Stieltjesův integrál

Milan Tvrdý

3. března 2009

Obsah

Základní úmluvy a označení

(i) $\mathbb{N}$ je *množina přirozených čísel* (mezi něž nezahrnujeme nulu).

(ii) $\mathbb{R}$ je *množina reálných čísel*, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

(iii) Je-li $-\infty < a < b < \infty$, pak $[a, b]$ značí *uzavřený* interval $\{t \in \mathbb{R} : a \leq t \leq b\}$ a (a, b) je *otevřený* interval $\{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}$. Příslušné *polouzavřené* (resp. *polootevřené*) intervaly značíme $[a, b)$ a $(a, b]$. Ve všech těchto případech nazýváme body a, b *krajní body* intervalu. V případě $a = b \in \mathbb{R}$ říkáme, že interval $[a, b]$ *degeneruje* na jednobodovou množinu a píšeme $[a, b] = [a]$. Budeme též užívat obvyklé značení I^o pro vnitřek intervalu I. Je-li I interval (uzavřený resp. otevřený resp. polootevřený) s krajními body a, b značíme symbolem $|I| = |b - a|$ jeho délku ($|[a]| = 0$).

(iv) Konečný systém bodů $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ intervalu $[a, b]$ nazveme *dělením intervalu* $[a, b]$, jestliže platí $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_m = b$. Množinu všech dělení intervalu $[a, b]$ značíme $\mathscr{D}[a, b]$. Je-li $D \in \mathscr{D}[a, b]$, pak jeho elementy zpravidla značíme α_i. Pro dané dělení $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, značíme $\nu(D) = m$ a $|D| = \max_{i=1,2,\dots,\nu(d)}(\alpha_i - \alpha_{i-1})$. Bude-li to výhodné, budeme též dělení D intervalu $[a, b]$ chápat jako systém podintervalů $\{I_j; j = 1, 2, \dots, \nu(D)\}$ takových, že platí

$$\bigcup_{j=1}^{\nu(D)} I_j = [a, b], \quad \text{přičemž } I_j^o \cap I_k^o = \emptyset \quad \text{jakmile } j \neq k.$$

Jestliže dělení D' a $D'' \in \mathscr{D}[a, b]$ jsou taková, že všechny elementy z D' jsou obsaženy v D'', říkáme, že D'' je *zjemnění* dělení D' a značíme $D' \subset D''$.

(v) Dvojici $(D, \xi) \in \mathscr{D}[a, b] \times \mathbb{R}^{\nu(D)}$ nazveme *rozšířeným dělením* intervalu $[a, b]$, jestliže platí

$$\alpha_{i-1} \leq \xi_i \leq \alpha_i \quad \text{pro všechna } i = 1, 2, \dots, \nu(D).$$

Množinu všech rozšířených dělení intervalu $[a, b]$ značíme $\mathscr{P}[a, b]$.

(vi) Pro libovolné funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ a $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ a reálné číslo λ součtem $f + g$ funkcí f a g rozumíme funkci $(f + g)(t) = f(t) + g(t)$, $t \in [a, b]$, a násobek λf funkce f číslem λ je funkce $(\lambda f)(t) = \lambda f(t)$, $t \in [a, b]$.

(vii) Pro libovolnou funkci $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ značíme

$$\|f\| = \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|.$$

(Není-li funkce f ohraničená na intervalu $[a, b]$, pak je ovšem $\|f\| = \infty$.)

(ix) $\mathbb{C}[a,b]$ je prostor reálných funkcí spojitých na intervalu $[a,b]$ a zobrazení

$$f \in \mathbb{C}[a,b] \to \|f\|$$

definuje normu na $\mathbb{C}[a,b]$.

(x) $\mathbb{L}^1[a,b]$ je prostor reálných funkcí integrovatelných (ve smyslu Lebesgueově) na intervalu $[a,b]$ (s rovností $f = g \in \mathbb{L}^1[a,b] \iff f(x) = g(x)$ s.v. na $[a,b]$)) a zobrazení

$$f \in \mathbb{L}^1[a,b] \to \|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

definuje normu na $\mathbb{L}^1[a,b]$.

(xi) Pro danou množinu $M \subset \mathbb{R}$ symbolem χ_M značíme její charakteristickou funkci, tj. funkci $\mathbb{R} \to \{0,1\}$ definovanou předpisem:

$$\chi_M(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \in M, \\ 0 & \text{pro } t \notin M. \end{cases}$$

(xii) Jestliže $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $t \in [a,b)$ a $s \in (a,b]$ a jestliže existují konečné jednostranné limity $\lim_{\tau \to t+} f(\tau)$ a $\lim_{\tau \to s-} f(\tau)$, pak značíme

$$f(t+) = \lim_{\tau \to t+} f(\tau), \quad f(s-) = \lim_{\tau \to s-} f(\tau),$$

$$\Delta^+ f(t) = f(t+) - f(t), \quad \Delta^- f(s) = f(s) - f(s-),$$

$$\Delta f(x) = f(x+) - f(x-) \quad \text{pro } x \in (a,b).$$

Dále, budeme užívat následující úmluvu:

$$f(a-) = f(a), \quad f(b+) = f(b), \quad \Delta^- f(a) = \Delta^+ f(b) = 0.$$

Kapitola 1

Funkce s konečnou variací.

Výklad v této kapitole se opírá zejména o monografie V. Jarníka *Diferenciální počet II* [3, Kapitola V] a *Integrální počet II* [4, Kapitola V] a dále o odstavec II.6 v monografii T.H.Hildebrandta *Theory of Integration* [1] a kapitolu XIII v monografii Š. Schwabika *Integrace v R (Kurzweilova teorie)* [6].

1.1. Definice. Pro danou funkci $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ a dělení D intervalu $[a,b]$,

$$D = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \in \mathscr{D}[a,b],$$

definujeme

$$V(f,D) = \sum_{j=1}^{\nu(d)} |f(\alpha_j) - f(\alpha_{j-1})| \tag{1.1}$$

a

$$\operatorname{var}_a^b f = \sup_{D \in \mathscr{D}[a,b]} V(f,D). \tag{1.2}$$

Je-li $a = b$, definujeme $\operatorname{var}_a^b f = \operatorname{var}_a^a f = 0$. Veličinu $\operatorname{var}_a^b f$ nazýváme *variace funkce f na intervalu $[a,b]$*. Je-li $\operatorname{var}_a^b f < \infty$, říkáme, že funkce f má *konečnou variaci na* $[a,b]$. Množinu funkcí s konečnou variací na $[a,b]$ značíme $\mathbb{BV}[a,b]$.

1.2. Cvičení. Dokažte následující vlastnosti variace a funkcí s konečnou variací.

(i) Pro každou funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ platí $\operatorname{var}_a^b f \ge 0$.

