

Stieltjesův integrál

Milan Tvrđý

15. prosince 2008

Obsah

Základní úmluvy a označení	v
1 Funkce s konečnou variací.	1
2 Absolutně spojitá funkce.	23
3 Regulované funkce.	27
4 Riemannův-Stieltjesův integrál	33
5 Kurzweilův-Stieltjesův integrál	49
Literatura	74

Základní úmluvy a označení

- (i) \mathbb{N} je množina přirozených čísel (mezi něž nezahrnujeme nulu).
- (ii) \mathbb{R} je množina reálných čísel, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.
- (iii) Je-li $-\infty < a < b < \infty$, pak $[a, b]$ značí uzavřený interval $\{t \in \mathbb{R} : a \leq t \leq b\}$ a (a, b) je otevřený interval $\{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}$. Příslušné polouzavřené (resp. polootevřené) intervaly značíme $[a, b)$ a $(a, b]$. Ve všech těchto případech nazýváme body a, b krajní body intervalu. V případě $a = b \in \mathbb{R}$ říkáme, že interval $[a, b]$ degeneruje na jednobodovou množinu a píšeme $[a, b] = [a]$. Budeme též užívat obvyklé značení I^o pro vnitřek intervalu I . Je-li I interval (uzavřený resp. otevřený resp. polootevřený) s krajními body a, b značíme symbolem $|I| = |b - a|$ jeho délku ($|[a]| = 0$).
- (iv) Konečný systém bodů $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ intervalu $[a, b]$ nazveme dělením intervalu $[a, b]$, jestliže platí $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_m = b$. Množinu všech dělení intervalu $[a, b]$ značíme $\mathcal{D}[a, b]$. Je-li $D \in \mathcal{D}[a, b]$, pak jeho elementy zpravidla značíme α_i . Pro dané dělení $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, značíme $\nu(D) = m$ a $|D| = \max_{i=1,2,\dots,\nu(D)}(\alpha_i - \alpha_{i-1})$. Bude-li to výhodné, budeme též dělení D intervalu $[a, b]$ chápat jako systém podintervalů $\{I_j; j = 1, 2, \dots, \nu(D)\}$ takových, že platí

$$\bigcup_{j=1}^{\nu(D)} I_j = [a, b], \quad \text{přičemž } I_j^o \cap I_k^o = \emptyset \quad \text{jakmile } j \neq k.$$

Jestliže dělení D' a $D'' \in \mathcal{D}[a, b]$ jsou taková, že všechny elementy z D' jsou obsaženy v D'' , říkáme, že D'' je zjemnění dělení D' a značíme $D' \subset D''$.

- (v) Dvojici $(D, \xi) \in \mathcal{D}[a, b] \times \mathbb{R}^{\nu(D)}$ nazveme rozšířeným dělením intervalu $[a, b]$, jestliže platí

$$\alpha_{i-1} \leq \xi_i \leq \alpha_i \quad \text{pro všechna } i = 1, 2, \dots, \nu(D).$$

Množinu všech rozšířených dělení intervalu $[a, b]$ značíme $\mathcal{D}[a, b]$.

- (vi) Pro libovolné funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a reálné číslo λ součtem $f + g$ funkcí f a g rozumíme funkci $(f + g)(t) = f(t) + g(t)$, $t \in [a, b]$, a násobek λf funkce f číslem λ je funkce $(\lambda f)(t) = \lambda f(t)$, $t \in [a, b]$.

- (vii) Pro libovolnou funkci $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ značíme

$$\|f\| = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|.$$

(Není-li funkce f ohraničená na intervalu $[a, b]$, pak je ovšem $\|f\| = \infty$.)

(ix) $\mathbb{C}[a, b]$ je prostor reálných funkcí spojitých na intervalu $[a, b]$ a zobrazení

$$f \in \mathbb{C}[a, b] \rightarrow \|f\|$$

definuje normu na $\mathbb{C}[a, b]$.

(x) $\mathbb{L}^1[a, b]$ je prostor reálných funkcí integrovatelných (ve smyslu Lebesgueově) na intervalu $[a, b]$ (s rovností $f = g \in \mathbb{L}^1[a, b] \iff f(x) = g(x)$ s.v. na $[a, b]$) a zobrazení

$$f \in \mathbb{L}^1[a, b] \rightarrow \|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$$

definuje normu na $\mathbb{L}^1[a, b]$.

(xi) Pro danou množinu $M \subset \mathbb{R}$ symbolem χ_M značíme její charakteristickou funkci, tj. funkci $\mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ definovanou předpisem:

$$\chi_M(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \in M, \\ 0 & \text{pro } t \notin M. \end{cases}$$

(xii) Jestliže $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \in [a, b]$ a $s \in (a, b]$ a jestliže existují konečné jednostranné limity $\lim_{\tau \rightarrow t+} f(\tau)$ a $\lim_{\tau \rightarrow s-} f(\tau)$, pak značíme

$$f(t+) = \lim_{\tau \rightarrow t+} f(\tau), \quad f(s-) = \lim_{\tau \rightarrow s-} f(\tau),$$

$$\Delta^+ f(t) = f(t+) - f(t), \quad \Delta^- f(s) = f(s) - f(s-),$$

$$\Delta f(x) = f(x+) - f(x-) \quad \text{pro } x \in (a, b).$$

Dále, budeme užívat následující úmluvu:

$$f(a-) = f(a), \quad f(b+) = f(b), \quad \Delta^- f(a) = \Delta^+ f(b) = 0.$$

Kapitola 1

Funkce s konečnou variací.

Výklad v této kapitole se opírá zejména o monografie V. Jarníka *Diferenciální počet II* [3, Kapitola V] a *Integrální počet II* [4, Kapitola V] a dále o odstavci II.6 v monografii T.H.Hildebrandta *Theory of Integration* [1] a kapitolu XIII v monografii Š. Schwabika *Integrace v \mathbb{R} (Kurzweilova teorie)* [6].

1.1. Definice. Pro danou funkci $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a dělení D intervalu $[a, b]$,

$$D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \in \mathcal{D}[a, b],$$

definujeme

$$V(f, D) = \sum_{j=1}^{\nu(D)} |f(\alpha_j) - f(\alpha_{j-1})| \quad (1.1)$$

a

$$\text{var}_a^b f = \sup_{D \in \mathcal{D}[a, b]} V(f, D). \quad (1.2)$$

Je-li $a = b$, definujeme $\text{var}_a^b f = \text{var}_a^a f = 0$. Veličinu $\text{var}_a^b f$ nazýváme *variace funkce f* na intervalu $[a, b]$. Je-li $\text{var}_a^b f < \infty$, říkáme, že funkce f má *konečnou variaci na $[a, b]$* . Množinu funkcí s konečnou variací na $[a, b]$ značíme $\mathbb{BV}[a, b]$.

1.2. Cvičení. Dokažte následující vlastnosti variace a funkcí s konečnou variací.

(i) Pro každou funkci $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ platí $\text{var}_a^b f \geq 0$.

(ii) Pro libovolné dvě funkce $f_1, f_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a reálné číslo c platí

$$\text{var}_a^b (f_1 + f_2) \leq \text{var}_a^b f_1 + \text{var}_a^b f_2 \quad \text{a} \quad \text{var}_a^b (c f_1) = |c| \text{var}_a^b f_1.$$

(iii) Je-li $[c, d] \subset [a, b]$, pak pro každou funkci $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ platí

$$|f(d) - f(c)| \leq \text{var}_c^d f \leq \text{var}_a^b f.$$

(iv) Pro každou funkci $f \in \mathbb{BV}[a, b]$ platí $|f(x)| \leq \|f\| \leq \|f\|_{\mathbb{BV}}$ na $[a, b]$. (Každá funkce $f \in \mathbb{BV}[a, b]$ je tedy ohraničená na $[a, b]$.)

(v) $\text{var}_a^b f = 0 \iff f(x) \equiv f(a)$ na $[a, b]$.

- (vi) Zavedeme-li pro funkce z množiny $\mathbb{BV}[a, b]$ obvyklým způsobem operace sčítání a násobení skalárem (viz 0.(vi)), stane se lineárním normovaným prostorem vzhledem k těmto operacím a vzhledem k normě $\|\cdot\|_{\mathbb{BV}}$ definované předpisem

$$f \in \mathbb{BV}[a, b] \rightarrow \|f\|_{\mathbb{BV}} = |f(a)| + \text{var}_a^b f.$$

- (vii) Pro každou funkci f monotonní na $[a, b]$ platí $\text{var}_a^b f = |f(b) - f(a)|$.
- (viii) Pro libovolná dělení D' a D'' intervalu $[a, b]$ taková, že $D'' \subset D'$ a libovolnou funkci $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je $V(f, D'') \leq V(f, D')$.
- (ix) $\text{var}_a^b f = d \in \mathbb{R} \iff (\forall \varepsilon > 0 \exists D_\varepsilon \in \mathcal{D}[a, b] : D_\varepsilon \subset D \implies d - \varepsilon \leq V(f, D) \leq d)$.
- (x) $\text{var}_a^b f = \infty \iff (\forall K > 0 \exists D_K \in \mathcal{D}[a, b] : V(f, D_K) \geq K)$.
- (xi) Pro libovolné dělení $D_0 \in \mathcal{D}[a, b]$ platí $\text{var}_a^b f = \sup_{D \supset D_0} V(f, D)$.
- (xii) Dokažte Větu 1.3.

1.3. Věta. Pro každé $c \in (a, b)$ a každou funkci $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ platí:

$$\text{var}_a^b f = \text{var}_a^c f + \text{var}_c^b f.$$

□

1.4. Věta. $f \in \mathbb{BV}[a, b]$ tehdy a jen tehdy, když existují funkce f_1 a f_2 neklesající na $[a, b]$ a takové, že platí $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ pro každé $x \in [a, b]$.

D ů k a z . Stačí dokázat, že pro každou funkci $f \in \mathbb{BV}[a, b]$ existují funkce f_1 a f_2 neklesající na $[a, b]$ a takové, že platí

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) \quad \text{na } [a, b].$$

Nechť tedy $f \in \mathbb{BV}[a, b]$. Položme

$$f_1(x) = \text{var}_a^x f \quad \text{a} \quad f_2(x) = f_1(x) - f(x) \quad \text{pro } x \in [a, b].$$

Potom f_1 je evidentně neklesající na $[a, b]$. Dále, pro $x_2 \geq x_1$ máme vzhledem ke Větě 1.3

$$f_2(x_2) = f_1(x_1) + \text{var}_{x_1}^{x_2} f - f(x_2)$$

a

$$f_2(x_2) - f_2(x_1) = \text{var}_{x_1}^{x_2} f - (f(x_2) - f(x_1)) \geq 0,$$

t.zn., že f_2 je také neklesající na $[a, b]$.

□

1.5. Cvičení. Necht' $f \in \mathbb{BV}[a, b]$. Dokažte, že funkce

$$p(x) = \sup_{D \in \mathcal{D}[a, x]} \sum_{j=1}^{\nu(D)} (f(\alpha_j) - f(\alpha_{j-1}))^+ \quad \text{a} \quad n(x) = \sup_{D \in \mathcal{D}[a, x]} \sum_{j=1}^{\nu(D)} (f(\alpha_j) - f(\alpha_{j-1}))^-$$

jsou obě monotonní na $[a, b]$ a platí $f(x) = f(a) + p(x) - n(x)$ na $[a, b]$.¹

1.6. Důsledek. Pro každou funkci $f \in \mathbb{BV}[a, b]$ a pro všechna $t \in [a, b)$ a $s \in (a, b]$ existují konečné limity

$$f(t+) = \lim_{\tau \rightarrow t+} f(\tau) \quad \text{a} \quad f(s-) = \lim_{\tau \rightarrow s-} f(\tau)$$

(tj. f může mít v $[a, b]$ pouze nespojitosti 1. druhu).

Důkaz plyne z Věty 1.4 a z toho, že uvedené limity existují pro každou funkci monotonní na $[a, b]$. Např. je-li f neklesající na $[a, b]$, $t \in (a, b]$ a $t_n \searrow t+$, pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) = \inf_{n \in \mathbb{N}} f(t_n). \quad \square$$

1.7. Věta. Každá funkce $f \in \mathbb{BV}[a, b]$ má nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti na intervalu $[a, b]$.

Důkaz plyne z Důsledku 1.6 a z následujícího Lemmatu. □

Lemma. Necht' $J \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval, $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ a M je množina bodů nespojitosti 1. druhu funkce f v J . Potom M je nejvýše spočetná.

Důkaz. Označme

$$M^+ = \{x \in J: f(x+) \neq f(x)\}, \quad M^- = \{x \in J: f(x-) \neq f(x)\}$$

a

$$M_1^+ = \{x \in M^+: f(x+) > f(x)\}, \quad M_2^+ = \{x \in M^+: f(x+) < f(x)\}.$$

Potom je $M = M^+ \cup M^-$ a $M^+ = M_1^+ \cup M_2^+$. Uspořádejme množinu \mathbb{P} racionálních čísel tak, aby platilo $\mathbb{P} = \{r_k\}_{k=1}^{\infty}$. Dále, definujme funkci $r: M_1^+ \rightarrow \mathbb{P}$ předpisem

$$r(x) = r_j \iff r_j \in (f(x), f(x+)) \wedge \{r_1, r_2, \dots, r_{j-1}\} \cap (f(x), f(x+)) = \emptyset$$

a pro každé $q \in \mathbb{P}$ označme

$$r_{-1}(q) = \{x \in M_1^+: r(x) = q\}.$$

Máme

$$M_1^+ = \bigcup_{q \in \mathbb{P}} r_{-1}(q).$$

¹Pro $A \in \mathbb{R}$ značíme $A^+ = \max(A, 0)$ a $A^- = \max(-A, 0)$. Připomeňme, že platí $A^+ + A^- = |A|$ a $A^+ - A^- = A$ pro každé $A \in \mathbb{R}$.

Ukážeme-li tedy, že každá množina $r_{-1}(q)$, $q \in \mathbb{P}$, je spočetná, budeme mít současně také dokázáno, že i množina M_1^+ je spočetná.

Nechť je tedy dáno libovolné $q \in \mathbb{P}$. Vzhledem k definici množiny M_1^+ a zobrazení r , pro každé $x \in r_{-1}(q)$ existuje $\delta(x) > 0$ takové, že $x < y < x + \delta(x) \implies f(y) > r(x)$. Jsou-li $x_1, x_2 \in r_{-1}(q)$ takové, že $x_1 < x_2$ a $r(x_1) = r(x_2) = q$, pak musí platit

$$(x_1, x_1 + \delta(x_1)) \cap (x_2, x_2 + \delta(x_2)) = \emptyset.$$

Vskutku, kdyby bylo $x_1 < x_2 < x_1 + \delta(x_1)$, bylo by též (vzhledem k definici δ)

$$q = r(x_1) < f(x_2) < r(x_2) = q,$$

spor. Systém intervalů $\{(x, x + \delta(x)), x \in r_{-1}(q)\}$ je tedy disjunktní. V každém z nich můžeme zvolit jediné racionální číslo $r \in (x, x + \delta(x))$ a tím definovat prosté zobrazení $r_{-1}(q)$ do \mathbb{P} . To znamená, že každá množina $r_{-1}(q)$, $q \in \mathbb{P}$, je spočetná.

b) Protože $M_2^+ = \{x \in J : -f(x) < -f(x+)\}$, můžeme použít část a) tohoto důkazu k důkazu spočetnosti množiny M_2^+ .

c) Konečně, $M^- = \{x \in J : f(-x) \neq f(-x+)\}$, takže podle částí a)–b) tohoto důkazu je také M^- spočetná množina. \square

1.8. Cvičení. Přesvědčete se, že důkaz předešlého lemmatu v sobě obsahuje též důkaz následujícího tvrzení:

Každý disjunktní systém intervalů v \mathbb{R} je spočetný.

1.9. Věta. *Nechť $f \in \mathbb{BV}[a, b]$. Potom*

$$\sum_{t \in [a, b]} |\Delta^+ f(t)| + \sum_{t \in (a, b]} |\Delta^- f(t)| < \infty. \quad (1.3)$$

D ů k a z . Nechť S značí množinu bodů nespojitosti funkce f ležících v otevřeném intervalu (a, b) . Podle Věty 1.7 je S nejvýše spočetná. Je-li konečná, je tvrzení věty evidentní. Nechť $S = \{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Předpokládejme na chvíli, že funkce f je na intervalu $[a, b]$ neklesající. Potom

$$\sum_{t \in [a, b]} |\Delta^+ f(t)| + \sum_{t \in (a, b]} |\Delta^- f(t)| = \Delta^+ f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} (\Delta^+ f(s_k) + \Delta^- f(s_k)) + \Delta^- f(b).$$

Nechť $n \in \mathbb{N} \cup [2, \infty)$ je dáno a nechť σ_k , $k = 0, 1, \dots, n+1$ jsou body intervalu $[a, b]$ takové, že platí

$$a = \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_n < \sigma_{n+1} = b \quad \text{a} \quad \{\sigma_k\}_{k=0}^{n+1} = \{a\} \cup S \cup \{b\}.$$

Zvolme dále t_k , $k = 1, 2, \dots, n+1$, tak, aby platilo

$$a < t_1 < \sigma_1 < t_2 < \sigma_2 < \dots < \sigma_n < t_{n+1} < b.$$

Potom

$$\begin{aligned}
& \Delta^+ f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} (\Delta^+ f(s_k) + \Delta^- f(s_k)) + \Delta^- f(b) \\
&= f(a+) - f(a) + f(\sigma_1) - f(\sigma_1-) + f(\sigma_1+) - f(\sigma_1) \\
&\quad + \cdots + f(\sigma_n+) - f(\sigma_n) + f(b) - f(b-) \\
&\leq f(a+) - f(a) + f(t_1) - f(a+) + f(\sigma_1-) - f(t_1) + f(\sigma_1) - f(\sigma_1-) \\
&\quad + f(\sigma_1+) - f(\sigma_1) + f(t_2) - f(\sigma_1+) + f(\sigma_2-) - f(t_2) \\
&\quad + \cdots + f(\sigma_n+) - f(\sigma_n) + f(t_n) - f(\sigma_n+) + f(b-) - f(t_n) + f(b) - f(b-) \\
&= f(b) - f(a).
\end{aligned}$$

Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ tedy platí

$$\Delta^+ f(a) + \sum_{k=0}^n (\Delta^+ f(s_k) + \Delta^- f(s_k)) + \Delta^- f(b) \leq f(b) - f(a)$$

a tudíž

$$\sum_{t \in [a, b]} |\Delta^+ f(t)| + \sum_{t \in (a, b]} |\Delta^- f(t)| \leq f(b) - f(a).$$

Tvrzení (1.3) tedy platí pro každou funkci f neklesající na $[a, b]$. Důkaz věty nyní můžeme snadno dokončit použitím Věty 1.4. \square

1.10. Věta. *Prostor $\mathbb{BV}[a, b]$ je Banachův prostor (tj. úplný normovaný prostor).*

D ů k a z . Dokážeme, že $\mathbb{BV}[a, b]$ je úplný prostor, tj. že každá posloupnost cauchyovská v $\mathbb{BV}[a, b]$ má v $\mathbb{BV}[a, b]$ limitu. Předpokládejme tedy, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{BV}[a, b]$ je cauchyovská v $\mathbb{BV}[a, b]$.

a) Potom pro všechna $x \in [a, b]$ platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : n, m \geq n_\varepsilon \implies |f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_{\mathbb{BV}} < \varepsilon. \quad (1.4)$$

Speciálně je tedy pro každé $x \in [a, b]$ cauchyovská posloupnost reálných čísel $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ a tudíž pro každé $x \in [a, b]$ existuje konečná limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

b) Nechť je dáno libovolné $\varepsilon > 0$ a nechť $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ má vlastnost (1.4). Potom pro každé $x \in [a, b]$ máme také

$$|f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_{n_\varepsilon}(x)| \leq \varepsilon$$

a tudíž pro každé $n \geq n_\varepsilon$ a každé $x \in [a, b]$ platí

$$|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)| + |f_{n_\varepsilon}(x) - f_n(x)| < 2\varepsilon.$$

To ovšem znamená, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| = 0,$$

neboli, posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje k f stejnoměrně na $[a, b]$.

c) Číselná posloupnost $\{\text{var}_a^b f_n\}_{n=1}^\infty$ je ohraničená. Podle Bolzanovy-Weierstrašovy věty z ní tedy lze vybrat podposloupnost $\{\text{var}_a^b f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, pro kterou platí:

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \text{var}_a^b f_{n_k} = d < \infty,$$

tj.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_\varepsilon : k \geq k_\varepsilon \wedge D \in \mathcal{D}[a, b] \implies V(f_{n_k}, D) < d + \varepsilon$$

a

$$\forall \varepsilon > 0 \forall D \in \mathcal{D}[a, b] : V(f, D) = \lim_{k \rightarrow \infty} V(f_{n_k}, D) \leq d + \varepsilon.$$

Odtud ovšem už plyne, že je

$$\text{var}_a^b f = \sup_{D \in \mathcal{D}[a, b]} V(f, D) \leq d < \infty,$$

tj. $f \in \mathbb{BV}[a, b]$.

d) Použijeme-li pro každé $n \in \mathbb{N}$ část c) tohoto důkazu na posloupnost $\{f_n - f_m\}_{m=1}^\infty$ (místo $\{f_n\}_{n=1}^\infty$), dostaneme pro nějakou podposloupnost $\{f_{m_k}\}_{k=1}^\infty$ nerovnost

$$\text{var}_a^b (f_n - f) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \text{var}_a^b (f_n - f_{m_k}),$$

což, vzhledem k (1.4) a definici funkce f , znamená, že je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\mathbb{BV}} = 0.$$

□

1.11. Cvičení. Definujme pro $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{pro } \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Ukažte, že $f_n \in \mathbb{BV}[0, 1]$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $f_n \rightrightarrows f$ na $[0, 1]$, kde

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{pro } x > 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases},$$

a přitom f nemá konečnou variaci na $[0, 1]$.

Nyní bude našim cílem vyšetřit vlastnosti funkcí s konečnou variací vzhledem k derivování. K tomu je účelné zavést následující definice.

1.12. Definice. Množina $M \subset \mathbb{R}$ má *nulovou míru* ($\mu(M) = 0$), když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje spočetný systém otevřených intervalů $\{I_j, j \in \mathbb{N}\}$ takový, že je

$$M \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \quad \text{a} \quad \sum_{j=1}^{\infty} |I_j| < \varepsilon.$$

Řekneme, že nějaká vlastnost platí *skoro všude* (s.v.) na intervalu $[a, b]$, jestliže existuje množina $M \subset [a, b]$ nulové míry taková, že tato vlastnost platí pro každé $x \in [a, b] \setminus M$.

1.13. Cvičení.

- (i) Každá spočetná podmnožina S v \mathbb{R} má nulovou míru.
- (ii) Sjednocení spočetně mnoha množin nulové míry má nulovou míru.

1.14. Definice. Funkce $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je *shora (zdola) polospojita v bodě* $x_0 \in [a, b]$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in [a, b] \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ platí

$$F(x) < F(x_0) + \varepsilon \quad (F(x) > F(x_0) - \varepsilon).$$

Je-li funkce f shora resp. zdola polospojita v každém bodě intervalu $[a, b]$, říkáme, že je *shora resp. zdola polospojita na intervalu* $[a, b]$.

1.15. Poznámka. Je zřejmé, že funkce f je spojitá v bodě x_0 právě tehdy, když je v něm současně polospojita shora i zdola.

1.16. Cvičení. Každá funkce polospojita shora (zdola) na ohraničeném a uzavřeném intervalu je na tomto intervalu ohraničená shora (zdola).

