem* θ. Na této úrovni je někdy užitečné používat jazyk teorie kategorií (kategorie tvořena lineárními prostory vnořenými do nějakého daného Hausdorffova topologického lineárního prostoru) s omezenými (sub-)lineárními zobrazeními jako morfismy v této kategorii. Pak se zavádí *interpolační funktor* jako zobrazení dvojic prostorů z této kategorie na jiný prostor, který má výše popsané interpolační vlastnosti; např. zavádí se exaktní interpolační funktory atd.

Reference: [12], Chapter 2 nebo [70], Chapter 1, [12], [50].

2.1 Klasické věty

2.1 Věta (Riesz-Thorinova věta)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je měřitelná. Nechť $1 \leq p_i \leq \infty, 1 \leq q_i \leq \infty, i = 1, 2$. Předpokládejme, že T je (sub-)lineární operátor*

$$T : L_{p_1}(\Omega) \to L_{q_1}(\Omega), \quad a \quad T : L_{p_2}(\Omega) \to L_{q_2}(\Omega),$$

s normami pořadě M_1 a M_2. Nechť $0 \leq \theta \leq 1$,

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{\theta}{p_2}, \quad a \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_1} + \frac{\theta}{q_2} \tag{2.1}$$

(formálně pokládáme $a/\infty = 0$ pro libovolné reálné a). Potom T je omezené zobrazení z $L_p(\Omega)$ do $L_q(\Omega)$ s normou nanejvýš $M_1^{1-\theta}M_2^{\theta}$.

Poznamenejme, že vzhledem k (2.1) je užitečné uvažovat normu T jako funkci proměnné $1/p$. Potom věta říká, že $M = M(\theta)$ je logaritmicky konvexní funkcí $1/p$.

Důkaz (Thorinův) této věty má zajímavou historii. Není komplikovaný, ale je velmi důmyslný, je založen na větě o třech přímkách (resp. o třech kružnicích), známé z teorie funkcí komplexní proměnné: Jestliže F je analytická v otevřeném pásu $0 < \operatorname{Re} z < 1$, omezená a spojitá na jeho uzávěru a jestliže $|F(k-1+it)| \leq M_k$, $k = 1,2$, $t \in \mathbb{R}^1$, potom $|F(\theta+it)| \leq M_1^{1-\theta}M_2^{\theta}$ pro všechna $0 < \theta < 1$ a všechna

$t \in \mathbb{R}^1$. Podrobný důkaz lze nalézt v mnoha knihách, např. v [12], [70], [55] atd.

Dalším klasickým interpolačním principem je Marcinkiewiczova interpolační věta.

Připomeňme označení $L_p^*(\Omega)$ pro slabý Lebesgueův prostor $L_p(\Omega)$ (viz (1.4) na str. 17).

2.2 Věta (Marcinkiewiczova interpolační věta). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je měřitelná, nechť $1 \le p_i \le \infty$, $1 \le q_i \le \infty$, $i = 1, 2$, a předpokládejme, že T je (sub-)lineární operátor*

$$T : L_{p_1}(\Omega) \to L^*_{q_1}(\Omega), \quad \textit{resp} \quad T : L_{p_2}(\Omega) \to L^*_{q_2}(\Omega),$$

s normou M_1, *resp.* M_2. *Nechť* $0 \leq \theta \leq 1$,

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{\theta}{p_2} \quad a \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_1} + \frac{\theta}{q_2} \tag{2.2}$$

(*opět formálně* $a/\infty = 0$ *pro libovolné reálné číslo* a) *a předpokládejme, že* $p \leq q$. *Potom* T *je omezené zobrazení z* $L_p(\Omega)$ *do* $L_q(\Omega)$ *s normou nanejvýš* $C(\theta)M_1^{1-\theta}M_2^{\theta}$.

Poznámky: Konstanta $C(\theta)$ obecně diverguje do ∞ pro $p \to p_j$, $j = 1, 2$ (viz např. [69], Chapter 4). Věta platí i pro vektorové funkce.

Protože L_p je efektivně menší prostor než L_p^*, s hrubší topologií, jsou předpoklady na omezenost daného operátoru v Marcinkiewiczově větě slabší než ve větě Riesz-Thorinově. Je zde ovšem podstatný předpoklad $p \leq q$.

2.2 Stručně o obecných interpolačních metodách

Běžně se používají dvě základní abstraktní interpolační metody.

1. Reálná interpolační metoda, která každé dvojici parametrů $1 \leq p \leq \infty$ a $0 < \theta < 1$ a každé kompatibilní dvojici (X_1, X_2) interpolační prostor $(X_1, X_2)_{\theta,p}$.

2. Komplexní interpolační metoda, která každé kompatibilní dvojici (X_1, X_2) a každému $0 < \theta < 1$ přiřadí interpolační prostor $[X_1, X_2]_\theta$.

Například Riesz-Thorinova věta se pak objevuje v následující formě:

2.3 Věta. *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *je měřitelná. Nechť* $1 \leq p_j \leq \infty$, $j = 1, 2$, *a* $0 < \theta < 1$. *Položme* $1/p = (1-\theta)/p_1 + \theta/p_2$. *Potom* $[L_{p_1}(\Omega), L_{p_2}(\Omega)]_\theta = L_p(\Omega)$. *(Platí i pro vektorové funkce.)*

Analogické tvrzení platí pro reálnou interpolační metodu

Reálný interpolační prostor je definovaný následujícím způsobem: Nechť (X_1, X_2) je kompatibilní dvojice normovaných lineárních prostorů. Potom (Peetreho) K-*functional* je reálná funkce $K(t, x)$ definovaná na $(0, +\infty) \times (X_1 + X_2)$ předpisem

$$\begin{aligned} K(t,x) &= K(t, x, X_1, X_2) \\ &= \inf\{\|x_1\|_{X_1} + t\|x_2\|_{X_2};\ x = x_0 + x_1,\ x_j \in X_j,\ j = 0, 1\}. \end{aligned}$$

Pro $0 < \theta < 1$ a $1 \leq p < \infty$ definujeme prostor $(X_1, X_2)_{\theta,p}$ jako prostor všech $x \in X_1 + X_2$ s konečnou normou

$$\|x\|_{\theta,p} = \left(\int_0^{+\infty} \left[t^{-\theta} K(t,x) \right]^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p}.$$

Pro $0 < \theta < 1$ je norma v $(X_1, X_2)_{\theta,\infty}$ definována jako

$$\|x\|_{\theta,\infty} = \sup_{t>0} t^{-\theta} K(t,x).$$

2.4 Věta (věta o stabilitě). *Nechť* $\overline{X} = (X_1, X_2)$ *je kompatibilní dvojice Banachových prostorů a nechť* $Y_j = [X_1, X_2]_{\theta_j}$, $0 < \theta_j < 1$, $j = 1, 2$. *Předpokládejme, že* $X_1 \cap X_2$ *je hustý v* X_1, X_2, *a* $Y_1 \cap Y_2$. *Potom* $[Y_1, Y_2]_\eta = [X_1, X_2]_\theta$ *pro každé* $\theta = (1-\eta)\theta_1 + \eta\theta_2$, *kde* $0 \leq \eta \leq 1$.

Popišme stručně komplexní interpolační metodu. Mějme kompatibilní dvojici Banachových prostorů $\overline{X} = (X_1, X_2)$.

Nechť $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\overline{X})$ označuje lineární množinu všech omezených a spojitých funkcí $f : \{z \in \mathbb{C}; 0 \leq \mathrm{Re}\, z \leq 1\} \to X_1 + X_2$, analytických v $\{z \in \mathbb{C}; 0 < \mathrm{Re}\, z < 1\}$ a takových, že funkce $t \mapsto f(j-1+it)$, $t \in \mathbb{R}^1$, jsou spojité do X_j a splňují $\lim\limits_{|t|\to+\infty} f(j-1+it) = 0$, $j = 1, 2$. Množina $\mathcal{F}(\overline{X})$ s normou $\max\limits_{j=1,2} \sup\limits_{t} |f(j-1+it)|$ je Banachův prostor (viz [12], Chapter 4 nebo [70], Chapter 1). Pro $0 < \theta < 1$ definujeme prostor

$[X_1, X_2]_\theta = \{x \in X_1 + X_2;$ existuje $f \in \mathcal{F}$ taková, že $f(\theta) = x\}$

s normou

$$\|x\|_{[X_1,X_2]_\theta} = \inf_{f(\theta)=x,\, f\in\mathcal{F}} \Big(\max_{j=0,1,\, t\in\mathbb{R}^N} |f(j-1+it)| \Big).$$

Dostáváme škálu Banachových prostorů $[X_1, X_2]_\theta$ s parametrem $0 < \theta < 1$, které jsou exaktní interpolační prostory s exponentem θ vzhledem ke dvojici (X_1, X_2), to jest, příslušná nerovnost pro normy operátorů na komplexních interpolačních prostorech odpovídá přesně nerovnosti pro normy v Riesz-Thorinově větě. To není samozřejmě náhodné; lze ukázat, že když interpolujeme prostory L_{p_1} a L_{p_2} s pomocí komplexní metody, dostaneme pro $0 < \theta < 1$ právě L_p prostor, kde $1/p = (1-\theta)/p_1 + \theta/p_2$. Navíc můžeme reiterovat prostory odpovídající různým parametrům θ a výsledek opět leží ve škále dané původní dvojicí pro nějaký vhodný parametr, tj. metoda je *stabilní*. Detaily lze nalézt např. v [12], [70] atd.

3 Fourierovy multiplikátory

Reference: [12], [70], [71] atd.

Označení: Je-li H Hilbertův prostor, pak $\mathcal{S}(H) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^N, H)$ je prostor všech rychle klesajících C^∞-funkcí z $\mathbb{R}^N$ do H (s topologií příslušných seminorem. Jsou-li H_1 a H_2 Hilbertovy prostory, pak $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N, H_1, H_2) = \mathcal{S}'(H_1, H_2)$ označuje prostor všech omezených lineárních zobrazení z $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N, H_1)$ do H_2.

3.1 Definice. Temperovaná distribuce $\rho \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N, H_1, H_2)$ je *Fourierův multiplikátor* pro dvojici $(L_p(H_1), L_p(H_2))$, jestliže

$\mathcal{F}^{-1}(\rho) * f \in L_p(H_2)$ pro všechna $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N, H_1)$ a

$$\sup_{\|f\|_{L_p(H_2)} \leq 1} \|\mathcal{F}^{-1}(\rho) * f\|_{L_p(H_1)} < +\infty.$$

Supremum vlevo je *norma Fourierova multiplikátoru* ϱ, označení $\|\varrho\|_{M_p(H_1,H_2)}$. Prostor Fourierových multiplikátorů pro dvojici $(L_p(H_1), L_p(H_2))$ budeme značit $M_p(H_1, H_2)$. Pro $H_1 = H_2 = \mathbb{R}^N$ píšeme $M_p(\mathbb{R}^N)$ nebo jednoduše M_p a $\|\varrho\|_{M_p(\mathbb{R}^N)}$ nebo $\|\varrho\|_{M_p}$ (pokud dimenze je důležitá).

