Zkouška z logiky, 18. 1. 2007

Jméno:

(1) Definujte $\wedge$ pomocí $\vee$ a $\neg$.

(2) Definujte $\rightarrow$ pomocí $\wedge$ a $\neg$.

(3) Napište DNF formuli s atomy p, q, r, která je pravdivá právě když lichý počet z atomů p, q, r je pravdivý.

(4) Převeďte formuli $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$ do CNF.

(5) Převeďte formuli $\neg\exists x(A(x) \wedge \forall y B(y))$ do prenexní formy.

(6) Převeďte formuli $\exists x A(x) \vee \exists x B(x)$ do prenexní formy.

(7) Je formule $\forall x \exists y \forall z R(x,y,z) \vee \exists x \forall y \exists z \neg R(x,y,z)$ logicky platná? Proč?

(8) $L = \{0, 1, +, =\}$. Existuje L-sentence, která je pravdivá v $\mathbf{Z}$ (celá čísla) ale ne v $\mathbf{R}$ (reálná čísla) při obvyklé interpretaci funkčních symbolů? Jestliže ano, dejte příklad.

(9) $L = \{R(x,y), =\}$. Napište L-sentenci ψ takovou, že každá L-struktura $\mathbf{M} = (M, R^M)$ splňuje ψ právě když R^M *je graf prosté funkce na* M.

(10) Napište L-sentenci (L z (9)), která je splnitelná ale nemá konečný model (a to dokažte).

(11) $L = \{x < y, =\}$. Dokažte, že existuje L-struktura $\mathbf{M}$ elementárně ekvivalentní ale neizomorfní s $(\mathbf{Q}, <)$ (racionální čísla).

(12) Najděte otevřenou formuli $\varphi(x, y)$, která je v $(\mathbf{Q}, <)$ ekvivalentní formuli $\neg\exists z(x < z \wedge z < y)$.

(13) Ordinální aritmetika: Seřaďte do neklesající posloupnosti ordinální čísla

$\omega^2 + 1, \omega + \omega^2 + \omega, \omega \cdot 2 + \omega^2, \omega + \omega + \omega^2,\ 1 + \omega + \omega^2,\ ,\omega^2 + \omega,\ \omega + 1 + \omega^2$.

(14) Kardinální aritmetika: $\aleph_{14} + (\aleph_{15} \cdot \aleph_0) =?$.

(15) Dejte příklad tří nekonečných množin navzájem různých mohutností.

(16) Dokažte, že množina racionálních čísel $\mathbf{Q}$ je spočetná.

(17) Které proměnné mají aspoň jeden volný výskyt ve formuli

$$x < 0 \to \exists z(x < z \wedge z < y) \ ?$$

(18) Napište formuli, která vznikne dosazením konstanty c za všechny volné výskyty všech proměnných ve formuli z **(17)**.

(19) $L = \{x \circ y, =\}$. Napište L-sentenci ψ takovou, že ψ platí v $\mathbf{R}$, je-li $\circ$ interpretována sčítáním, ale ne je-li interpretována násobením.

(20) Zformulujte Větu o kompaktnosti pro logiku 1. řádu a naznačte hlavní body jejího důkazu.

(21) Nechť L je libovolný jayzk. Existuje L-sentence, která má libovolně velký konečný model ale nemá žádný nekonečný model? Dokažte svoji odpověď.

(22) Zformulujte Zornovo lemma.