Další příjemnou vlastností funkcí shora polospojitych na intervalu $[a, b]$ je to, že tyto funkce nabývají na tomto intervalu svého maxima:

1.17. Tvzení. Je-li funkce $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ shora polospojita na intervalu $[a, b]$, potom existuje bod $x_0 \in [a, b]$ takový, že

$$F(x) \leq F(x_0) \quad \text{pro každé } x \in [a, b].$$

D ů k a z . Označme

$$M = \sup_{x \in [a, b]} F(x).$$

Podle Cvičení 1.16 je $M < \infty$. Množina

$$Q_k = \left\{ x \in [a, b] : F(x) \geq M - \frac{1}{k} \right\} \tag{1.5}$$

je pro každé $k \in \mathbb{N}$ neprázdná. Ukážeme, že je také uzavřená:

Nechť x^* je hromadný bod množiny Q_k . Zřejmě $x^* \in [a, b]$. Předpokládejme, že $x^* \notin Q_k$. Platí tedy $F(x^*) < M - \frac{1}{k}$. Dále, z polospojivosti shora funkce f plyne, že k danému $\varepsilon = M - \frac{1}{k} - F(x^*) > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že platí

$$F(x) < F(x^*) + \varepsilon = F(x^*) + M - \frac{1}{k} - F(x^*) = M - \frac{1}{k}$$

pro všechna $x \in (x^* - \delta, x^* + \delta) \cap [a, b]$,

což je ovšem spor s tím, že x^* je hromadný bod množiny Q_k . Každá množina Q_k , $k \in \mathbb{N}$, je tedy uzavřená. Dále, vzhledem k tomu, že posloupnost $\{M - \frac{1}{k}\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí, plyne z (1.5), že platí

$$[a, b] \supset Q_1 \supset Q_2 \cdots \supset Q_k \supset Q_{k+1} \cdots$$

Podle Cantorovy věty (viz např. [3, Věta 157]) je tudíž množina $\bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k$ neprázdná. Budiž x_0 její libovolný prvek. Potom

$$M - \frac{1}{k} \leq F(x_0) \leq M \quad \text{platí pro každé } k \in \mathbb{N},$$

což je možné pouze, když

$$F(x_0) = M = \sup_{x \in [a, b]} F(x). \quad \square$$

1.18 . Cvičení. Je-li funkce $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zdola polospojité na intervalu $[a, b]$, potom existuje bod $x_0 \in [a, b]$ takový, že

$$F(x) \geq F(x_0) \quad \text{pro každé } x \in [a, b].$$

1.19 . Tvzení. Nechť funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je taková, že pro každé $t \in [a, b]$ a každé $s \in (a, b]$ existují limity

$$f(t+) = \lim_{\tau \rightarrow t+} f(\tau) \quad \text{a} \quad f(s-) = \lim_{\tau \rightarrow s-} f(\tau).$$

Definujme funkci $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$F(x) = \max\{f(x-), f(x), f(x+)\} \quad \text{pro } x \in (a, b), \quad F(a) = f(a+) \quad \text{a} \quad F(b) = f(b-).$$

Potom je funkce F shora polospojité na intervalu $[a, b]$.

D ů k a z . Budiž dán libovolný bod $x_0 \in (a, b)$. Potom platí $f(x_0) \leq F(x_0)$. Dále, vzhledem k předpokladu o existenci limit $f(x_0-)$ a $f(x_0+)$, pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že platí

$$f(x) < f(x_0-) + \varepsilon \leq F(x_0) + \varepsilon \quad \text{pro všechna } x \in (x_0 - \delta, x_0),$$

$$f(x) < f(x_0+) + \varepsilon \leq F(x_0) + \varepsilon \quad \text{pro všechna } x \in (x_0, x_0 + \delta).$$

Máme tedy

$$f(x) < F(x_0) + \varepsilon \quad \text{pro všechna } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Odtud plyne dále, že platí

$$f(x-) \leq F(x_0) + \varepsilon \quad \text{a} \quad f(x+) < F(x_0) + \varepsilon \quad \text{pro všechna } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

čili

$$F(x) \leq F(x_0) + \varepsilon \quad \text{pro všechna } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

T. zn., že f je polospojité shora v bodě x_0 . Podobně bychom postupovali také v případech $x_0 = a$ resp. $x_0 = b$. \square

1.20 . Lemma (RIESZ). *Nechť funkce f a $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ splňují předpoklady Tvzení 1.19. Potom je množina*

$$E = \{x \in (a, b) : \text{existuje } \xi > x \text{ tak, že } f(\xi) > F(x)\}$$

otevřená. Když je $E \neq \emptyset$, pak E sestává z nejvýše spočetného systému po dvou disjunktních otevřených intervalů (a_k, b_k) a pro každý z nich platí

$$f(a_k+) \leq F(b_k).$$

D ů k a z . Je-li $E = \emptyset$, není co dokazovat. Nechť tedy $x_0 \in E$. Potom existuje $\xi \in (x_0, b]$ takové, že platí

$$\varepsilon := f(\xi) - F(x_0) > 0.$$

Vzhledem k polospojitosti funkce F v bodě x_0 existuje $\delta > 0$ takové, že $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [a, b]$ a

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \implies F(x) < F(x_0) + \varepsilon = f(\xi).$$

To ovšem také znamená, že je

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset E,$$

tj. množina E je otevřená.

Je známo (viz [3, Věta 69]), že každá neprázdná otevřená množina je sjednocením nejvýše spočetného systému po dvou disjunktních otevřených intervalů. Tedy také množina E je sjednocením takového systému $\{(a_k, b_k)\}$. Zvolme libovolný interval (a_k, b_k) z tohoto systému a v něm libovolný bod x_0 . Podle Tvzení 1.17 existuje $x_1 \in [x_0, b]$ takové, že

$$F(x_1) = \max_{x \in [x_0, b]} F(x). \tag{1.6}$$

Kdyby bylo $x_1 < b_k$ pak by také bylo $x_1 \in E$ a tudíž by pro nějaké $\xi \in (x_1, b]$ bylo

$$F(\xi) \geq f(\xi) > F(x_1),$$

což je ovšem spor s (1.6). Máme tedy

$$x_1 \geq b_k.$$

Vzhledem k (1.6) máme také $F(b_k) \leq F(x_1)$. Předpokládejme, že je

$$F(b_k) < F(x_1) = \max\{f(x_1-), f(x_1), f(x_1+)\}.$$

Potom také musí být $x_1 > b_k$ a musí existovat $\xi \in (b_k, b)$ takové, že je $f(\xi) > F(b_k)$ čili $b_k \in E$, což ovšem není možné. Je tedy

$$F(b_k) = F(x_1) = \max_{x \in [x_0, b]} F(x) \geq F(x_0) \geq f(x_0)$$

pro každé $x_0 \in (a_k, b_k)$. Limitním přechodem $x_0 \rightarrow a_k+$ dostaneme konečně

$$F(b_k) \geq f(a_k+),$$

což uzavírá důkaz lemmatu. □

1.21. Poznámka. Funkce splňující předpoklady Tvrzení 1.19 a Lemmatu 1.20 nazýváme *regulované funkce*. Podrobněji o nich pojednáme v kapitole 3.

1.22. Definice. Nechť $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je daná funkce. Pro $x \in (a, b]$ definujeme *horní resp. dolní Diniho derivovaná čísla zleva* $D^-f(x)$ resp. $D_-f(x)$ takto:

$$D^-f(x) = \limsup_{t \rightarrow x-} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \quad \text{a} \quad D_-f(x) = \liminf_{t \rightarrow x-} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Podobně se definují *horní resp. dolní Diniho derivovaná čísla zprava* v bodech $x \in [a, b)$:

$$D^+f(x) = \limsup_{\xi \rightarrow x+} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \quad \text{a} \quad D_+f(x) = \liminf_{\xi \rightarrow x+} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}.$$

1.23 . Poznámka. Pro libovolnou funkci $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a body $x \in (a, b]$ a $y \in [a, b)$ jsou její derivovaná čísla $D^-f(x)$, $D_-f(x)$, $D^+f(y)$, $D_+f(y)$ jednoznačně určena. Mohou ovšem nabývat také hodnot ∞ resp. $-\infty$. Funkce f má v bodě x vlastní derivaci zleva právě tehdy, když $D^-f(x) = D_-f(x) \in \mathbb{R}$. Podobně, f má v bodě x vlastní derivaci zprava právě tehdy, když $D^+f(x) = D_+f(x) \in \mathbb{R}$, a vlastní derivaci právě tehdy, když $D^-f(x) = D_-f(x) = D^+f(x) = D_+f(x) \in \mathbb{R}$.

Z Definice 1.22 ihned plyne, že pro $x \in (a, b]$ a $y \in [a, b)$ platí

$$-\infty \leq D_-f(x) \leq D^-f(x) \leq +\infty \quad \text{a} \quad -\infty \leq D_+f(y) \leq D^+f(y) \leq +\infty.$$

Podle Důsledku 1.6 a Lemmatu obsaženém v důkazu Věty 1.7 již víme, že každá monotonní funkce na intervalu $[a, b]$ má na tomto intervalu nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti. Nyní si ukážeme, že každá monotonní funkce má vlastní derivaci "téměř všude" na definičním intervalu.

1.24 . Věta. *Každá funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monotonní na $[a, b]$ má pro s.v. $x \in [a, b]$ konečnou derivaci $f'(x)$.*

D ů k a z . Předpokládejme např., že f je neklesající. Potom pro všechna $x, \xi \in [a, b]$, $x \neq \xi$, máme

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \geq 0$$

a vzhledem k Definici 1.22 tedy také

$$0 \leq D_-f(x) \leq D_+f(x) \leq \infty \quad \text{a} \quad 0 \leq D_+f(x) \leq D^+f(x) \leq \infty \quad (1.7)$$

pro všechna $x, \in (a, b)$.

Důkaz věty bude rozdělen na 3 kroky:

- I. Nejprve ukážeme, že platí:

$$D^+f(x) < \infty \quad \text{pro s.v. } x \in (a, b). \quad (1.8)$$

- II. Poté ukážeme, že platí

$$D^+f(x) \leq D_-f(x) \quad \text{pro s.v. } x \in (a, b). \quad (1.9)$$

- III. Konečně, ukážeme, že důkaz věty je už snadným důsledkem tvrzení (1.8) a (1.9).

► I. Nejprve tedy dokážeme platnost tvrzení (1.8). Označme symbolem S množinu bodů nespojitosti funkce f v (a, b) a

$$E_\infty = \{x \in (a, b) \setminus S : D^+f(x) = \infty\}.$$

Podle Věty 1.7 je množina S nanejvýše spočetná a tedy (viz Cvičení 1.13 a)) má nulovou míru ($\mu(S) = 0$). Je-li $E_\infty = \emptyset$, není co dokazovat. Předpokládejme tedy, že je $E_\infty \neq \emptyset$. Nechť je dáno libovolné $c > 0$. Máme

$$E_\infty \subset E_c = \{x \in (a, b) \setminus S : D^+f(x) > c\}. \quad (1.10)$$

Jestliže $x \in E_c$, pak podle Definice 1.22 existuje $\xi \in (x, b)$ takové, že platí

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} > c,$$

tj.

$$\text{pro každé } x \in E_c \text{ existuje } \xi \in (x, b) \text{ takové, že } f(\xi) > f(x) + c(\xi - x), \quad (1.11)$$

kde

$$g(x) := f(x) - cx \quad \text{pro } x \in [a, b], \quad (1.12)$$

a

$$G(x) := \begin{cases} g(a+) & \text{pro } x = a, \\ \max\{g(x-), g(x), g(x+)\} & \text{pro } x \in (a, b), \\ g(b-) & \text{pro } x = b. \end{cases} \quad (1.13)$$

(Zde jsme využili toho, že $E_c \cap S = \emptyset$ a tudíž $G(x) = g(x)$ pro každé $x \in E_c$.) Podle (1.11) máme dále

$$E_c \subset E := \{x \in (a, b) : \text{existuje } \xi > x \text{ tak, že } g(\xi) > G(x)\}. \quad (1.14)$$

Protože funkce f je neklesající na $[a, b]$, je také g na tomto intervalu neklesající a tudíž také regulovaná (viz Důsledek 1.6). Podle Tvzení 1.19 je G polospojité shora na $[a, b]$ a tudíž podle Lemmatu 1.20 je množina E z (1.14) sjednocením nejvýše spočetného systému po dvou disjunktních otevřených intervalů (a_k, b_k) , $k \in K \subset \mathbb{N}$ a pro každý z nich platí $g(a_k+) \leq G(b_k)$. Vzhledem k (1.12) a (1.13) a vzhledem k tomu, že funkce f je neklesající na $[a, b]$, tedy máme

$$f(a_k+) - ca_k \leq G(b_k) = \max\{f(b_k-), f(b_k), f(b_k+)\} - cb_k \leq f(b_k+),$$

neboli

$$c(b_k - a_k) \leq f(b_k+) - f(a_k+).$$

Sečtením přes všechna k odtud dostaneme

$$c \sum_{k \in K} (b_k - a_k) \leq \sum_{k \in K} [f(b_k+) - f(a_k+)] \leq f(b) - f(a),$$

neboli

$$\sum_{k \in K} (b_k - a_k) \leq \frac{f(b) - f(a)}{c}.$$

Pokud tedy k danému $\varepsilon > 0$ zvolíme $c > 0$ tak velké, aby platilo

$$\frac{f(b) - f(a)}{c} < \varepsilon,$$

docílíme toho, že bude

$$\sum_{k \in K} (b_k - a_k) < \varepsilon,$$

což ovšem znamená, že množina E a tudíž také množina $E_\infty \cup S \cup [a] \cup [b]$ mají nulovou míru (viz (1.10), (1.14) a Cvičení 1.13b)). Tvzení (1.8) je tedy dokázáno.

► II. Pro daná čísla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\alpha \geq 0 \quad \text{a} \quad \beta \geq \alpha, \quad (1.15)$$

definujeme

$$E_{\alpha\beta} = \{x \in (a, b) \setminus S : D^+f(x) > \alpha \text{ a } D_-f(x) < \beta\}$$

a

$$E_\beta = \{x \in (a, b) : D_f(x) < \beta\}.$$

Nechť $y \in E_\beta$. Pak existuje $\eta \in (a, x)$ takové, že

$$f(\eta) - \beta \eta > f(y) - \beta y.$$

Pro $x \in [-b, -a]$ definujeme

$$g(x) = f(-x) + \beta x.$$

Je-li $y = -x \in (a, b) \cap E_\beta$, pak podle výše uvedeného existuje $\xi > x$ ($\xi = -\eta$) takové, že je

$$g(\xi) > G(x) = g(x),$$

kde funkce G je přiřazena k g opět relací (1.13). (Jelikož je $S \cap E_\beta = \emptyset$ a $x \in E_\beta$, je $G(x) = g(x)$.) Použitím Lemmatu 1.20 pro funkci g na intervalu $(-b, -a)$ dostaneme, že existuje nejvýše spočetně mnoho otevřených a navzájem disjunktních intervalů $(-b_k, -a_k)$, které obsahují ty body $x \in (-b, -a)$, pro které je $-x \in E_\beta$ a platí

$$g(-b_k+) \leq G(-a_k).$$

Protože f je neklesající na $[a, b]$, funkce g je nerostoucí na $[-b, -a]$. To má za následek, že $g(x-) \geq g(x) \geq g(x+)$ pro každé $x \in (a, b)$. Máme tedy

$$G(-a_k) = g(-a_k-) \text{ a tudíž } f(b_k-) - \beta b_k \leq f(a_k+) = \beta a_k,$$

tj.

$$f(b_k-) - f(a_k+) \leq \beta(b_k - a_k) \text{ pro každé } k.$$

(a) Nyní, pro $\alpha \geq 0$ označme

$$\tilde{E}_\alpha = \{x \in [a, b] \setminus S : D^+f(x) > \alpha\}.$$

Podobně jako v analogické situaci výše, pro každé $y \in \tilde{E}_\alpha$ můžeme najít $\eta \in (a, y)$ takové, že je

$$\frac{f(\eta) - f(y)}{\eta - y} < \alpha, \tag{1.16}$$

tj.

$$f(\eta) - \alpha \eta > f(y) - \alpha y. \tag{1.17}$$

Definujme

$$g(x) = f(-x) - \alpha(-x) \quad \text{pro } x \in [-b, -a]$$

a

$$G(x) = \begin{cases} g(-b+) & \text{pro } x = -b, \\ \max\{g(x-), g(x), g(x+)\} & \text{pro } x \in (-b, -a), \\ g(-a-) & \text{pro } x = -a. \end{cases}$$

Vzhledem k (1.17), pro každé $x \in (a, b)$ takové, že $-x \in \tilde{E}_\alpha$ existuje $\xi \in (x, -a)$, pro které platí $g(\xi) > G(x)$. (Stačí najít k $y = -x$ $\eta \in (a, y)$ splňující (1.16) a pak položit $\xi = -\eta$.) Použitím Lemmatu 1.20 tedy můžeme ukázat, že existuje nejvýše spočetný systém po dvou disjunktních otevřených intervalů (a_k, b_k) , $k \in K \subset \mathbb{N}$, takový, že platí

$$\tilde{E}_\alpha \subset \bigcup_{k \in K} (-b_k, -a_k)$$

a

$$g(-b_k+) = f(b_k-) - \alpha b_k \leq G(-a_k) \leq f(a_k+) - \alpha a_k.$$

Poslední nerovnost ovšem znamená, že pro každé $k \in K$ platí

$$f(b_k-) - f(a_k+) \leq \alpha(b_k - a_k). \quad (1.18)$$

(b) Nechť $k \in K$ a $x \in E_\beta \cap (a_k, b_k)$. Potom máme $D^+f(x) > \beta$ a tudíž existuje $\xi \in (x, b_k)$ takové, že platí

$$f(\xi) - \beta \xi > f(x) - \beta x.$$

Použijeme-li opět Rieszovo lemma (Lemma 1.20), dostaneme odtud existenci nejvýše spočetného systému po dvou disjunktních otevřených intervalů $(a_{k\ell}, b_{k\ell})$, $\ell \in L \subset \mathbb{N}$, takového, že platí

$$E_\beta \cap (a_k, b_k) \subset \bigcup_{\ell \in L} (a_{k\ell}, b_{k\ell})$$

a

$$f(a_{k\ell}+) - \beta a_{k\ell} \leq f(b_{k\ell}+) - \beta b_{k\ell},$$

tj.

$$\beta(b_{k\ell} - a_{k\ell}) \leq f(b_{k\ell}+) - f(a_{k\ell}+) \quad \text{pro každé } \ell \in L.$$

Po sečtení přes všechna $\ell \in L$ odtud a z (1.18) získáme vztahy

$$\beta \sum_{\ell \in L} (b_{k\ell} - a_{k\ell}) \leq \sum_{\ell \in L} (f(b_{k\ell}+) - f(a_{k\ell}+)) \leq f(b_k-) - f(a_k+) \leq \alpha(b_k - a_k)$$

a (sečtením přes všechna $k \in K$)

$$\beta \sum_{k \in K} \sum_{\ell \in L} (b_{k\ell} - a_{k\ell}) \leq \alpha \sum_{k \in K} (b_k - a_k). \quad (1.19)$$

Označíme-li tedy

$$|\mathfrak{L}_1| = \sum_{k \in K} (b_k - a_k) \quad \text{a} \quad |\mathfrak{L}_2| = \sum_{k \in K} \sum_{\ell \in L} (b_{k\ell} - a_{k\ell}),$$

budeme moci nerovnost (1.19) přepsat ve tvaru

$$|\mathfrak{L}_1| \leq \frac{\alpha}{\beta} |\mathfrak{L}_2|.$$

Když výše uvedené procedury (a) i (b) budeme provádět střídavě v postupně vznikajících intervalech, dostaneme posloupnost systémů intervalů $\mathfrak{L}_1 \supset \mathfrak{L}_2 \supset \dots \supset \mathfrak{L}_n \supset \dots$, z nichž každý obsahuje $E_{\alpha\beta} = E_\beta \cap \tilde{E}_\alpha$, přičemž

$$|\mathfrak{L}_{2n}| \leq \frac{\alpha}{\beta} |\mathfrak{L}_{2n-1}| \leq \frac{\alpha}{\beta} |\mathfrak{L}_{2n-2}|$$

platí pro každé $n \in \mathbb{N}$. Odtud pak dále odvodíme, že je

$$|\mathfrak{L}_{2n}| \leq \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n |\mathfrak{L}_1| \leq \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n (b - a).$$

Protože máme $0 \leq \frac{\alpha}{\beta} < 1$, plyne odtud, že je $|\mathfrak{L}_{2n}| \rightarrow 0$ pro $n \rightarrow \infty$.

Nyní, k danému $\varepsilon > 0$ zvolíme $n \in \mathbb{N}$ tak, aby bylo

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n (b - a) < \varepsilon.$$

Potom bude $E_{\alpha\beta} \subset \mathfrak{L}_{2n}$ a přitom také $|\mathfrak{L}_{2n}| \leq \varepsilon$, což podle Definice 1.12 znamená, že $\mu(E_{\alpha\beta}) = 0$ pro libovolnou dvojici $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ splňující (1.15).

Označme

$$E_* = \{x \in (a, b) \setminus S : D_- f(x) < D^+ f(x)\}$$

Potom pro každé $x \in E_*$ existují racionální čísla $\alpha, \beta \in \mathbb{P}$ splňující (1.15) a

$$D_- f(x) < \alpha < \beta < D^+ f(x).$$

To znamená, že je E_* obsažena v množině

$$\tilde{E} := \bigcup_{\substack{0 \leq \alpha < \beta \\ \alpha, \beta \in \mathbb{P}}} E_{\alpha, \beta},$$

která je sjednocením spočetně mnoha množin nulové míry a tudíž má také nulovou míru (viz Cvičení 1.13b). Tím spíše je $\mu(E_*) = 0$ a tedy také

$$\mu(E_* \cup S \cup [a] \cup [b]) = 0,$$

což dokazuje platnost tvrzení (1.9).

► III. Funkce

$$\tilde{f}: x \in [-b, -a] \rightarrow -f(-x)$$

je zřejmě neklesající na $[-b, -a]$ a platí

$$D_- \tilde{f}(-x) = D_+ f(x) \quad \text{a} \quad D^+ \tilde{f}(-y) = D^- f(y)$$

pro všechna $x \in [a, b]$ a $y \in (a, b]$. Použijeme-li tedy (1.9) na funkci \tilde{f} , dostaneme

$$D^- f(x) = D^+ \tilde{f}(-x) \leq D_- \tilde{f}(-x) = D_+ f(x) \quad \text{pro s.v. } x \in [a, b].$$

Vzhledem k (1.7) a (1.8) tedy pro s.v. $x \in [a, b]$ budeme mít

$$0 \leq D^+ f(x) \leq D_- f(x) \leq D^- f(x) \leq D_+ f(x) \leq D^+ f(x) < \infty,$$

tj.

$$0 \leq D^+ f(x) = D_- f(x) = D^- f(x) = D_+ f(x) = f'(x) < \infty.$$

□

1.25. Důsledek. Každá funkce $f \in \mathbb{BV}[a, b]$ má vlastní derivaci $f'(x)$ pro s.v. $x \in [a, b]$. □

1.26. Poznámka. Lze dokonce dokázat (viz [4, Věty 84 a 91]), že je-li $f \in \mathbb{BV}[a, b]$, pak $f' \in \mathbb{L}^1[a, b]$. **ALE !!!!** Obecně neplatí pro každou funkci $f \in \mathbb{BV}[a, b]$ zdánlivě evidentní rovnost

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt.$$

Existují totiž funkce $f \in \mathbb{BV}[a, b]$ nekonstantní na $[a, b]$ a přitom takové, že platí $f'(x) = 0$ s.v. na $[a, b]$.

1.27. Definice. Funkce $f \in \mathbb{BV}[a, b]$ se nazývá *singulární*, jestliže platí $f'(x) = 0$ pro s.v. $x \in [a, b]$.

