Zkouška z logiky, 6. 2. 2008

Jméno / přezdívka:

(1) Je formule $(p \vee \neg p) \wedge q$ tautologie? Jestli ano, proč. Jestli ne, napište nějaké ohodnocení, které ji nesplňuje.

(2) Napište tabulku pravdivostních hodnot formule

$$[(q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r)] \rightarrow p \ .$$

(3) Převeďte formuli z úlohy (2) do DNF.

(4) Převeďte formuli $\neg \exists x[\neg A(x) \wedge \forall y B(y)]$ do prenexní formy.

(5) Je formule $\forall x \exists y R(x, y) \vee \exists x \forall y R(x, y)$ logicky platná? Jestli ano, proč? Jestli ne, najděte strukturu, kde neplatí.

(6) Podtrhněte všechny volné výskyty proměnných ve formuli

$$y > 0 \vee \exists x \forall y (x \cdot y = 0 \wedge x < z) \ .$$

(7) $L = \{R(x, y)\}$. Napište L-sentenci ψ takovou, že každá L-struktura $\mathbf{M} = (M, R^M)$ splňuje ψ právě když: "R^M je ostré lineární uspořádání na nosiči M."

(8) Je pravdivé tvrzení: "Splňují-li všechny konečné L-struktury L-sentenci ψ, pak všechny nekonečné L-struktury splňují $\neg\psi$?" Jestli ano, proč. Jestli ne, dejte příklad ψ pro níž tvrzení neplatí.

(9) $L = \{0, 1, <\}$. Jsou L-struktury $\mathbf{Z}$ a $\mathbf{Q}$ (celá čísla a racionální čísla při obvyklé interpretaci symbolů z L) elementárně ekvivalentní? Jestli ano, proč. Jestli ne, napište L-sentenci pravdivou v $\mathbf{Z}$ ale ne v $\mathbf{Q}$.

(10) Mohou existovat dvě nekonečné L-struktury (libovolné L), které jsou elementárně ekvivalentní a přitom je jedna spočetná a druhá ne? Jestli ano, dejte příklad. Jestli ne, proč.

(11) Najděte otevřenou formuli $\varphi(x, y)$, která je v $(\mathbf{Z}, 0, 1, +, <)$ ekvivalentní formuli $\exists z(x < z \wedge z < y)$.

(12) $L = \{0, 1, x \circ y\}$. Napište L-sentenci ψ takovou, že ψ platí v $\mathbf{Z}$, je-li funkční symbol $\circ$ interpretován sčítáním, ale ne je-li interpretován násobením (konstanty 0 a 1 jsou v obou případech interpretovány obvyklým způsobem).

(13) Zakroužkujte ta uspořádání, která jsou dobrá:

$$(\mathbf{N}, <), \quad (\mathbf{S}, <), \quad (\mathbf{L}, <), \quad ([0,1], <), \quad ((0,1], <)$$

kde: $\mathbf{N}$ = přirozená čísla, $\mathbf{S}$ = sudá přirozená čísla, $\mathbf{L}$ = lichá přirozená čísla, a $[0,1]$ a $(0,1]$ jsou uzavřený resp. polouzavřený interval reálných čísel.

(14) Dejte příklad dvou nekonečných nespočetných množin navzájem různých mohutností.

(15) Definujte dobrá uspořádání a zformulujte princip dobrého uspořádání

WO.