V $\mathbb{R}^N$ to vypadá takto: Funkce m je Fourierův multiplikátor v L_p, jestliže $f \mapsto \mathcal{F}^{-1}(m\mathcal{F}f)$ je spojitá z $L_p(\mathbb{R}^N)$ do $L_p(\mathbb{R}^N)$.

V aplikacích jsou důležité postačující, efektivně ověřitelné podmínky pro to, aby daná funkce byla multiplikátorem:

3.2 Věta (Michlinova věta multiplikátorech). *Nechť H_1 a H_2 jsou Hilbertovy prostory a předpokládejme, existuje $M > 0$ tak, že zobrazení $\rho : \mathbb{R}^N \to L(\mathcal{S}(H_1), H_2)$ splňuje podmínku*

$$|\xi|^{\alpha} \|D^{\alpha}\rho(\xi)\|_{L(\mathcal{S}(H_1),H_2)} \leq M \tag{3.1}$$

pro všechna $\xi \in \mathbb{R}^N$ a všechna $|\alpha| \leq K$, kde K je celé číslo větší než $N/2$. Potom ρ je multiplikátor pro dvojici $(L_p(H_1), L_p(H_2))$ pro každé $1 < p < \infty$.

Pro $H_1 = H_2 = \mathbb{R}^1$ se podmínka (3.1) redukuje na nerovnost $|\xi|^{\alpha}|D^{\alpha}\rho(\xi)| \leq$ const. pro všechna $|\alpha| \leq K$, kde K je celé, $K > N/2$.

Jeden ze základních operátorů harmonické analýzy, Hilbertův operátor

$$Hf(x) = \text{p.v.}\,\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}^1} \frac{f(y)}{x-y}\,dy$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi}\int_{|y-x|>\varepsilon} \frac{f(y)}{x-y}\,dy$$

má po přechodu k Fourierovým obrazům vyjádření

$$\mathcal{F}(Hf)(\xi) = -2\pi i\,\mathrm{sign}(\xi)\,\mathcal{F}f(\xi).$$

Užitečné jsou i další podmínky.

3.3 Lemma. *Nechť ϱ je multiplikátor v L_p pro nějaké $1 \leq p \leq \infty$ s normou $\|\varrho\|_{M_p} = \sup_{f\neq 0} \|\mathcal{F}^{-1}\varrho * f\|_p \|f\|_p^{-1}$. Potom pro každé $\alpha \in \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$ je funkce $\varrho_\alpha(x) = \varrho(\alpha x)$, $x \in \mathbb{R}^N$, Fourierův multiplikátor v L_p a $\|\varrho_\alpha\|_{M_p} = \|\varrho\|_{M_p}$.*

3.4 Lemma. *Nechť $\varrho \in M_p(\mathbb{R}^1)$ pro nějaké $1 \leq p \leq \infty$ a nechť $\xi \in \mathbb{R}^N$. Potom funkce $\varrho_y = \varrho(\xi \cdot y)$ je v $M_p(\mathbb{R}^N)$ se stejnou M_p normou.*

3.5 Věta. *Nechť m je celé, $m > N/2$. Předpokládejme, že $\varrho \in L_2$ a $D^\alpha \varrho \in L_2(\mathbb{R}^N)$ pro všechna $|\alpha| = m$. Potom ϱ je multiplikátor* *v* $L_p(\mathbb{R}^N)$ *pro všechna* $1 \leq p \leq \infty$ *a*

$$\|\varrho\|_{M_p} \leq c\|\varrho\|_2^{1-N/(2m)} \left(\sup_{|\alpha|=m} \|D^\alpha \varrho\|_2 \right)^{N/(2m)} . \qquad (3.2)$$

Označení: Nechť X je Banachův prostor. Pro $1 \leq p < \infty$ a $s \in \mathbb{R}^1$, nechť ℓ_p^s je prostor všech posloupností $a = \{a_k\}_{k\geq 0} \subset X$ s konečnou normou

$$\|\{a\}\|_{\ell_p^s(X)} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (2^{ks}\|a_k\|_X)^p\right)^{1/p}.$$

3.6 Proposice. *Nechť* $0 < \theta < 1$, $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^1$, $1 \leq p_1, p_2 < \infty$ *a nechť* X_1 *a* X_2 *jsou Banachovy prostory. Potom (s ekvivalentními normami)*

$$[\ell_{p_1}^{s_1}(X_1), \ell_{p_2}^{s_2}(X_2)]_\theta = \ell_p^s([X_1, X_2]_\theta,$$

kde $s = (1-\theta)s_1 + \theta s_2$ *a* $1/p = (1-\theta)/p_1 + \theta/p_2$.

Interpolace L_p prostorů: Platí Holmstedtova formule (viz např. [12], Chapter 3), kde funkce mohou být vektorové:

$$K(t, f, L_{p_1}, L_{p_2}) \sim \left(\int_0^{t^\alpha} [f^*(s)]^{p_1} \, ds \right)^{1/p_1} + \left(\int_{t^\alpha}^{+\infty} [f^*(s)]^{p_2} \, ds \right)^{1/p_2},$$

přitom $0 < p_1 < p_2$, $1/\alpha = 1/p_1 - 1/p_2$.

Speciálně platí $K(t, f, L_1, L_\infty) = \int_0^t f^*(s) \, ds$ (Calderón).

Jádrem původního Sobolevova důkazu věty o vnoření je věta o konvoluci, jejíž abstraktní kostra je předmětem následující věty.

3.7 Věta (Youngova nerovnost). *Nechť* $K \in L_\gamma(\mathbb{R}^N)$ *pro nějaké* $\gamma \in (1, \infty)$ *a* $f \in L_p(\mathbb{R}^N)$, *kde* $1 < p < \gamma/(\gamma-1)$. *Potom* $K * f \in L_q(\mathbb{R}^N)$ *pro* $1/q = 1/p - (\gamma-1)/\gamma$ *a* $\|K * f\|_q \leq \|K\|_\gamma \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^N)}$.

Důkaz. Užitím Minkowského nerovnosti se snadno ukáže, že $\mathcal{K} : f \mapsto K * f$ je zobrazení L_1 do L_γ s normou $\|K\|_\gamma$, a zároveň z $L_{\gamma/(\gamma-1)}$ do L_∞ s týmž odhadem pro normu. Nyní stačí interpolovat. $\square$

Hlubší analýza ukazuje, že předpoklady na jádro K lze zeslabit: stačí předpokládat, že $K \in L^*_\gamma(\mathbb{R}^N)$ pro nějaké $\gamma \in (1, \infty)$. To platí např. pro Rieszovo jádro $K_\gamma(x) \sim |x|^{\gamma-N}$, kde $0 < \gamma < N$. Speciálně pro $\gamma = 1$ dostáváme větu o vnoření pro Sobolevovy prostory prvního řádu (vnoření prostorů vyšších řádů se pak dostane jednoduchou iterací), protože

$$|f(x)| \leq \text{const.}(K_1 * (\nabla f))(x), \qquad x \in \mathbb{R}^N,$$

pro f hladkou.

Různá zobecnění Youngovy nerovnosti lze nalézt v [40].

4 Potencionální prostory

Domluva o označení: $W_p^k = W_p^k(\mathbb{R}^N)$, resp. $W_p^k(X) = W_p^k(\mathbb{R}^N, X)$, $1 \le p < \infty$, $k = 0, 1, \dots$, značí Sobolevův prostor k-tého řádu reálných, resp. vektorových funkcí.

Existuje řada způsobů jak zavést Sobolevovy prostory necelého řádu. Zde se podíváme na fourierovský přístup, který je vcelku transparentní (a nevyžaduje např. užití spektrální teorie). Omezíme se na mocniny operátoru $I - \Delta$; zájemci o spektrální přístup a mocniny obecného pozitivního operátoru najdou informace např. v Triebelově knize [70], Chapter 1. Budeme se zabývat prostory na celém $\mathbb{R}^N$; na str. 103 je naznačena jedna z možností, jak v tomto rámci uvažovat Sobolevovy prostory na oblastech.

„Tvrdé“ technické detaily týkající se potenciálů lze nalézt v řadě knih věnovaných Fourierově transformaci v $\mathbb{R}^N$.

Je-li $0 < \alpha < N$, potom funkce $\xi \mapsto |\xi|^{\alpha - N}$, $\xi \in \mathbb{R}^N$, je lokálně integrovatelná a je to proto regulární temperovaná distribuce. Pro tato α a $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ definujeme *Rieszův potenciál řádu* α formulí

$$\mathcal{I}_\alpha f(x) = \mathcal{F}^{-1}\big((2\pi)^{N/2-\alpha/2}|\xi|^{-\alpha}\mathcal{F}f(\xi)\big)(x), \qquad x \in \mathbb{R}^N. \tag{4.1}$$

Je to třeba chápat ve smyslu duality, tj.

$$\int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{I}_\alpha f(x)\overline{\mathcal{F}\varphi(x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} ((2\pi)^{N/2-\alpha/2}|x|^{-\alpha}\mathcal{F}f(x)\overline{\varphi(x)}\,dx$$

pro naše f a všechna $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Poslední identita plyne ze známého vztahu pro Fourierovu transformaci funkce $|x|^{-\alpha-N}$, totiž,

$$(\mathcal{F}(|x|^{-\alpha-N})(\xi) = \frac{2^{\alpha/2}\pi^{N/2-\alpha/2}\Gamma(\alpha/2)}{|\xi|^{\alpha}\Gamma(N/2-\alpha/2)}.$$

(Viz např. [67], Chapter 5.

Multiplikativní konstanty zde i v dalších formulích se mohou lišit - záleží to na definici Fourierovy transformace. Často se používá $\int_{\mathbb{R}^N} \exp(2\pi x\cdot\xi) f(x)\, dx$.)

Další výpočty (viz opět např. [67]) vedou ke konvolučnímu vzorci

$$\mathcal{I}_\alpha f(x) = \frac{\Gamma(N/2-\alpha/2)}{\pi^{N/2}2^{\alpha}\Gamma(\alpha/2)} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(y)}{|x-y|^{N-\alpha}}\, dy, \qquad x\in\mathbb{R}^N. \tag{4.2}$$

Jádro

$$I_\alpha(x) = \frac{\Gamma(N/2 - \alpha/2)|x|^{\alpha-N}}{\pi^{N/2}2^\alpha\Gamma(\alpha/2)}, \qquad x \in \mathbb{R}^N,$$

je *Rieszovo jádro řádu* α.