(ii) Pro libovolné dvě funkce $f_1,\ f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ a reálné číslo c platí

$$\operatorname{var}_a^b (f_1 + f_2) \le \operatorname{var}_a^b f_1 + \operatorname{var}_a^b f_2 \quad \text{a} \quad \operatorname{var}_a^b (c\, f_1) = |c| \operatorname{var}_a^b f_1.$$

(iii) Je-li $[c,d] \subset [a,b]$, pak pro každou funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ platí

$$|f(d) - f(c)| \le \operatorname{var}_c^d f \le \operatorname{var}_a^b f.$$

(iv) Pro každou funkci $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ platí $|f(x)| \le \|f\| \le \|f\|_{\mathbb{BV}}$ na $[a,b]$. (Každá funkce $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ je tedy ohraničená na $[a,b]$.)

(v) $\operatorname{var}_a^b f = 0 \iff f(x) \equiv f(a)$ na $[a,b]$.

(vi) Zavedeme-li pro funkce z množiny $\mathbb{BV}[a,b]$ obvyklým způsobem operace sčítání a násobení skalárem (viz 0.(vi)), stane se lineárním normovaným prostorem vzhledem k těmto operacím a vzhledem k normě $\|.\|_{\mathbb{BV}}$ definované předpisem

$$f \in \mathbb{BV}[a,b] \to \|f\|_{\mathbb{BV}} = |f(a)| + \operatorname{var}_a^b f.$$

(vii) Pro každou funkci f monotonní na $[a,b]$ platí $\operatorname{var}_a^b f = |f(b) - f(a)|$.

(viii) Pro libovolná dělení D' a D'' intervalu $[a,b]$ taková, že $D'' \subset D'$ a libovolnou funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je $V(f,D'') \le V(f,D')$.

(ix) $\operatorname{var}_a^b f = d \in \mathbb{R} \iff (\forall \varepsilon > 0\ \exists\, D_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b] \colon D_\varepsilon \subset D \implies d - \varepsilon \le V(f,D) \le d)$.

(x) $\operatorname{var}_a^b f = \infty \iff (\forall\, K > 0\, \exists\, D_K \in \mathscr{D}[a,b] : V(f,D_K) \ge K)$.

(xi) Pro libovolné dělení $D_0 \in \mathscr{D}[a,b]$ platí $\operatorname{var}_a^b f = \sup_{D \supset D_0} V(f,D)$.

(xii) Dokažte Větu 1.3.

1.3. Věta. *Pro každé $c \in (a,b)$ a každou funkci $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ platí:*

$$\operatorname{var}_a^b f = \operatorname{var}_a^c f + \operatorname{var}_c^b f.$$

□

1.4. Věta. $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ *tehdy a jen tehdy, když existují funkce f_1 a f_2 neklesající na $[a,b]$ a takové, že platí $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ pro každé $x \in [a,b]$.*

D ů k a z . Stačí dokázat, že pro každou funkci $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ existují funkce f_1 a f_2 neklesající na $[a,b]$ a takové, že platí

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) \quad \text{na } [a,b].$$

Nechť tedy $f \in \mathbb{BV}[a,b]$. Položme

$$f_1(x) = \operatorname{var}_a^x f \quad \text{a} \quad f_2(x) = f_1(x) - f(x) \quad \text{pro} \ \ x \in [a,b].$$

Potom f_1 je evidentně neklesající na $[a,b]$. Dále, pro $x_2 \ge x_1$ máme vzhledem ke Větě 1.3

$$f_2(x_2) = f_1(x_1) + \operatorname{var}_{x_1}^{x_2} f - f(x_2)$$

a

$$f_2(x_2) - f_2(x_1) = \operatorname{var}_{x_1}^{x_2} f - (f(x_2) - f(x_1)) \ge 0,$$

t.zn., že f_2 je také neklesající na $[a,b]$. □

1.5. Cvičení. Nechť $f \in \mathbb{BV}[a,b]$. Dokažte, že funkce

$$p(x) = \sup_{D \in \mathscr{D}[a,x]} \sum_{j=1}^{\nu(d)} (f(\alpha_j) - f(\alpha_{j-1}))^+ \quad \text{a} \quad n(x) = \sup_{D \in \mathscr{D}[a,x]} \sum_{j=1}^{\nu(d)} (f(\alpha_j) - f(\alpha_{j-1}))^-$$

jsou obě monotonní na $[a,b]$ a platí $f(x) = f(a) + p(x) - n(x)$ na $[a,b]$. [1]

1.6. Důsledek. *Pro každou funkci $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ a pro všechna $t \in [a,b)$ a $s \in (a,b]$ existují konečné limity*

$$f(t+) = \lim_{\tau \to t+} f(\tau) \quad a \quad f(s-) = \lim_{\tau \to s-} f(\tau)$$

(tj. f může mít v $[a,b]$ pouze nespojitosti 1.druhu).

D ů k a z plyne z Věty 1.4 a z toho, že uvedené limity existují pro každou funkci monotonní na $[a,b]$. Např. je-li f neklesající na $[a,b]$, $t \in (a,b]$ a $t_n \searrow t+$, pak

$$\lim_{n \to \infty} f(t_n) = \in f_{n \in \mathbb{N}} f(t_n).$$

□

1.7. Věta. *Každá funkce $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ má nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti na intervalu $[a,b]$.*

D ů k a z plyne z Důsledku 1.6 a z následujícího Lemmatu. □

Lemma. *Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval, $f\colon J \to \mathbb{R}$ a M je množina bodů nespojitosti 1. druhu funkce f v J. Potom M je nejvýše spočetná.*

D ů k a z . Označme

$$M^+ = \{x \in J\colon f(x+) \neq f(x)\}, \qquad M^- = \{x \in J\colon f(x-) \neq f(x)\}$$

a

$$M_1^+ = \{x \in M^+\colon f(x+) > f(x)\}, \quad M_2^+ = \{x \in M^+\colon f(x+) < f(x)\}.$$

Potom je $M = M^+ \cup M^-$ a $M^+ = M_1^+ \cup M_2^+$. Uspořádejme množinu $\mathbb{P}$ racionálních čísel tak, aby platilo $\mathbb{P} = \{r_k\}_{k=1}^{\infty}$. Dále, definujme funkci $r\colon M_1^+ \to \mathbb{P}$ předpisem

$$r(x) = r_j \iff r_j \in (f(x), f(x+)) \ \wedge \ \{r_1, r_2, \ldots, r_{j-1}\} \cap (f(x), f(x+)) = \emptyset$$

a pro každé $q \in \mathbb{P}$ označme

$$r_{-1}(q) = \{x \in M_1^+\colon r(x) = q\}.$$

Máme

$$M_1^+ = \bigcup_{q \in \mathbb{P}} r_{-1}(q).$$

[1]Pro $A \in \mathbb{R}$ značíme $A^+ = \max(A,0)$ a $A^- = \max(-A,0)$. Připomeňme, že platí $A^+ + A^- = |A|$ a $A^+ - A^- = A$ pro každé $A \in \mathbb{R}$.