Nejjednodušším příkladem nekonstantních singulárních funkcí jsou funkce tvaru

$$f(x) = \chi_{[a,c]}(x),$$

kde $c \in (a, b)$. Jejich zobecněním jsou třídy *jednoduchých skokových funkcí* (anglicky *step functions*) resp. *skokových funkcí* (anglicky *break functions*).

1.28. Definice. Funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je *konečná skoková funkce na $[a, b]$* ($f \in \mathbb{S} = \mathbb{S}[a, b]$), jestliže existuje dělení $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \in \mathcal{D}[a, b]$ takové, že na každém jeho dílčím otevřeném intervalu (α_{j-1}, α_j) je f konstantní.

Funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je *skoková funkce na $[a, b]$* ($f \in \mathbb{B} = \mathbb{B}[a, b]$), jestliže existuje $c \in \mathbb{R}$, $K \subset \mathbb{N}$ a posloupnosti

$$\{s_k\}_{k \in K} \subset [a, b], \quad \{c_k\}_{k \in K} \subset \mathbb{R} \quad \text{a} \quad \{d_k\}_{k \in K} \subset \mathbb{R}$$

takové, že platí

$$\sum_{k \in K} (|c_k| + |d_k|) < \infty$$

a

$$f(x) = c + \sum_{a < s_k \leq x} c_k + \sum_{a \leq s_k < x} d_k \quad \text{na } [a, b]. \quad (1.20)$$

1.29. Cvičení. Pro každou $f \in \mathbb{B}$ tvaru (1.20) platí

$$\text{var}_a^b f = \sum_{k \in K} (|c_k| + |d_k|) < \infty$$

a tudíž $\mathbb{S} \subset \mathbb{B} \subset \mathbb{BV}[a, b]$.

1.30. Věta. Každá skoková funkce na $[a, b]$ je singulární na $[a, b]$.

D ů k a z . Necht' $c \in \mathbb{R}$, $K \subset \mathbb{N}$, $\{s_k\}_{k \in K} \subset [a, b]$, $\sum_{k \in K} (|c_k| + |d_k|) < \infty$ a

$$f(x) = c + \sum_{a < s_k \leq x} c_k + \sum_{a \leq s_k < x} d_k \quad \text{na } [a, b].$$

Definujme pro $x \in [a, b]$:

$$v(x) = \sum_{a < s_k \leq x} |c_k| + \sum_{a \leq s_k < x} |d_k| \quad \text{na } [a, b].$$

Potom je

$$v(x) = \sum_{k \in K} v_k(x) \quad \text{na } [a, b],$$

kde

$$v_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{když } a \leq x < s_k, \\ |c_k| & \text{když } x = s_k, \\ |c_k| + |d_k| & \text{když } s_k < x \leq b. \end{cases}$$

Každá funkce v_k je neklesající na $[a, b]$ a $v'_k(x) = 0$ pro $x \neq s_k$. Máme tedy

$$v'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} v'_k(x) = 0 \quad \text{pro } x \notin \{s_k\}_{k \in K}, \quad \text{tj. pro s.v. } x \in [a, b].$$

Protože pro všechna $x, y \in [a, b]$, $x \neq y$, zřejmě platí

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq \left| \frac{v(x) - v(y)}{x - y} \right|,$$

plyne odsud tvrzení věty. □

1.31 . Poznámka. Příklad funkce, která je spojitá, neklesající a singulární na daném intervalu, je uveden v [4, V.9,cvičení 4].

1.32. Lemma. *Nechť $f \in \mathbb{BV}[a, b]$ a nechť $\{s_k\}_{k \in K}$, $K \subset \mathbb{N}$, je množina bodů nespojitosti funkce f v $[a, b]$. Definujme*

$$f^B(x) = \sum_{a < s_k \leq x} \Delta^- f(s_k) + \sum_{a \leq s_k < x} \Delta^+ f(s_k) \quad \text{pro } x \in [a, b]. \quad (1.21)$$

Potom je $f^B \in \mathbb{BV}[a, b]$ a funkce $f - f^B$ je spojitá na $[a, b]$.

D ů k a z . Podle Věty 1.9 máme

$$\text{var}_a^b f^B = \sum_{k=1}^{\infty} (|\Delta^- f(s_k)| + |\Delta^+ f(s_k)|) < \infty$$

a tudíž $f^B \in \mathbb{B}[a, b] \subset \mathbb{BV}[a, b]$. Dále, pro každé $x \in [a, b)$ máme

$$f^B(x+) = \sum_{a < s_k \leq x} \Delta^- f(s_k) + \sum_{a \leq s_k < x} \Delta^+ f(s_k).$$

Proto také

$$f^B(x+) - f^B(x) = \Delta^+ f(x)$$

a

$$(f(x+) - f^B(x+)) - (f(x) - f^B(x)) = \Delta^+ f(x) - \Delta^+ f(x) = 0.$$

Podobně, pro každé $x \in (a, b]$ je

$$f^B(x-) = \sum_{a < s_k < x} \Delta^- f(s_k) + \sum_{a \leq s_k < x} \Delta^+ f(s_k),$$

a tedy

$$(f(x) - f^B(x)) - (f(x-) - f^B(x-)) = \Delta^- f(x) - \Delta^- f(x) = 0. \quad \square$$

1.33. Definice. Funkce f^B přiřazená k f podle definice (1.21) budeme nazývat *skoková část* funkce f . Rozdíl $f - f^B$ nazýváme *spojitá část* funkce f a značíme f^C .

1.34. Poznámka. Podle Lemmatu 1.32 lze každou funkci s konečnou variací rozložit na součet funkce spojitě a funkce skokové. Takový rozklad se nazývá *Jordanův rozklad* funkce s konečnou variací. Obecně jsou skoková resp. spojitá část z Jordanova rozkladu určeny jednoznačně až na konstantu. Všimněme si ještě, že použitím charakteristických funkcí podintervalů v $[a, b]$ lze definici (1.21) ekvivalentně zapsat též ve tvaru

$$f^B(x) = \sum_{k \in K} \Delta^- f(s_k) \chi_{[s_k, b]}(x) + \sum_{k \in K} \Delta^+ f(s_k) \chi_{(s_k, b]}(x).$$

1.35. Lemma. *Nechť $f \in \mathbb{BV}[a, b]$, $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ je množina bodů její nespojitosti v $[a, b]$ a nechť f^B je definována jako v Lemmatu 1.32. Definujme dále pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [a, b]$,*

$$f_n^B(x) = \sum_{k=1}^n \Delta^- f(s_k) \chi_{[s_k, b]}(x) + \sum_{k=1}^n \Delta^+ f(s_k) \chi_{(s_k, b]}(x).$$

Potom je $f_n^B \in \mathbb{S}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{var}_a^b (f^B - f_n^B) = 0.$$

Důkaz plyne z nerovnosti

$$\text{var}_a^b (f^B - f_n^B) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} (|\Delta^- f(s_k)| + |\Delta^+ f(s_k)|).$$

□

1.36. Věta (HELLY). *Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{BV}[a, b]$, $K \in \mathbb{R}$,*

$$|f_n(a)| \leq K \quad \text{a} \quad \text{var}_a^b f_n \leq K \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Potom existují funkce $f \in \mathbb{BV}[a, b]$ a podposloupnost

$$\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

takové, že platí

$$|f(a)| \leq K, \quad \text{var}_a^b f \leq K \quad \text{a} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = f(x) \quad \text{na } [a, b].$$

K důkazu Hellyovy věty využijeme následujících dvou lemmat.

Lemma 1. *Nechť*

$$|f_n(x)| \leq M < \infty \quad \text{na } [a, b] \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Potom pro každou spočetnou $P \subset [a, b]$ existuje podposloupnost $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že limita

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(p)$$

je konečná pro všechna $p \in P$.

D ů k a z . Necht' $P = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$. Máme $|f_n(p_k)| \leq M < \infty$ pro všechna $n, k \in \mathbb{N}$. Podle Bolzanovy-Weierstraßovy věty lze tedy vybrat z $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ podposloupnost $\{f_{n_k,1}\}_{k=1}^{\infty}$, pro níž existuje konečná limita

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k,1}(p_1) = q_1 \in \mathbb{R}.$$

Podobně existují

$$\{f_{n_k,2}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{f_{n_k,1}\}_{k=1}^{\infty} \quad \text{a} \quad q_2 \in \mathbb{R}$$

tak, že

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k,2}(p_2) = q_2 \in \mathbb{R}.$$

Takto pro každé $j \in \mathbb{N}$ najdeme posloupnosti

$$\{f_{n_k,j}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{f_{n_k,j-1}\}_{k=1}^{\infty} \quad \text{a} \quad q_j \in \mathbb{R}$$

takové, že platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k,\ell}(p_\ell) = q_\ell \in \mathbb{R} \quad \text{pro každé } \ell \in \{1, 2, \dots, j\}.$$

Položme $f_{n_k} = f_{n_k,k}$ pro $k \in \mathbb{N}$. Potom

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(p_j) = q_j \in \mathbb{R} \quad \text{pro každé } j \in \mathbb{N}.$$

□

Lemma 2. Předpokládejme, že všechny funkce f_n , $n \in \mathbb{N}$, jsou neklesající na $[a, b]$ a že existuje $M \in (0, \infty)$ takové, že $\|f_n\| \leq M$ platí pro každé $n \in \mathbb{N}$. Potom existují podposloupnost

$$\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$$

a funkce $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neklesající na $[a, b]$ takové, že platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = f(x) \quad \text{na } [a, b].$$

D ů k a z . Necht' $P = (\mathbb{P} \cap (a, b)) \cup [a] \cup [b]$ je množina racionálních čísel z intervalu (a, b) doplněná o body a, b . Body množiny P očísľujme tak, že bude $P = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$. Podle Lemmatu 1 existuje podposloupnost

$$\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$$

a zobrazení $\varphi: P \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(p) = \varphi(p) \quad \text{pro všechna } p \in P.$$

Zřejmě platí

$$\varphi(p') \leq \varphi(p'') \quad \text{pro všechna } p', p'' \in P, p' \leq p''.$$

Dále, definujme pro $x \in (a, b) \setminus P$

$$\varphi(x) = \sup_{p \in P \cap [a, x]} \varphi(p).$$

Potom máme

$$\varphi(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) \quad \text{pro } x \in P \quad \text{a} \quad \varphi(x) = \lim_{\substack{p \rightarrow x \\ p \in P}} \varphi(p)$$

a φ je definovaná a neklesající na $[a, b]$. Ukážeme, že v každém bodě $x_0 \in (a, b)$, ve kterém je funkce φ spojitá platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x_0) = \varphi(x_0). \quad (1.22)$$

Vskutku, buď dáno $\varepsilon > 0$. Potom existuje $\delta_\varepsilon > 0$ takové, že

$$x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0 + \delta_\varepsilon \implies \varphi(x_0) - \varepsilon < \varphi(x) < \varphi(x_0) + \varepsilon.$$

Zvolíme-li $r' \in P \cap (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0)$ a $r'' \in P \cap (x_0, x_0 + \delta_\varepsilon)$, bude platit

$$\varphi(x_0) - \varepsilon \leq \varphi(r') \leq \varphi(x) \leq \varphi(r'') \leq \varphi(x_0) + \varepsilon.$$

Dále, zvolme k_0 tak, aby platilo

$$\varphi(r') - \varepsilon \leq f_{n_k}(r') \leq \varphi(r') + \varepsilon \quad \text{a} \quad \varphi(r'') - \varepsilon \leq f_{n_k}(r'') \leq \varphi(r'') + \varepsilon$$

pro každé $k \geq k_0$. Potom, pro každé $k \geq k_0$ dostaneme

$$\begin{aligned} \varphi(x_0) - 2\varepsilon &\leq \varphi(r') - \varepsilon \leq f_{n_k}(r') \leq f_{n_k}(x_0) \\ &\leq f_{n_k}(r'') \leq \varphi(r'') + \varepsilon \leq \varphi(x_0) + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

čili platí (1.22).

Dokázali jsme tedy, že značí-li Q množinu bodů nespojitosti funkce φ v (a, b) , pak

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = \varphi(x) \quad \text{pro } x \in [a, b] \setminus Q.$$

Podle Věty 1.7 je množina Q spočetná. Můžeme tedy použít ještě jednou Lemma 1 a dokázat tak existenci vybrané posloupnosti

$$\{f_{n_{k_\ell}}\}_{\ell=1}^\infty \subset \{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty,$$

která má limitu $\psi(x) \in \mathbb{R}$ pro každé $x \in Q$. Definujeme-li tedy

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{když } x \in [a, b] \setminus Q, \\ \psi(x) & \text{když } x \in Q, \end{cases}$$

bude

$$\lim_{\ell} f_{n_{k_\ell}}(x) = f(x) \quad \text{na } [a, b]$$

a protože funkce, která je na intervalu $[a, b]$ bodovou limitou posloupnosti funkcí neklesajících na $[a, b]$, je také neklesající, lemma je dokázáno. \square

Důkaz Věty 1.36. Použitím Věty 1.4 (o rozkladu funkce s konečnou variací na rozdíl dvou funkcí neklesajících) a Lemmatu 2 se snadno ukáže existence funkce $f \in \mathbb{BV}[a, b]$ a podposloupnosti $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ takových, že je $|f(a)| \leq K$ a $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = f(x)$ na $[a, b]$. Dále, protože pro libovolné dělení $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \in \mathcal{D}[a, b]$ máme

$$\begin{aligned} V(f, D) &= \sum_{j=1}^m |f(\alpha_j) - f(\alpha_{j-1})| = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m |f_{n_k}(\alpha_j) - f_{n_k}(\alpha_{j-1})| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} V(f_{n_k}, D) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \text{var}_a^b f_{n_k} \leq K, \end{aligned}$$

platí také $\text{var}_a^b f \leq K$. \square

Kapitola 2

Absolutně spojité funkce.

2.1. Definice. Funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je *absolutně spojitá* na intervalu $[a, b]$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\sum_{j=1}^m |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| < \varepsilon$$

platí pro každý systém intervalů $[\alpha_j, \beta_j]$, $j = 1, 2, \dots, m$, splňující

$$a \leq \alpha_1 \leq \beta_1 \leq \alpha_2 \leq \beta_2 \cdots \leq \beta_{m-1} \leq \alpha_m \leq \beta_m \leq b \quad \text{a} \quad \sum_{j=1}^m (\beta_j - \alpha_j) < \delta. \quad (2.1)$$

Množinu funkcí absolutně spojitých na $[a, b]$ značíme $\mathbb{AC}[a, b]$ resp. \mathbb{AC} (je-li ze souvislostí jasné, o jaký interval se jedná).

2.2. Cvičení. (i) Každá funkce absolutně spojitá na intervalu $[a, b]$ je na tomto intervalu stejnoměrně spojitá.

(ii) Nechť funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ splňuje Lipschitzovu podmínku na intervalu $[a, b]$, tj. existuje $L \in \mathbb{R}$ takové, že

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \text{platí pro všechna } x, y \in [a, b].$$

Potom $f \in \mathbb{AC}[a, b]$.

2.3. Věta. Každá funkce absolutně spojitá na intervalu $[a, b]$ má na tomto intervalu konečnou variaci.

D ů k a z . Nechť $f \in \mathbb{AC}$. Zvolme $\delta > 0$ tak, aby platilo

$$\sum_{j=1}^m |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| < 1$$

pro každý systém intervalů $[\alpha_j, \beta_j]$, $j = 1, 2, \dots, k$, splňující (2.1). Dále, zvolme dělení $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ intervalu $[a, b]$ tak, aby platilo

$$0 < x_i - x_{i-1} < \delta \quad \text{pro každé } i = 1, 2, \dots, k.$$

Potom pro každé $i = 1, 2, \dots, k$ a každé dělení $D^i = \{\alpha_0^i, \alpha_1^i, \dots, \alpha_{m_i}^i\}$ intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ máme

$$\sum_{j=1}^{m_i} (\alpha_j^i - \alpha_{j-1}^i) = x_i - x_{i-1} < \delta$$

a tudíž (podle Věty 1.3)

$$\operatorname{var}_a^b f = \sum_{i=1}^m \operatorname{var}_{x_{i-1}}^{x_i} f = \sum_{i=1}^k \sup_{D^i \in \mathcal{D}[x_{i-1}, x_i]} \sum_{j=1}^{m_i} |f(\alpha_j^i) - f(\alpha_{j-1}^i)| < k < \infty. \quad \square$$

2.4. Věta. *Jestliže $f, g \in \mathbb{AC}[a, b]$, pak $|f|, f + g, fg, \max\{f, g\}, \min\{f, g\} \in \mathbb{AC}[a, b]$. Je-li navíc $|f(x)| > 0$ na $[a, b]$, pak také $f^{-1} \in \mathbb{AC}[a, b]$.*

D ů k a z . Necht' $f, g \in \mathbb{AC}[a, b]$.

a) Pro libovolná $x, y \in [a, b]$ platí $|f(x)| \leq |f(x) - f(y)| + |f(y)|$. Tudíž

$$|f(x) - f(y)| \geq ||f(x)| - |f(y)||$$

a

$$\sum_{j=1}^m ||f(\beta_j)| - |f(\alpha_j)|| \leq \sum_{j=1}^m |f(\beta_j) - f(\alpha_j)|.$$

Odtud už ovšem okamžitě plyne, že také $|f| \in \mathbb{AC}[a, b]$.

b) Druhé a třetí tvrzení, tj. $f + g \in \mathbb{AC}[a, b]$ a $fg \in \mathbb{AC}[a, b]$, plynou z nerovností

$$|(f(x) + g(x)) - (f(y) + g(y))| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)|$$

a

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leq \|f\| |g(x) - g(y)| + \|g\| |f(x) - f(y)|.$$

c) Protože pro libovolné $x \in [a, b]$ máme

$$\max\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|)$$

a

$$\min\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|),$$

platí v důsledku a) a b) také

$$\max\{f, g\} \in \mathbb{AC}[a, b] \quad \text{a} \quad \min\{f, g\} \in \mathbb{AC}[a, b].$$

d) Konečně, je-li navíc $|f(x)| > 0$ na $[a, b]$, pak existuje $\mu > 0$ takové, že platí $|f(x)| \geq \mu$ na $[a, b]$ a tudíž také

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)} \right| \leq \frac{|f(x) - f(y)|}{\mu^2}.$$

Nyní už je snadné ukázat, že $f^{-1} \in \mathbb{AC}[a, b]$. □

2.5. Poznámka. Z vět 1.24 a 2.3 okamžitě plyne, že každá absolutně spojitá funkce na intervalu $[a, b]$ má s.v. na tomto intervalu konečnou derivaci. Lze dokázat (viz [4, Věty 93 a 94]), že funkce $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je absolutně spojitá na $[a, b]$ právě tehdy, když

$$f(x) - f(a) = \int_a^x g(t) dt \quad \text{na } [a, b]$$

pro nějakou funkci $g \in \mathbb{L}^1[a, b]$. (Potom je $f'(t) = g(t)$ s.v. na $[a, b]$.) Speciálně, platí, že je-li $f \in \mathbb{AC}[a, b]$ a $f'(t) = 0$ pro s.v. $t \in [a, b]$, pak je $f(t)$ konstantní na $[a, b]$. Dále, zobrazení

$$f \in \mathbb{AC}[a, b] \rightarrow (f(a), f') \in \mathbb{R} \times \mathbb{L}^1[a, b]$$

a

$$(c, g) \in \mathbb{R} \times \mathbb{L}^1[a, b] \rightarrow f(t) := c + \int_a^t g(s) ds \in \mathbb{AC}[a, b]$$

představují vzájemně jednoznačný vztah mezi $\mathbb{AC}[a, b]$ a $\mathbb{R} \times \mathbb{L}^1[a, b]$. Na $\mathbb{AC}[a, b]$ definujeme normu předpisem

$$\|f\|_{\mathbb{AC}} = |f(a)| + \|f'\|_1 \quad \text{pro } f \in \mathbb{AC}[a, b]$$

a $\mathbb{AC}[a, b]$ je pak Banachův prostor. Obecný spojitý lineární funkcionál na $\mathbb{AC}[a, b]$ má tvar:

$$x \in \mathbb{AC}[a, b] \rightarrow px(a) + \int_a^b qx' dt,$$

kde $p \in \mathbb{R}$ a $q \in \mathbb{L}^\infty[a, b]$. ($\mathbb{L}^\infty[a, b]$ značí prostor funkcí "v podstatě" ohraničených na $[a, b]$).

Další podrobnosti o funkcích absolutně spojitých lze nalézt v monografiích V. Jarníka *Diferenciální počet II* [3, V.9] a *Integrální počet II* [4, V.5] a Š. Schwabika *Integrace v \mathbb{R} (Kurzweilova teorie)* [6, XIII.4].

Víme již (viz Lemma 1.32 a Poznámka 1.34), že každou funkci s konečnou variací na $[a, b]$ můžeme rozložit na součet funkce spojitě a funkce skokové resp. na rozdíl dvou funkcí neklesajících na $[a, b]$ (viz Věta 1.4). Funkce s konečnou variací lze také rozložit na součet funkce absolutně spojitě a funkce singulární. Důkaz následujícího tvrzení je uveden např. v [4, Věta 125].

2.6. Věta (LEBESGUEŮV ROZKLAD FUNKCE S KONEČNOU VARIACÍ). *Pro každou funkci $f \in \mathbb{BV}[a, b]$ existuje singulární funkce f^{SING} taková, že $f - f^{\text{SING}}$ je absolutně spojitá na $[a, b]$. Funkce f^{SING} je určena jednoznačně až na konstantu.*

2.7. Definice. Jestliže $f \in \mathbb{BV}[a, b]$, pak funkci f^{SING} přiřazenou k f podle Věty 2.6 nazýváme *singulární část* funkce f . Dále, rozdíl $f - f^{\text{SING}}$ nazýváme *absolutně spojitá část* funkce f a značíme f^{AC} . Konečně, $f^{\text{SC}} := f - f^{\text{B}} - f^{\text{AC}} = f^{\text{C}} - f^{\text{AC}}$ je *spojitá singulární část* funkce f .

Kapitola 3

Regulované funkce.

3.1. Definice. Funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá *regulovaná* na $[a, b]$, jestliže pro každé $t \in (a, b)$ a každé $s \in [a, b)$ existují konečné limity

$$f(t-) = \lim_{\tau \rightarrow t-} f(\tau) \quad \text{a} \quad f(s+) = \lim_{\tau \rightarrow s+} f(\tau),$$

tj. má-li na intervalu $[a, b]$ nespojitosti nejvýše 1. druhu. Množinu funkcí regulovaných na $[a, b]$ značíme $\mathbb{G}[a, b]$.

3.2. Poznámka. Zřejmě platí $\mathbb{BV}[a, b] \cup \mathbb{C}[a, b] \subset \mathbb{G}[a, b]$, přičemž $\mathbb{G}[a, b] \setminus \mathbb{C}[a, b] \neq \emptyset$ a $\mathbb{G}[a, b] \setminus \mathbb{BV}[a, b] \neq \emptyset$.

Podobně jako pro funkce s konečnou variací (viz Lemma z důkazu Věty 1.7) platí pro regulované funkce: máme:

3.3. Věta. Každá funkce regulovaná na $[a, b]$ má na $[a, b]$ nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti. □

3.4. Věta. Jestliže posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{G}[a, b]$ a funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jsou takové, že platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ stejnoměrně na $[a, b]$ (tj. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| = 0$), pak $f \in \mathbb{G}[a, b]$.