Nechť $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Potom $(-\Delta)f(x) = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^2\mathcal{F}(f(\xi);x)$, $x \in \mathbb{R}^N$, a to vede k přirozené myšlence definovat kladné mocniny laplaceánu takto: Pro $\beta > 0$ položíme

$$(-\Delta)^{\beta/2}f(x) = \mathcal{F}^{-1}\big(|\xi|^\beta\mathcal{F}f(\xi)(\xi)\big)(x), \qquad x \in \mathbb{R}^N. \quad (4.3)$$

Definice v (4.3) má však smysl pro *každé* f takové, že $|\xi|^\beta\mathcal{F}f(\xi)$ patří do in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Čili můžeme uvažovat funkci $\xi \mapsto |\xi|^\alpha$ pro $0 < \alpha < N$ (lokálně integrovatelná in $\mathbb{R}^N$) a definovat *záporné mocniny laplaceánu* jako

$$(-\Delta)^{-\alpha/2}f(x) = \mathcal{F}^{-1}\big(|\xi|^{-\alpha}\mathcal{F}f(\xi)\big(x), \qquad x \in \mathbb{R}^N. \quad (4.4)$$

Snadno se ukáže, že $(\mathcal{I}_\alpha f)(x) = (2\pi)^{\alpha/2-N/2}(-\Delta)^{-\alpha/2} f(x)$. Dále, operátor $(-\Delta)^{-\alpha/2}$ je inverzní k $(-\Delta)^{\alpha/2}$. Čili pro $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$,

$$f(x) = \pi^{-\alpha}(-\Delta^{-\alpha/2})[\pi^\alpha(-\Delta)^{\alpha/2} f](x) = \mathcal{I}_\alpha(\pi^\alpha(-\Delta)^{\alpha/2} f)(x),$$

Položíme-li $g = (2\pi)^{\alpha/2-N/2}(-\Delta)^{\alpha/2} f$, pak užitím (4.2) dostaneme

$$f(x) = \mathcal{I}_\alpha g(x) = \frac{\pi^{N/2} 2^\alpha \Gamma(\alpha/2)}{\Gamma(N/2-\alpha/2)} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{g(y)}{|x-y|^{N-\alpha}}\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

(srv. se známou klasickou formulí pro potenciál, známou z harmonické analýzy pro $\alpha = 2$).

Definujeme-li pro $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *Rieszovu transformaci* jako

$$R_j f(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(-\frac{i\xi_j}{|\xi|}\mathcal{F}f\xi)\right)(x)$$

(speciální singulární integrál s Calderón-Zygmundovým jádrem, viz např. [67], [55]), potom (známá početní pravidla pro Fourierovu transformaci), dostaneme

$$R_j(D_j f)(x) = \mathcal{F}^{-1}(\xi_j^2|\xi|^{-1}\mathcal{F}f(\xi))(x)$$

a $\mathcal{F}\left(\sum_{j=1}^N R_j(D_j f)\right)(\xi) = |\xi|\mathcal{F}f(\xi)$. Tudíž

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(|\xi|^{-1}\mathcal{F}\left(\sum_{j=1}^N R_j(D_j f)\right)\right)(x), \qquad x \in \mathbb{R}^N,$$

a dostáváme reprezentační formuli

$$f(x) \sim \mathcal{I}_1\Big(\sum_{j=1}^{N} R_j(D_j f)\Big)(x), \qquad x \in \mathbb{R}^N.$$

Toto je jeden z možných klíčů ke větám o vnoření Sobolevových prostorů, protože chování operátorů v této superpozici je známo. Operátory R_j zobrazují $L_p(\mathbb{R}^N)$ do téhož prostoru pro $1 < p < \infty$ (hluboký fakt z teorie singulárních integrálních operátorů) a (jak uvidíme níže) $\mathcal{I}_1$ zobrazuje $L_p(\mathbb{R}^N)$ do $L_q(\mathbb{R}^N)$, kde $1/q = 1/p - 1/N$ (tzv. Sobolevův exponent).

Pozor: $\mathcal{I}_1$ nezobrazuje $L_p(\mathbb{R}^N)$ do sebe. To je vidět z chování u nekonečna – není integrovatelnost, takže $f \mapsto I_1 * f$ for $f \in L_p(\mathbb{R}^N)$ není omezené v $L_p(\mathbb{R}^N)$. To lze napravit tak, že uvažujeme Besselova jádra, která se chovají stejně u počátku, ale mají dobré vlastnosti u nekonečna.

4.1 Věta. *Nechť* $0 < \alpha < N$, $1 \leq p < \infty$, $\alpha p < N$, *a* $1/q = 1/p - \alpha/N$. *Potom* I_α *je slabého typu* (p, q).

Jednoduchá aplikace Marcinkiewiczovy věty dává pak následující:

4.2 Důsledek. *Nechť* $0 < \alpha < N$, $1 < p < \infty$, $\alpha p < N$, *a* $1/q = 1/p - \alpha/N$. *Potom* I_α *je typu* (p, q).

Důsledek 4.2 obsahuje klasickou Sobolevovu větu o vnoření. Uvažujme funkci f ze Soboleva prostoru prvního řádu – z hustoty C_0^∞ lze předpokládat, že $f \in C_0^\infty$. Užijeme známé reprezentační formule

$$f(x) = \frac{1}{|S_{N-1}|} \sum_{j=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x-y) \frac{y_j}{|y|^{N+1}}\, dy, \tag{4.5}$$

kde $|S_{N-1}|$ je míra jednotkové sféry v $\mathbb{R}^N$ (to plyne z věty o střední hodnotě), dostaneme, že

$$|f(x)| \leq c \sum_{j=1}^{N} \mathcal{I}_1 \left(\left| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right| \right)(x),$$

a jsme hotovi. Vnoření pro prostory vyšších řádů se dostanou iterací.

Důkaz Věty 4.1. Stačí uvažovat jádro $K(x) = |x|^{\alpha - N}$. Fixujme $\sigma > 0$ a položme $K_1(x) = K(x)$ v kouli se středem v počátku a s poloměrem σ, a $K_2 = K - K_1$. Potom $K_1 \in L_1$

a $K_2 \in L_{p/(p-1)}$, takže integrály $K_1 * f(x)$ a $K_2 * f$ s $f \in L_p$ existují pro s.v. $x \in \mathbb{R}^N$. Chceme dokázat nerovnost slabého typu

$$\lambda^q \operatorname{meas}\{x \in \mathbb{R}^N;\ |K * f(x)| > \lambda\} \leq c\|f\|_p^q, \qquad f \in L_p(\mathbb{R}^N). \tag{4.6}$$

Platí

$$\begin{aligned} \operatorname{meas}\{x \in \mathbb{R}^N; |K * f(x)| > \lambda\} \\ \leq \operatorname{meas}\{x \in \mathbb{R}^N;\ |K_1 * f(x)| > \lambda/2\} \\ + \operatorname{meas}\{x \in \mathbb{R}^N;\ |K_2 * f(x)| > \lambda/2\}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Nechť pro jednoduchost $\|f\|_p = 1$. Pak máme

$$\operatorname{meas}\{x \in \mathbb{R}^N;\, |K_1 * f(x)| > \lambda/2\} \le \frac{2^p \|K_1 * f\|_p^p}{\lambda^p} \le \frac{2^p \|K_1\|_1^p \|f\|_p^p}{\lambda^p} = \frac{2^p \|K_1\|_1^p}{\lambda^p}. \tag{4.8}$$

Normu $\|K_1\|_1$ lze spočítat přímo – vychází rovná $c_1\sigma^\alpha$. Hölderova nerovnost dává

$$\|K_2 * f\|_\infty \le \|K_2\|_{p/(p-1)} \|f\|_p \le \|K_2\|_{p/(p-1)},$$

a z toho $\|K_2 * f\|_\infty \le c_2\sigma^{-N/q}$ s nějakou konstantou c_2. Tudíž $\|K_2\|_{p/(p-1)} = \lambda/2$ pokud $2c_2\sigma^{-N/q} = \lambda/2$. Fixujme takové σ. Potom $\|K_2 * f\|_\infty \leq \lambda/2$ a druhý sčítanec na pravé straně (4.7) se anuluje. Kombinace (4.7) a (4.8) dává

$$\begin{aligned} \operatorname{meas}\{x \in \mathbb{R}^N; \, |K * f(x)| > \lambda\} &\leq c_3 \sigma^{\alpha p} \lambda^{-p} = c_4 \lambda^{-q} \\ &= c_4 \left(\frac{\|f\|_p}{\lambda} \right)^q . \end{aligned}$$

$\square$

Na téma konvolucí a vnoření existuje obšírná literatura (viz např. [40], [77]). Lze dokázat i „lepší“ vnoření (do Lorentzových prostorů).

Nyní se budeme věnovat *Besselovým potenciálům*. Formálně J_α koresponduje $(I - \Delta)^{-\alpha/2}$, kde Δ je Laplaceův operátor. Mají důležitou „lifting property“: potenciální Sobolevovy prostory na $\mathbb{R}^N$ jsou přesně isomorfní kopie $L_p(\mathbb{R}^N)$ a tento isomorfismus je právě Besselův potenciál odpovídajícího řádu.

4.3 Definice. Nechť $s \in \mathbb{R}^N$. Potom *Besselův potenciál řádu* s je zobrazení definované pro $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ jako

$$J_s f = \mathcal{F}^{-1}\big((1+|\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}(f)\big). \tag{4.9}$$

Reference: např. [67], Chapter V.

Nechť $\alpha > 0$. Označme

$$g_\alpha(x) = \frac{1}{(4\pi)^{N/2}\Gamma(\alpha/2)} \int_0^{+\infty} \exp(-2\pi^2|x|^2/t)\exp(-t)t^{(-N+\alpha)/2}\frac{dt}{t}. \tag{4.10}$$

Potom (viz např. [67], [55])

$$\mathcal{F}g_\alpha(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{-\alpha/2}.$$

Je také možné dokázat, že pro $0 < \alpha < N$ je

$$g_\alpha(x) \sim |x|^{-N+\alpha} + o(|x|^{-N+\alpha}) \quad \text{u počátku}, \tag{4.11}$$

a že jádro g_α má exponenciální klesání u nekonečna,

$$g_\alpha(x) = O(e^{-c|x|}) \qquad \text{pro } |x| \to +\infty. \tag{4.12}$$

Poslední dva odhady jsou klíčové pro konvoluční odhady v L_p (a dokonce i v jemnějších škálách prostorů; to je opět cesta k důkazu obecných vět o vnoření.

Pro přehlednost si to zformulujeme samostatně (důkaz lze nalézt např. v [67] nebo v [55]).

4.4 Proposice. *Nechť* $0 < \alpha$ *a* g_α *je dáno formulí* (4.10). *Potom* $\mathcal{F}g_\alpha(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{-\alpha/2}$, $\xi \in \mathbb{R}^N$ *a asymptotické chování* g_α *u počátku, resp. u nekonečna je dáno odhady* (4.11), *resp.* (4.12).

4.5 Definice. Nechť $\alpha \in \mathbb{R}^1$, $1 < p < \infty$. Potom definujeme *potenciální isotropní Sobolevův prostor* $H_p^\alpha = H_p^\alpha(\mathbb{R}^N)$ jako prostor všech $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ pro které existuje $g \in L_p(\mathbb{R}^N)$ taková, že $f = J_\alpha g = \mathcal{F}^{-1}((1 + |\xi|^2)^{\alpha/2}\mathcal{F}g)$, s normou $\|f\|_{H_p^\alpha(\mathbb{R}^N)} = \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^N)}$.