Ukážeme-li tedy, že každá množina $r_{-1}(q)$, $q \in \mathbb{P}$, je spočetná, budeme mít současně také dokázáno, že i množina M_1^+ je spočetná.

Nechť je tedy dáno libovolné $q \in \mathbb{P}$. Vzhledem k definici množiny M_1^+ a zobrazení r, pro každé $x \in r_{-1}(q)$ existuje $\delta(x) > 0$ takové, že $x < y < x + \delta(x) \implies f(y) > r(x)$. Jsou-li x_1, $x_2 \in r_{-1}(q)$ takové, že $x_1 < x_2$ a $r(x_1) = r(x_2) = q$, pak musí platit

$$(x_1, x_1 + \delta(x_1)) \cap (x_2, x_2 + \delta(x_2)) = \emptyset.$$

Vskutku, kdyby bylo $x_1 < x_2 < x_1 + \delta(x_1)$, bylo by též (vzhledem k definici δ)

$$q = r(x_1) < f(x_2) < r(x_2) = q,$$

spor. Systém intervalů$\{(x, x + \delta(x)),\ x \in r_{-1}(q)\}$ je tedy disjunktní. V každém z nich můžeme zvolit jediné racionální číslo $r \in (x, x + \delta(x))$ a tím definovat prosté zobrazení $r_{-1}(q)$ do $\mathbb{P}$. To znamená, že každá množina $r_{-1}(q)$, $q \in \mathbb{P}$, je spočetná.

b) Protože $M_2^+ = \{x \in J : -f(x) < -f(x+)\}$, můžeme použít část a) tohoto důkazu k důkazu spočetnosti množiny M_2^+.

c) Konečně, $M^- = \{x \in J : f(-x) \neq f(-x+)\}$, takže podle částí a)–b) tohoto důkazu je také M^- spočetná množina. $\square$

1.8. Cvičení. Přesvědčete se, že důkaz předešlého lemmatu v sobě obsahuje též důkaz následujícího tvrzení:

Každý disjunktní systém intervalů v $\mathbb{R}$ je spočetný.

1.9. Věta. *Nechť $f \in \mathbb{BV}[a, b]$. Potom*

$$\sum_{t\in[a,b)} |\Delta^+ f(t)| + \sum_{t\in(a,b]} |\Delta^- f(t)| < \infty. \tag{1.3}$$

D ů k a z . Nechť S značí množinu bodů nespojitosti funkce f ležících v otevřeném intervalu (a, b). Podle Věty 1.7 je S nejvýše spočetná. Je-li konečná, je tvrzení věty evidentní. Nechť $S = \{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Předpokládejme na chvíli, že funkce f je na intervalu $[a, b]$ neklesající. Potom

$$\sum_{t\in[a,b)} |\Delta^+ f(t)| + \sum_{t\in(a,b]} |\Delta^- f(t)| = \Delta^+ f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} (\Delta^+ f(s_k) + \Delta^- f(s_k)) + \Delta^- f(b).$$

Nechť $n \in \mathbb{N} \cup [2, \infty)$ je dáno a nechť σ_k, $k = 0, 1, \ldots, n+1$ jsou body intervalu $[a, b]$ takové, že platí

$$a = \sigma_0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_n < \sigma_{n+1} = b \quad \text{a} \quad \{\sigma_k\}_{k=0}^{n+1} = \{a\} \cup S \cup \{b\}.$$

Zvolme dále t_k, $k = 1, 2, \ldots, n+1$, tak, aby platilo

$$a < t_1 < \sigma_1 < t_2 < \sigma_2 < \cdots < \sigma_n < t_{n+1} < b.$$

Potom

$$
\begin{aligned}
&\Delta^+ f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \big(\Delta^+ f(s_k) + \Delta^- f(s_k)\big) + \Delta^- f(b) \\
&\quad = f(a+) - f(a) + f(\sigma_1) - f(\sigma_1-) + f(\sigma_1+) - f(\sigma_1) \\
&\qquad + \cdots + f(\sigma_n+) - f(\sigma_n) + f(b) - f(b-) \\
&\quad \le f(a+) - f(a) + f(t_1) - f(a+) + f(\sigma_1-) - f(t_1) + f(\sigma_1) - f(\sigma_1-) \\
&\qquad + f(\sigma_1+) - f(\sigma_1) + f(t_2) - f(\sigma_1+) + f(\sigma_2-) - f(t_2) \\
&\qquad + \cdots + f(\sigma_n+) - f(\sigma_n) + f(t_n) - f(\sigma_n+) + f(b-) - f(t_n) + f(b) - f(b-) \\
&\quad = f(b) - f(a).
\end{aligned}
$$

Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ tedy platí

$$
\Delta^+ f(a) + \sum_{k=0}^{n} \big(\Delta^+ f(s_k) + \Delta^- f(s_k)\big) + \Delta^- f(b) \le f(b) - f(a)
$$

a tudíž

$$
\sum_{t \in [a,b)} |\Delta^+ f(t)| + \sum_{t \in (a,b]} |\Delta^- f(t)| \le f(b) - f(a).
$$

Tvrzení (1.3) tedy platí pro každou funkci f neklesající na $[a,b]$. Důkaz věty nyní můžeme snadno dokončit použitím Věty 1.4. □

1.10. Věta. *Prostor* $\mathbb{BV}[a,b]$ *je Banachův prostor* (*tj. úplný normovaný prostor*).

D ů k a z . Dokážeme, že $\mathbb{BV}[a,b]$ je úplný prostor, tj. že každá posloupnost cauchyovská v $\mathbb{BV}[a,b]$ má v $\mathbb{BV}[a,b]$ limitu. Předpokládejme tedy, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{BV}[a,b]$ je cauchyovská v $\mathbb{BV}[a,b]$.
a) Potom pro všechna $x \in [a,b]$ platí

$$
\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon : n, m \ge n_\varepsilon \implies |f_n(x) - f_m(x)| \le \|f_n - f_m\|_{\mathbb{BV}} < \varepsilon. \tag{1.4}
$$

Speciálně je tedy pro každé $x \in [a,b]$ cauchyovská posloupnost reálných čísel $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ a tudíž pro každé $x \in [a,b]$ existuje konečná limita

$$
\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).
$$

b) Nechť je dáno libovolné $\varepsilon > 0$ a nechť $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ má vlastnost (1.4). Potom pro každé $x \in [a,b]$ máme také

$$
|f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f_{n_\varepsilon}(x)| \le \varepsilon
$$

a tudíž pro každé $n \geq n_\varepsilon$ a každé $x \in [a,b]$ platí

$$|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)| + |f_{n_\varepsilon}(x) - f_n(x)| < 2\,\varepsilon.$$

To ovšem znamená, že

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0,$$

neboli, posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje k f stejnoměrně na $[a,b]$.