D ů k a z . Necht' $x \in [a, b)$, necht' $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset (x, b]$ je libovolná posloupnost taková, že $x_k \rightarrow x$ pro $k \rightarrow \infty$ a necht' je dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ a $k_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby platilo

$$\|f - f_{n_0}\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{a} \quad |f_{n_0}(x_k) - f_{n_0}(x_\ell)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pro všechna } k, \ell \geq k_0.$$

Potom budeme mít pro všechna $k, \ell \geq k_0$

$$\begin{aligned} & |f(x_k) - f(x_\ell)| \\ & \leq |f(x_k) - f_{n_0}(x_k)| + |f_{n_0}(x_k) - f_{n_0}(x_\ell)| + |f(x_\ell) - f_{n_0}(x_\ell)| < \varepsilon, \end{aligned}$$

tj. existuje konečná limita $f(x+) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k)$. Podobně bychom ukázali, že pro každé $x \in (a, b]$ existuje konečná limita $f(x-)$. □

3.5. Definice. Pro libovolnou funkci $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, podinterval $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ a dělení $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \in \mathcal{D}[a, b]$ definujeme

$$\omega_{(\alpha, \beta)}(f) = \sup_{x', x'' \in (\alpha, \beta)} |f(x') - f(x'')| \quad \text{a} \quad \omega_D(f) = \max_{i=1, 2, \dots, m} \omega_{(\alpha_{i-1}, \alpha_i)}(f).$$

3.6. Věta. *Následující tři tvrzení jsou ekvivalentní*

(i) $f \in \mathbb{G}[a, b]$.

(ii) *Existuje posloupnost $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{S}[a, b]$ taková, že platí $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$ pro $n \rightarrow \infty$.*

(iii) *Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \in \mathcal{D}[a, b]$ takové, že $\omega_D(f) < \varepsilon$.*

D ů k a z . a) Implikace (ii) \implies (i) je dokázána Větou 3.4.

b) Předpokládejme, že platí (i) a necht' je dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Potom pro každé $x \in [a, b]$ existuje $\delta(x) > 0$ takové, že platí

$$\begin{cases} \omega_{(a, a+\delta(a))}(f) < \varepsilon, & \omega_{(b-\delta(b), b)}(f) < \varepsilon, \\ \omega_{(x-\delta(x), x)}(f) < \varepsilon & \text{ a } \omega_{(x, x+\delta(x))}(f) < \varepsilon \end{cases} \text{ pro všechna } x \in (a, b). \quad (3.1)$$

Intervaly

$$[a, a + \delta(a)), (x - \delta(x), x + \delta(x)), x \in (a, b), (b - \delta(b), b]$$

tvoří otevřené pokrytí intervalu $[a, b]$, ze kterého lze podle Vitaliovy věty (viz např. [3, Věta 81]) vybrat pokrytí konečné:

$$[a, a + \delta(a)), (x_i - \delta(x_i), x_i + \delta(x_i)), i = 1, 2, \dots, m-1, (b - \delta(b), b],$$

přičemž vzhledem k (3.1) platí

$$\omega_{(x_i - \delta(x_i), x_i)}(f) < \varepsilon \quad \text{ a } \quad \omega_{(x_i, x_i + \delta(x_i))}(f) < \varepsilon \text{ pro všechna } i = 1, 2, \dots, m-1.$$

Označme $\alpha_0 := a$ a $\alpha_m := b$ a necht'

$$D = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha'_1, \dots, \alpha_{m-1}, \alpha'_{m-1}, \alpha_m\},$$

kde

$$\alpha'_i = x_i \quad \text{ a } \quad \alpha_i \in (x_i - \delta(x_i), x_{i-1} + \delta(x_{i-1})), \quad i = 1, 2, \dots, m-1.$$

Potom

$$\omega_{(a, \alpha_1)}(f) \leq \omega_{(a, a+\delta(a))}(f) < \varepsilon, \quad \omega_{(\alpha_m, b)}(f) \leq \omega_{(b-\delta(b), b)}(f) < \varepsilon$$

a

$$\omega_{(\alpha_i, \alpha'_i)}(f) \leq \omega_{(x_i - \delta(x_i), x_i)}(f) < \varepsilon \quad \text{ a } \quad \omega_{(\alpha'_i, \alpha_{i+1})}(f) \leq \omega_{(x_i, x_i + \delta(x_i))}(f) < \varepsilon$$

pro každé $i = 1, 2, \dots, m-1$, tj.

$$\omega_D(f) < \varepsilon.$$

c) Předpokládejme, že platí (iii). Necht' je dáno $\varepsilon > 0$ a necht'

$$D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \in \mathcal{D}[a, b]$$

je dělení $[a, b]$ takové, že $\omega_D(f) < \varepsilon$. Pro každé $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ zvolme $\xi_i \in (\alpha_{i-1}, \alpha_i)$ a definujme

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} f(\alpha_i) & \text{pro } x = \alpha_i, \\ f(\xi_i) & \text{pro } x \in (\alpha_{i-1}, \alpha_i). \end{cases}$$

Pro každé $x \in [a, b]$ máme $|f(x) - g_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ a tudíž také $\|f - g_\varepsilon\| < \varepsilon$. Jestliže tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme $f_n = g_{1/n}$, bude $f_n \in \mathbb{S}[a, b]$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$ pro $n \rightarrow \infty$. \square

3.7. Důsledky.

- (i) Každá funkce regulovaná na $[a, b]$ je na $[a, b]$ ohraničená. (Speciálně $G[a, b] \subset L^1[a, b]$.)
(ii) Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje nejvýše konečně mnoho $x \in [a, b]$ takových, že platí

$$|\Delta^+ f(x)| \geq \varepsilon \quad \text{nebo} \quad |\Delta^- f(x)| \geq \varepsilon.$$

D ů k a z . Obě tvrzení plynou z vlastnosti (iii) z Věty 3.6. \square

3.8. Věta. $\mathbb{G}[a, b]$ je Banachův prostor vzhledem k normě

$$\|f\|_{\mathbb{G}} = \|f\| = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

D ů k a z . Předpokládejme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{G}[a, b]$ je cauchyovská v $\mathbb{G}[a, b]$. Jako v částech a) a b) důkazu Věty 1.10 dokážeme, že existuje funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$. Podle Věty 3.4 ovšem platí $f \in \mathbb{G}[a, b]$ a tím je věta dokázána. \square

3.9. Poznámky.

- (i) $f \in \mathbb{S}[a, b] \iff f$ je konečná lineární kombinace charakteristických funkcí intervalů $[a, \tau]$, $[a, \tau)$, $\tau \in (a, b]$, a charakteristických funkcí jednobodových intervalů $[\tau]$, $\tau \in [a, b]$, tj.

$$\mathbb{S}[a, b] = \text{Lin}\left(\chi_{[a, \tau]}, \chi_{[a, \tau)}, \chi_{[\tau]}, \tau \in (a, b], \chi_{[a]}\right).$$

($\text{Lin}(M)$ značí lineární obal množiny M .)

- (ii) Množina $\mathbb{S}[a, b]$ je podle tvrzení (ii) Věty 3.6 hustá v $\mathbb{G}[a, b]$, tj. $\overline{\mathbb{S}[a, b]} = \mathbb{G}[a, b]$, kde $\overline{\mathbb{S}[a, b]}$ značí uzávěr $\mathbb{S}[a, b]$ v $\mathbb{G}[a, b]$.

3.10. Lemma. Necht' $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{G}$ a $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$. Potom platí též

$$f_n(x-) \rightrightarrows f(x-) \quad \text{a} \quad f_n(x+) \rightrightarrows f(x+) \quad \text{na } [a, b],$$

kde $f(a-) = f(a)$, $f(b+) = f(b)$ a $f_k(a-) = f_k(a)$ a $f_k(b+) = f_k(b)$ pro $k \in \mathbb{N}$.

D ů k a z . Pro $n \in \mathbb{N}$ polořme

$$\tilde{f}_n(x) = \begin{cases} f_n(x+) & \text{kdyř } x \in [a, b), \\ f_n(b) & \text{kdyř } x = b \end{cases}$$

a

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x+) & \text{kdyř } x \in [a, b), \\ f(b) & \text{kdyř } x = b. \end{cases}$$

Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Existuje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takové, ře je $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$ pro každé $n \geq n_\varepsilon$ a každé $t \in [a, b]$. Odtud ovšem limitním přechodem $t \rightarrow x+$ dostaneme, ře také pro každé $x \in [a, b)$ a každé $n \geq n_\varepsilon$ platí

$$|\tilde{f}_n(x) - \tilde{f}(x)| = \lim_{t \rightarrow x+} |f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon,$$

tj.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{f}_n - \tilde{f}\| = 0$$

neboli

$$f_n(x+) \rightrightarrows f(x+).$$

Podobně bychom ukázali, ře platí i $f_n(x-) \rightrightarrows f(x-)$ na $[a, b]$. □

3.11. Důsledek. Mnořiny

$$\mathbb{G}_L[a, b] = \{f \in \mathbb{G} : f(x-) = f(x) \text{ na } (a, b)\},$$

$$\mathbb{G}_R[a, b] = \{f \in \mathbb{G} : f(x+) = f(x) \text{ na } (a, b)\}$$

a

$$\mathbb{G}_{reg}[a, b] = \{f \in \mathbb{G} : f(x-) + f(x+) = 2f(x) \text{ na } (a, b)\}$$

jsou uzavřené v $\mathbb{G}[a, b]$ a tudíž jsou to také Banachovy prostory vřhledem k operacím a normě indukovaným z $\mathbb{G}[a, b]$. □

3.12. Lemma. $\overline{\mathbb{G}_L[a, b] \cap \mathbb{S}[a, b]} = \mathbb{G}_L[a, b]$.

D ů k a z . Nechť $f \in \mathbb{G}_L[a, b]$ a $\varepsilon > 0$. Podle Věty 3.6 (ii) existuje $\varphi \in \mathbb{S}[a, b]$ takové, ře

$$|f(x) - \varphi(x)| \leq \|f - \varphi\| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } x \in [a, b].$$

Dále, pro každé $x \in (a, b)$ existuje $\delta(x) > 0$ takové, ře $(x - \delta(x), x] \subset (a, b)$ a

$$|f(x) - f(t)| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } t \in (x - \delta(x), x].$$

Pro každé $x \in (a, b)$ a $t \in (x - \delta(x), x]$ tedy máme

$$|\varphi(x) - \varphi(t)| \leq |\varphi(x) - f(x)| + |f(x) - f(t)| + |f(t) - \varphi(t)| < 3\varepsilon,$$

tj.

$$|\varphi(x) - \varphi(x-)| < 3\varepsilon.$$

Položme

$$g(x) = \begin{cases} \varphi(x-) & \text{pro } x \in (a, b), \\ \varphi(x) & \text{pro } x = a \text{ nebo } x = b. \end{cases}$$

Potom pro každé $x \in (a, b)$ platí

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - \varphi(x)| + |\varphi(x) - \varphi(x-)| < 4\varepsilon,$$

tj. množina $\mathbb{G}_L \cap \mathbb{S}_L[a, b]$ je hustá v $\mathbb{G}_L[a, b]$. □

3.13. Poznámka. $\mathbb{G}_L[a, b] \cap \mathbb{S}[a, b] = \text{Lin}\left(1, \chi_{(\tau, b]}, \tau \in [a, b), \chi_{[b]}\right)$.

Další podrobnosti týkající se regulovaných funkcí lze nalézt zejména v monografii Ch. Hönigově *Volterra Stieltjes-Integral Equations* [2, sec.3]

Kapitola 4

Riemannův-Stieljesův integrál

Text této kapitoly se opírá zejména o Hildebrandtovu monografii [1, Chapter II].

4.1. Definice. Pro libovolné dvě funkce $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a rozšířené dělení $(D, \xi) \in \mathcal{D}[a, b]$ intervalu $[a, b]$, $D = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$, definujeme

$$S_{f\Delta g}(D, \xi) := \sum_{j=1}^m f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})].$$

(Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme psát zjednodušeně $S(D, \xi)$ místo $S_{f\Delta g}(D, \xi)$.)

Nechť $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Řekneme, že existuje *normový Riemannův-Stieltjesův integrál* ((n) RS-integrál)

$$(n) \int_a^b f dg = (n) \int_a^b f(x) dg(x)$$

a má hodnotu $I \in \mathbb{R}$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že platí

$$\left((D, \xi) \in \mathcal{D}[a, b] \quad \wedge \quad |D| < \delta \right) \implies |S(D, \xi) - I| < \varepsilon.$$

Řekneme, že existuje *σ Riemannův-Stieltjesův integrál* ((σ) RS-integrál)

$$(\sigma) \int_a^b f dg = (\sigma) \int_a^b f(x) dg(x)$$

a má hodnotu $I \in \mathbb{R}$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení $D_\varepsilon \in \mathcal{D}[a, b]$ takové, že platí

$$\left((D, \xi) \in \mathcal{D}[a, b] \quad \wedge \quad D_\varepsilon \subset D \right) \implies |S(D, \xi) - I| < \varepsilon.$$

Existuje-li integrál $\int_a^b f dg$ (v některém z výše uvedených smyslů), pak pro libovolné funkce $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definujeme:

$$\int_b^a f dg = - \int_a^b f dg.$$

Dále, pro každé $c \in [a, b]$ a pro všechny funkce $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definujeme:

$$\int_c^c f dg = 0.$$

4.2 . Cvičení. Jestliže funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a $g \in \mathbb{BV}[a, b]$ jsou takové, že existuje RS-integrál $\int_a^b f dg$ (v normovém či zjemňovacím smyslu), pak platí:

$$\left| \int_a^b f dg \right| \leq \|f\| \operatorname{var}_a^b g.$$

Pro každá dvě dělení $D', D'' \in \mathcal{D}[a, b]$ taková, že $D' \subset D''$ (D'' je zjemnění D') platí $|D''| \leq |D'|$. Snadno lze tedy dokázat následující tvrzení:

4.3 . Věta. Je-li (n) $\int_a^b f dg = I \in \mathbb{R}$, pak platí také (σ) $\int_a^b f dg = I$. □

4.4 . Poznámka. Necht' $f \in \mathbb{G}[a, b]$, $x_0 \in (a, b)$, $c, d \in \mathbb{R}$, $cd > 0$ a

$$g(x) = -c \chi_{[a, x_0)}(x) + d \chi_{[x_0, b]}(x) = \begin{cases} -c & \text{pro } x < x_0, \\ 0 & \text{pro } x = x_0, \\ d & \text{pro } x > x_0. \end{cases}$$

Pro libovolné rozšířené dělení

$$(D, \xi) = (\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}, (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)) \in \mathcal{D}[a, b]$$

intervalu $[a, b]$ máme

$$S(D, \xi) = \begin{cases} f(\xi') (c + d) & \text{je-li } x_0 \in (\alpha_j, \alpha_{j+1}), \xi_j = \xi' \neq x_0, \\ f(x_0) (c + d) & \text{je-li } x_0 \in (\alpha_j, \alpha_{j+1}), \xi_j = x_0, \\ f(\xi') c + f(\xi'') d & \text{je-li } x_0 = \alpha_j, \xi_{j-1} = \xi' \neq x_0, \xi_j = \xi'' \neq x_0, \\ f(x_0) c + f(\xi'') d & \text{je-li } x_0 = \alpha_j, \xi_{j-1} = x_0, \xi_j = \xi'' \neq x_0, \\ f(\xi') c + f(x_0) d & \text{je-li } x_0 = \alpha_j, \xi_{j-1} = \xi' \neq x_0, \xi_j = x_0. \end{cases}$$

Odtud vidíme, že pokud je $-c = g(x_0-) \neq d = g(x_0+)$, pak k tomu, aby částečné součty $S(D, \xi)$ konvergovaly pro $|D| \rightarrow 0$ k nějaké konečné hodnotě I , je nutné, aby funkce f byla v bodě x_0 spojitá ($\lim_{\xi \rightarrow x_0} f(\xi) = f(x_0)$). Lze tedy očekávat, že pro existenci normového integrálu (n) $\int_a^b f dg$ bude nutné, aby funkce f a g neměly žádný společný bod nespojitosti.

Nyní, necht' $D_0 \in \mathcal{D}[a, b]$ je libovolné dělení obsahující x_0 . Pro každé jeho zjemnění D potom máme

$$S(D, \xi) \in \{f(\xi') c + f(\xi'') d, f(x_0) c + f(\xi'') d, f(\xi') c + f(x_0) d\},$$

kde $\xi' < x_0$ a $\xi'' > x_0$. Bude-li tedy funkce f regulovaná na $[a, b]$, bude množina \mathcal{Q} hromadných bodů množiny $\{S(D, \xi) : (D, \xi) \in \mathcal{D}[a, b] \wedge D_0 \subset D\}$ nejvýše tříbodová:

$$\mathcal{Q} = \{f(x_0-) c + f(x_0+) d, f(x_0) c + f(x_0+) d, f(x_0-) c + f(x_0) d\}$$

To naznačuje, že pro existenci integrálu $(\sigma) \int_a^b f dg$ bude nutné (a mohlo by stačit (?)), aby pro funkce f a g a libovolné $x \in [a, b]$ platilo:

$$(\Delta^+ f(x) \Delta^+ g(x) = 0) \quad \wedge \quad (\Delta^- f(x) \Delta^- g(x) = 0).$$

Standardním způsobem lze dokázat následující tvrzení.

4.5. Věta (BOLZANO - CAUCHYOVÁ PODMÍNKA). *Pro dané funkce $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ existuje normový integrál $(n) \int_a^b f dg$ právě tehdy, když je splněna podmínka:*

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \left((D', \xi'), (D'', \xi'') \in \mathcal{D}[a, b] \wedge |D'| < \delta \wedge |D''| < \delta \right) \\ \implies |S(D', \xi') - S(D'', \xi'')| < \varepsilon. \end{cases} \quad (4.1)$$

Podobně, $(\sigma) \int_a^b f dg \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když platí

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists D_\varepsilon \in \mathcal{D}[a, b] : \left((D', \xi'), (D'', \xi'') \in \mathcal{D}[a, b] \wedge D' \supset D_\varepsilon \wedge D'' \supset D_\varepsilon \right) \\ \implies |S(D', \xi') - S(D'', \xi'')| < \varepsilon. \end{cases} \quad (4.2)$$

D ů k a z . Nutnost splnění uvedených podmínek pro existenci příslušných integrálů je zřejmá z Definice 4.1.

Předpokládejme, že je splněna podmínka (4.2). Potom můžeme vybrat posloupnost rozšířených dělení $\{(D_k, \xi_k)\}_{k=1}^\infty$ intervalu $[a, b]$ takovým způsobem, že bude platit

$$|S(D, \xi) - S(D_k, \xi_k)| < \frac{1}{k} \quad \text{pro každé } D \supset D_k \quad \text{a} \quad (D, \xi) \in \mathcal{D}[a, b] \quad (4.3)$$

a přitom současně

$$D_k \subset D_\ell \quad \text{a} \quad |S(D_k, \xi_k) - S(D_\ell, \xi_\ell)| < \frac{1}{k} \quad \text{pro každé } k \in \mathbb{N} \quad \text{a} \quad \ell \geq k. \quad (4.4)$$

Posloupnost $\{S(D_k, \xi_k)\}_{k=1}^\infty$ je cauchyovská posloupnost reálných čísel a existuje tedy reálné číslo $I \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S(D_k, \xi_k) = I.$$

Nyní, nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Zvolíme-li k_ε tak, aby bylo současně

$$\frac{1}{k_\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad |S(D_{k_\varepsilon}, \xi_{k_\varepsilon}) - I| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (4.5)$$

bude, vzhledem k (4.3) a (4.5), pro každé $D \supset D_{k_\varepsilon}$ a každé $(D, \xi) \in \mathcal{D}[a, b]$ platit

$$|S(D, \xi) - I| \leq |S(D, \xi) - S(D_{k_\varepsilon}, \xi_{k_\varepsilon})| + |S(D_{k_\varepsilon}, \xi_{k_\varepsilon}) - I| < \varepsilon,$$

neboli

$$I = (\sigma) \int_a^b f \, dg.$$

Implikace: (4.2) \implies (n) $\int_a^b f \, dg \in \mathbb{R}$ by se dokazovala podobně a ponechává se čtenáři jako cvičení. \square

Pokud nebude v následujících tvrzeních explicitně zmíněno, zda se jedná o normový integrál či o (σ) -integrál, bude to znamenat, že tvrzení platí pro oba typy integrálu.

4.6. Věta. *Jestliže existuje integrál $\int_a^b f \, dg$ a $c \in (a, b)$, pak existují také integrály*

$$\int_a^c f \, dg \quad \text{a} \quad \int_c^b f \, dg$$

a platí

$$\int_a^b f \, dg = \int_a^c f \, dg + \int_c^b f \, dg.$$

D ů k a z . Existenci integrálů

$$\int_a^c f \, dg \quad \text{a} \quad \int_c^b f \, dg$$

dokážeme snadno pomocí předchozí věty.

Dále, necht' je dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme rozšířená dělení $(D', \xi') \in \mathcal{P}[a, c]$ a $(D'', \xi'') \in \mathcal{P}[c, b]$ tak, aby platilo

$$|S(D', \xi') - \int_a^c f \, dg| + |S(D'', \xi'') - \int_c^b f \, dg| + |S(D, \xi) - \int_a^b f \, dg| < \varepsilon, \quad (4.6)$$

kde

$$(D, \xi) = (D' \cup D'', (\xi', \xi'')) \in \mathcal{P}[a, b].$$

Potom bude $S(D, \xi) = S(D', \xi') + S(D'', \xi'')$ a tudíž

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f \, dg - \int_a^c f \, dg - \int_c^b f \, dg \right| \\ & \leq \left| \int_a^b f \, dg - S(D, \xi) \right| + \left| S(D, \xi) - S(D', \xi') - S(D'', \xi'') \right| \\ & \quad + \left| S(D', \xi') - \int_a^c f \, dg \right| + \left| S(D, \xi) - \int_a^b f \, dg \right| < \varepsilon. \end{aligned} \quad \square$$

4.7. Cvičení. *Pro oba integrály (normový i zjemňovací) podrobně dokažte, že z existence integrálu $\int_a^b f \, dg$ opravdu plyne existence rozšířených dělení $(D', \xi') \in \mathcal{P}[a, c]$ a $(D'', \xi'') \in \mathcal{P}[c, b]$ takových, že platí (4.6).*

Další tvrzení plyne přímo z Definice 4.1.

