Zkouška z logiky, 23. 1. 2008

Jméno / přezdívka:

(1) Je formule $(p \wedge \neg p) \vee q$ splnitelná? Jestli ne, proč. Jestli ano, napište nějaké splňující ohodnocení.

(2) Napište tabulku pravdivostních hodnot formule

$$p \rightarrow [(q \rightarrow \neg r) \wedge (\neg q \rightarrow r)] \ .$$

(3) Převeďte formuli z úlohy (2) do DNF.

(4) Převeďte formuli $\neg \forall x [A(x) \vee \forall y B(y)]$ do prenexní formy.

(5) Je formule $\forall x P(x) \vee \exists x P(x)$ logicky platná? Jestli ano, proč? Jestli ne, najděte strukturu, kde neplatí.

(6) Podtrhněte všechny volné výskyty proměnných ve formuli

$$x < 0 \to \forall x \exists z (x < z \wedge z < y) \ .$$

(7) $L = \{R(x,y)\}$. Napište L-sentenci ψ takovou, že každá L-struktura $\mathbf{M} = (M, R^M)$ splňuje ψ právě když: "R^M je relace ekvivalence na nosiči M."

(8) Je pravdivé tvrzení: "Má-li ψ jen nekonečné modely, pak $\neg\psi$ má jen konečné modely?" Jestli ano, proč. Jestli ne, dejte příklad ψ pro níž tvrzení neplatí.

(9) $L = \{0, 1, +, \cdot, <\}$. Jsou L-struktury $\mathbf{Z}$ a $\mathbf{R}$ (celá čísla a reálná čísla při obvyklé interpretaci symbolů z L) elementárně ekvivalentní? Jestli ano, proč. Jestli ne, napište L-sentenci pravdivou v $\mathbf{Z}$ ale ne v $\mathbf{R}$.

(10) Existuje L-sentence (libovolné L), která má libovolně velký konečný model ale nemá nekonečný model? Jestli ano, dejte příklad. Jestli ne, proč.

(11) Najděte otevřenou formuli $\varphi(x, y)$, která je v $(\mathbf{Q}, <)$ ekvivalentní formuli $\neg\exists z(x < z \wedge z < y)$.

(12) $L = \{x \circ y, =\}$. Napište L-sentenci ψ takovou, že ψ platí v $\mathbf{R}$, je-li funkční symbol $\circ$ interpretován sčítáním, ale ne je-li interpretován násobením.

(13) ZAkroužkujte ta uspořádání, která jsou dobrá:

$$(\mathbf{N}, <), \quad (\mathbf{Z}, <), \quad (\mathbf{Q}, <), \quad (\mathbf{Q}^{\geq 0}, <)$$

($\mathbf{Q}^{\geq 0}$ jsou nezaporná racionální čísla).

(14) Dejte příklad tří nekonečných množin navzájem různých mohutností.

(15) Zformulujte (přesně!) Zornovo lemma.