c) Číselná posloupnost $\{\operatorname{var}_a^b f_n\}_{n=1}^\infty$ je ohraničená. Podle Bolzanovy-Weierstraßovy věty z ní tedy lze vybrat podposloupnost $\{\operatorname{var}_a^b f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, pro kterou platí:

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} \operatorname{var}_a^b f_{n_k} = d < \infty,$$

tj.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, k_\varepsilon : k \geq k_\varepsilon \wedge D \in \mathscr{D}[a,b] \implies V(f_{n_k}, D) < d + \varepsilon$$

a

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall D \in \mathscr{D}[a,b] : V(f,D) = \lim_{k\to\infty} V(f_{n_k}, D) \leq d + \varepsilon.$$

Odtud ovšem už plyne, že je

$$\operatorname{var}_a^b f = \sup_{D \in \mathscr{D}[a,b]} V(f,D) \leq d < \infty,$$

tj. $f \in \mathbb{BV}[a,b]$.

d) Použijeme-li pro každé $n \in \mathbb{N}$ část c) tohoto důkazu na posloupnost $\{f_n - f_m\}_{m=1}^\infty$ (místo $\{f_n\}_{n=1}^\infty$), dostaneme pro nějakou podposloupnost $\{f_{m_k}\}_{k=1}^\infty$ nerovnost

$$\operatorname{var}_a^b (f_n - f) \leq \lim_{k\to\infty} \operatorname{var}_a^b (f_n - f_{m_k}),$$

což, vzhledem k (1.4) a definici funkce f, znamená, že je

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\mathbb{BV}} = 0.$$

□

1.11. Cvičení. Definujme pro $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ x \sin(\frac{\pi}{x}) & \text{pro } \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Ukažte, že $f_n \in \mathbb{BV}[0,1]$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,1]$, kde

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{\pi}{x}) & \text{pro } x > 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases},$$

a přitom f nemá konečnou variaci na $[0,1]$.

Nyní bude našim cílem vyšetřit vlastnosti funkcí s konečnou variací vzhledem k derivování. K tomu je účelné zavést následující definice.

1.12. Definice. Množina $M \subset \mathbb{R}$ má *nulovou míru* ($\mu(M) = 0$), když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje spočetný systém otevřených intervalů$\{I_j,\ j \in \mathbb{N}\}$ takový, že je

$$M \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \quad \text{a} \quad \sum_{j=1}^{\infty} |I_j| < \varepsilon.$$

Řekneme, že nějaká vlastnost platí *skoro všude* (s.v.) na intervalu $[a, b]$, jestliže existuje množina $M \subset [a, b]$ nulové míry taková, že tato vlastnost platí pro každé $x \in [a, b] \setminus M$.

1.13. Cvičení.

(i) Každá spočetná podmnožina S v $\mathbb{R}$ má nulovou míru.

(ii) Sjednocení spočetně mnoha množin nulové míry má nulovou míru.

1.14. Definice. Funkce $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ je *shora (zdola) polospojitá v bodě* $x_0 \in [a, b]$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in [a, b] \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ platí

$$F(x) < F(x_0) + \varepsilon \qquad (F(x) > F(x_0) - \varepsilon).$$

Je-li funkce f shora resp. zdola polospojitá v každém bodě intervalu $[a, b]$, říkáme, že je *shora* resp. *zdola polospojitá na intervalu* $[a, b]$.

1.15. Poznámka. Je zřejmé, že funkce f je spojitá v bodě x_0 právě tehdy, když je v něm současně polospojitá shora i zdola.

1.16 . Cvičení. Každá funkce polospojitá shora (zdola) na ohraničeném a uzavřeném intervalu je na tomto intervalu ohraničená shora (zdola).

Další příjemnou vlastností funkcí shora polospojitých na intervalu $[a, b]$ je to, že tyto funkce nabývají na tomto intervalu svého maxima:

1.17 . Tvrzení. *Je-li funkce $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ shora polospojitá na intervalu $[a, b]$, potom existuje bod $x_0 \in [a, b]$ takový, že*

$$F(x) \leq F(x_0) \quad \textit{pro každé } x \in [a, b].$$

D ů k a z . Označme

$$M = \sup_{x \in [a,b]} F(x).$$

Podle Cvičení 1.16 je $M < \infty$. Množina

$$Q_k = \{x \in [a, b] \colon F(x) \geq M - \frac{1}{k}\} \tag{1.5}$$

je pro každé $k \in \mathbb{N}$ neprázdná. Ukážeme, že je také uzavřená:
Nechť x^* je hromadný bod množiny Q_k. Zřejmě $x^* \in [a, b]$. Předpokládejme, že $x^* \notin Q_k$. Platí tedy $F(x^*) < M - \frac{1}{k}$. Dále, z polospojitosti shora funkce f plyne, že k danému $\varepsilon = M - \frac{1}{k} - F(x^*) > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že platí

$$F(x) < F(x^*) + \varepsilon = F(x^*) + M - \frac{1}{k} - F(x^*) = M - \frac{1}{k}$$
$$\text{pro všechna } x \in (x^* - \delta, x^* + \delta) \cap [a, b],$$

což je ovšem spor s tím, že x^* je hromadný bod množiny Q_k. Každá množina Q_k, $k \in \mathbb{N}$, je tedy uzavřená. Dále, vzhledem k tomu, že posloupnost $\{M - \frac{1}{k}\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí, plyne z (1.5), že platí

$$[a, b] \supset Q_1 \supset Q_2 \cdots \supset Q_k \supset Q_{k+1} \ldots .$$

Podle Cantorovy věty (viz např. [3, Věta 157]) je tudíž množina $\bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k$ neprázdná. Budiž x_0 její libovolný prvek. Potom

$$M - \frac{1}{k} \le F(x_0) \le M \quad \text{platí pro každé } k \in \mathbb{N},$$

což je možné pouze, když

$$F(x_0) = M = \sup_{x \in [a,b]} F(x).$$

□

1.18 . Cvičení. Je-li funkce $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ zdola polospojitá na intervalu $[a, b]$, potom existuje bod $x_0 \in [a, b]$ takový, že

$$F(x) \ge F(x_0) \quad \text{pro každé } x \in [a, b].$$

1.19 . Tvrzení. *Nechť funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je taková, že pro každé $t \in [a, b)$ a každé $s \in (a, b]$ existují limity*

$$f(t+) = \lim_{\tau \to t+} f(\tau) \quad a \quad f(s-) = \lim_{\tau \to s-} f(\tau).$$

Definujme funkci $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ předpisem

$$F(x) = \max\{f(x-), f(x), f(x+)\} \quad \text{pro } x \in (a, b), \quad F(a) = f(a+) \quad a \quad F(b) = f(b-).$$

Potom je funkce F shora polospojitá na intervalu $[a, b]$.