4.8. Cvičení. Necht' $f, f_1, f_2, g, g_1, g_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, a necht' existují integrály:

$$\int_a^b f_1 dg, \int_a^b f_2 dg, \int_a^b f dg_1 \quad \text{a} \quad \int_a^b f_2 dg_2.$$

Potom pro libovolná $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ platí

$$\int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2) dg = c_1 \int_a^b f_1 dg + c_2 \int_a^b f_2 dg,$$

a

$$\int_a^b f d[c_1 g_1 + c_2 g_2] = c_1 \int_a^b f dg_1 + c_2 \int_a^b f dg_2.$$

4.9. Věta. Necht' $g \in \mathbb{BV}[a, b]$ a ohraničené funkce f a $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou takové, že

$$\int_a^b f_n dg \in \mathbb{R} \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N} \tag{4.7}$$

a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0. \tag{4.8}$$

Potom existuje také integrál $\int_a^b f dg$ a platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n dg = \int_a^b f dg. \tag{4.9}$$

Důkaz z provedeme pro σ -integrál:

Necht' je dáno $\varepsilon > 0$. Vzhledem k předpokladu (4.8) můžeme zvolit $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tak, aby platilo

$$n \geq n_\varepsilon \implies \left(\|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{\text{var}_a^b g} \right) \wedge \left(\|f_n\| < \|f\| + 1 \right). \tag{4.10}$$

Dále, za našich předpokladů (viz Cvičení 4.2) je pro $n \geq n_\varepsilon$

$$\left| \int_a^b f_n dg \right| \leq \|f_n\| \text{var}_a^b g \leq (\|f\| + 1) \text{var}_a^b g.$$

Můžeme tedy vybrat podposloupnost $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ v \mathbb{N} a $I \in \mathbb{R}$ tak, že bude platit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f_{n_k} dg = I.$$

Speciálně, existuje $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takové, že

$$n_{k_\varepsilon} \geq n_\varepsilon \quad \text{a} \quad \left(k \geq k_\varepsilon \implies \left| \int_a^b f_{n_k} dg - I \right| < \varepsilon \right). \quad (4.11)$$

Dále, necht' $D_\varepsilon = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \in \mathcal{D}$ je takové dělení intervalu $[a, b]$, že

$$\left((D, \xi) \in \mathcal{P} \right) \wedge \left(D_\varepsilon \subset D \right) \implies \left| S_{k_\varepsilon}(D, \xi) - \int_a^b f_{n_{k_\varepsilon}} dg \right| < \varepsilon, \quad (4.12)$$

kde

$$S_{k_\varepsilon}(D, \xi) = \sum_{j=1}^m f_{n_{k_\varepsilon}}(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})].$$

Protože je $n_{k_\varepsilon} \geq n_\varepsilon$ (viz (4.11)), znamená (4.10), že pro každé $(D, \xi) \in \mathcal{P}[a, b]$ splňující $D_\varepsilon \subset D$ je

$$\left| S(D, \xi) - S_{k_\varepsilon}(D, \xi) \right| \leq \|f - f_{n_{k_\varepsilon}}\| \operatorname{var}_a^b g < \varepsilon.$$

Vzhledem k (4.11)-(4.12) tedy dostáváme

$$\left| S(D, \xi) - I \right| \leq \left| S(D, \xi) - S_{k_\varepsilon}(D, \xi) \right| + \left| S_{k_\varepsilon}(D, \xi) - \int_a^b f_{n_{k_\varepsilon}} dg \right| + \left| \int_a^b f_{n_{k_\varepsilon}} dg - I \right| < 3\varepsilon.$$

Odtud okamžitě plyne, že platí

$$\int_a^b f dg = I.$$

Konečně, protože podle Cvičení 4.2 máme

$$\left| \int_a^b f_n dg - \int_a^b f dg \right| \leq \|f_n - f\| \operatorname{var}_a^b g,$$

tvrzení (4.9) plyne nyní snadno z předpokladu (4.8). \square

4.10. Poznámka. Všimněme si, že podle definice existuje $(\sigma) \int_a^b f dg \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení $D_\varepsilon \in \mathcal{D}[a, b]$ takové, že:

$$\left((D, \xi) \in \mathcal{P}[a, b] \wedge D \supset D_\varepsilon \right) \implies \left| \sum_{j=1}^{\nu(D)} \left(f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f dg \right) \right| < \varepsilon.$$

4.11. Lemma (SAKS-HENSTOCK). Necht' $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a necht' existuje $(\sigma) \int_a^b f dg$. Bud' dáno $\varepsilon > 0$ a necht' $D_\varepsilon \in \mathcal{D}[a, b]$ je takové, že

$$\left| S(D, \xi) - (\sigma) \int_a^b f dg \right| < \varepsilon$$

platí pro každé rozšířené dělení $(D, \xi) \in \mathcal{P}[a, b]$ takové, že $D \supset D_\varepsilon$. Potom pro každé takové dělení

$$(D, \xi) = (\{\alpha_0, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}, (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m))$$

platí také

$$\sum_{j=1}^m \left| f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma) \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f dg \right| < 6\varepsilon. \quad (4.13)$$

D ů k a z . a) Pro každou dvojici $(D', \xi'), (D'', \xi'') \in \mathcal{P}[a, b]$ takovou, že je $D' \supset D_\varepsilon$ a $D'' \supset D_\varepsilon$ máme

$$|S(D', \xi') - S(D'', \xi'')| < 2\varepsilon. \quad (4.14)$$

Nechť $(D, \xi) \in \mathcal{P}[a, b]$, $D = \{\alpha_0, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ a $D \supset D_\varepsilon$. Pro každé $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ můžeme zvolit $D_\varepsilon^{(j)} \in \mathcal{P}[\alpha_{j-1}, \alpha_j]$ a $\xi^{(j)} \in \mathbb{R}^m$ tak, aby platilo

$$(D_\varepsilon^{(j)}, \xi^{(j)}) \in \mathcal{P}[\alpha_{j-1}, \alpha_j]$$

a

$$|S(D_\varepsilon^{(j)}, \xi^{(j)}) - (\sigma) \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f dg| < \frac{\varepsilon}{m}. \quad (4.15)$$

Nechť

$$U = \{j_1, j_2, \dots, j_k\} \subset \{1, 2, \dots, m\}, \quad 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq m,$$

je daná podmnožina indexů. Potom pro každý vektor $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$ takový, že $(D, \xi) \in \mathcal{P}[a, b]$, máme

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j \in U} \left(f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma) \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f dg \right) \right| \\ & \leq \left| \sum_{j \in U} \left(f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - S(D_\varepsilon^{(j)}, \xi^{(j)}) \right) \right| \\ & \quad + \left| \sum_{j \in U} \left(S(D_\varepsilon^{(j)}, \xi^{(j)}) - (\sigma) \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f dg \right) \right| \\ & = \left| S(D, \xi) - \sum_{j \notin U} f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - \sum_{j \in U} S(D_\varepsilon^{(j)}, \xi^{(j)}) \right| \\ & \quad + \left| \sum_{j \in U} \left(S(D_\varepsilon^{(j)}, \xi^{(j)}) - (\sigma) \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f dg \right) \right| \\ & = |S(D, \xi) - S(D', \xi')| + \left| \sum_{j \in U} \left(S(D_\varepsilon^{(j)}, \xi^{(j)}) - (\sigma) \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f dg \right) \right|, \end{aligned}$$

kde $(D', \xi') \in \mathcal{D}[a, b]$, $D' = D \cup \bigcup_{j \in U} D_\varepsilon^{(j)}$. Odtud, vzhledem k (4.14) a (4.15), plyne

$$\left| \sum_{j \in U} \left(f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma) \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f \, dg \right) \right| \leq 2\varepsilon + k \frac{\varepsilon}{m} < 3\varepsilon. \quad (4.16)$$

b) Označme

$$U^+ = \{j \in \{1, 2, \dots, m\} : f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma) \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f \, dg \geq 0\}.$$

Po dosazení $U = U^+$ do (4.16) získáme nerovnost

$$\begin{cases} \sum_{j \in U^+} \left| f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma) \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f \, dg \right| \\ = \sum_{j \in U^+} \left(f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma) \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f \, dg \right) < 3\varepsilon. \end{cases} \quad (4.17)$$

Podobně, pro $U = U^-$,

$$U^- = \{j \in \{1, 2, \dots, m\} : f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma) \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f \, dg < 0\},$$

dostaneme

$$\begin{cases} \sum_{j \in U^-} \left| f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma) \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f \, dg \right| \\ = - \sum_{j \in U^-} \left(f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma) \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f \, dg \right) < 3\varepsilon. \end{cases} \quad (4.18)$$

Odtud a z (4.17) plyne

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \left| f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma) \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f \, dg \right| \\ &= \sum_{j \in U^+} \left(f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma) \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f \, dg \right) \\ & \quad - \sum_{j \in U^-} \left(f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma) \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f \, dg \right) \\ & \leq \left| \sum_{j \in U^+} \left(f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma) \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f \, dg \right) \right| \\ & \quad + \left| \sum_{j \in U^-} \left(f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma) \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f \, dg \right) \right| < 6\varepsilon, \end{aligned}$$

tj. platí (4.13). □

4.12. Cvičení.

(i) Dokažte, že za předpokladů Lemmatu 4.11 pro libovolný systém

$$a \leq \alpha_1 \leq \xi_1 \leq \beta_1 \leq \alpha_2 \leq \xi_2 \leq \beta_2 \leq \cdots \leq \alpha_k \leq \xi_k \leq \beta_k \leq b$$

(může být $\beta_i < \alpha_{i+1}$)

platí

$$\left| \sum_{j=1}^k f(\xi_j) [g(\beta_j) - g(\alpha_j)] - (\sigma) \int_{\alpha_j}^{\beta_j} f dg \right| < 3\varepsilon.$$

(ii) Formulujte a dokažte Lemma 4.11 pro normový integrál.

Důležitým důsledkem Saks-Henstockova lemmatu je následující tvrzení:

4.13. Věta (SUBSTITUCE). *Nechť $f, g, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, přičemž f je ohraničená na intervalu $[a, b]$ a $\int_a^b g dh \in \mathbb{R}$. Potom existuje jeden z integrálů*

$$\int_a^b f d\left[\int_a^x g dh\right] \quad \text{a} \quad \int_a^b f g dh \quad (4.19)$$

právě tehdy když existuje i ten druhý. V takovém případě pak platí

$$\int_a^b f d\left[\int_a^x g dh\right] = \int_a^b f g dh. \quad (4.20)$$

Důkaz z provedeme opět pouze pro σ integrál:

Nejprve si povšimněme, že z existence integrálu $\int_a^b g dh \in \mathbb{R}$ plyne, že pro libovolné $x \in [a, b]$ je definovaná funkce

$$w(x) = \int_a^x g dh$$

(viz Věta 4.6). Dále, pro každé rozšířené dělení

$$(D, \xi) \in \mathcal{P}[a, b], \quad D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$$

máme:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^m f(\xi_j) g(\xi_j) [h(\alpha_j) - h(\alpha_{j-1})] - \sum_{j=1}^m f(\xi_j) [w(\alpha_j) - w(\alpha_{j-1})] \right| \\ & \leq \sum_{j=1}^m |f(\xi_j)| \left| g(\xi_j) [h(\alpha_j) - h(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} g dh \right| \\ & \leq \|f\| \left(\sum_{j=1}^m \left| g(\xi_j) [h(\alpha_j) - h(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} g dh \right| \right) \end{aligned}$$

Bud' dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Zvolme $D_\varepsilon \in \mathcal{D}[a, b]$ tak, aby nerovnost

$$\left| S(D, \xi) - (\sigma) \int_a^b f dg \right| < \varepsilon$$

platila pro každé rozšířené dělení $(D, \xi) \in \mathcal{D}[a, b]$ takové, že $D \supset D_\varepsilon$. Podle Saks-Henstockova lemmatu (Lemma 4.11) pak platí také

$$\sum_{j=1}^m \left| g(\xi_j) [h(\alpha_j) - h(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} g dh \right| < 6\varepsilon.$$

pro každé rozšířené dělení $(D, \xi) \in \mathcal{D}[a, b]$ takové, že $D \supset D_\varepsilon$. To znamená, že pro integrální součty příslušné k integrálům (4.19) máme

$$\left| \sum_{j=1}^m f(\xi_j) g(\xi_j) [h(\alpha_j) - h(\alpha_{j-1})] - \sum_{j=1}^m f(\xi_j) [w(\alpha_{j-1}) - w(\alpha_j)] \right| < \|f\| 6\varepsilon.$$

Odtud už důkaz našeho tvrzení snadno plyne. \square

4.14. Věta (INTEGRACE PER-PARTES). $\int_a^b f dg$ existuje právě tehdy, když existuje integrál $\int_a^b g df$. V takovém případě pak platí

$$\int_a^b f dg + \int_a^b g df = f(b)g(b) - f(a)g(a). \quad (4.21)$$

D ů k a z . Pro libovolné rozšířené dělení

$$(D, \xi) = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}, (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \in \mathcal{D}$$

platí

$$\begin{aligned} S_{f\Delta g}(D, \xi) &= f(\xi_1) [g(\alpha_1) - g(a)] + f(\xi_2) [g(\alpha_2) - g(\alpha_1)] + \dots + f(\xi_m) [g(b) - g(\alpha_{m-1})] \\ &= -f(a)g(a) - [f(\xi_1) - f(a)]g(a) - [f(\xi_2) - f(\alpha_1)]g(\alpha_1) \\ &\quad - [f(\alpha_1) - f(\xi_1)]g(\alpha_1) - \dots - [f(\xi_m) - f(\alpha_{m-1})]g(\alpha_{m-1}) \\ &\quad - [f(\alpha_{m-1}) - f(\xi_{m-1})]g(\alpha_{m-1}) - [f(b) - f(\xi_m)]g(b) + f(b)g(b) \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - S_{g\Delta f}(D', \xi'), \end{aligned}$$

kde

$$\xi' = (a, \alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}, \alpha_{m-1}, b) \quad \text{a} \quad D' = \{a, \xi_1, \alpha_1, \xi_2, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}, \xi_m, b\}$$

je zjemněním D . (Stane-li se, že $\xi_j = \alpha_{j-1}$ resp. $\xi_j = \alpha_j$ pro nějaké j , musíme ovšem tyto body ξ_j z D' i z ξ' vynechat.) Nechť je dáno $\varepsilon > 0$ a nechť existuje integrál $\int_a^b g \, df$. Zvolme dělení D_ε intervalu $[a, b]$ tak, aby pro každé jeho zjemnění D' a každé $(D', \xi') \in \mathcal{P}[a, b]$ platilo

$$\left| S_{g\Delta f}(D', \xi') - \int_a^b g \, df \right| < \varepsilon.$$

Vzhledem k výše uvedenému máme tedy pro každé $D \supset D_\varepsilon$ a každé příslušné rozšířené dělení (D, ξ)

$$S_{f\Delta g}(D, \xi) - f(b)g(b) - f(a)g(a) + \int_a^b g \, df = \int_a^b g \, df - S_{g\Delta f}(D', \xi'),$$

kde $D' \supset D \supset D_\varepsilon$ a tudíž

$$\left| S_{f\Delta g}(D, \xi) - f(b)g(b) - f(a)g(a) + \int_a^b g \, df \right| = \left| \int_a^b g \, df - S_{g\Delta f}(D', \xi') \right| < \varepsilon.$$

Odtud už snadno plyne existence integrálu $\int_a^b f \, dg$ a platnost vztahu (4.21).

Druhá implikace by se dokazovala symetricky. □

4.15. Lemma. Je-li

$$a_n \geq 0 \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N} \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty,$$

pak existuje posloupnost $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ taková, že platí

$$c_n > 0 \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0 \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n = \infty. \quad (4.22)$$

D ů k a z . Označíme-li $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ pro $n \in \mathbb{N}$, bude $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ neklesající posloupnost a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty. \quad (4.23)$$

Speciálně, pro dostatečně velká n ($n \geq n_0$) bude $s_n > 0$. Můžeme tudíž definovat

$$c_n = \begin{cases} 1 & \text{pro } n < n_0, \\ \frac{1}{s_n} & \text{pro } n \geq n_0. \end{cases}$$

Zřejmě je $c_n > 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$. Na druhou stranu, pro libovolná $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n \geq n_0$ máme

$$\sum_{k=n}^m c_k a_k = \sum_{k=n}^m \frac{a_k}{s_k} \geq \frac{\sum_{k=n}^m a_k}{s_m} = 1 - \frac{s_{n-1}}{s_m}.$$

Vzhledem k (4.23), pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $m_n > n$ takové, že je $\frac{s_{n-1}}{s_{m_n}} < \frac{1}{2}$, tj.

$$\sum_{k=n}^{m_n} c_k a_k > \frac{1}{2}.$$

To ovšem znamená, že musí platit (4.22). \square

4.16. Lemma. *Funkce $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ má konečnou variaci na $[a, b]$ právě tehdy, když platí*

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in (a, b) \exists \delta_1 \in (0, x - a) : \text{var}_{x-\delta_1}^x g < \infty \\ a \\ \forall x \in [a, b) \exists \delta_2 \in (0, b - x) : \text{var}_x^{x+\delta_2} g < \infty. \end{array} \right. \quad (4.24)$$

Důkaz plyne z Borelovy věty o konečném pokrytí a z Věty 1.3. \square

4.17. Věta. *Integrál $\int_a^b f dg$ existuje pro každou funkci f spojitou na $[a, b]$ pouze tehdy, když g má konečnou variaci na $[a, b]$.*

Důkaz. Předpokládejme, že je $\text{var}_a^b g = \infty$. Podle Lemmatu 4.16 existuje $x_0 \in [a, b]$ pro které není splněna jedna z podmínek (4.24). Nechť tedy např. $x_0 \in (a, b]$ a nechť pro každé $\delta \in (0, x_0 - a)$ platí

$$\text{var}_{x_0-\delta}^{x_0} f = \infty.$$

Potom také existuje rostoucí posloupnost $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$ bodů v $(0, x_0)$ taková, že

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = x_0 \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |g(\alpha_k) - g(\alpha_{k-1})| = \infty.$$

Dále, podle Lemmatu 4.15 existuje posloupnost $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ kladných čísel taková, že platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = \infty \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k |g(\alpha_k) - g(\alpha_{k-1})| = \infty.$$

Položme

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq \alpha_0 \text{ resp. } x \geq x_0 \text{ resp. } x \in \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}, \\ c_k \text{ sign}(g(\alpha_k) - g(\alpha_{k-1})) & \text{pro } x = \xi_k := \frac{\alpha_k + \alpha_{k-1}}{2} \end{cases}$$

a ve zbývajících bodech intervalu $[a, b]$ dodefinujme funkci f lineárně. Takto definovaná funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bude zřejmě spojitá na $[a, b]$ a přitom pro ní bude platit

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(\xi_k) [g(\alpha_k) - g(\alpha_{k-1})] = \infty.$$

Speciálně, pro každé $M > 0$ existuje $N_M \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{k=1}^{N_M} f(\xi_k) [g(\alpha_k) - g(\alpha_{k-1})] > M.$$

Pro dané $M > 0$, označme $D_M = \{a, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{N_M}, x_0, b\}$ a $\xi_M = (a, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{N_M}, x_0, b)$. Potom je $(D_M, \xi_M) \in \mathcal{P}$ a $S(D_M, \xi_M) > M$. To ale znamená, že integrál $\int_a^b f dg$ nemůže existovat, a to ani zjemňovací ani normový. \square

4.18. Věta. *Integrál $\int_a^b f dg$ existuje pro každou konečnou skokovou funkci f pouze tehdy, když f je spojitá na $[a, b]$.*

D ů k a z . Nechť $x_0 \in (a, b)$, $c, d \in \mathbb{R}$, $cd > 0$ a nechť funkce $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je definována podobně jako v Poznámce 4.4:

$$g(x) = -c\chi_{[a, x_0)}(x) + d\chi_{(x_0, b]}(x) \quad \text{pro } x \in [a, b].$$

Podle Poznámky 4.4 může integrál $(\sigma) \int_a^b f dg$ existovat pouze tehdy, bude-li platit

$$c\Delta^- f(x_0) = 0 \quad \text{a} \quad d\Delta^+ f(x_0) = 0,$$

tj. $\Delta^- f(x_0) = \Delta^+ f(x_0) = 0$, tj. má-li existovat integrál $(\sigma) \int_a^b f dg$, musí být f spojitá v každém bodě $x_0 \in (a, b)$. Podobně bychom dokázali také, že v takovém případě musí být f spojitá v bodě a zprava a v bodě b zleva.

Modifikace důkazu pro normový integrál je zřejmá. \square

4.19. Věta. *Jestliže $c \in [a, b]$ a jestliže existují integrály*

$$I_1 = (\sigma) \int_a^c f dg \quad \text{a} \quad I_2 = (\sigma) \int_c^b f dg,$$

pak existuje také integrál $I = (\sigma) \int_a^b f dg$ a platí $I = I_1 + I_2$.

D ů k a z . Bud' dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme dělení $D'_\varepsilon \in \mathcal{D}[a, c]$ a $D''_\varepsilon \in \mathcal{D}[c, b]$ tak, aby platilo

$$|S(D', \xi') - I_1| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } (D', \xi') \in \mathcal{D}[a, c] \quad \text{taková, že } D' \supset D'_\varepsilon$$

a

$$|S(D'', \xi'') - I_2| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } (D'', \xi'') \in \mathcal{D}[c, b] \quad \text{taková, že } D'' \supset D''_\varepsilon.$$

Nyní, nechť $D_\varepsilon = D'_\varepsilon \cup D''_\varepsilon$. Protože je $c \in D_\varepsilon$, každé rozšířené dělení $(D, \xi) \in \mathcal{D}[a, b]$ splňující $D \supset D_\varepsilon$ můžeme rozdělit:

$$D = D' \cup D'' \quad \text{a} \quad \xi = (\xi', \xi'')$$

tak, že bude platit $(D', \xi') \in \mathcal{D}[a, c]$, $(D'', \xi'') \in \mathcal{D}[c, b]$, $D' \supset D'_\varepsilon$ a $D'' \supset D''_\varepsilon$. Navíc, je

$$S(D, \xi) = S(D', \xi') + S(D'', \xi'').$$

Vzhledem k definici D'_ε a D''_ε tedy pro každé $(D, \xi) \in \mathcal{P}[a, b]$ splňující $D \supset D_\varepsilon$ máme

$$|S(D, \xi) - (I_1 + I_2)| \leq |S(D', \xi') - I_1| + |S(D'', \xi'') - I_2| < 2\varepsilon,$$

tj. dokázali jsme tvrzení věty. □

Kapitola věnovaná RS-integrálům bude zakončena uvedením několika dalších důležitých tvrzení. Pro důkazy zatím odkazuju čtenáře na kapitolu II již zmíněné Hildebrandtovy monografie [1].

4.20. Definice. Řekneme, že funkce $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ splňují podmínku (PA) (*podmínku pseudoadditivity*) v bodě $x \in (a, b)$, jestliže

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pro každé } \varepsilon > 0 \text{ existuje } \delta_0 > 0 \text{ takové, že pro všechna} \\ \delta' \in (0, \delta_0), \delta'' \in (0, \delta_0), \xi \in [x - \delta', x + \delta''], \xi' \in [x - \delta', x] \text{ a } \xi'' \in [x, x + \delta''] \\ \text{platí:} \\ |f(\xi)[g(x + \delta'') - g(x - \delta')] \\ - f(\xi')[g(x) - g(x - \delta')] - f(\xi'')[g(x + \delta'') - g(x)]| < \varepsilon. \end{array} \right.$$

Následující tvrzení plyne z [1, Theorem II.3.10]), kde je ovšem třeba intervalovou funkci $f(I)$ nahradit mnohoznačnou intervalovou funkcí

$$F: [c, d] \rightarrow f(\xi)[g(d) - g(c)], \quad \xi \in [c, d].$$

4.21. Věta. Normový integrál (n) $\int_a^b f dg$ existuje právě tehdy, když existuje $(\sigma) \int_a^b f dg$ a je splněna podmínka (PA) v každém bodě $x \in (a, b)$.

4.22. Poznámka. Ve Větě 4.21 stačí místo splnění podmínky (PA) v každém bodě $x \in (a, b)$ požadovat splnění poněkud slabšího předpokladu:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pro každé } \varepsilon > 0 \text{ existuje dělení } D_\varepsilon \text{ intervalu } [a, b] \text{ takové, že:} \\ |S(D, \xi) - I| < \varepsilon \quad \text{pro každé } (D, \xi) \in \mathcal{P}[a, b] \text{ takové, že } D \supset D_\varepsilon \\ \text{a} \\ \text{(PA) platí pro každé } \alpha \in D_\varepsilon \cap (a, b). \end{array} \right.$$

4.23. Věta. Nechť $x \in (a, b)$. Funkce $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ splňují podmínku (PA) v bodě $x \in (a, b)$ právě tehdy, když alespoň jedna z nich je v bodě x spojitá.

4.24. Poznámka. Je-li f ohraničená v okolí bodu $x \in (a, b)$ a g spojitá v bodě x , pak funkce f, g splňují podmínku (PA) v bodě x .

4.25. Důsledek. ([1, Corollary II,10,6]) (n) $\int_a^b f dg$ existuje pouze tehdy, když funkce f a g nemají společný bod nespojitosti v (a, b) .