Prostor H_p^α se často nazývá *Besselovým potenciálním prostorem*. nebo prostorem *Besselových potenciálů*. Historické důvody vedou k častému označení H^α místo H_2^α.

Často se píše pouze H_p^α místo $H_p^\alpha(\mathbb{R}^N)$.

4.6 Poznámka. Je-li $\alpha = 0$, pak triviálně $H_p^\alpha = L_p$. Pokud $\alpha = k$ je celé kladné číslo, pak H_p^α je obvyklý Sobolevův prostor. To je snadné ukázat pro $p = 2$ (užije se toho, že Fourierova transformace zobrazuje L_2 spojitě na sebe.) Obecný případ je obtížnější, lze použít např. vět o multiplikátorech Michlinova typu. Na místě je také upozornění na nejednotnost v označování. Prostory H_p^α neceléh o řádu (tj. pro α necelé) nesplývají obecně ani množinově se Sobolevovými prostory neceléh o řádu W_p^α (tzv. Sobolev-Sloboděckého prostory, viz text v části věnované Běsovovým prostorům).

Michlinovu větu lze též použít ke snadnému důkazu ekvivalence různých norem pro $p > 1$, např. potenciální norma $\|f\|_{H_p^k}$ je ekvivalentní normě $\|f\|_p + \sum_{j=1}^N \|\partial^k f / \partial x_j^k\|_p$.

Podobně se dá snadno dokázat, že jsou ekvivalentní normy

$$\|f\|^{(1)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha f\|_p, \qquad \|f\|^{(2)} = \sum_{j=1}^{N} \|D_j^m f\|_p,$$

$$\|f\|^{(3)} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{N} \|D_j^k f\|_p, \qquad \|f\|^{(4)} = \|f\|_p + \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha f\|_p$$

a

$$\|f\|^{(5)} = \|f\|_p + \sum_{j=1}^{N} \|D_j^m f\|_p, \tag{4.13}$$

a jejich varianty, kde zanedbáváme $\|f\|_p$. To lze zkombinovat s *nerovnostmi Gagliardo-Nirenbergova typu* pro intermediální derivace a dostat další ekvivalentní normy, kde jsou vynechány derivace nižších řádů.

Pro přehlednost zformulujme tvrzení o ekvivalenci potencionálních prostorů a klasických Sobolevových prostorů jako samostatnou větu (platí dokonce více, totiž že jejich rovnost nastává pouze pro celočíselné hodnoty k).

4.7 Věta. *Nechť m je kladné celé číslo a $1 < p < \infty$. Potom $H_p^m(\mathbb{R}^N) = W_p^m(\mathbb{R}^N)$.*

Důkaz. Přímým výpočtem (induktivní formule pro parciální derivace) lze jednoduše ověřit, že funkce $\xi \mapsto \xi_j^m(1 + |\xi|^2)^{-m/2}$, $\xi \in \mathbb{R}^N$, $j = 1, \ldots, N$, splňují předpoklady Michlinovy věty o multiplikátorech. Pro $f \in \mathcal{S}$ označme $D_j^m f = \partial^m f / \partial x_j^m$. Potom

$$
\begin{aligned}
&\|D_j^m f\|_p = \|\mathcal{F}^{-1}[\xi_j^m((1+|\xi|^2)^{-m/2})((1+|\xi|^2)^{m/2})\mathcal{F}(f)]\|_p \\
&= \|\mathcal{F}^{-1}[\xi_j^m((1+|\xi|^2)^{-m/2})\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}((1+|\xi|^2)^{m/2})\mathcal{F}(f)]\|_p \\
&= c\|\mathcal{F}^{-1}[\xi_j^m((1+|\xi|^2)^{-m/2})\mathcal{F}(J_m\mathcal{F}(f))]\|_p \\
&\leq c\|f\|_{H_p^m}.
\end{aligned}
$$

Čili když $f \in H_p^m$, tak potom $D_j^m f$ je funkce v L_p jejíž norma je odhadnuta násobkem H_p^m-normy f.

Pro obrácený odhad pišme

$$\|J_m f\|_p = \left\|\mathcal{F}^{-1}((1+|\xi|^2)^{m/2}\mathcal{F}(f))\right\|_p$$
$$= \Bigg\|\mathcal{F}^{-1}\Bigg((1+|\xi|^2)^{m/2}\Bigg(1+\sum_{j=1}^{N}\eta(\xi_j)|\xi_j|^m\Bigg)$$
$$\Bigg(1+\sum_{j=1}^{N}\eta(\xi_j)|\xi_j|^m\Bigg)^{-1}\mathcal{F}(f)\Bigg)\Bigg\|_p,$$

kde η je nezáporná C^∞ funkce na $\mathbb{R}^N$, anulující se na jednotkové kouli a rovná 1 na $\{\xi;\ |\xi| \geq 2\}$. Elementární výpočet ukáže, že pro libovolný multiindex α platí

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial\xi_1^{\alpha_1}\dots\partial\xi_N^{\alpha_N}}\left((1+|\xi|^2)^{m/2}\Bigg(1+\sum_{j=1}^{N}\eta(\xi_j)|\xi_j|^m\Bigg)^{-1}\right)\right| \leq \frac{c_\alpha}{|\xi|^\alpha},$$

takže lze použít Michlinovu větu; dostaneme tak, že

$$\begin{aligned}\|J_m f\|_p &\le c\left\|\mathcal{F}^{-1}\left(\left(1+\sum_{j=1}^{N}\eta(\xi_j)|\xi_j|^m\right)\mathcal{F}(f)\right)\right\|_p \\ &\le c\|f\|_p + c\sum_{j=1}^{N}\left\|\mathcal{F}^{-1}\left(\eta(\xi_j)|\xi_j|^m\xi_j^{-m}\mathcal{F}(D_j^m f)\right)\right\|_p .\end{aligned}$$

Použijeme Michlinovu větu ještě jednou k tomu, abychom ukázali, že funkce $\xi \mapsto \eta_j(\xi_j)|\xi_j|^m\xi_j^{-m}$ je Fourierův multiplikátor v libovolném L_p, $1 < p < \infty$. Z toho

$$\|J_m f\|_p \le c\|f\|_p + c\sum_{j=1}^{N}\|D_j^m f\|_p$$

a důkaz je hotov. $\square$

4.8 Poznámka. Další příklad užití Michlinovy věty: V předcházející větě jsme viděli, že se normy všech derivací do řádu řádu $m-1$ dají odhadnout normami nejvyšších „čistých“ derivací.

Ukažme si ještě jeden typický případ. Pro jednoduchost uvažujme případ $N=2$. Je-li $D_1^2 f, D_2^2 f \in L_p$, potom

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \right\|_p &= \left\| \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\xi_1 \xi_2}{\xi_1^2 + \xi_2^2} (\xi_1^2 + \xi_2^2) \mathcal{F}(f) \right) \right\|_p \\ &\leq \left\| \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\xi_1 \xi_2}{\xi_1^2 + \xi_2^2} \right) * (D_1^2 f + D_2^2 f) \right\|_p . \end{aligned} \tag{4.14}$$

Snadno se ověří, že funkce $\xi \mapsto \xi_1 \xi_2 / (\xi_1^2 + \xi_2^2)$ splňují předpoklady Michlinovy věty. Takže pravá strana (4.14) je odhadnuta násobkem $\|D_1^2 f\|_p + \|D_2^2 f\|_p$. Co se týče odhadu „čistých“ derivací, fixujme celé číslo $0 < k < m$ a uvažujme např. derivace vzhledem k první proměnné. Máme

$$\|D_1^1 f\|_p = \|\mathcal{F}^{-1}(\xi_1(1+\xi_1^2)^{-1}) * (f + D_1^1 f)\|_p.$$

Stejný argument jako výše dá odhad $\|D_1^k f\|_p \leq c(\|f\|_p + \|D_1^m f\|_p)$. Obecný případ je kombinací takových kroků.

Varování: Odhady smíšených derivací pomocí čistých derivací neplatí obecně pro $p = 1$ (viz např. [70]).

Obecnější problém vzniká v anisotropních prostorech. Odpověď je obzvláště geometricky názorná, když uvažujeme libovolnou množinu N-dimenzionálních multiindexů, řekněme $\mathcal{M}$, a předpokládáme, že $D^\alpha f \in L_p$ pro $\alpha \in \mathcal{M}$. Potom $D^\beta f \in L_p$ pro všechna β, kde β jsou mřížové body s celočíselnými souřadnicemi, ležící v konvexním obalu množiny $\mathcal{M}$ (viz např. [15]).

Interpolace v potenciálních prostorech:

4.9 Věta. *Nechť* $0 < \theta < 1$, $1 < p_1, p_2 < \infty$ *a* $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^1$. *Potom* $[H^{s_1}_{p_1}, H^{s_2}_{p_2}]_\theta = H^s_p$, *kde* $s = (1-\theta)s_1 + \theta s_2$ *a* $1/p = (1-\theta)p_1 + \theta p_2$.

Další dvě věty dávají informaci o vztahu potenciálních a Běsovových prostorů.

Reference: [12] a [70].

4.10 Věta. *Platí následující vnoření:*

(i) $B^s_{p\,1}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow H^s_p(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow B^s_{p\,\infty}(\mathbb{R}^N)$ *pro všechna* $s \in \mathbb{R}^1$ *a všechna* $1 \le p \le \infty$

(ii) $B^s_{p\,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow H^s_p(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow B^s_{p\,2}(\mathbb{R}^N)$ *pro všechna* $s \in \mathbb{R}^1$ *a všechna* $p \in (1,2]$

(iii) $B^s_{p\,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow H^s_p(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow B^s_{p\,p}(\mathbb{R}^N)$ *pro všechna* $s \in \mathbb{R}^1$ *a všechna* $p \in [2,\infty]$.

4.11 Věta. *Nechť* $0 < \theta < 1$. *Potom*

(i) $(H^{s_1}_p(\mathbb{R}^N), H^{s_2}_p(\mathbb{R}^N))_{\theta,q} = B^s_{p\,q}(\mathbb{R}^N)$ *pro všechna* $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^1$, $s_1 \neq s_2$, $1 \le p, q \le \infty$, *kde* $s = (1-\theta)s_1 + \theta s_2$

(ii) $(H^s_{p_1}(\mathbb{R}^N), H^s_{p_2}(\mathbb{R}^N))_{\theta,p} = H^s_p(\mathbb{R}^N)$ *pro všechna* $s \in \mathbb{R}^1$, $1 \le p_1, p_2 \le \infty$, *kde* $1/p = (1-\theta)/p_1 + \theta/p_2$.

4.12 Věta. *Nechť* $0 < s < 1$, $1 < p < \infty$. *Potom*

$$(W_p^s(\mathbb{R}^N), W_p^1(\mathbb{R}^N))_{\eta,p} = B_{p\,p}^{s_1}(\mathbb{R}^N)$$

pro $s_1 = (1-\eta)s + \eta$.