D ů k a z . Budiž dán libovolný bod $x_0 \in (a, b)$. Potom platí $f(x_0) \le F(x_0)$. Dále, vzhledem k předpokladu o existenci limit $f(x_0-)$ a $f(x_0+)$, pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že platí

$$f(x) < f(x_0-) + \varepsilon \le F(x_0) + \varepsilon \quad \text{pro všechna } x \in (x_0 - \delta, x_0),$$
$$f(x) < f(x_0+) + \varepsilon \le F(x_0) + \varepsilon \quad \text{pro všechna } x \in (x_0, x_0 + \delta).$$

Máme tedy

$$f(x) < F(x_0) + \varepsilon \qquad \text{pro všechna } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Odtud plyne dále, že platí

$$f(x-) \le F(x_0) + \varepsilon \quad \text{a} \quad f(x+) < F(x_0) + \varepsilon \quad \text{pro všechna } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

čili

$$F(x) \le F(x_0) + \varepsilon \quad \text{pro všechna } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

T. zn., že f je polospojitá shora v bodě x_0. Podobně bychom postupovali také v případech $x_0 = a$ resp. $x_0 = b$. □

1.20 . Lemma (Riesz)**.** *Nechť funkce f a $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ splňují předpoklady Tvrzení* 1.19*. Potom je množina*

$$E = \{x \in (a, b) \colon \textit{existuje } \xi > x \textit{ tak, že } f(\xi) > F(x)\}$$

otevřená. Když je $E \ne \emptyset$, pak E sestává z nejvýše spočetného systému po dvou disjunktních otevřených intervalů (a_k, b_k) a pro každý z nich platí

$$f(a_k+) \le F(b_k).$$

D ů k a z . Je-li $E = \emptyset$, není co dokazovat. Nechť tedy $x_0 \in E$. Potom existuje $\xi \in (x_0, b]$ takové, že platí

$$\varepsilon := f(\xi) - F(x_0) > 0.$$

Vzhledem k polospojitosti funkce F v bodě x_0 existuje $\delta > 0$ takové, že $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [a, b]$ a

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \implies F(x) < F(x_0) + \varepsilon = f(\xi).$$

To ovšem také znamená, že je

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset E,$$

tj. množina E je otevřená.

Je známo (viz [3, Věta 69]), že každá neprázdná otevřená množina je sjednocením nejvýše spočetného systému po dvou disjunktních otevřených intervalů. Tedy také množina E je sjednocením takového systému $\{(a_k, b_k)\}$. Zvolme libovolný interval (a_k, b_k) z tohoto systému a v něm libovolný bod x_0. Podle Tvrzení 1.17 existuje $x_1 \in [x_0, b]$ takové, že

$$F(x_1) = \max_{x \in [x_0, b]} F(x). \tag{1.6}$$

Kdyby bylo $x_1 < b_k$ pak by také bylo $x_1 \in E$ a tudíž by pro nějaké $\xi \in (x_1, b]$ bylo

$$F(\xi) \geq f(\xi) > F(x_1),$$

což je ovšem spor s (1.6). Máme tedy

$$x_1 \geq b_k.$$

Vzhledem k (1.6) máme také $F(b_k) \leq F(x_1)$. Předpokládejme, že je

$$F(b_k) < F(x_1) = \max\{f(x_1-), f(x_1), f(x_1+)\}.$$

Potom také musí být $x_1 > b_k$ a musí existovat $\xi \in (b_k, b)$ takové, že je $f(\xi) > F(b_k)$ čili $b_k \in E$, což ovšem není možné. Je tedy

$$F(b_k) = F(x_1) = \max_{x \in [x_0, b]} F(x) \geq F(x_0) \geq f(x_0)$$

pro každé $x_0 \in (a_k, b_k)$. Limitním přechodem $x_0 \to a_k+$ dostaneme konečně

$$F(b_k) \geq f(a_k+),$$

což uzavírá důkaz lemmatu. □

1.21. Poznámka. Funkce splňující předpoklady Tvrzení 1.19 a Lemmatu 1.20 nazýváme *regulované funkce*. Podrobněji o nich pojednáme v kapitole 3.

1.22. Definice. Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je daná funkce. Pro $x \in (a, b]$ definujeme *horní resp. dolní Diniho derivovaná čísla zleva* $D^- f(x)$ resp. $D_- f(x)$ takto:

$$D^- f(x) = \limsup_{t \to x-} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \quad \text{a} \quad D_- f(x) = \liminf_{t \to x-} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Podobně se definují *horní resp. dolní Diniho derivovaná čísla zprava* v bodech $x \in [a, b)$:

$$D^+ f(x) = \limsup_{\xi \to x+} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \quad \text{a} \quad D_+ f(x) = \liminf_{\xi \to x+} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}.$$

1.23 . Poznámka. Pro libovolnou funkci $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ a body $x \in (a, b]$ a $y \in [a, b)$ jsou její derivovaná čísla $D^- f(x)$, $D_- f(x)$, $D^+ f(y)$, $D_+ f(y)$ jednoznačně určena. Mohou ovšem nabývat také hodnot ∞ resp. $-\infty$. Funkce f má v bodě x vlastní derivaci zleva právě tehdy, když $D^- f(x) = D_- f(x) \in \mathbb{R}$. Podobně, f má v bodě x vlastní derivaci zprava právě tehdy, když $D^+ f(x) = D_+ f(x) \in \mathbb{R}$, a vlastní derivaci právě tehdy, když $D^- f(x) = D_- f(x) = D^+ f(x) = D_+ f(x) \in \mathbb{R}$.

Z Definice 1.22 ihned plyne, že pro $x \in (a, b]$ a $y \in [a, b)$ platí

$$-\infty \leq D_- f(x) \leq D^- f(x) \leq +\infty \quad \text{a} \quad -\infty \leq D_+ f(y) \leq D^+ f(y) \leq +\infty.$$

Podle Důsledku 1.6 a Lemmatu obsaženém v důkazu Věty 1.7 již víme, že každá monotonní funkce na intervalu $[a,b]$ má na tomto intervalu nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti. Nyní si ukážeme, že každá monotonní funkce má vlastní derivaci "téměř všude" na definičním intervalu.

1.24 . Věta. *Každá funkce* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *monotonní na* $[a,b]$ *má pro s.v.* $x \in [a,b]$ *konečnou derivaci* $f'(x)$.

D ů k a z . Předpokládejme např., že f je neklesající. Potom pro všechna $x, \xi \in [a,b]$, $x \neq \xi$, máme

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \geq 0$$

a vzhledem k Definici 1.22 tedy také

$$0 \leq D_- f(x) \leq D_+ f(x) \leq \infty \quad \text{a} \quad 0 \leq D_+ f(x) \leq D^+ f(x) \leq \infty \tag{1.7}$$

pro všechna $x, \in (a,b)$.