4.26. Důsledek. Necht' $c \in (a, b)$ a necht' funkce $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ splňují (PA) v bodě c . Potom, jestliže existují integrály:

$$(n) \int_a^c f \, dg = I_1 \quad a \quad (n) \int_c^b f \, dg = I_2,$$

pak existuje také integrál $\int_a^b f \, dg$ a platí

$$(n) \int_a^b f \, dg = I_1 + I_2.$$

4.27. Věta. Necht' $f \in \mathbb{C}[a, b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a, b]$. Potom existují oba integrály

$$\int_a^b f \, dg \quad i \quad \int_a^b g \, df.$$

4.28. Definice. Necht' $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a $I \subset [a, b]$. Potom definujeme

$$\omega(f; I) = \sup_{x', x'' \in I} |f(x') - f(x'')|$$

a

$$\omega(Sf\Delta g; I) = \sup_{(D', \xi'), (D'', \xi'') \in \mathcal{P}(I)} |S(D', \xi') - S(D'', \xi'')|.$$

($\omega(f; I)$ nazýváme *modul spojitosti* funkce f na I .)

4.29. Věta. $(\sigma) \int_a^b f \, dg$ existuje právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon > 0 \exists D_\varepsilon \in \mathcal{D}[a, b] \forall D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \supset D_\varepsilon: \sum_{j=1}^m \omega(Sf\Delta g; [\alpha_{j-1}, \alpha_j]) < \varepsilon.$$

4.30. Věta. Jestliže existuje $(\sigma) \int_a^b f \, dg$, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení $D_\varepsilon \in \mathcal{D}[a, b]$ takové, že platí:

$$(D, \xi) \in \mathcal{P}[a, b] \quad \wedge \quad D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \supset D_\varepsilon \\ \implies \sum_{j=1}^m \omega(f; [\alpha_{j-1}, \alpha_j]) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] < \varepsilon.$$

4.31. Věta. Jestliže existuje $(\sigma) \int_a^b f \, dg$, pak platí obě následující tvrzení:

- (i) Pro každé $x \in [a, b)$ je alespoň jedna z funkcí f, g spojitá v x zprava,
- (ii) Pro každé $x \in (a, b]$ je alespoň jedna z funkcí f, g spojitá v x zleva.

Kapitola 5

Kurzweilův-Stieltjesův integrál

5.1. Definice. Funkce $\delta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ se nazývají *kalibry* na intervalu $[a, b]$, množinu kalibrů na intervalu $[a, b]$ značíme $\mathcal{G} = \mathcal{G}[a, b]$.

Pro daný kalibr $\delta \in \mathcal{G}$, řekneme, že rozšířené dělení $(D, \xi) \in \mathcal{P}[a, b]$ je δ -jemné (píšeme $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta) = \mathcal{A}(\delta; [a, b])$), jestliže platí

$$[\alpha_{j-1}, \alpha_j] \subset (\xi_j - \delta(\xi_j), \xi_j + \delta(\xi_j)) \quad \text{pro všechna } j = 1, 2, \dots, \nu(D).$$

Pro dané funkce $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a rozšířené dělení $(D, \xi) \in \mathcal{P}[a, b]$ definujeme (jako v kapitole 4)

$$S(D, \xi) (= S_{f\Delta g}(D, \xi)) := \sum_{j=1}^{\nu(D)} f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})].$$

5.2. Definice (KURZWEIL). Nechtě $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a $I \in \mathbb{R}$. Řekneme, že existuje *Kurzweilův-Stieltjesův integrál* (KS-integrál)

$$(KS) \int_a^b f dg = (KS) \int_a^b f(x) dg(x)$$

a má hodnotu $I \in \mathbb{R}$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje kalibr $\delta_\varepsilon \in \mathcal{G}$ takový, že

$$\left| I - S(D, \xi) \right| < \varepsilon \tag{5.1}$$

platí pro všechna δ_ε -jemná rozšířená dělení (D, ξ) (tj. pro všechna $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta_\varepsilon)$).

Jestliže existuje integrál $(KS) \int_a^b f dg$, definujeme $(KS) \int_b^a f dg = -(KS) \int_a^b f dg$. Dále, $(KS) \int_a^a f dg = 0$.

Tato definice má smysl díky následujícímu lemmatu.

5.3. Lemma (COUSIN). Pro každý kalibr $\delta \in \mathcal{G}$ je množina $\mathcal{A}(\delta)$ všech δ -jemných rozšířených dělení intervalu $[a, b]$ neprázdná.

D ů k a z . Nechtě je dáno $\delta \in \mathcal{G}$. Označme M množinu všech $c \in (a, b]$ pro něž je $\mathcal{A}(\delta; [a, c]) \neq \emptyset$. Protože je $\delta(a) > 0$, položíme-li $c = \min\{a + \delta(a), b\}$, $D = \{a, c\}$ a $\xi = a$, bude $c \in (a, b]$ a $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta; [a, c])$, tj. $c \in M$ a $M \neq \emptyset$. Položme $d = \sup M$. Protože je $\delta(d) > 0$, existuje $c \in (d - \delta(d), d] \cap M$. Je-li $c < d$, pak existuje $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta; [a, c])$. Definujme $\tilde{D} = D \cup \{d\}$ a $\tilde{\xi} = (\xi, d) \in \mathbb{R}^{\nu(D)+1}$. Potom $(\tilde{D}, \tilde{\xi}) \in \mathcal{P}[a, d]$ a protože je $[c, d] \in (d - \delta(d), d + \delta(d))$, znamená to, že $(\tilde{D}, \tilde{\xi}) \in \mathcal{A}(\delta; [a, d])$, tj. $d \in M$. Konečně, kdyby

bylo $d < b$, pak bychom mohli zvolit $c \in (d, d + \delta(d)) \cap (d, b)$ a ukázat, že $c \in M$, což by znamenalo spor s definicí $d = \sup M$. To znamená, že platí $d = \sup M = b$ a důkaz je proveden. \square

Nebude-li uvedeno jinak, bude mít v následujícím textu symbol integrálu vždy smysl KS-integrálu.

Důkazy tvrzení uvedených v této kapitole byly jednak převzaty z monografické publikace [5], jednak jsou modifikacemi důkazů analogických tvrzení pro speciální případ $g(x) \equiv x$ ze Schwabikovy monografie [6].

5.4. Poznámka. Jsou-li δ a $\delta' \in \mathcal{G}$ kalibry na intervalu $[a, b]$, pro které je $\delta(x) \leq \delta'(x)$ na $[a, b]$, pak každé rozšířené dělení intervalu $[a, b]$, které je δ -jemné je také δ' -jemné, tj. platí $\mathcal{A}(\delta) \subset \mathcal{A}(\delta')$. Platí-li tedy nějaká vlastnost pro všechna $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta')$ tím spíše platí i pro všechna $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta)$. Speciálně, je-li δ_0 libovolný kalibr na intervalu $[a, b]$, stačí v Definici 5.2 požadovat existenci kalibru δ_ε , pro který kromě vlastností v definici požadovaných platí navíc i $\delta_\varepsilon(x) \leq \delta_0(x)$ na $[a, b]$.

Pro existenci KS-integrálu platí podmínka Bolzanova-Cauchyova typu:

5.5. Věta (BOLZANOVA-CAUCHYOVA PODMÍNKA). *Nechť $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Potom integrál $\int_a^b f dg$ existuje právě tehdy, když je splněna následující podmínka:*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathcal{G} : \left((D, \xi), (D', \xi') \in \mathcal{A}(\delta) \right) \implies \left| S(D, \xi) - S(D', \xi') \right| < \varepsilon. \quad (5.2)$$

D ů k a z . a) Existuje-li integrál $\int_a^b f dg = I \in \mathbb{R}$, pak podle Definice 5.2 pro každé $\varepsilon > 0$ existuje kalibr $\delta_\varepsilon \in \mathcal{G}$ takový, že je $|S(D, \xi) - I| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro všechna $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta_\varepsilon)$. Pro všechny dvojice $(D, \xi), (D', \xi') \in \mathcal{A}(\delta_\varepsilon)$ tedy máme

$$|S(D, \xi) - S(D', \xi')| \leq |S(D, \xi) - I| + |S(D', \xi') - I| < \varepsilon,$$

tj. je splněna (B-C) podmínka (5.2).

b) Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Označme

$$M = \{m \in \mathbb{R} : \exists \delta_m \in \mathcal{G} : (D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta_m) \implies S(D, \xi) \geq m\}$$

a předpokládejme, že je splněna (B-C) podmínka (5.2). K danému $\varepsilon > 0$ tedy můžeme zvolit kalibr δ_ε tak, že

$$|S(D, \xi) - S(D', \xi')| < \frac{\varepsilon}{2}$$

bude platit pro všechna $(D, \xi), (D', \xi') \in \mathcal{A}(\delta_\varepsilon)$. Zvolme libovolně $(D_0, \xi_0) \in \mathcal{A}(\delta_\varepsilon)$. Pak pro každé $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta_\varepsilon)$ je

$$S(D_0, \xi_0) - \frac{\varepsilon}{2} < S(D, \xi) < S(D_0, \xi_0) + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5.3)$$

Odtud plyne, že platí $(-\infty, S(D_0, \xi_0) - \frac{\varepsilon}{2}) \subset M$, tj. množina M není prázdná. Dále, pro každé $m \in M$ a každé $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\tilde{\delta}_m)$, kde

$$\tilde{\delta}_m(x) = \min\{\delta_m(x), \delta_\varepsilon(x)\} \quad \text{na } [a, b],$$

máme též $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta_\varepsilon)$ a tudíž

$$m \leq S(D, \xi) < S(D_0, \xi_0) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{tj. } M \subset (-\infty, S(D_0, \xi_0) + \frac{\varepsilon}{2}).$$

To ale znamená, že množina M je shora ohraničená, tj. $\sup M < \infty$, a platí

$$S(D_0, \xi_0) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \sup M \leq S(D_0, \xi_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Toto spolu s nerovností (5.3) implikuje, že platí

$$|S(D, \xi) - \sup M| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } (D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta_\varepsilon)$$

neboli

$$\sup M = \int_a^b f \, dg.$$

□

KS-integrál má obvyklé lineární vlastnosti:

5.6. Věta. *Nechť $f, f_1, f_2, g, g_1, g_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, a necht' existují integrály:*

$$\int_a^b f_1 \, dg, \quad \int_a^b f_2 \, dg, \quad \int_a^b f \, dg_1 \quad \text{a} \quad \int_a^b f \, dg_2.$$

Potom pro libovolná $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ platí

$$\int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2) \, dg = c_1 \int_a^b f_1 \, dg + c_2 \int_a^b f_2 \, dg,$$

a

$$\int_a^b f \, d[c_1 g_1 + c_2 g_2] = c_1 \int_a^b f \, dg_1 + c_2 \int_a^b f \, dg_2.$$

D ů k a z . Ukažme si např. důkaz prvního tvrzení: Bud' dáno $\varepsilon > 0$. Podle předpokladu existují kalibry $\delta_1 \in \mathcal{G}$ a $\delta_2 \in \mathcal{G}$ takové, že platí

$$(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta_i) \implies |S_{f_i \Delta g}(D, \xi) - \int_a^b f_i \, dg| < \varepsilon \quad \text{pro } i = 1, 2.$$

Pro $x \in [a, b]$ položíme $\delta_\varepsilon(x) = \min\{\delta_1(x), \delta_2(x)\}$. Označme $h = c_1 f_1 + c_2 f_2$. Protože pro každé $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta_\varepsilon)$ platí

$$\begin{aligned} S_{h \Delta g}(D, \xi) &= \sum_{j=1}^{\nu(D)} (c_1 f_1(\xi_j) + c_2 f_2(\xi_j)) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] \\ &= c_1 S_{f_1 \Delta g}(D, \xi) + c_2 S_{f_2 \Delta g}(D, \xi), \end{aligned}$$

dostáváme

$$\begin{aligned} & \left| S_{h\Delta g}(D, \xi) - c_1 \int_a^b f_1 dg + c_2 \int_a^b f_2 dg \right| \\ & \leq |c_1| \left| S_{f_1\Delta g}(D, \xi) - \int_a^b f_1 dg \right| + |c_2| \left| S_{f_2\Delta g}(D, \xi) - \int_a^b f_2 dg \right| \\ & < (|c_1| + |c_2|) \varepsilon. \end{aligned}$$

Odtud už ovšem naše tvrzení bezprostředně plyne.

Druhé tvrzení věty by se dokazovalo obdobně a důkaz lze ponechat čtenáři jako cvičení. \square

5.7. Věta. *Jestliže existuje integrál $\int_a^b f dg$ a jestliže $[c, d] \subset [a, b]$, pak existuje také integrál $\int_c^d f dg$.*

D ů k a z . Předpokládejme, že je $a < c < d < b$. Necht' je dáno $\varepsilon > 0$. Podle (B-C) podmínky (viz Věta 5.5) můžeme zvolit kalibr $\delta_\varepsilon \in \mathcal{G}$ tak, aby platilo

$$|S(\tilde{D}, \tilde{\xi}) - S(\tilde{D}', \tilde{\xi}')| < \varepsilon \tag{5.4}$$

pro všechna δ_ε -jemná rozšířená dělení $(\tilde{D}, \tilde{\xi})$ a $(\tilde{D}', \tilde{\xi}')$ intervalu $[a, b]$. Mějme nyní libovolnou dvojici $(D, \xi), (D', \xi') \in \mathcal{A}(\delta_\varepsilon; [c, d])$. Dále, zvolme libovolně $(D^-, \xi^-) \in \mathcal{A}(\delta_\varepsilon; [a, c])$, $(D^+, \xi^+) \in \mathcal{A}(\delta_\varepsilon; [d, b])$ a doplňme jimi (D, ξ) a (D', ξ') na rozšířená dělení intervalu $[a, b]$, tj. položme

$$\tilde{D} = D^- \cup D \cup D^+, \quad \tilde{\xi} = (\xi^-, \xi, \xi^+),$$

a

$$\tilde{D}' = D^- \cup D' \cup D^+, \quad \tilde{\xi}' = (\xi^-, \xi', \xi^+).$$

Zřejmě je $(\tilde{D}, \tilde{\xi}) \in \mathcal{A}(\delta_\varepsilon; [a, b])$ a $(\tilde{D}', \tilde{\xi}') \in \mathcal{A}(\delta_\varepsilon; [a, b])$ a vzhledem k (5.4) platí

$$|S(D, \xi) - S(D', \xi')| = |S(\tilde{D}, \tilde{\xi}) - S(\tilde{D}', \tilde{\xi}')| < \varepsilon.$$

Odtud, vzhledem ke Větě 5.5, již existence integrálu $\int_c^d f dg$ bezprostředně plyne. Modifikace důkazu pro případ, že $c = a$ resp. $d = b$ je zřejmá. \square

5.8. Věta. *Necht' $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a $c \in [a, b]$. Integrál $\int_a^b f dg$ existuje právě tehdy když existují oba integrály $\int_a^c f dg$ a $\int_c^b f dg$. Potom navíc platí také rovnost*

$$\int_a^b f dg = \int_a^c f dg + \int_c^b f dg.$$

D ů k a z . a) Existuje-li integrál $\int_a^b f dg$, pak podle Věty 5.7 existují také oba integrály $\int_a^c f dg$ a $\int_c^b f dg$.

b) Necht'

$$\int_a^c f dg = I_1 \quad \text{a} \quad \int_c^b f dg = I_2.$$

Budiž dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme kalibry $\delta'_\varepsilon \in \mathcal{G}[a, c]$ a $\delta''_\varepsilon \in \mathcal{G}[c, b]$ tak, aby pro všechna $(D', \xi') \in \mathcal{A}(\delta'_\varepsilon; [a, c])$ a $(D'', \xi'') \in \mathcal{A}(\delta''_\varepsilon; [c, b])$ platilo

$$|S(D', \xi') - I_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad |S(D'', \xi'') - I_2| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5.5)$$

Definujme nyní kalibr δ_ε na $[a, b]$ předpisem

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \min \left\{ \delta'_\varepsilon(x), \frac{1}{4}(c-x) \right\} & \text{když } x \in [a, c), \\ \min \left\{ \delta'_\varepsilon(c), \delta''_\varepsilon(c) \right\} & \text{když } x = c, \\ \min \left\{ \delta''_\varepsilon(x), \frac{1}{4}(x-c) \right\} & \text{když } x \in (c, b]. \end{cases}$$

Potom,

$$\xi + \delta(\xi) \leq \xi + \frac{1}{4}(c - \xi) < c \quad \text{je-li } \xi < c,$$

a

$$\xi - \delta(\xi) \geq \xi - \frac{1}{4}(c - \xi) > c \quad \text{je-li } \xi > c.$$

T.zn., že pro žádné $\xi < c$ nemůže platit $|c - \xi| < \delta(\xi) \leq \frac{1}{4}|c - \xi|$.

Snadno se nahlédne, že pro každé δ_ε -jemné rozšířené dělení (D, ξ) intervalu $[a, b]$ musí existovat index $k \in \{1, 2, \dots, \nu(D)\}$ takový, že $\xi_k = c$. Navíc, bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že platí

$$\alpha_{k-1} < \alpha_k = \xi_k = \xi_{k+1} = c < \alpha_{k+1}.$$

(Kdyby bylo $\alpha_{k-1} < c = \xi_k < \alpha_k$, upravili bychom příslušný člen v součtu $S(D, \xi)$ následujícím způsobem:

$$f(c) [g(\alpha_k) - g(\alpha_{k-1})] = f(c) [g(\alpha_k) - g(c)] + f(c) [g(c) - g(\alpha_{k-1})].)$$

To znamená, že každé rozšířené dělení $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta_\varepsilon; [a, b])$ intervalu $[a, b]$ můžeme rozdělit: $D = D' \cup D''$, $\xi = (\xi', \xi'')$ tak, že bude

$$(D', \xi') \in \mathcal{A}(\delta_\varepsilon; [a, c]) \subset \mathcal{A}(\delta'_\varepsilon; [a, c]) \quad \text{a} \quad (D'', \xi'') \in \mathcal{A}(\delta_\varepsilon; [c, b]) \subset \mathcal{A}(\delta''_\varepsilon; [c, b]).$$

Tudíž, vzhledem k (5.5),

$$\begin{aligned} |S(D, \xi) - (I_1 + I_2)| &= |S(D', \xi') + S(D'', \xi'') - (I_1 + I_2)| \\ &\leq |S(D', \xi') - I_1| + |S(D'', \xi'') - I_2| < \varepsilon, \end{aligned}$$

tj. $\int_a^b f dg = I_1 + I_2$. □

5.9. Příklady.

(i) Z Definice 5.2 je zřejmé, že je-li $f(t) \equiv f(a)$ na $[a, b]$, pak

$$\int_a^b f \, dg = f(a) [g(b) - g(a)] \quad \text{a} \quad \int_a^b g \, df = 0$$

pro každou funkci $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

(ii) Pro libovolnou funkci $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ platí

$$\int_a^b f \, d[\chi_{(\tau, b]}] = f(\tau) \quad \text{pro } \tau \in [a, b],$$

$$\int_a^b f \, d[\chi_{[\tau, b]}] = f(\tau) \quad \text{pro } \tau \in (a, b),$$

$$\int_a^b f \, d[\chi_{[a, \tau]}] = -f(\tau) \quad \text{pro } \tau \in (a, b),$$

$$\int_a^b f \, d[\chi_{(a, \tau)}] = -f(\tau) \quad \text{pro } \tau \in (a, b),$$

$$\int_a^b f \, d[\chi_{[\tau]}] = \begin{cases} -f(a) & \text{když } \tau = a, \\ 0 & \text{když } \tau \in (a, b), \\ f(b) & \text{když } \tau = b. \end{cases}$$

Ukažme si odvození prvního a druhého z uvedených vztahů. Zbývající se z nich už snadno odvodí použitím Věty 5.8. Nechť $g(x) = \chi_{(\tau, b]}(x)$ na $[a, b]$. Potom je

$$\int_a^\tau f \, dg = 0.$$

Dále, k danému $\varepsilon > 0$ položíme

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon & \text{když } x = \tau \\ \frac{1}{4}|x - \tau| & \text{když } x \in (\tau, b]. \end{cases}$$

Pro každé $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta_\varepsilon; [\tau, b])$ pak musí platit $\tau = \alpha_0 = \xi_1$ a tudíž

$$S(D, \xi) = f(\tau) [g(\alpha_1) - g(\tau)] = f(\tau), \quad \text{tj.} \quad \int_\tau^b f \, dg = f(\tau).$$

Důkaz našeho vztahu teď už snadno dokončíme použitím Věty 5.8.

Druhý vztah se dokazuje podobně. Tentokrát ovšem máme $g(x) = \chi_{[\tau, b]}(x)$ na $[a, b]$, $\int_{\tau}^b f dg = 0$ a k danému $\varepsilon > 0$ zvolíme

$$\delta_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} \varepsilon & \text{když } x = \tau \\ \frac{1}{4}|x - \tau| & \text{když } x \in [a, \tau]. \end{cases}$$

Pro každé $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta_{\varepsilon}; [a, \tau])$ pak máme $\tau = \alpha_m = \xi_m$ a tudíž

$$S(D, \xi) = f(\tau) [g(\tau) - g(\alpha_{m-1})] = f(\tau) \quad \text{a} \quad \int_a^{\tau} f dg = f(\tau).$$

(iii) Pro libovolnou funkci $g \in \mathbb{G}$ platí

$$\int_a^b \chi_{(\tau, b]} dg = g(b) - g(\tau+) \quad \text{pro } \tau \in [a, b),$$

$$\int_a^b \chi_{[\tau, b]} dg = g(b) - g(\tau-) \quad \text{pro } \tau \in (a, b),$$

$$\int_a^b \chi_{[a, \tau]} dg = g(\tau+) - g(a) \quad \text{pro } \tau \in (a, b),$$

$$\int_a^b \chi_{(a, \tau]} dg = g(\tau-) - g(a) \quad \text{pro } \tau \in (a, b]$$

a

$$\int_a^b \chi_{[\tau]} dg = \begin{cases} g(a+) - g(a) & \text{když } \tau = a, \\ g(\tau+) - g(\tau-) & \text{když } \tau \in (a, b), \\ g(b) - g(b-) & \text{když } \tau = b. \end{cases}$$

Ukažeme si zase jen odvození prvního a druhého z uvedených vztahů. Nechť tedy $f(x) = \chi_{(\tau, b]}(x)$ na $[a, b]$. Potom je

$$\int_a^{\tau} f dg = 0.$$

Dále, nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Definujme opět

$$\delta_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} \varepsilon & \text{když } x = \tau \\ \frac{1}{4}|x - \tau| & \text{když } x \in (\tau, b]. \end{cases}$$

Opět musí pro každé $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta_{\varepsilon}; [\tau, b])$ platit $\tau = \alpha_0 = \xi_1$. Tentokrát ovšem máme

$$\begin{aligned} S(D, \xi) &= [g(b) - g(\alpha_{m-1})] + [g(\alpha_{m-1}) - g(\alpha_{m-2})] + \cdots + [g(\alpha_2) - g(\alpha_1)] \\ &= g(b) - g(\alpha_1), \end{aligned}$$

kde $\tau < \alpha_1 < \tau + \delta(\tau) = \tau + \varepsilon$. Pro $\varepsilon \rightarrow 0+$ se tedy hodnoty $S(D, \xi)$ nutně blíží ke $g(b) - g(\tau+)$, tj.

$$\int_a^b f \, dg = \int_a^\tau f \, dg + \int_\tau^b f \, dg = g(b) - g(\tau+).$$

V druhém případě, $f(x) = \chi_{[\tau, b]}(x)$ na $[a, b]$, máme

$$\int_\tau^b f \, dg = g(b) - g(\tau).$$

Pro dané $\varepsilon > 0$ definujeme opět

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon & \text{když } x = \tau \\ \frac{1}{4}|x - \tau| & \text{když } x \in [a, \tau). \end{cases}$$

Tím si opět vynutíme, že pro každé $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta_\varepsilon; [a, \tau])$ musí být $\tau = \alpha_m = \xi_m$ a tudíž

$$S(D, \xi) = [g(\tau) - g(\alpha_{m-1})],$$

kde $\alpha_{m-1} \in (\tau - \varepsilon, \tau)$. Odtud už snadno plyne, že platí

$$\int_a^\tau f \, dg = g(\tau) - g(\tau-),$$

tj.

$$\int_a^b f \, dg = \int_a^\tau f \, dg + \int_\tau^b f \, dg = g(b) - g(\tau-).$$

5.10 . Poznámka. Je-li $D \in \mathcal{D}[a, b]$ a $\delta(x) = |D|$ na $[a, b]$, pak je $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta)$ pro každé $\xi \in \mathbb{R}^{\nu(D)}$ takové, že $(D, \xi) \in \mathcal{D}[a, b]$. Na druhou stranu, je-li $\delta \in \mathcal{G}$ takový kalibr, že $\delta(x) \geq \frac{\Delta}{2} > 0$, pak pro každé $(D, \xi) \in \mathcal{D}[a, b]$ platí $|D| < \Delta$. Speciálně, jestliže existuje normový RS-integrál $(n) \int_a^b f \, dg$, pak také existuje KS-integrál $\int_a^b f \, dg$ a má tutíž hodnotu. Naopak, jestliže existuje KS-integrál $\int_a^b f \, dg = I$, přičemž pro každé $\varepsilon > 0$ lze najít kalibr $\delta \in \mathcal{G}$ takový, že platí $\inf_{x \in [a, b]} \delta(x) > 0$ a

$$|S(D, \xi) - I| < \varepsilon \quad \text{pro každé } (D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta),$$

pak existuje také $(n) \int_a^b f \, dg$ a platí rovnost $(n) \int_a^b f \, dg = I$.