5 Běsovovy a Lizorkin-Triebelovy prostory

5.1 „Klasická“ definice

Z hlediska vývoje teorie se prostory s necelými derivacemi objevily při studiu stop na hranici oblasti. To vedlo k poněkud nepřehledné situaci, neboť stopy sice patří do prostorů s necelými derivacemi, ale obecně to nejsou prostory Besselových potenciálů.

Je-li $f \in C^{\infty}(\overline{\Omega}) \cap W_p^k(\Omega)$ (přitom Ω nechť je dostatečně hladká), potom je snadné dokázat, že $f \in L_p(\partial\Omega)$ a že operátor této restrikce je omezený pro všechna $1 \leq p < \infty$. Čili tato restrikce může být jednoznačně rozšířena na celé $W_p^k(\Omega)$ (z hustoty), a tento operátor budeme nazývat *operátor stop*.

Nicméně bychom rádi věděli více, speciálně to, kdy lze funkci z $L_p(\partial\Omega)$, která je stopou funkce z $W_p^k(\Omega)$, prodloužit dovnitř oblasti. Zde se objevují *Sobolev-Sloboděckého prostory*.

Reference: Gagliardo [23], Sloboděckij [63], [64], Besov [13], [14]. Sobolev-Sloboděckého prostory jsou speciálním případem Běsovových prostorů.

5.1 Definice. Nechť $s > 0$ je necelé a nechť $[s]$ značí celou část s. Nechť $1 \le p \le \infty$ a Ω je oblast v $\mathbb{R}^N$. Předpokládejme takovou regularitu $\partial\Omega$, která umožňuje definovat integrál na $\partial\Omega$. Potom *Sobolev-Sloboděckého prostor* $W_p^s(\Omega)$ je definován jako lineární prostor všech funkcí $f \in L_p(\mathbb{R}^N)$ takových, že

$$\|f\|_{W_p^s(\mathbb{R}^N)} = \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^N)}$$
$$+ \sum_{|\alpha|=[s]} \left(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|^p}{|x-y|^{(s-[s])p+N}} \, dxdy \right)^{1/p} < +\infty$$

(příslušná modifikace pro $p = \infty$). Přitom $dxdy$ zde označuje integrování vzhledem k plošné míře na $\partial\Omega$.

Základní věta o stopách: Pro $s > 1/p$, $1 < p < \infty$ a $k \geq 1$ celé, je prostor stop funkcí z $W_p^k(\Omega)$ (Ω dostatečně hladká) právě $W_p^{k-1/p}(\partial\Omega)$. (Pozor: Situace pro $p = 1$ je v jistém smyslu singulární. Stopy funkcí z $W^{1,1}(\Omega)$ jsou L_1, přičemž operátor stop je spojitý, ale libovolný operátor rozšíření z L_1 do $W^{1,1}(\Omega)$ spojitý není – viz [23] a [51]).

Označení: Pro $h \in \mathbb{R}^N$ nechť T_h je operátor translace definovaný jako $T_h f(x) = f(x+h)$. Definujme

$$\Delta_h^1 f(x) = \Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x) = (T_h - \mathrm{id}) f(x),$$

operátor diference prvního řádu; diference vyššího řádu jsou definovány induktivně jako

$$\Delta_h^r f(x) = \Delta_h(\Delta_h^{r-1} f)(x), \qquad r = 1, 2, \dots.$$

Je $T_h^k f(x) = T_{kh} f(x) = f(x+kh)$. Zřejmě také

$$\Delta_h^r f(x) = (T_h - \mathrm{id})^r f(x) = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-1)^{r-k} T_{hk} f(x).$$

Nechť $f \in L_{p,\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ pro nějaké $p \in [1, \infty]$. Potom definujeme L_p-*modul spojitosti v průměru* jako

$$\omega_p^r(f, t) = \sup_{|h| \le t} \|\Delta_h^r f\|_p.$$

Funkce $t \mapsto \omega_p^r(f, t)$ je neklesající, splňuje $\omega_p^r(f, 2t) \le 2^r \|f\|_p$ a $\omega_p^r(f, 2t) \le 2^r \omega_p^r(f, t)$ (plyne snadno z definice).

5.2 Definice. Nechť $s > 0$ a nechť r je libovolné kladné číslo, $r > s$. Nechť $1 \le p, q \le \infty$. Potom *Běsovův prostor* $B^s_{p\,q} = B^s_{p\,q}(\mathbb{R}^N)$ je definován jako lineární množina všech $f \in L_p(\mathbb{R}^N)$ s konečnou normou

$$\|f\|_{B^s_{p\,q}} = \begin{cases} \|f\|_p + \left(\int_0^{+\infty} [t^{-s}\omega_p^r(f,t)]^q \,\frac{dt}{t}\right)^{1/q}, & \text{pro } q < \infty \\ \|f\|_p + \sup\limits_{t>0} t^{-s}\omega_p^r(f,t), & \text{pro } q = \infty. \end{cases} \tag{5.1}$$

Prostory $B^s_{p\,p} = B^s_{p\,p}(\mathbb{R}^N)$ se obvykle nazývají *Sobolev-Sloboděckého prostory*.

Pro $0 < s < 1$ a $p = q = \infty$ jsou výsledkem *Hölderovy prostory* řádu s.

Pro $s < 0$ a $1 < p, q < \infty$ položíme $B^s_{p\,q} = B^{-s}_{p'\,q'}$, kde $p' = p/(p-1)$ a $q' = q/(q-1)$.

5.3 Poznámka. Protože $\omega_p^r(f, 2t) \leq 2^r \omega_p^r(f, t)$, je jasné, že při nahrazení $\sup_{t>0}$ výrazem $\sup_{0<t<1}$ dostaneme ekvivalentní normu.

Za druhé: lze nahradit modul spojitosti normami příslušných diferencí.

Za třetí: Aby byla definice korektní, je potřeba ukázat, že $r > s$ lze opravdu vybrat libovolně. To není zcela jednoduché a visí to na o sobě zajímavých nerovnostech pro diference a moduly spojitosti, které se obvykle nazývají *Marchaudovy nerovnosti*.

Konečně: Restrikce $p, q > 1$ není podstatná, lze uvažovat libovolná kladná p a q; obecně se tak dostanou quasinormy.

Reference: monografie [15], [11], [70], [12].

Uveďme si základní věty o vnoření:

5.4 Věta. *Nechť* $s_2 - N/p_1 = s_1 - N/p_1$, $s_1, s_2 > 0$, $1 \leq p_1 < p_2 \leq \infty$ *a* $1 \leq q \leq \infty$. *Potom* $B^{s_2}_{p_2\,q} \hookrightarrow B^{s_1}_{p_1\,q}$.

Speciálně máme:

5.5 Věta. *Nechť* k *je kladné celé číslo. Potom*

$$B^k_{p\,p} \hookrightarrow W^k_p \hookrightarrow B^k_{p\,2} \qquad \text{pro } 1 < p \leq 2, \tag{5.2}$$

$$B^k_{p\,2} \hookrightarrow W^k_p \hookrightarrow B^k_{p\,p} \qquad \text{pro } 2 \leq p < \infty. \tag{5.3}$$

Speciálně $W^k_2 = B^k_{2\,2}$.

5.2 Fourierovský přístup

Nechť g je nezáporná C^∞-funkce v $\mathbb{R}^N$, s nosičem v $\{\xi \in \mathbb{R}^N;\ |\xi| \le 2\}$ a taková, že $g(\xi) = 1$ pro $|\xi| \le 1$. Definujeme

$$g_0(\xi) = g(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}^N,$$

a teleskopickou posloupnost

$$g_j(\xi) = g(2^{-j}\xi) - g(2^{-j+1}\xi), \qquad j = 1, 2, \dots.$$

Potom

$$\operatorname{supp} g_j \subset \{\xi \in \mathbb{R}^N;\ 2^{j-1} \le |\xi| \le 2^{j+1}\}$$

a

$$\sum_{j=0}^{+\infty} g_j(\xi) = 1.$$

Posloupnost $\{g_j\}_{j=0}^{+\infty}$ je *hladký* (*dyadický*) *rozklad jednotky*. Poznamenejme, že v hořejší sumě jsou nanejvýš dva nenulové členy pro každé pevné $\xi \in \mathbb{R}^N$.

Nyní definujme funkce $\varphi_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ pomocí jejich Fourierových transformací jako

$$(\mathcal{F}\varphi_j)(\xi) = g_j(\xi) \qquad j = 0, 1, 2, \ldots.$$

Je

$$\operatorname{supp} \mathcal{F}(\varphi_k) = \{\xi;\, 2^{k-1} \le |\xi| \le 2^{k+1}\}, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

a

$$\operatorname{supp} \mathcal{F}(\varphi_0) = \{\xi;\, |\xi| \le 2\}.$$

Jinými slovy, když položíme $h(\xi) = g(\xi) - g(2\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^N$, potom

$$\mathcal{F}(\varphi_k;\xi) = h(2^{-k}\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}^N,\ k = 1,2,\ldots, \tag{5.4}$$

h je nezáporná, patří do $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ a má nosič v $\{\xi;\, 2^{-1} \leq |\xi| \leq 2\}$.

5.6 Poznámka. Dekompozice s podobnými vlastnostmi hrají klíčovou roli v moderní teorii prostorů funkcí.

Funkce, jejichž Fourierův obraz má kompaktní nosič (to platí pro $\varphi_k * f$ z definice Běsovova prostoru výše), mají jednu zajímavou vlastnost.

5.7 Věta (Nikol'ského nerovnost)**.** *Nechť $b > 0$, $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Potom existuje $c > 0$ takové, že*

$$\|D^\alpha g\|_q \leq c b^{|\alpha| + N(1/p - 1/q)} \|g\|_p \tag{5.5}$$

pro všechna $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ taková, že $\operatorname{supp} \mathcal{F}(g) \subset \{\xi;\, |\xi| \leq b\}$.

Obecné Běsovovy a Lizorkin-Triebelovy prostory:

5.8 Definice.

(i) Nechť $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ a $s \in \mathbb{R}^1$. Potom *Běsovův prostor* $B^s_{p\,q} = B^s_{p\,q}(\mathbb{R}^N)$ je lineární množina všech $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ s konečnou normou

$$\|f\|_{B^s_{p\,q}} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{ksq} \|\varphi_k * f\|^q_{L_p}\right)^{1/q} \tag{5.6}$$

pro $q < \infty$ a s konečnou normou

$$\|f\|_{B^s_{p\,\infty}} = \sup_k 2^{ks} \|\varphi_k * f\|_{L_p} \tag{5.7}$$

pro $q = \infty$.

(ii) Nechť $1 \le p < \infty$, $1 \le q \le \infty$ a $s \in \mathbb{R}^1$. Potom *Lizorkin-Triebelův prostor* $F^s_{p\,q} = F^s_{p\,q}(\mathbb{R}^N)$ je lineární množina všech $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ s konečnou normou

$$\|f\|_{F^s_{p\,q}} = \left\| \left(\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{ksq} |(\varphi_k * f)(x)|^q \right)^{1/q} \right\|_{L_p} \tag{5.8}$$

s analogickou modifikací v případě $q = \infty$.