Důkaz věty bude rozdělen na 3 kroky:

• I. Nejprve ukážeme, že platí:

$$D^+ f(x) < \infty \quad \text{pro s.v. } x \in (a,b). \tag{1.8}$$

• II. Poté ukážeme, že platí

$$D^+ f(x) \leq D_- f(x) \quad \text{pro s.v. } x \in (a,b). \tag{1.9}$$

• III. Konečně, ukážeme, že důkaz věty je už snadným důsledkem tvrzení (1.8) a (1.9).

► I. Nejprve tedy dokážeme platnost tvrzení (1.8). Označme symbolem S množinu bodů nespojitosti funkce f v (a,b) a

$$E_\infty = \{x \in (a,b) \setminus S \colon D^+ f(x) = \infty\}.$$

Podle Věty 1.7 je množina S nanejvýše spočetná a tedy (viz Cvičení 1.13 a)) má nulovou míru $(\mu(S) = 0)$. Je-li $E_\infty = \emptyset$, není co dokazovat. Předpokládejme tedy, že je $E_\infty \neq \emptyset$. Nechť je dáno libovolné $c > 0$. Máme

$$E_\infty \subset E_c = \{x \in (a,b) \setminus S \colon D^+ f(x) > c\}. \tag{1.10}$$

Jestliže $x \in E_c$, pak podle Definice 1.22 existuje $\xi \in (x,b)$ takové, že platí

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} > c,$$

tj.

$$\text{pro každé } x \in E_c \text{existuje } \xi \in (a,b) \text{takové, že } g(\xi) > G(x), \tag{1.11}$$

kde

$$g(x) := f(x) - c\,x \quad \text{pro} \quad x \in [a,b], \tag{1.12}$$

a

$$G(x) := \begin{cases} g(a+) & \text{pro} \quad x = a, \\ \max\{g(x-), g(x), g(x+)\} & \text{pro} \quad x \in (a,b), \\ g(b-) & \text{pro} \quad x = b. \end{cases} \tag{1.13}$$

(Zde jsme využili toho, že $E_c \cap S = \emptyset$ a tudíž $G(x) = g(x)$ pro každé $x \in E_c$.) Podle (1.11) máme dále

$$E_c \subset E := \{x \in (a,b) \colon \text{existuje } \xi > x \text{ tak, že } g(\xi) > G(x)\}. \tag{1.14}$$

Protože funkce f je neklesající na $[a,b]$, je také g na tomto intervalu neklesající a tudíž také regulovaná (viz Důsledek 1.6). Podle Tvrzení 1.19 je G polospojitá shora na $[a,b]$ a tudíž podle Lemmatu 1.20 je množina E z (1.14) sjednocením nejvýše spočetného systému po dvou disjunktních otevřených intervalů(a_k, b_k), $k \in K \subset \mathbb{N}$ a pro každý z nich platí $g(a_k+) \le G(b_k)$. Vzhledem k (1.12) a (1.13) a vzhledem k tomu, že funkce f je neklesající na $[a,b]$, tedy máme

$$f(a_k+) - c\,a_k \le G(b_k) = \max\{f(b_k-), f(b_k), f(b_k+)\} - c\,b_k \le f(b_k+),$$

neboli

$$c\,(b_k - a_k) \le f(b_k+) - f(a_k+).$$

Sečtením přes všechna k odtud dostaneme

$$c \sum_{k \in K} (b_k - a_k) \le \sum_{k \in K} [f(b_k+) - f(a_k+)] \le f(b) - f(a),$$

neboli

$$\sum_{k \in K} (b_k - a_k) \le \frac{f(b) - f(a)}{c}.$$

Pokud tedy k danému $\varepsilon > 0$ zvolíme $c > 0$ tak velké, aby platilo

$$\frac{f(b) - f(a)}{c} < \varepsilon,$$

docílíme toho, že bude

$$\sum_{k \in K} (b_k - a_k) < \varepsilon,$$

což ovšem znamená, že množina E a tudíž také množina $E_\infty \cup S \cup [a] \cup [b]$ mají nulovou míru (viz (1.10), (1.14) a Cvičení 1.13b)). Tvrzení (1.8) je tedy dokázáno.

▶ II. Pro daná čísla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\alpha \ge 0 \quad \text{a} \quad \beta \ge \alpha, \tag{1.15}$$

definujme

$$E_{\alpha\,\beta} = \{x \in (a,b) \setminus S \colon D^+ f(x) \alpha \quad \text{a} \quad D_- f(x) < \beta\}$$

a

$$E_\beta = \{x \in (a,b) \colon D_f(x) < \beta\}.$$

Nechť $y \in E_\beta$. Pak existuje $\eta \in (a,x)$ takové, že

$$f(\eta) - \beta\,\eta > f(y) - \beta\,y.$$

Pro $x \in [-b,-a]$ definujme

$$g(x) = f(-x) + \beta\,x.$$

Je-li $y = -x \in (a,b) \cap E_\beta$, pak podle výše uvedeného existuje $\xi > x$ ($\xi = -\eta$) takové, že je

$$g(\xi) > G(x) = g(x),$$

kde funkce G je přiřazena k g opět relací (1.13). (Jelikož je $S \cap E_\beta = \emptyset$ a $x \in E_\beta$, je $G(x) = g(x)$.) Použitím Lemmatu 1.20 pro funkci g na intervalu $(-b,-a)$ dostaneme, že existuje nejvýše spočetně mnoho otevřených a navzájem disjunktních intervalů $(-b_k,-a_k)$, které obsahují ty body $x \in (-b,-a)$, pro které je $-x \in E_\beta$ a platí

$$g(-b_k+) \le G(-a_k).$$

Protože f je neklesající na $[a,b]$, funkce g je nerostoucí na $[-b,-a]$. To má za následek, že $g(x-) \ge g(x) \ge g(x+)$ pro každé $x \in (a,b)$. Máme tedy

$$G(-a_k) = g(-a_k-) \quad \text{a tudíž } f(b_k-) - \beta\,b_k \le f(a_k+) = \beta\,a_k,$$

tj.

$$f(b_k-) - f(a_k+) \le \beta\,(b_k - a_k) \quad \text{pro každé } k.$$

(a) Nyní, pro $\alpha \ge 0$ označme

$$\widetilde{E}_\alpha = \{x \in [a,b] \setminus S \colon D^+ f(x) > \alpha\}.$$

Podobně jako v analogické situaci výše, pro každé $y \in \widetilde{E}_\alpha$ můžeme najít $\eta \in (a,y)$ takové, že je

$$\frac{f(\eta) - f(y)}{\eta - y} < \alpha, \tag{1.16}$$

tj.

$$f(\eta) - \alpha\,\eta > f(y) - \alpha\,y. \tag{1.17}$$

Definujme

$$g(x) = f(-x) - \alpha\,(-x) \quad \text{pro} \quad x \in [-b, -a]$$

a

$$G(x) = \begin{cases} g(-b+) & \text{pro} \quad x = -b, \\ \max\{g(x-), g(x), g(x+)\} & \text{pro} \quad x \in (-b, -a), \\ g(-a-) & \text{pro} \quad x = -a. \end{cases}$$