Následující věta popisuje vztah (σ) RS-integrálu a KS-integrálu.

5.11 . Věta. *Jestliže existuje (σ) RS-integrál $(\sigma) \int_a^b f \, dg$, pak existuje také KS-integrál $\int_a^b f \, dg$ a platí*

$$\int_a^b f \, dg = (\sigma) \int_a^b f \, dg.$$

D ů k a z . Bud' dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Z předpokladu o existenci (σ) RS-integrálu plyne, že existuje dělení $D_\varepsilon = \{s_0, s_1, \dots, s_m\} \in \mathcal{D}[a, b]$ takové, že pro každé rozšířené dělení $(D, \xi) \in \mathcal{P}[a, b]$, kde D je zjemněním D_ε platí (5.1). Položme nyní

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} \min\{|x - s_j|; j = 0, 1, \dots, m\} & \text{když } x \notin D_\varepsilon, \\ \varepsilon & \text{když } x \in D_\varepsilon. \end{cases}$$

Potom $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta_\varepsilon)$ pouze tehdy, když

$$D_\varepsilon \subset \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{\nu(D)}\}. \quad (5.6)$$

Navíc máme ještě

$$S(D, \xi) = \sum_{j=1}^{\nu(D)} \left[f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\xi_j)] + f(\xi_j) [g(\xi_j) - g(\alpha_{j-1})] \right] = S(D', \xi'), \quad (5.7)$$

kde $D' = \{\alpha_0, \xi_1, \alpha_1, \xi_2, \dots, \xi_{\nu(D)}, \alpha_{\nu(D)}\}$ a $\xi' = (\xi_1, \xi_1, \xi_2, \xi_2, \dots, \xi_{\nu(D)}, \xi_{\nu(D)})$. Podle (5.6) je

$$D_\varepsilon \subset \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{\nu(D)}\} \subset D'$$

a vzhledem k (5.7) odtud plyne

$$|S(D, \xi) - I| = |S(D', \xi') - I| < \varepsilon$$

a tudíž $\int_a^b f \, dg = I$. □

5.12. Příklad. V případě $g(x) \equiv x$ budeme místo o KS-integrálu mluvit o K-integrálu (Kurzweilův integrál). K-integrál je zřejmě zobecněním klasického Riemannova integrálu.

(i) Necht' $f(x) = 0$ na $[a, b] \setminus W$, kde W je spočetná podmnožina $[a, b]$, $W = \{w_k\}_{k=1}^\infty$. Bud' dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Definujme

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{když } x \notin W, \\ \frac{\varepsilon}{2^{k+1}(1 + |f(w_k)|)} & \text{když } x = w_k \in W. \end{cases}$$

Pro každé $(D, \xi) \in \mathcal{P}[a, b]$ se v příslušném integrálním součtu $S(D, \xi)$,

$$S(D, \xi) = \sum_{j=1}^m f(\xi_j) [\alpha_j - \alpha_{j-1}],$$

uplatní pouze takové sčítance, pro které existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že platí $\xi_j = w_k \in W$. Pro každé δ_ε -jemné rozšířené dělení (D, ξ) intervalu $[a, b]$, (tj. $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta_\varepsilon)$), kde $D =$

$\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \in \mathcal{D}[a, b]$ a $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$ a každý takový index j ovšem musí platit

$$\alpha_j - \alpha_{j-1} \leq \frac{\varepsilon}{2^k(1 + |f(w_k)|)}$$

a tudíž je

$$|S(D, \xi)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |f(w_k)| \frac{\varepsilon}{2^k(1 + |f(w_k)|)} \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \varepsilon.$$

Podle Definice 5.2 je tedy $\int_a^b f(x) dx = 0$.

(ii) Nechť existuje Newtonův integrál $(N) \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, kde funkce F je spojitá na $[a, b]$ a platí

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pro každé } x \in (a, b), \quad F'(a+) = f(a), \quad F'(b-) = f(b).$$

Ukážeme, že pak existuje také K-integrál $\int_a^b f(x) dx$ a rovná se také $F(b) - F(a)$.

Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Pro každé $\xi \in [a, b]$ zvolme $\delta_\varepsilon(\xi) > 0$ tak, aby platilo

$$|F(x) - F(\xi) - f(\xi)(x - \xi)| < \frac{\varepsilon}{b - a} |x - \xi|$$

$$\text{pro všechna } x \in [a, b] \cap (\xi - \delta_\varepsilon(\xi), \xi + \delta_\varepsilon(\xi)).$$

Pro každé $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta_\varepsilon)$ ($D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$) a každé $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ tedy platí

$$\begin{aligned} & |F(\alpha_j) - F(\alpha_{j-1}) - f(\xi_j)[\alpha_j - \alpha_{j-1}]| \\ & \leq |F(\alpha_j) - F(\xi_j) - f(\xi_j)[\alpha_j - \xi_j]| + |F(\xi_j) - F(\alpha_{j-1}) - f(\xi_j)[\xi_j - \alpha_{j-1}]| \\ & \leq \frac{\varepsilon}{b - a} (|\alpha_j - \xi_j| + |\xi_j - \alpha_{j-1}|) = \frac{\varepsilon}{b - a} [\alpha_j - \alpha_{j-1}] \end{aligned}$$

a tudíž

$$\begin{aligned} |S(D, \xi) - [F(b) - F(a)]| & = \left| \sum_{j=1}^m (F(\alpha_j) - F(\alpha_{j-1}) - f(\xi_j)[\alpha_j - \alpha_{j-1}]) \right| \\ & \leq \sum_{j=1}^m |F(\alpha_j) - F(\alpha_{j-1}) - f(\xi_j)[\alpha_j - \alpha_{j-1}]| \leq \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{j=1}^m [\alpha_j - \alpha_{j-1}] = \varepsilon, \end{aligned}$$

tj.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

5.13. Věta. Jestliže $g \in \mathbb{BV}$ a $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je taková, že integrály

$$\int_a^b f \, dg \quad \text{a} \quad \int_a^b |f(x)| \, d[\text{var}_a^x g]$$

existují, pak platí

$$\left| \int_a^b f(x) \, dg(x) \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, d[\text{var}_a^x g] \leq \|f\| \text{var}_a^b g. \quad (5.8)$$

D ů k a z . Pro každé rozšířené dělení (D, ξ) intervalu $[a, b]$ platí

$$\begin{aligned} |S(D, \xi)| &\leq \sum_{j=1}^{\nu(D)} |f(\xi_j)| |g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\nu(D)} |f(\xi_j)| \text{var}_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} g \leq \|f\| \text{var}_a^b g. \end{aligned}$$

□

5.14. Věta. Nechť $g \in \mathbb{BV}$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce ohraničená na $[a, b]$ a $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí definovaných na intervalu $[a, b]$ taková, že platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0 \quad (5.9)$$

a existují všechny integrály $\int_a^b f_n \, dg$, $n \in \mathbb{N}$. Potom existuje také integrál $\int_a^b f \, dg$ a platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n \, dg = \int_a^b f \, dg. \quad (5.10)$$

D ů k a z . a) Z předpokladu (5.9) plyne, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že platí

$$\|f_n\| \leq \|f\| + 1 \quad \text{pro všechna } n \geq n_0.$$

Podle Věty 5.13 tedy máme

$$\left| \int_a^b f_n \, dg \right| \leq (\|f\| + 1) \text{var}_a^b g \quad \text{pro všechna } n \geq n_0$$

a podle Bolzanovy-Weierstraßovy věty tedy existuje podposloupnost $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ v \mathbb{N} a $I \in \mathbb{R}$ takové, že platí $n_1 \geq n_0$ a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f_{n_k} \, dg = I. \quad (5.11)$$

Označme

$$\begin{cases} I_k := \int_a^b f_{n_k} dg & \text{pro } k \in \mathbb{N}, \\ S_k(D, \xi) := S_{f_{n_k} \Delta g}(D, \xi) & \text{pro } k \in \mathbb{N}, (D, \xi) \in \mathcal{D}, \\ S(D, \xi) := S_{f \Delta g}(D, \xi), & \text{pro } (D, \xi) \in \mathcal{D}. \end{cases} \quad (5.12)$$

b) Bud' dáno $\varepsilon > 0$. Vzhledem k (5.9) a (5.11) můžeme zvolit $k_0 \in \mathbb{N}$ tak, že platí

$$|I_k - I| < \varepsilon \quad \text{a} \quad \|f_{n_k} - f\| < \varepsilon \quad \text{pro } k \geq k_0.$$

Dále, nechť $\delta_0 \in \mathcal{G}$ je kalibr na $[a, b]$ takový, že pro všechna δ_0 -jemná rozšířená dělení (D, ξ) intervalu $[a, b]$ platí

$$|S_{k_0}(D, \xi) - I_{k_0}| < \varepsilon.$$

Pro každé $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta_0)$ tedy máme

$$|S(D, \xi) - I| \leq |S(D, \xi) - S_{k_0}(D, \xi)| + |S_{k_0}(D, \xi) - I_{k_0}| + |I_{k_0} - I| < \varepsilon (\text{var}_a^b g + 2).$$

Odtud

$$\int_a^b f dg = I = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f_{n_k} dg.$$

c) Konečně, opětým použitím Věty 5.13,

$$\left| \int_a^b f_n dg - \int_a^b f dg \right| \leq \|f_n - f\| \text{var}_a^b g \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Platí tedy i (5.10). □

5.15. Věta. *Nechť $f \in \mathbb{G}$ a $g \in \mathbb{BV}$. Potom $\int_a^b f dg$ existuje a platí (5.8).*

D ů k a z . Podle Věty 3.6(ii) existuje posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konečných skokových funkcí, která konverguje stejnoměrně na $[a, b]$ k funkci f . Podle Příkladů 5.9(iii) integrál $\int_a^b f_n dg$ existuje pro každé $n \in \mathbb{N}$. To znamená, že podle Věty 5.14 existuje také integrál $\int_a^b f dg$ a platí (5.10) a, navíc, podle Věty 5.13 platí také (5.8). □

5.16. Věta. *Nechť $g \in \mathbb{BV}$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce ohraničená na $[a, b]$ a $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí definovaných na intervalu $[a, b]$ taková, že platí*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{var}_a^b (g_n - g) = 0$$

a existují všechny integrály $\int_a^b f dg_n$, $n \in \mathbb{N}$. Potom existuje také integrál $\int_a^b f dg$ a platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f dg_n = \int_a^b f dg. \quad (5.13)$$

D ů k a z . Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat

$$g_n(a) = g(a) = 0 \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Dále je důkaz podobný důkazu Věty 5.14. Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že platí

$$\|g_n\|_{\mathbb{B}V} = \text{var}_a^b g_n \leq \text{var}_a^b g + 1 \quad \text{pro všechna } n \geq n_0.$$

Podle Věty 5.13 tedy máme

$$\left| \int_a^b f dg_n \right| \leq \|f\| (\text{var}_a^b g + 1) \quad \text{pro všechna } n \geq n_0$$

a podle Bolzanovy-Weierstraßovy věty tedy existuje podposloupnost $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ v \mathbb{N} a $I \in \mathbb{R}$ takové, že platí $n_1 \geq n_0$ a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f dg_{n_k} = I.$$

Použijeme opět označení zavedené v (5.12). Bud' dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme $k_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby platilo

$$|I_k - I| < \varepsilon \quad \text{a} \quad \text{var}_a^b (g_{n_k} - g) < \varepsilon \quad \text{pro } k \geq k_0.$$

Dále, nechť $\delta_0 \in \mathcal{G}$ je kalibr na $[a, b]$ takový, že pro všechna δ_0 -jemná rozšířená dělení (D, ξ) intervalu $[a, b]$ platí

$$|S_{k_0}(D, \xi) - I_{k_0}| < \varepsilon.$$

Pro každé $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta_0)$ tedy máme

$$|S(D, \xi) - I| \leq |S(D, \xi) - S_{k_0}(D, \xi)| + |S_{k_0}(D, \xi) - I_{k_0}| + |I_{k_0} - I| < \varepsilon (\|f\| + 2).$$

Odtud

$$\int_a^b f dg = I = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f dg_{n_k}.$$

Konečně, opětným použitím Věty 5.13,

$$\left| \int_a^b f dg_n - \int_a^b f dg \right| \leq \|f\| \text{var}_a^b (g_n - g) \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Platí tedy (5.13). □

Podle Věty 5.15 integrál

$$\int_a^b f dg$$

existuje pro všechny $f \in \mathbb{G}$ a $g \in \mathbb{BV}$. Chtěli bychom ukázat, že tento integrál vždy existuje i v symetrické situaci: $f \in \mathbb{BV}$ a $g \in \mathbb{G}$. Rozložíme-li funkci f na součet spojitě části f^c a skokové části f^B (viz Lemma 1.32 a Definice 1.22) a vzpomeneme-li si na Lemma 1.35, podle kterého existuje posloupnost konečných skokových funkcí $f_n^B \in \mathbb{S}[a, b]$ taková, že platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f^B - f_n^B\|_{\mathbb{BV}} = 0,$$

zjistíme, že ke svému cíli dospějeme, budeme-li umět dokázat existenci integrálu

$$\int_a^b f \, dg$$

pro každou funkci $f \in \mathbb{BV} \cap \mathbb{C}$ a každou $g \in \mathbb{G}$ a budeme-li mít k dispozici konvergenční větu, ze které by plynulo, že platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n^B \, dg = \int_a^b f^B \, dg.$$

Tyto úkoly splníme v následujících třech krocích.

5.17. Lemma. *Integrál $\int_a^b f \, dg$ existuje pro každou $f \in \mathbb{BV} \cap \mathbb{C}$ a každou $g \in \mathbb{G}$.*

D ů k a z . Nechť $f \in \mathbb{BV} \cap \mathbb{C}$ a $g \in \mathbb{G}$. Podle Věty 5.11 a Věty 4.14 (o integraci-per-partes pro RS integrál) nám bude stačit, ukážeme-li, že pak existuje (σ) RS-integrál $(\sigma) \int_a^b g \, df$.

Nechť $\tau \in [a, b]$, $g = \chi_{[a, \tau]}$. Zřejmě je

$$\int_a^\tau g \, df = f(\tau) - f(a).$$

Pro každé rozšířené dělení $(D, \xi) \in \mathcal{D}[\tau, b]$ máme

$$S(D, \xi) = \begin{cases} 0 & \text{je-li } \xi_1 > \tau, \\ f(\alpha_1) - f(\tau) & \text{je-li } \xi_1 = \tau. \end{cases}$$

Díky spojitosti funkce f můžeme tedy k danému $\varepsilon > 0$ vždy najít dělení D_ε takové, že bude

$$|S(D, \xi)| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } (D, \xi) \in \mathcal{D}[\tau, b] \quad \text{taková, že } D \supset D_\varepsilon,$$

tj.

$$(\sigma) \int_\tau^b \chi_{[a, \tau]} \, df = 0$$

a

$$(\sigma) \int_a^b \chi_{[a, \tau]} \, df = f(\tau) - f(a).$$

Podobně bychom ukázali, že

$$(\sigma) \int_a^b \chi_{[a,\tau]} df = f(\tau) - f(a) \quad \text{pro } \tau \in (a, b],$$

$$(\sigma) \int_a^b \chi_{[\tau,b]} df = f(b) - f(\tau) \quad \text{pro } \tau \in [a, b),$$

$$(\sigma) \int_a^b \chi_{(\tau,b]} df = f(b) - f(\tau) \quad \text{pro } \tau \in [a, b),$$

a

$$(\sigma) \int_a^b \chi_{[\tau]} df = 0 \quad \text{pro } \tau \in [a, b].$$

To znamená, že $(\sigma) \int_a^b g df$ existuje pro každou funkci $f \in \mathbb{BV}[a, b] \cap \mathbb{C}[a, b]$ a každou $g \in \mathbb{S}[a, b]$. Důkaz lemmatu tedy plyne z Věty 3.6(ii) a z věty o limitním přechodu při stejnoměrné konvergenci pro (σ) RS-integrály. \square

5.18. Věta. *Nechť funkce g ohraničená na $[a, b]$ a $f \in \mathbb{BV}$ jsou takové, že existuje integrál $\int_a^b f dg$. Potom platí*

$$\left| \int_a^b f dg \right| \leq (|f(a)| + |f(b)| + \text{var}_a^b f) \|g\|. \quad (5.14)$$

D ů k a z . Pro libovolné $(D, \xi) \in \mathcal{P}[a, b]$, $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$, máme

$$\begin{aligned} S(D, \xi) &= f(\xi_1) [g(\alpha_1) - g(a)] + f(\xi_2) [g(\alpha_2) - g(\alpha_1)] + \dots + f(\xi_m) [g(b) - g(\alpha_{m-1})] \\ &= f(b) g(b) - f(a) g(a) \\ &\quad - [f(\xi_1) - f(a)] g(a) - [f(\xi_2) - f(\xi_1)] g(\alpha_1) - \dots - [f(b) - f(\xi_m)] g(b) \\ &= f(b) g(b) - f(a) g(a) - \sum_{j=0}^m [f(\xi_{j+1}) - f(\xi_j)] g(\alpha_j), \end{aligned}$$

kde $\xi_0 = a$ a $\xi_{m+1} = b$. Odtud plyne, že pro každé $(D, \xi) \in \mathcal{P}[a, b]$ platí

$$|S(D, \xi)| \leq (|f(a)| + |f(b)| + \sum_{j=0}^m |f(\xi_{j+1}) - f(\xi_j)|) \|g\|,$$

neboli

$$|S(D, \xi)| \leq (|f(a)| + |f(b)| + \text{var}_a^b f) \|g\|$$

odkud už tvrzení Věty okamžitě plyne. \square

5.19. Věta. *Nechť funkce g je ohraničená na $[a, b]$, $f \in \mathbb{BV}$ a nechť $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{BV}$ je posloupnost taková, že*

$$\int_a^b f_n dg \quad \text{existuje pro každé } n \in \mathbb{N} \quad \text{a platí } \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\mathbb{BV}} = 0.$$

Potom existuje také integrál $\int_a^b f dg$ a platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n dg = \int_a^b f dg.$$

D ů k a z . Podle Věty 5.18 platí

$$\left| \int_a^b (f_n - f_m) dg \right| \leq 2 \|g\| \|f_n - f_m\|_{\mathbb{BV}} \quad \text{pro libovolná } m, n \in \mathbb{N}.$$

Posloupnost $\{\int_a^b f_n dg\}_{n=1}^\infty$ je tedy cauchyovská a existuje tudíž $q \in \mathbb{R}$ takové, že platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n dg = q.$$

Ukážeme, že $\int_a^b f dg = q$. Budiž dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby platilo

$$\left| \int_a^b f_{n_0} dg - q \right| < \varepsilon \quad \text{a} \quad \|f_{n_0} - f\|_{\mathbb{BV}} < \varepsilon.$$

Dále, zvolme $\delta \in \mathcal{G}$ tak, aby pro každé $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta)$ platilo

$$\left| S_0(D, \xi) - \int_a^b f_{n_0} dg \right| < \varepsilon,$$

kde značíme $S_0(D, \xi) = S_{f_{n_0} \Delta g}(D, \xi)$. Potom pro libovolné $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta)$ máme

$$\begin{aligned} |S(D, \xi) - q| &\leq |S(D, \xi) - S_0(D, \xi)| + \left| S_0(D, \xi) - \int_a^b f_{n_0} dg \right| + \left| \int_a^b f_{n_0} dg - q \right| \\ &\leq 2\varepsilon (\|g\| + 1) \end{aligned}$$

odkud už snadno odvodíme, že platí

$$\int_a^b f dg = q = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n dg.$$

□

5.20. Věta. *Jestliže $f \in \mathbb{BV}$ a $g \in \mathbb{G}$, pak integrál $\int_a^b f dg$ existuje a platí (5.14).*

D ů k a z . Necht' $f = f^C + f^B$ je Jordanův rozklad funkce f . Potom $\int_a^b f^C dg$ existuje podle Lemmatu 5.17 a $\int_a^b f^B dg$ existuje podle Lemmatu 1.35 a Věty 5.19. Podle Věty 5.6 tedy existuje také $\int_a^b f dg$. Konečně, podle Věty 5.18 platí (5.14). \square

5.21. Důsledek. Jestliže $g_n \in \mathbb{G}$, $n \in \mathbb{N}$, a $g_n \Rightarrow g$ na $[a, b]$ pro $n \rightarrow \infty$, pak $g \in \mathbb{G}$ a pro každou funkci $f \in \mathbb{BV}$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f dg_n = \int_a^b f dg. \quad (5.15)$$

 \square

5.22. Věta (VĚTA O INTEGRACI PER-PARTES). Jestliže $f \in \mathbb{G}$ a $g \in \mathbb{BV}$, pak existují oba integrály

$$\int_a^b f dg \quad \text{a} \quad \int_a^b g df$$

a platí

$$\begin{aligned} \int_a^b f dg + \int_a^b g df &= f(b)g(b) - f(a)g(a) \\ &+ \sum_{t \in [a, b]} \left(\Delta^- f(t) \Delta^- g(t) - \Delta^+ f(t) \Delta^+ g(t) \right). \end{aligned} \quad (5.16)$$

D ů k a z . Důkaz povedeme tak, že bude současně alternativním důkazem existenčního tvrzení z Věty 5.20.