5.9 Poznámka. V literatuře se často najde označení $\ell^s_q(L_p)$ a $L_q(\ell^s_p)$ pro prostory posloupností funkcí $a_k = a_k(x)$ se smíšenou normou; např. $\|a_k\|_{\ell^s_q(L_p)} = \|\, 2^{sk} \|a_k(x)\|_{L_p} \|_{\ell_q}$. Užijeme-li toto označení pro $\{\varphi_k * f\}$, máme například $\|f\|_{B^s_{p\,q}} = \|\varphi_k * f\|_{\ell^s_q(L_p)}$ apod.

5.3 Základní věty o vnoření a interpolaci

Označení pro Hölderovy prostory: Pro kladné celé $k > 0$ je $C^k(\mathbb{R}^N)$ uzávěr $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ v normě $\|f\|_{C^k} = \max_{|\alpha \leq k|} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |D^\alpha f(x)|$.

Jestliže $\varkappa > 0$ není celé, pak pišme $\varkappa = [\varkappa] + \{\varkappa\}$, kde $[\varkappa]$ je celá část $\varkappa$ (čili $0 < \{\varkappa\} < 1$). Potom *Hölderův prostor* $C^\varkappa(\mathbb{R}^N)$je lineární množina všech $f \in C^{[\varkappa]}(\mathbb{R}^N)$ s konečnou normou $\|f\|_{C^\varkappa}$ rovnou

$$\|f\|_{C^{[\varkappa]}} + \sum_{|\alpha|=[\varkappa]} \sup_{x \neq y} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x-y|^{\{\varkappa\}}}.$$

Je všeobecně známo, že $C^\varkappa(\mathbb{R}^N)$ je Banachův prostor.

Poznamenejme že pro necelé $\varkappa$ je prostor $C^{\varkappa}(\mathbb{R}^N)$ roven *Zygmundovu prostoru* $\mathfrak{C}^{\varkappa}$, což je lineární množina všech $f \in C^{[\varkappa]^-}(\mathbb{R}^N)$, kde $\varkappa = [\varkappa]^- + \{\varkappa\}^+$, $[\varkappa]^-$ je celé a $\{\varkappa\}^+ \in (0, 1]$, které mají konečnou normu $\|f\|_{\mathfrak{C}^{\varkappa}}$ rovnou

$$\|f\|_{C^{[\varkappa]^-}} + \sum_{|\alpha|=[\varkappa]^-} \sup_{x \neq y} \frac{|D^\alpha f(x) - 2D^\alpha((x+y)/2) + D^\alpha f(y)|}{|x-y|^{\{\varkappa\}^+}}.$$

5.10 Věta. *Platí následující vnoření:*

(i) *Nechť* $1 < p_1 \leq p_2 < \infty, 1 \leq q \leq \infty$ *a* $r, s \in \mathbb{R}^1$ *splňují*

$$s - \frac{N}{p_1} = r - \frac{N}{p_2}, \tag{5.9}$$

potom

$$B^{s_2}_{p_2\, q}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow B^{s_2}_{p_1\, q}(\mathbb{R}^N).$$

(ii) *Jestliže* $1 < p_1 \le p_2 < \infty$, $1 < q < \infty$ *a* $r, s \in \mathbb{R}^1$ *splňují* (5.9), *potom*

$$F^{s_2}_{p_2\,q}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow F^{s_2}_{p_1\,q}(\mathbb{R}^N).$$

(iii) *Nechť* $1 < p < \infty$ *a* $\varkappa \ge 0$. *Potom*

$$B^{\varkappa+N/p}_{p\,1}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C^{\varkappa}(\mathbb{R}^N) \quad a \quad B^{\varkappa+N/p}_{p\,1}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow \mathcal{C}^{\varkappa}(\mathbb{R}^N).$$

(iv) *Nechť* $1 < p, q < \infty$ *a nechť* $\varkappa$ *je necelé. Potom*

$$F^{\varkappa+N/p}_{p\,q}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C^{\varkappa}(\mathbb{R}^N).$$

5.11 Věta. *Platí následující tvrzení:*

(i) *Prostory* $B^s_{p\,q}(\mathbb{R}^N)$ *a* $F^s_{p\,q}(\mathbb{R}^N)$ *jsou úplné pro všechny hodnoty* $s \in \mathbb{R}^1$, $1 \le p, q \le \infty$.

(ii) *Je-li* $s_1 < s_2$ *a* $1 \le p, q \le \infty$, *pak* $B^{s_2}_{p\,q}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow B^{s_1}_{p\,q}(\mathbb{R}^N)$.

(iii) *Je-li* $s \in \mathbb{R}^1$, $1 < p < \infty$ *a* $1 \le q < \infty$, *pak* $(B^s_{p\,q}(\mathbb{R}^N))' = B^{-s}_{p'\,q'}(\mathbb{R}^N)$.

(iv) *Je-li* $s \in \mathbb{R}^1$, $1 \le p \le \infty$ *a* $1 \le q_1 < q_2 \le \infty$, *pak* $B^s_{p\,q_1}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow B^s_{p\,q_2}(\mathbb{R}^N)$.

(v) *Pro* $k = 0, 1, 2, \ldots$ *je* $B^k_{2\,2}(\mathbb{R}^N) = W^k_2(\mathbb{R}^N)$. *To platí právě pro tuto speciální volbu parametrů* k, p *a* q.

(vi) *Pro* $k = 0, 1, 2, \ldots$ *a pro* $1 < p < \infty$ *je* $F^k_{p\,2}(\mathbb{R}^N) = W^k_p(\mathbb{R}^N)$.

(vii) *Je-li* $s \in \mathbb{R}^1$ *a* $1 < p < \infty$, *pak* $B^s_{p\,p}(\mathbb{R}^N) = F^s_{p\,p}(\mathbb{R}^N)$. *Speciálně pro necelé* $s > 0$ *je* $F^s_{p\,p}(\mathbb{R}^N)$ *roven Sobolev-Sloboděckému prostoru* $W^s_p(\mathbb{R}^N)$.

5.12 Věta. *Nechť* $s \in \mathbb{R}^1$ *a* $1 < p < \infty$. *Potom*

$$B^s_{p\,q}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow F^s_{p\,q}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow B^s_{p\,p}(\mathbb{R}^N) \quad \textit{pro všechna}\; 1 < q \le p.$$

Základní interpolační vlastnosti (v dalším formálně klademe $1/\infty = 0$):

5.13 Věta. *Nechť* $0 < \theta < 1$. *Potom*

(i) $(B^{s_1}_{p\,q_1}(\mathbb{R}^N), B^{s_2}_{p\,q_2}(\mathbb{R}^N))_{\theta,q} = B^{s}_{p\,q}(\mathbb{R}^N)$
pro všechna $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^1$, $s_1 \neq s_2$, $1 < p \leq \infty$ *a* $1 \leq q_1, q_2 \leq \infty$, *kde* $s = (1-\theta)s_1 + \theta s_2$,

(ii) $(B^{s_1}_{p_1\,q_1}(\mathbb{R}^N), B^{s_2}_{p_2\,q_2}(\mathbb{R}^N))_{\theta,q} = B^{s}_{p\,q}(\mathbb{R}^N)$
pro všechna $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^1$, $1 \leq q_1, q_2 < \infty$, $1 < p_1, p_2 < \infty$, $p_1 \neq p_2$ *a* $1 \leq q_1, q_2 < \infty$, *kdykoliv* $1/p = (1-\theta)/p_1 + \theta/p_2 = 1/q = (1-\theta)/q_1 + \theta/q_2$,

(iii) $[B^{s_1}_{p_1\,q_1}(\mathbb{R}^N), B^{s_2}_{p_2\,q_2}(\mathbb{R}^N)]_{\theta} = B^{s}_{p\,q}(\mathbb{R}^N)$
pro všechna $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^1$, $1 \leq q_1, q_2 \leq \infty$, $1 \leq p_1, p_2 \leq \infty$, *kde* p *je jako v* (ii) *a* $1/q = (1-\theta)/q_1 + \theta/q_2$.

5.14 Věta. *Nechť* $0 < \theta < 1$. *Potom*

(i) $(F^{s_1}_{p_1\,q_1}(\mathbb{R}^N), F^{s_2}_{p_2\,q_2}(\mathbb{R}^N))_{\theta,p} = F^s_{p\,p}(\mathbb{R}^N) = B^s_{p\,p}(\mathbb{R}^N)$ *pro všechna* $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^1$, $s_1 \neq s_2$, $1 < p_1, p_2, q_1, q_2 < \infty$, *kde* $s = (1-\theta)s_1 + \theta s_2$ *a* $1/p = (1-\theta)/p_1 + \theta/p_2$,

(ii) $(F^s_{p_1\,q_1}(\mathbb{R}^N), F^s_{p_2\,q_2}(\mathbb{R}^N))_{\theta,p} = F^s_{p\,q}(\mathbb{R}^N)$ *pro všechna* $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^1$, $1 < q_1, q_2 < \infty$, $1 < p_1, p_2 < \infty$, $p_1 \neq p_2$, *kdykoliv* $1/p = (1-\theta)/p_1 + \theta/p_2 = 1/q = (1-\theta)/q_1 + \theta/q_2$,

(iii) $(F^s_{p_1\,q}(\mathbb{R}^N), F^s_{p_2\,q}(\mathbb{R}^N))_{\theta,p} = F^s_{p\,q}(\mathbb{R}^N)$ *pro všechna* $s \in \mathbb{R}^1$, $1 < q < \infty$ *a* $1 < p_1, p_2 < \infty$, $p_1 \neq p_2$, *kde* $1/p = (1-\theta)/p_1 + \theta/p_2$,

(iv) $[F^{s_1}_{p_1\,q_1}(\mathbb{R}^N), F^{s_2}_{p_2\,q_2}(\mathbb{R}^N)]_\theta = F^s_{p\,q}(\mathbb{R}^N)$

pro všechna $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^1$, $1 < p_1, p_2, q_1, q_2 < \infty$, *kde* $s = (1-\theta)s_1 + \theta s_2$, $1/p = (1-\theta)/p_1 + \theta/p_2$ *a* $1/q = (1-\theta)/q_1 + \theta/q_2$.

5.15 Poznámka. Ne všechny kombinace parametrů v předešlých větách jsou možné. Důvod je ten, že prostory užité v definici B- a F-prostorů nejsou uzavřené vůči reálné interpolaci. Je potřeba škály rozšířit tak, že místo Lebesgueových prostorů se uvažují Lorentzovy prostory.

Jednoduše vychází dualita těchto prostorů:

5.16 Věta. (i) *Nechť* $s \in \mathbb{R}^1$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, $p' = p/(p-1)$ *a* $q' = q/(q-1)$ ($q' = \infty$ *if* $q = 1$). *Potom* $(B^s_{p\,q}(\mathbb{R}^N))' = B^{-s}_{p'\,q'}(\mathbb{R}^N)$.