Vzhledem k (1.17), pro každé $x \in (a, b)$ takové, že $-x \in \widetilde{E}_\alpha$ existuje $\xi \in (x, -a)$, pro které platí $g(\xi) > G(x)$. (Stačí najít k $y = -x$ $\eta \in (a, y)$ splňující (1.16) a pak položit $\xi = -\eta$.) Použitím Lemmatu 1.20 tedy můžeme ukázat, že existuje nejvýše spočetný systém po dvou disjunktních otevřených intervalů(a_k, b_k), $k \in K \subset \mathbb{N}$, takový, že platí

$$\widetilde{E}_\alpha \subset \bigcup_{k \in K} (-b_k, -a_k)$$

a

$$g(-b_k+) = f(b_k-) - \alpha\, b_k \leq G(-a_k) \leq f(a_k+) - \alpha\, a_k.$$

Poslední nerovnost ovšem znamená, že pro každé $k \in K$ platí

$$f(b_k-) - f(a_k+) \leq \alpha\,(b_k - a_k). \tag{1.18}$$

.

(b) Nechť $k \in K$ a $x \in E_\beta \cap (a_k, b_k)$. Potom máme $D^+f(x) > \beta$ a tudíž existuje $\xi \in (x, b_k)$ takové, že platí

$$f(\xi) - \beta\,\xi > f(x) - \beta\, x.$$

Použijeme-li opět Rieszovo lemma (Lemma 1.20), dostaneme odtud existenci nejvýše spočetného systému po dvou disjunktních otevřených intervalů $(a_{k\,\ell}, b_{k\,\ell})$, $\ell \in L \subset \mathbb{N}$, takového, že platí

$$E_\beta \cap (a_k, b_k) \subset \bigcup_{\ell \in L} (a_{k\,\ell}, b_{k\,\ell})$$

a

$$f(a_{k\,\ell}+) - \beta\, a_{k\,\ell} \leq f(b_{k\,\ell}+) - \beta\, b_{k\,\ell},$$

tj.

$$\beta\,(b_{k\,\ell} - a_{k\,\ell}) \leq f(b_{k\,\ell}+) - f(a_{k\,\ell}+) \quad \text{pro každé } \ell \in L.$$

Po sečtení přes všechna $\ell \in L$ odtud a z (1.18) získáme vztahy

$$\beta \sum_{\ell \in L} (b_{k\,\ell} - a_{k\,\ell}) \leq \sum_{\ell \in L} (f(b_{k\,\ell}+) - f(a_{k\,\ell}+)) \leq f(b_k-) - f(a_k+) \leq \alpha\,(b_k - a_k)$$

a (sečtením přes všechna $k \in K$)

$$\beta \sum_{k \in K} \sum_{\ell \in L} (b_{k\,\ell} - a_{k\,\ell}) \leq \alpha \sum_{k \in K} (b_k - a_k). \tag{1.19}$$

Označíme-li tedy

$$|\mathfrak{L}_1| = \sum_{k \in K} (b_k - a_k) \quad \text{a} \quad |\mathfrak{L}_2| = \sum_{k \in K} \sum_{\ell \in L} (b_{k\,\ell} - a_{k\,\ell}),$$

budeme moci nerovnost (1.19) přepsat ve tvaru

$$|\mathfrak{L}_1| \leq \frac{\alpha}{\beta}\, |\mathfrak{L}_2|.$$

Když výše uvedené procedury (a) i (b) budeme provádět střídavě v postupně vznikajících intervalech, dostaneme posloupnost systémůintervalů $\mathfrak{L}_1 \supset \mathfrak{L}_2 \supset \dots \supset \mathfrak{L}_n \supset \dots$, z nichž každý obsahuje $E_{\alpha\,\beta} = E_\beta \cap \widetilde{E}_\alpha$, přičemž

$$|\mathfrak{L}_{2n}| \leq \frac{\alpha}{\beta}\, |\mathfrak{L}_{2n-1}| \leq \frac{\alpha}{\beta}\, |\mathfrak{L}_{2n-2}|$$

platí pro každé $n \in \mathbb{N}$. Odtud pak dále odvodíme, že je

$$|\mathfrak{L}_{2n}| \leq \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n |\mathfrak{L}_1| \leq \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n (b - a).$$

Protože máme $0 \leq \frac{\alpha}{\beta} < 1$, plyne odtud, že je $|\mathfrak{L}_{2n}| \to 0$ pro $n \to \infty$.

Nyní, k danému $\varepsilon > 0$ zvolíme $n \in \mathbb{N}$ tak, aby bylo

$$(\frac{\alpha}{\beta})^n\, (b - a) < \varepsilon.$$

Potom bude $E_{\alpha\,\beta} \subset \mathfrak{L}_{2n}$ a přitom také $|\mathfrak{L}_{2n}| \leq \varepsilon$, což podle Definice 1.12 znamená, že $\mu(E_{\alpha\,\beta}) = 0$ pro libovolnou dvojici $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ splňující (1.15).

Označme

$$E_* = \{x \in (a, b) \setminus S \colon D_- f(x) < D^+ f(x)\}$$

Potom pro každé $x \in E_*$ existují racionální čísla $\alpha, \beta \in \mathbb{P}$ splňující (1.15) a

$$D_- f(x) < \alpha < \beta < D^+ f(x).$$

To znamená, že je E_* obsažena v množině

$$\widetilde{E} := \bigcup_{\substack{0 \leq \alpha < \beta \\ \alpha, \beta \in \mathbb{P}}} E_{\alpha,\beta},$$

která je sjednocením spočetně mnoha množin nulové míry a tudíž má také nulovou míru (viz Cvičení 1.13b). Tím spíše je $\mu(E_*) = 0$ a tedy také

$$\mu(E_* \cup S \cup [a] \cup [b]) = 0,$$

což dokazuje platnost tvrzení (1.9).