Necht' je tedy $f \in \mathbb{G}[a, b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a, b]$ a necht' je dáno $\varepsilon > 0$. Podle Věty 5.15 existuje integrál $\int_a^b f dg$ a můžeme tedy zvolit kalibr δ_1 tak, aby pro každé $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta_1)$ platilo

$$\left| S(D, \xi) - \int_a^b f dg \right| < \varepsilon. \quad (5.17)$$

Dále, pro každé $x \in [a, b]$ můžeme zvolit $\delta_2(x) > 0$ tak, aby platilo

$$\begin{cases} s \in (x - \delta_2(x), x) \cap [a, b] \implies |f(s) - f(x-)| < \varepsilon & \text{a} & |g(s) - g(x-)| < \varepsilon, \\ s \in (x, x + \delta_2(x)) \cap [a, b] \implies |f(s) - f(x+)| < \varepsilon & \text{a} & |g(s) - g(x+)| < \varepsilon. \end{cases} \quad (5.18)$$

Podle tvrzení (ii) Důsledku 3.7 má množina

$$M_\varepsilon = \{x \in [a, b] : |\Delta^+ f(x)| \geq \varepsilon \vee |\Delta^- f(x)| \geq \varepsilon\}$$

nejvýše konečný počet prvků. Pro každý bod $x \in [a, b] \setminus M_\varepsilon$ je tedy kladná jeho vzdálenost

$$\text{dist}(x, M_\varepsilon) = \min\{|x - y| : y \in M_\varepsilon\}$$

od množiny M_ε . Definujme

$$\delta_3(x) = \begin{cases} \text{dist}(x, M_\varepsilon) & \text{když } x \in [a, b] \setminus M_\varepsilon, \\ \delta_2(x) & \text{když } x \in M_\varepsilon \end{cases} \quad (5.19)$$

a

$$\delta_\varepsilon(x) = \min\{\delta_1(x), \delta_2(x), \delta_3(x)\} \quad \text{pro } x \in [a, b]. \quad (5.20)$$

Nechť

$$(D, \xi) = (\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}, (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)) \in \mathcal{A}(\delta_\varepsilon).$$

Potom, vzhledem k (5.19) a (5.20), musí být $M_\varepsilon \subset \Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m\}$. Jednoduchými úpravami zjistíme, že platí

$$\begin{aligned} & S_{f\Delta g}(D, \xi) + S_{g\Delta f}(D, \xi) \\ &= \sum_{j=1}^m (f(\xi_j)g(\alpha_j) - f(\xi_j)g(\alpha_{j-1}) + f(\alpha_j)g(\xi_j) - f(\alpha_{j-1})g(\xi_j)) \\ &= f(b)g(b) + \sum_{j=1}^m (f(\xi_j)g(\alpha_j) + f(\alpha_j)g(\xi_j) - f(\xi_j)g(\xi_j) - f(\alpha_j)g(\alpha_j)) \\ &\quad - f(a)g(a) - \sum_{j=1}^m (f(\xi_j)g(\alpha_{j-1}) + f(\alpha_{j-1})g(\xi_j) - f(\xi_j)g(\xi_j) - f(\alpha_{j-1})g(\alpha_{j-1})) \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \sum_{j=1}^m (f(\alpha_j) - f(\xi_j))(g(\alpha_j) - g(\xi_j)) \\ &\quad + \sum_{j=1}^m (f(\xi_j) - f(\alpha_{j-1}))(g(\xi_j) - g(\alpha_{j-1})). \end{aligned}$$

Dále,

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{a < \xi \leq b} \Delta^+ f(\xi) \Delta^+ g(\xi) - \sum_{a \leq \xi < b} \Delta^- f(\xi) \Delta^- g(\xi) \right| \\ & \leq \sum_{\xi \in M_\varepsilon \cap (a, b)} |\Delta^+ f(\xi)| |\Delta^+ g(\xi)| + \sum_{\xi \in [a, b] \setminus M_\varepsilon} |\Delta^+ f(\xi)| |\Delta^+ g(\xi)| \\ & \quad + \sum_{\xi \in M_\varepsilon \cap (a, b]} |\Delta^- f(\xi)| |\Delta^- g(\xi)| + \sum_{\xi \in (a, b] \setminus M_\varepsilon} |\Delta^- f(\xi)| |\Delta^- g(\xi)| \\ & \leq \left(\sum_{\xi \in M_\varepsilon \cap (a, b)} |\Delta^+ f(\xi)| + \sum_{\xi \in M_\varepsilon \cap (a, b]} |\Delta^- f(\xi)| + 2\varepsilon \right) \text{var}_a^b g < \infty. \end{aligned}$$

Máme tedy

$$\begin{aligned}
& \left| S_{g\Delta f}(D, \xi) - f(b)g(b) + f(a)g(a) + \int_a^b f \, dg \right. \\
& \quad \left. + \sum_{a < \xi \leq b} \Delta^+ f(\xi) \Delta^+ g(\xi) - \sum_{a \leq \xi < b} \Delta^- f(\xi) \Delta^- g(\xi) \right| \\
& \leq \left| \int_a^b f \, dg - S_{f\Delta g}(D, \xi) \right| \\
& \quad + \left| \sum_{j=1}^m (f(\xi_j) - f(\alpha_{j-1})) (g(\xi_j) - g(\alpha_{j-1})) - \sum_{a < \xi \leq b} \Delta^- f(\xi) \Delta^- g(\xi) \right| \\
& \quad + \left| \sum_{j=1}^m (f(\alpha_j) - f(\xi_j)) (g(\alpha_j) - g(\xi_j)) - \sum_{a \leq \xi < b} \Delta^+ f(\xi) \Delta^+ g(\xi) \right|.
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Dále,

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{j=1}^m (f(\alpha_j) - f(\xi_j)) (g(\alpha_j) - g(\xi_j)) - \sum_{a \leq \xi < b} \Delta^+ f(\xi) \Delta^+ g(\xi) \right| \\
& = \left| \sum_{j=1}^m (f(\alpha_j) - f(\xi_{j+}) + \Delta^+ f(\xi_j)) (g(\alpha_j) - g(\xi_{j+}) + \Delta^+ g(\xi_j)) \right. \\
& \quad \left. - \sum_{j=1}^m \Delta^+ f(\xi_j) \Delta^+ g(\xi_j) - \sum_{\xi \in [a, b) \setminus \Xi} \Delta^+ f(\xi) \Delta^+ g(\xi) \right| \\
& = \left| \sum_{j=1}^m (f(\alpha_j) - f(\xi_{j+})) (g(\alpha_j) - g(\xi_{j+})) + \sum_{j=1}^m (f(\alpha_j) - f(\xi_{j+})) \Delta^+ g(\xi_j) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{j=1}^m \Delta^+ f(\xi_j) (g(\alpha_j) - g(\xi_{j+})) - \sum_{\xi \in [a, b) \setminus \Xi} \Delta^+ f(\xi) \Delta^+ g(\xi) \right|
\end{aligned}$$

Předposlední součet přitom můžeme rozdělit do dvou součtů: jeden, ve kterém se sčítá přes ta j , pro která je $\xi_j \in M_\varepsilon$ a druhý, který obsahuje všechny ostatní sčítance. Odtud, vzhledem k (5.18) a vzhledem k definici množiny M_ε , plyne, že je

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{j=1}^m (f(\alpha_j) - f(\xi_j)) (g(\alpha_j) - g(\xi_j)) - \sum_{a \leq \xi < b} \Delta^+ f(\xi) \Delta^+ g(\xi) \right| \\
& \leq \left(2 \sum_{j=1}^m |g(\alpha_j) - g(\xi_{j+})| + 2 \sum_{j=1}^m |\Delta^+ g(\xi_j)| + \sum_{\xi \in M_\varepsilon} |\Delta^+ f(\xi_j)| \right) \varepsilon \leq K^+ \varepsilon,
\end{aligned}$$

kde

$$K^+ = 4 \operatorname{var}_a^b g + \sum_{\xi \in M_\varepsilon \cap (a,b)} |\Delta^+ f(\xi)| < \infty.$$

Podobně bychom ověřili, že platí

$$\left| \sum_{j=1}^m (f(\xi_j) - f(\alpha_{j-1})) (g(\xi_j) - g(\alpha_{j-1})) - \sum_{a < \xi \leq b} \Delta^- f(\xi) \Delta^- g(\xi) \right| \leq K^- \varepsilon,$$

kde

$$K^- = 4 \operatorname{var}_a^b g + \sum_{\xi \in M_\varepsilon \cap (a,b)} |\Delta^- f(\xi)| < \infty.$$

Dosazením do (5.21) a využitím ještě (5.17) konečně získáme odhad

$$\begin{aligned} & \left| S_{g\Delta f}(D, \xi) - f(b)g(b) + f(a)g(a) + \int_a^b f \, dg \right. \\ & \left. + \sum_{a < \xi \leq b} \Delta^+ f(\xi) \Delta^+ g(\xi) - \sum_{a \leq \xi < b} \Delta^- f(\xi) \Delta^- g(\xi) \right| \leq (1 + K^+ K^-) \varepsilon. \end{aligned}$$

Protože (D, ξ) bylo libovolné δ_ε -jemné dělení, plyne odtud už, že existuje integrál $\int_a^b g \, df$ a platí (5.16). \square

5.23. Lemma (SAKS-HENSTOCK). *Nechť $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jsou takové, že integrál $\int_a^b f \, dg$ existuje. Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno a nechť $\delta \in \mathcal{G}[a, b]$ je kalibr na $[a, b]$ takový, že platí*

$$\left| S(D, \xi) - \int_a^b f \, dg \right| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } (D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta).$$

Potom pro libovolný systém $([s_j, t_j], \tau_j)$, $j = 1, 2, \dots, k$ takový, že

$$\begin{cases} a \leq s_1 \leq \tau_1 \leq t_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_k \leq \tau_k \leq t_k \leq b, \\ [s_j, t_j] \subset [\tau_j - \delta(\tau_j), \tau_j + \delta(\tau_j)], \quad j = 1, 2, \dots, k, \end{cases} \quad (5.22)$$

platí nerovnost

$$\left| \sum_{j=1}^k f(\tau_j) [g(t_j) - g(s_j)] - \int_{s_j}^{t_j} f \, dg \right| < \varepsilon. \quad (5.23)$$

D ů k a z . Bud' dáno $\eta > 0$. Označme $t_0 = a$, $s_{k+1} = b$. Je-li $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ a $t_j < s_{j+1}$, pak můžeme najít kalibr δ^j a rozšířené dělení $(D^j, \xi^j) \in \mathcal{A}(\delta^j; [t_j, s_{j+1}])$ takové, že $\delta^j(x) \leq \delta(x)$ pro každé $x \in [a, b]$ a

$$\left| S(D^j, \xi^j) - \int_{t_j}^{s_{j+1}} f \, dg \right| < \frac{\eta}{k+1}. \quad (5.24)$$

Nyní sestavme δ -jemné rozšířené dělení $(\tilde{D}, \tilde{\xi})$ intervalu $[a, b]$ tak, aby platilo

$$\sum_{j=1}^k f(\tau_j) [g(t_j) - g(s_j)] + \sum_{j=0}^k S(D^j, \xi^j) = S(\tilde{D}, \tilde{\xi}).$$

(Je-li $t_j = s_{j+1}$, klademe $S(D^j, \xi^j) = 0$.) Vzhledem k předpokladům lemmatu tedy máme

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^k \left(f(\tau_j) [g(t_j) - g(s_j)] - \int_{s_j}^{t_j} f \, dg \right) + \sum_{j=0}^k \left(S(D^j, \xi^j) - \int_{t_j}^{s_{j+1}} f \, dg \right) \right| \\ &= \left| S(\tilde{D}, \tilde{\xi}) - \int_a^b f \, dg \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Odtud a z (5.24) dostáváme pro libovolné $\eta > 0$

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^k f(\tau_j) [g(t_j) - g(s_j)] - \int_{s_j}^{t_j} f \, dg \right| \\ & \leq \left| S(\tilde{D}, \tilde{\xi}) - \int_a^b f \, dg \right| + \left| \sum_{j=0}^k \left(S(D^j, \xi^j) - \int_{t_j}^{s_{j+1}} f \, dg \right) \right| < \varepsilon + \eta, \end{aligned}$$

tj. platí (5.23). □

5.24. Věta. *Nechť $\int_a^b f \, dg$ existuje a $c \in [a, b]$. Potom platí*

$$\lim_{x \rightarrow c, x \in [a, b]} \left(\int_a^x f \, dg + f(c) [g(c) - g(x)] \right) = \int_a^c f \, dg. \quad (5.25)$$

D ů k a z . Bud' dáno $\varepsilon > 0$ a nechť $\delta_\varepsilon \in \mathcal{G}[a, b]$ je takový kalibr, že

$$\left| S(D, \xi) - \int_a^b f \, dg \right| < \varepsilon$$

platí všechna $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta_\varepsilon)$. Pro každé $x \in (c, c + \delta_\varepsilon(c)) \cap [a, b]$ systém $\{[s_1, t_1], \tau_1\}$, kde $s_1 = \tau_1 = c$ a $t_1 = x$, vyhovuje podmínkám (5.22). Podle Saks-Henstockova lemmatu (Lemma 5.23) tedy máme

$$\left| f(c) [g(x) - g(c)] - \int_c^x f \, dg \right| < \varepsilon. \quad (5.26)$$

Podobně, je-li $x \in (c - \delta_\varepsilon(c), c) \cap [a, b]$, pak použitím Lemmatu 5.23 na systém $\{[x, c], c\}$ dostaneme nerovnost

$$\left| f(c) [g(c) - g(x)] - \int_x^c f \, dg \right| < \varepsilon$$

Pro každé $x \in (c - \delta_\varepsilon(c), c + \delta_\varepsilon(c)) \cap [a, b]$ tedy platí nerovnost (5.26) a tudíž také nerovnost

$$\left| \int_a^c f \, dg - \int_a^x f \, dg - f(c)[g(c) - g(x)] \right| = \left| \int_c^x f \, dg - f(c)[g(x) - g(c)] \right| < \varepsilon,$$

tj. platí (5.25). \square

5.25 . Důsledek. *Nechť $\int_a^b f \, dg$ existuje, $g \in \mathbb{G}[a, b]$ a nechť funkce $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je definována předpisem*

$$h(x) = \int_a^x f \, dg, \quad x \in [a, b].$$

Potom $h \in \mathbb{G}[a, b]$ a

$$h(t+) = h(t) + f(t)\Delta^+g(t) \quad a \quad h(s-) = h(s) - f(s)\Delta^-g(s) \quad \text{pro } t \in [a, b), \quad s \in (a, b]. \quad \square$$

5.26 . Věta (HAKE). (i) *Nechť $\int_a^x f \, dg$ existuje pro každé $x \in [a, b)$ a nechť*

$$\lim_{x \rightarrow b-} \left(\int_a^x f \, dg + f(b)[g(b) - g(x)] \right) = I \in \mathbb{R}.$$

Potom také

$$\int_a^b f \, dg = I.$$

(ii) *Nechť $\int_x^b f \, dg$ existuje pro každé $x \in (a, b]$ a nechť*

$$\lim_{x \rightarrow a+} \left(\int_x^b f \, dg + f(a)[g(x) - g(a)] \right) = I \in \mathbb{R}.$$

Potom také

$$\int_a^b f \, dg = I.$$

D ů k a z . (i) Bud' dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme $\Delta > 0$ tak, aby platilo

$$\left| \int_a^x f \, dg + f(b)[g(b) - g(x)] - I \right| < \varepsilon \quad \text{pro každé } x \in [b - \Delta, b). \quad (5.27)$$

Položme $x_0 = a$ a $x_k = b - \frac{1}{k}$ pro $k \in \mathbb{N}$. Posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ je rostoucí, $x_k \rightarrow b$ a

$$\forall k \in \mathbb{N} \exists \delta^k \in \mathcal{G}[a, x_k]: (D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta^k, [a, x_k]) \implies \left| S(D, \xi) - \int_a^{x_k} f \, dg \right| < \frac{\varepsilon}{2^k} \quad (5.28)$$

Pro každé $x \in [a, b)$ označme symbolem $k(x)$ jednoznačně určené přirozené číslo k takové, že $x \in [x_{k-1}, x_k)$. Dále, definujme kalibr δ^0 na $[a, b]$ tak, aby pro každé $k \in \mathbb{N}$ a $\tau \in [x_{k-1}, x_k)$ platilo

$$\delta^0(\tau) \leq \delta^k(\tau) \quad \text{a} \quad [\tau - \delta^0(\tau), \tau + \delta^0(\tau)] \subset [a, x_{k(\tau)}]$$

Nyní, necht' je dáno libovolné $x \in [a, b)$ a necht' $p \in \mathbb{N}$ je takové, že $x \in [x_{p-1}, x_p)$ (tj. $p = k(x)$) a necht'

$$(B, \eta) = (\{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m\}, (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m))$$

je libovolné δ^0 -jemné dělení intervalu $[a, x]$. Pro každé $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ pak máme

$$\eta_j - \delta^k(\eta_j) \leq \eta_j - \delta^k(\eta_j) \leq \beta_{j-1} < \beta_j \leq \eta_j + \delta^k(\eta_j) \leq \eta_j + \delta^k(\eta_j).$$

Vzhledem k (5.28) a definici kalibru δ^0 , tedy vidíme, že pro každé $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ systém

$$\{\beta_{j-1}, \eta_j, \beta_j, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad k(\eta_1) = k\}$$

splňuje předpoklady Saks-Henstockova lemmatu 5.23). Pro každé $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ tedy platí nerovnost

$$\left| \sum_{k(\eta_j)=k} f(\eta_j) [g(\beta_j) - g(\beta_{j-1})] - \int_{\beta_{j-1}}^{\beta_j} f \, dg \right| < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Tudíž

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^m \left(f(\eta_j) [g(\beta_j) - g(\beta_{j-1})] - \int_{\beta_{j-1}}^{\beta_j} f \, dg \right) \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^p \left(\sum_{k(\eta_j)=k} f(\eta_j) [g(\beta_j) - g(\beta_{j-1})] - \int_{\beta_{j-1}}^{\beta_j} f \, dg \right) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{k(\eta_j)=k} \left(f(\eta_j) [g(\beta_j) - g(\beta_{j-1})] - \int_{\beta_{j-1}}^{\beta_j} f \, dg \right) \right| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon, \end{aligned}$$

tj.

$$\left| \sum_{j=1}^m \left(f(\eta_j) [g(\beta_j) - g(\beta_{j-1})] - \int_{\beta_{j-1}}^{\beta_j} f \, dg \right) \right| < \varepsilon. \quad (5.29)$$

Nyní, položme

$$\delta^*(x) = \begin{cases} \min\{b-x, \Delta^0(x)\} & \text{pro } x \in [a, b), \\ \frac{\Delta}{2} & \text{pro } x = b. \end{cases}$$

Pak pro každé δ^* -jemné dělení

$$(\tilde{D}, \tilde{\xi}) = (\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}, (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m))$$

intervalu $[a, b]$ musí platit $\xi_m = \alpha_m = b$, $\alpha_{m-1} \in (b - \Delta, b)$ a tudíž, vzhledem k (5.27) a (5.29),

$$\begin{aligned} |S(D, \xi) - I| &= \left| \sum_{j=1}^{m-1} f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] + f(b) [g(b) - g(\alpha_{m-1})] - I \right| \\ &\leq \left| \sum_{j=1}^{m-1} f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - \int_a^{\alpha_{m-1}} f \, dg \right| \\ &\quad + \left| \int_a^{\alpha_{m-1}} f \, dg + f(b) [g(b) - g(\alpha_{m-1})] - I \right| < 2\varepsilon, \end{aligned}$$

t.j. $\int_a^b f \, dg = I$.

Důkaz tvrzení (ii) se provede analogicky a ponechávám ho čtenáři jako cvičení. \square

5.27. Lemma. *Nechť $\int_a^b f \, dg$ existuje. Potom pro každé $\varepsilon > 0$ existuje kalibr $\delta \in \mathcal{G}[a, b]$ takový, že platí*

$$\sum_{j=1}^m \left| f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f \, dg \right| < \varepsilon \quad (5.30)$$

pro každé $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta)$, $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$.

D ů k a z . Bud' dáno $\varepsilon > 0$ a necht' $\delta \in \mathcal{G}(\delta_\varepsilon)$ je kalibr takový, že

$$\left| S(D, \xi) - \int_a^b f \, dg \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

platí pro všechna δ -jemná rozšířená dělení (D, ξ) intervalu $[a, b]$. Nyní, necht'

$$(D, \xi) = (\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}, \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)) \in \mathcal{A}(\delta).$$

Označme

$$J^+ = \{j \in \{1, 2, \dots, m\} : f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f \, dg \geq 0\}$$

a

$$J^- = \{1, 2, \dots, m\} \setminus J^+.$$

Systém $\{([\alpha_{j-1}, \alpha_j], \xi_j), j \in J^+\}$ splňuje předpoklady (5.22) z Lemmatu 5.23 na místě $\{([s_j, t_j], \tau_j)\}$. Podle Lemmatu 5.23 tedy platí

$$\left| \sum_{j \in J^+} \left(f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f \, dg \right) \right| = \sum_{j \in J^+} \left| f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f \, dg \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Podobně

$$\left| \sum_{j \in J^-} \left(f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f \, dg \right) \right| = \sum_{j \in J^-} \left| f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f \, dg \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Odtud už nerovnost (5.30) okamžitě vyplývá. \square

5.28. Věta (VĚTA O SUBSTITUCI). *Je-li funkce $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ohraničená a integrál $\int_a^b f \, dg$ existuje, pak oba integrály*

$$\int_a^b h(x) \, d \left[\int_a^x f \, dg \right], \quad \int_a^b h(x) f(x) \, d[g(x)]$$

existují jakmile existuje alespoň jeden z nich a v takovém případě pak platí:

$$\int_a^b h(x) \, d \left[\int_a^x f \, dg \right] = \int_a^b h(x) f(x) \, d[g(x)].$$

D ů k a z . Podle Věty 5.7 je funkce

$$k(x) = \int_a^x f \, dg$$

definovaná pro každé $x \in [a, b]$.

a) Předpokládejme, že existuje integrál

$$\int_a^b h f \, dg.$$

Nechť je dáno $\varepsilon > 0$ a nechť δ_ε je kalibr na $[a, b]$ takový, že pro každé δ_ε -jemné dělení $(D, \xi) = (\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}, (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m))$ intervalu $[a, b]$ platí

$$\sum_{j=1}^m \left| h(\xi_j) f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} h f \, dg \right| < \varepsilon$$

a

$$\sum_{j=1}^m \left| f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f \, dg \right| < \varepsilon.$$

(Takový kalibr existuje podle Lemmatu 5.27.) Pro každé δ_ε -jemné dělení

$$(D, \xi) = (\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}, (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m))$$

intervalu $[a, b]$ tedy máme:

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{j=1}^m h(\xi_j) [k(\alpha_j) - k(\alpha_{j-1})] - \int_a^b h f dg \right| \\
& \leq \sum_{j=1}^m \left| h(\xi_j) \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f dg - h(\xi_j) f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] \right| \\
& \quad + \sum_{j=1}^m \left| h(\xi_j) f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} h f dg \right| \\
& \leq \|h\| \sum_{j=1}^m \left| \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f dg - f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] \right| \\
& \quad + \sum_{j=1}^m \left| h(\xi_j) f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} h f dg \right| \\
& \leq (\|h\| + 1) \varepsilon,
\end{aligned}$$

tj. existuje integrál $\int_a^b h dk$ a platí

$$\int_a^b h dk = \int_a^b h f dg.$$

b) Obrácená implikace by se dokazovala podobně – opět za vydatné pomoci Lemmatu 5.27. \square

5.29. Věta (VĚTA O DOMINOVANÉ KONVERGENCI). *Nechť $f, f_n \in \mathbb{G}[a, b]$,*

$$|f_n(x)| \leq M < \infty \text{ pro } n \in \mathbb{N} \quad \text{a} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \text{ na } [a, b].$$

Potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n dg = \int_a^b f dg \quad \text{pro každou funkci } g \in \mathbb{BV}[a, b].$$

Literatura

- [1] T. H. HILDEBRANDT. *Theory of Integration*. (Academic Press, New York-London, 1963).
- [2] CH. S. HÖNIG. *Volterra Stieltjes-Integral Equations*, (North Holland and American Elsevier, Mathematics Studies 16, Amsterdam and New York, 1975).
- [3] V. JARNÍK. *Diferenciální počet II*.
- [4] V. JARNÍK. *Integrální počet II*.
- [5] M. TVRDÝ. *Differential and integral equations in the space of regulated functions*. *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics* vol.25 (2002), pp. 1–104.
- [6] Š. SCHWABIK. *Integrace v R (Kurzweilova teorie)*. (Karolinum, Universita Karlova v Praze, 1999)