(iii) *Nechť* $s \in \mathbb{R}^1$, $1 < p < \infty$, $p' = p/(p-1)$

a nechť $\widetilde{B}^s_{p\,\infty}(\mathbb{R}^N)$ *značí uzávěr* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ *v* $B^s_{p\,\infty}(\mathbb{R}^N)$. *Potom* $(\widetilde{B}^s_{p\,\infty}(\mathbb{R}^N))' = B^{-s}_{p'\,1}(\mathbb{R}^N)$.

(iii) *Nechť* $s \in \mathbb{R}^1$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, $p' = p/(p-1)$ *a* $q' = q/(q-1)$. *Potom* $(F^s_{p\,q}(\mathbb{R}^N))' = F^{-s}_{p'\,q'}(\mathbb{R}^N)$.

5.17 Poznámka. Poslední rovnosti ve Větě 5.11 jsou velmi pozoruhodné. Když $k = 0$, tak platí $W_2^k = L_2$ (až na ekvivalenci norem), tedy

$$\|f\|_2 \sim \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} ((\varphi_k * f)(x))^2 \, dx\right)^{1/2}.$$

Dále, pro libovolné $1 < p < \infty$,

$$\|f\|_p \sim \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} ((\varphi_k * f)(\xi))^2\right)^{p/2} d\xi\right)^{1/p}.$$

Poslední dvě ekvivalence jsou *nerovnosti Littlewood-Pólyova typu*. Tyto nerovnosti se samozřejmě objevily dříve než obecné definice v předcházejícím textu a byly právě prostředkem a inspirací k tomuto obecnému přístupu.

5.18 Poznámka. Existuje mnoho typů anisotropních prostorů, soustavný výklad je věnován prostorům se smíšenou normou a anisotropií pro „čisté“ derivace (Nikol'skij a další, viz např. [15]) a prostorům s dominujícími smíšenými derivacemi (Schmeisser a Triebel, viz [60]).

Některé speciální typy našly významné užití v PDR, např. prostory, kde je dán scalar $p_\alpha \in (1, \infty)$ pro každé $|\alpha| \leq m$ a předpokládá se, že $D^\alpha \in L_{p_\alpha}$, viz práce Troisiho [73], [74] kolem roku 1970.

Zajímavé jsou *redukované Sobolevovy prostory* zavedené Adamsem [2] a studované nezávisle též Amanovem [4] – uvažují se jenom některé smíšené derivace. Např. pro $k \leq N$ uvažujeme pouze ty multiindexy $|\alpha| \leq k$, které $\alpha_i \leq 1$.

Velice překvapující vlastností těchto prostorů je to, že pro ně platí věta pro vnoření, ve které figuruje tentýž cílový prostor jako ve standardní Sobolevově větě. Znamená to tedy, že předpoklady Sobolevovy věty mohou být zeslabeny. Obecněji můžeme uvažovat prostory, kde $D^\alpha f \in L_p$ pro $\alpha \in M$, kde M je nějaká podmnožina N-dimenzionálních multiindexů délky nanejvýš k, $kp < N$. Výsledný zobecněný Sobolevův prostor označme třeba W_p^M. Zdá se, že v tomto směru neexistuje ucelená teorie. Například je zajímavý problém nutných a postačujících podmínek pro M, které dají tentýž cílový prostor pro vnoření, který figuruje ve standardní větě o vnoření, tj. $W_p^M \hookrightarrow L_q$, kde $1/q = 1/p - k/N$.

Poznámka: Současná teorie prostorů funkcí používá pro zavedení obecných prostorů i další dekompoziční metody – rozklady pomocí „molekul“ nebo „atomů“, užití teorie waveletů a další moderní analytické prostředky. Smyslem těchto definic je v první řadě rozklad do jakýchsi elementárních bloků, tj. jednoduchých základních funkcí, se kterými se potom pracuje mnohem snadněji než s globální definicí.

6 Prostory na oblastech

6.1 Geometrické vlastnosti hranice oblasti

Nechť Ω je oblast v $\mathbb{R}^N$, pro jednoduchost omezená.

Nechť $B \subset \mathbb{R}^N$ je uzavřená koule a nechť $x \in \mathbb{R}^N \setminus B$. *Omezený kužel* s vrcholem x je množina $\{z \in \mathbb{R}^N; z = (1-\theta)x + \theta y,\ \theta \in [0,1],\ y \in B\}$.

V literatuře existuje řada definic (pěkný přehled lze nalézt třeba v [1], některá zobecnění pak v [15]):

(i) Ω mající *vlastnost úsečky*

(ii) Ω mající *vlastnost (vnitřního nebo vnějšího kužele)*

(iii) Ω mající *uniformní vlastnost (vnitřního nebo vnějšího kužele)*

(iv) Ω mající *lipschitzovskou hranici*

(v) a další (podmínka rohu, hrotu).

Lipschitzovská hranice znamená, že $\partial\Omega$ lze lokálně popsat jako graf lipschitzovské funkce.

Mezi těmito vlastnostmi existují zajímavé vztahy, např. Gagliardo dokázal, že každá oblast s vlastností kužele se dá napsat jako sjednocení translací konečně mnoha rovnoběžnostěnů. Tento překvapivý fakt je založen na následující větě:

6.1 Věta (Gagliardo). *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *je omezená oblast s vlastností kužele a* $\varepsilon > 0$. *Potom existují otevřené množiny* $\Omega_1, \ldots, \Omega_K$ *tak, že* $\Omega = \bigcup_{k=1}^K \Omega_k$ *a pro každé* $k = 1, \ldots, K$ *existuje* $H_j \subset \overline{\Omega_k}$ *s diametrem menším než* ε *a otevřený rovnoběžnostěn* P_k *s jedním vrcholem v počátku tak, že* $\Omega_k = \bigcup_{x \in H_k}(x + P_k)$. *Dále, je-li* ε *dostatečně malé, pak každá z množin* Ω_k, $k = 1, \ldots, K$, *má lipschitzovskou hranici.*

6.2 Rozšíření a prostory na oblastech

V literatuře lze najít řadu tvrzení o rozšiřování pro oblasti s hladkou hranicí (založené např. na myšlence zrcadlení atd.). Základním problémem je: Definujeme-li prostor na oblasti jako faktorprostor prostoru na celém $\mathbb{R}^N$ modulo rovnost na dané oblasti a lze-li v daném prostoru na oblasti definovat normu přímo, dostáváme tytéž prostory?

Elementární úvahou dostaneme, že k tomu stačí existence rozšiřovacího operátoru z dané oblasti na celé $\mathbb{R}^N$.

Jones [33] nalezl v případě $p = 2$ nutnou a postačující podmínku na rovinnou oblast pro to, aby měla vlastnost rozšíření (tzv. ε-δ-vlastnost).

Calderón [18] zkonstruoval operátor rozšíření pro oblasti s modifikovanou vlastností kužele (speciálně tedy pro oblasti s lipschitzovskou hranicí) pro $1 < p < \infty$. Důkaz je založen na Calderón-Zygmundově teorii singulárních integrálních operátorů. Operátor přitom závisí na m a p. Stein toto tvrzení vylepšil v tom smyslu, že platí uniformně pro $m > 0$ a $p \geq 1$.

Rychkov [54] se zasloužil o podstatný pokrok v této oblasti před několika léty, když zobecnil tzv. Calderónovu reprodukční formuli a sestrojil *univerzální rozšiřovací operátor* nezávislý na hladkosti prostoru.

6.2 Věta. *Nechť $s \in \mathbb{R}^1$, $0 < p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$ ($p < \infty$ v případě Lizorkin-Triebelova prostoru) a nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí. Potom existuje univerzální rozšíření z $B^s_{p\,q}(\Omega)$, resp. $F^s_{p\,q}(\Omega)$ do $B^s_{p\,q}(\mathbb{R}^N)$, resp. do $F^s_{p\,q}(\mathbb{R}^N)$.*

Důležitým důsledkem je univerzální možnost odvozování vlastností prostorů na lipschitzovských oblastech z vlastností prostorů na celém $\mathbb{R}^N$.

Objasníme si to na jednoduchém příkladě. Mějme prostory $X(\mathbb{R}^N)$ a $Y(\mathbb{R}^N)$ a předpokládejme, že $Y(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow X(\mathbb{R}^N)$. Předpokládejme, že existuje omezený lineární operátor E, který zobrazuje $X(\Omega)$ do $X(\mathbb{R}^N)$ a $Y(\Omega)$ do $Y(\mathbb{R}^N)$ tak, že restrikce Ef je rovna f s.v. na Ω (operátor rozšíření) a dále, že $\|f\|_{Y(\Omega)} \leq \|f\|_{Y(\mathbb{R}^N)}$ (to je například typicky triviálně splněno, když norma v Y-prostorech je na Ω a na $\mathbb{R}^N$ dána analogickou analytickou formulí). Potom $Y(\Omega) \hookrightarrow X(\Omega)$, což ihned plyne z odhadů

$$\begin{aligned} \|f\|_{Y(\Omega)} &\leq \|Ef\|_{Y(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq c\|Ef\|_{X(\mathbb{R}^N)} \text{ (předpokládáme vnoření)} \\ &\leq c\|E\|\|f\|_{X(\Omega)} \text{ (z předpokladu o omezenosti } E\text{).} \end{aligned}$$

Reference

[1] Adams R. A. *Sobolev Spaces.* Academic Press, New York 1975.

[2] Adams R. A. Reduced Sobolev inequalities. *Canad. Math. Bull.* **31**, 159–167, 1988.

[3] Agmon S., Douglis A. and Nirenberg L. Estimates near boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I. *Comm. Pure Appl. Math.* **12**, 623–727, 1959. Part II. *Comm. Pure Appl. Math.* **17**, 35–92, 1964

[4] Amanov T. I. *Spaces of Differentiable Functions with Dominating Mixed Derivatives* (in Russian). Nauka Kaz. SSR, Alma-Ata 1976.

[5] Amann H. *Linear and Quasilinear Parabolic Problems*. Vol. **1**, Birkhäuser, Basel 1995.

[6] Amann H. Operator-valued Fourier multipliers, vector-valued Besov spaces, and applications. *Math. Nachr.* **186** (1997), 5–56.

[7] Amann H. Vector-valued distributions and Fourier multipliers. Preprint, Zürich 1997.

[8] Amann H. and Escher J. *Analysis III.* Birkhäuser, Basel 2001.

[9] Benedek A. and Panzone R. The spaces L^p with mixed norms. *Duke Math. J.* **28**, 301–324, 1961.

[10] Bhattacharya T. and Leonetti F. On improved regularity of weak solutions of some degenerate, anisotropic elliptic systems. *Ann. Mat. Pura Appl.* **IV**, Ser. 170, 241–255, 1996.

[11] Bennett C. and Sharpley R. *Interpolation of Operators.* Academic Press, Boston 1988.

[12] Bergh J. and Löfström J. *Interpolation Spaces. An Introduction.* Springer-Verlag, Berlin 1976.

[13] Besov O. V. On a family of function spaces (in Russian). *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **126**, 1163–1165, 1959.

[14] Besov O. V. On a family of function spaces in conection with embeddings and extensions (in Russian). *Trudy Mat. Inst. Steklov* **60**, 42–81, 1961.

[15] Besov O. V., Il'in V. P. and Nikol'skii S. M. *Integral Representation of Functions and Embedding Theorems* (in Russian). Nauka, Moskva 1975. English transl.: Halsted Press, V. H. Winston & Sons, New York 1978/79.

[16] V. I. Burenkov. On one method of extension of functions (in Russian). *Trudy Mat. Inst. Akad. Nauk SSSR* **140**, 27–67, 1976.

[17] Butzer P. L. and Berens H. *Semi-groups of Operators and Approximation.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. 145. Springer-Verlag, Berlin 1967.

[18] Calderón A. P. Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions. *Proc. Symp. Pure Math.* **5**, 33–49, 1961.

[19] Diestel J. and Uhl J. J. *Vector Measures.* Amer. Math. Soc. Surveys 15, Providence, RI 1977.

[20] Edmunds D. E. and Triebel H. Logarithmic Sobolev spaces and their applications to spectral theory. *Proc. London Math. Soc.* **71**, 333–371, 1995.

[21] Edmunds D. E. and Triebel H. *Function Spaces, Entropy Numbers and Differential Operators.* Cambridge Univ. Press, Cambridge 1996.

[22] B. L. Fain. On extension of functions from Sobolev spaces for non-regular domains with preservation of the smoothness parameter (in Russian). *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **32**, 296–301, 1985. (English translation *Soviet Math. Dokl* **32**, 688–692, 1985.)

[23] Gagliardo E. Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **27**, 284–305, 1957.

[24] Gagliardo E. Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili. *Ricerche Mat.* **7**, 102–137, 1958.

[25] García-Cuerva J. and Rubio de Francia J. L. *Weighted Norm Inequalities and Related Topics.* North-Holland, Amsterdam 1985.

[26] Gol'dshtein V. M. and Reshetnyak Yu. G. *Introduction to the Theory of Functions with Generalized Derivatives and Quasiconformal Mappings* (in Russian). Nauka, Moscow, 1983.

[27] Grisvard P. Espaces intermediaires entre espace de Sobolev avec poids. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **III**, Ser. 17, 255–296, 1963.

[28] Grisvard P. Commutativité de deux foncteurs d'interpolation et applications. *J. Math. Pures. Appl.* **45**, 143–290, 1996.

[29] de Guzmán M. *Differentiation of Integrals in* $\mathbb{R}^N$*.* Lecture Notes in Math., Vol. 481. Springer-Verlag, Berlin 1975.

[30] Hardy G. H., Littlewood J. E. and Pólya G. *Inequalities.* Cambridge Univ. Press, Princeton 1951.

[31] Hestenes M. Extension of the range of a diferentiable function. *Duke Math. J.* **8**, 183–192, 1941.

[32] Hille E. *Functional Analysis and Semi-groups.* Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 31, New York 1948.

[33] Jones P. W. Quasiconformal mappings and extendability of functions in Sobolev spaces. *Acta Math.* **147**, 71–88, 1981.

[34] G. A. Kalyabin. Theorems on extension, multipliers and dipheomorphisms for generalized Sobolev-Liouville class in domains with Lipschitz boundary (in Russian). *Trudy Mat. Inst. Akad. Nauk SSSR* **172**, 173–186, 1985.

[35] Kawohl B. *Rearrangements and Convexity of Level Sets in PDE.* Lecture Notes in Math., Vol. 1150, Springer-Verlag, Berlin 1985.

[36] Kolyada V. I. On embeddings of certain classes of functions of several variables. *Sib. Mat. Zh.* **14** (4), 766–790, 1973.

[37] Krbec M. and Schmeisser H.-J. Limiting imbeddings—the case of missing derivatives. *Ricerche Mat.* **XLV**, 423–447, 1996.

[38] Krbec M. and Schmeisser H.-J. Imbeddings of Brézis-Wainger type. The case of missing derivatives. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A* **131**, 667–700, 2001.

[39] Kufner A., John O. and Fučík S. *Function Spaces.* Academia, Prague 1977.

[40] Lieb, E. H. and Loss, M. *Analysis.* 2nd ed., Graduate Studies in Mathematics, Vol. 14. AMS, Providence, RI 2001.

[41] Lions J. L. and Magenes E. *Non-homogeneous Boundary Value Problems and Applications* (in French). Dunod, Paris 1968 (English translation Springer, Berlin - Heidelberg - New York, Vol. I and Vol. 2 1972, Vol. III 1973).

[42] Lizorkin P. I. and Nikol'skii S. M. Classification of differentiable functions on the basis of spaces with a dominating mixed derivative (in Russian). *Trudy Mat. Inst. Steklov* **77**, 143–167, 1965.

[43] Marchaud, A. Sur les dérivées et sur les differences des fonctions des variables réeles. *J. Math. Pure Appl.* **6**, 337–425, 1927.

[44] Maz'ya V. G. *Sobolev Spaces.* Springer-Verlag, Berlin 1985.

[45] Mendez O. and Mitrea M. The Banach envelopes of Besov and Triebel-Lizorkin spaces and applications to partial differential equations. *J. Fourier Anal. Appl.* **6**, 503–531, 2000.

[46] Meyers N. and Serrin J. $H = W$. *Proc. Nat. Acad. Sci.* **51**, 1055–1056, 1964.

[47] Nečas J. *Les méthodes directes en équations elliptiques*. Academia, Prague 1967.

[48] Peetre J. Espaces d'interpolation et théoréme de Soboleff. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **16**, 279–317, 1966.

[49] Peetre J. Sur la transformation de Fourier des fonctions à valeurs vectorielles. *Rend. Semin. Math. Univ. Padova* **42**, 15–26, 1969.

[50] Peetre J. *New Thoughts on Besov Spaces.* Duke Univ. Math. Series I, Duke University, Durham 1976.

[51] Peetre J. A counter-example connected with Gagliardo's trace theorem. *Commentat. math., spec. Vol. II, dedic. L. Orlicz*, 77–282, 1979.

[52] Petrov A. and Schatzman M. A pseudodifferential linear complementarity problem related to a one dimensional viscoelastic model with Sigorini conditions. *To appear*

[53] Reshetnyak Yu. G. Integral representations of differentiable functions in domains with non- smooth boundary (in Russian). *Sib. Mat. Zh.* **21**, 108–116, 1980. English transl in: *Sib. Math. J.* **21**, 833–839, 1981.

[54] Rychkov V. S. On restrictions and extensions of the Besov and Triebel-Lizorkin spaces with respect to Lipschitz domains, *J. London Math. Soc.* **60** 237–257, 1999.

[55] Sadosky C. *Interpolation of Operators and Singular Integrals. An Introduction to Harmonic Analysis.* M. Dekker Inc., New York 1979.

[56] Schmeisser H.-J. On spaces of functions and distributions with mixed smoothness properties of Besov-Tiebel-Lizorkin type. I. Basic properties. *Math. Nachr.* **98**, 233–250, 1980.

[57] Schmeisser H.-J. On spaces of functions and distributions with mixed smoothness properties of Besov-Triebel-Lizorkin type. II. Fourier multipliers and approximation representations. *Math. Nachr.* **106**, 187–200, 1982.

[58] Schmeisser H.-J. Vector-valued Sobolev and Besov spaces. *Semin. Analysis*, Berlin 1985/86, Teubner-Texte Math. **96**, 4–44, 1987.

[59] Schmeisser H.-J. and Sickel W. Traces, Gagliardo-Nirenberg inequalities and Sobolev type embeddings for vector-valued function spaces. Jenaer Schriften zur Math. and Inf., Mat/Inf/24/01.

[60] Schmeisser H.-J. and Triebel H. *Topics in Fourier Analysis and Function Spaces.* Geest & Portig, Leipzig 1987; Wiley, Chichester 1987.

[61] Seeley R. T. Extension of C^∞-functions defined in a half space. *Proc. Amer. Math. Soc.* **15**, 625–626, 1964.

[62] Sickel W. and Triebel H. Hölder inequalities and sharp embeddings in function spaces of $B^s_{p\,q}$ and F^s_{pq} type. *Z. Anal. Anwendungen* **14**, 105–140, 1995.

[63] Slobodetskii L. N. Sobolev spaces of fractional order and their application to boundary problems for partial differential equations (in Russian). *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **118** (2), 243–246, 1958.

[64] Slobodetskii L. N. Sobolev spaces of fractional order and their application to boundary problems for partial differential equations (in Russian). *Uch. Zapisky Leningrad. Ped. Inst. im. A. I. Gercena* **197**, 54–112, 1958.

[65] Sobolev S. L. On a theorem in functional analysis (in Russian). *Mat. Sb.* **4**, 471–479, 1938. English transl. in: *Am. Math. Soc., Transl., II,* Ser. 34, 39–68, 1963.

[66] Souček J. Spaces of functions on domain Ω, whose k-th derivatives are measures defined on $\overline{\Omega}$. *Časopis Pěst. Mat.* **97**, 10–46, 1972.

[67] Stein E. M. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey 1970.

[68] Talenti G. Inequalities in rearrangement invariant function spaces. **In:** *Nonlinear Analysis, Function Spaces and Applications, Vol. 5* (M. Krbec et al., Eds.), Prometheus Publ. House, Prague 1994, pp. 177–230.

[69] Torchinsky A., *Real-Variable Methods in Harmonic Analysis.* Pure and Applied Mathematics, Vol. 123, Academic Press, San Diego 1986.

[70] Triebel H. *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators.* VEB Deutsch. Verl. Wissenschaften, Berlin 1978. Sec. revised ed.: North-Holland, Amsterdam 1978.

[71] Triebel H. *Theory of Function Spaces.* Geest & Portig K.-G., Leipzig, Birkhäuser, Basel 1983.

[72] Triebel H. *Function spaces in Lipschitz domains and on Lipschitz manifolds. Characteristic functions as pointwise multipliers. Rev. Mat. Complutense* **15**, 475–524, 2002.

[73] Troisi M. Teoremi di inclusione per spazi di Sobolev non isotropi. *Ricerche Mat.* **18**, 3–24, 1969.

[74] Troisi M. Ulteriori contributi alla teoria degli spazi di Sobolev non isotropi. *Ricerche Mat.* **20**, 90–117, 1971.

[75] Vodop'yanov S. K., Gol'dshtein V. M. and Latfullin T. G. A criterion for extension of functions in the class L_2^1 from unbounded planar domains. *Sib. Mat. Zh.* **20**, 416–419, 1979.

[76] Yosida K. *Functional Analysis.* Springer-Verlag, Berlin 1965.

[77] Ziemer W. P. *Weakly Differentiable Functions.* Springer-Verlag, New York 1989.

[78] Zygmund A. *Trignometric Series.* Vols. I, II, Cambridge Univ. Press, New York 1959.