► III. Funkce

$$\widetilde{f}\colon x \in [-b, -a] \to -f(-x)$$

je zřejmě neklesající na $[-b, -a]$ a platí

$$D_-\widetilde{f}(-x) = D_+f(x) \quad \text{a} \quad D^+\widetilde{f}(-y) = D^-f(y)$$

pro všechna $x \in [a, b)]$ a $y \in (a, b]$. Použijeme-li tedy (1.9) na funkci $\widetilde{f}$, dostaneme

$$D^-f(x) = D^+\widetilde{f}(-x) \leq D_-\widetilde{f}(-x) = D_+f(x) \quad \text{pro s.v. } x \in [a, b].$$

Vzhledem k (1.7) a (1.8) tedy pro s.v. $x \in [a, b]$ budeme mít

$$0 \leq D^+f(x) \leq D_-f(x) \leq D^-f(x) \leq D_+f(x) \leq D^+f(x) < \infty,$$

tj.

$$0 \leq D^+f(x) = D_-f(x) = D^-f(x) = D_-f(x) = f'(x) < \infty.$$

□

1.25. Důsledek. *Každá funkce $f \in \mathbb{BV}[a, b]$ má vlastní derivaci $f'(x)$ pro s.v. $x \in [a, b]$.* □

1.26. Poznámka. Lze dokonce dokázat (viz [4, Věty 84 a 91]), že je-li $f \in \mathbb{BV}[a, b]$, pak $f' \in \mathbb{L}^1[a, b]$. **ALE !!!!** Obecně neplatí pro každou funkci $f \in \mathbb{BV}[a, b]$ zdánlivě evidentní rovnost

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Existují totiž funkce $f \in \mathbb{BV}[a, b]$ nekonstantní na $[a, b]$ a přitom takové, že platí $f'(x) = 0$ s.v. na $[a, b]$.

1.27. Definice. Funkce $f \in \mathbb{BV}[a, b]$ se nazývá *singulární*, jestliže platí $f'(x) = 0$ pro s.v. $x \in [a, b]$.

Nejjednodušším příkladem nekonstantních singulárních funkcí jsou funkce tvaru

$$f(x) = \chi_{[a,c]}(x),$$

kde $c \in (a, b)$. Jejich zobecněním jsou třídy *jednoduchých skokových funkcí* (anglicky *step functions*) resp. *skokových funkcí* (anglicky *break functions*).

1.28. Definice. Funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je *konečná skoková funkce na* $[a, b]$ ($f \in \mathbb{S} = \mathbb{S}[a, b]$), jestliže existuje dělení $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \in \mathscr{D}[a, b]$ takové, že na každém jeho dílčím otevřeném intervalu (α_{j-1}, α_j) je f konstantní.

Funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je *skoková funkce na* $[a, b]$ ($f \in \mathbb{B} = \mathbb{B}[a, b]$), jestliže existuje $c \in \mathbb{R}$, $K \subset \mathbb{N}$ a posloupnosti

$$\{s_k\}_{k \in K} \subset [a, b], \quad \{c_k\}_{k \in K} \subset \mathbb{R} \quad \text{a} \quad \{d_k\}_{k \in K} \subset \mathbb{R}$$

takové, že platí

$$\sum_{k \in K} (|c_k| + |d_k|) < \infty$$

a

$$f(x) = c + \sum_{a < s_k \le x} c_k + \sum_{a \le s_k < x} d_k \quad \text{na } [a, b]. \tag{1.20}$$

1.29 . Cvičení. Pro každou $f \in \mathbb{B}$ tvaru (1.20) platí

$$\operatorname{var}_a^b f = \sum_{k \in K} (|c_k| + |d_k|) < \infty$$

a tudíž $\mathbb{S} \subset \mathbb{B} \subset \mathbb{BV}[a, b]$.

1.30 . Věta. *Každá skoková funkce na* $[a, b]$ *je singulární na* $[a, b]$.

D ů k a z . Nechť $c \in \mathbb{R}$, $K \subset \mathbb{N}$, $\{s_k\}_{k \in K} \subset [a, b]$, $\sum_{k \in K} (|c_k| + |d_k|) < \infty$ a

$$f(x) = c + \sum_{a < s_k \le x} c_k + \sum_{a \le s_k < x} d_k \quad \text{na } [a, b].$$

Definujme pro $x \in [a, b]$:

$$v(x) = \sum_{a < s_k \le x} |c_k| + \sum_{a \le s_k < x} |d_k| \quad \text{na } [a, b].$$

Potom je

$$v(x) = \sum_{k \in K} v_k(x) \quad \text{na} \quad [a, b],$$

kde

$$v_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{když } a \le x < s_k, \\ |c_k| & \text{když } x = s_k, \\ |c_k| + |d_k| & \text{když } s_k < x \le b. \end{cases}$$

Každá funkce v_k je neklesající na $[a, b]$ a $v_k'(x) = 0$ pro $x \ne s_k$. Máme tedy

$$v'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k'(x) = 0 \quad \text{pro} \quad x \notin \{s_k\}_{k \in K}, \quad \text{tj. pro s.v. } x \in [a, b].$$

Protože pro všechna $x, y \in [a,b]$, $x \neq y$, zřejmě platí

$$\Big|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\Big| \leq \Big|\frac{v(x)-v(y)}{x-y}\Big|,$$

plyne odsud tvrzení věty. □

1.31 . Poznámka. Příklad funkce, která je spojitá, neklesající a singulární na daném intervalu, je uveden v [4, V.9,cvičení 4].

1.32. Lemma. *Nechť $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ a nechť $\{s_k\}_{k \in K}$, $K \subset \mathbb{N}$, je množina bodů nespojitosti funkce f v $[a,b]$. Definujme*

$$f^{\mathrm{B}}(x) = \sum_{a<s_k\leq x} \Delta^- f(s_k) + \sum_{a\leq s_k<x} \Delta^+ f(s_k) \quad \textit{pro} \quad x \in [a,b]. \tag{1.21}$$

Potom je $f^{\mathrm{B}} \in \mathbb{BV}[a,b]$ a funkce $f - f^{\mathrm{B}}$ je spojitá na $[a,b]$.

D ů k a z . Podle Věty 1.9 máme

$$\operatorname{var}_a^b f^{\mathrm{B}} = \sum_{k=1}^{\infty}(|\Delta^- f(s_k)| + |\Delta^+ f(s_k)|) < \infty$$

a tudíž $f^{\mathrm{B}} \in \mathbb{B}[a,b] \subset \mathbb{BV}[a,b]$. Dále, pro každé $x \in [a,b)$ máme

$$f^{\mathrm{B}}(x+) = \sum_{a<s_k\leq x} \Delta^- f(s_k) + \sum_{a\leq s_k\leq x} \Delta^+ f(s_k).$$

Proto také

$$f^{\mathrm{B}}(x+) - f^{\mathrm{B}}(x) = \Delta^+ f(x)$$

a

$$(f(x+) - f^{\mathrm{B}}(x+)) - (f(x) - f^{\mathrm{B}}(x)) = \Delta^+ f(x) - \Delta^+ f(x) = 0.$$

Podobně, pro každé $x \in (a,b]$ je

$$f^{\mathrm{B}}(x-) = \sum_{a<s_k<x} \Delta^- f(s_k) + \sum_{a\leq s_k<x} \Delta^+ f(s_k)),$$

a tedy

$$(f(x) - f^{\mathrm{B}}(x)) - (f(x-) - f^{\mathrm{B}}(x-)) = \Delta^- f(x) - \Delta^- f(x) = 0.$$

□

1.33 . Definice. Funkce f^{B} přiřazená k f podle definice (1.21) budeme nazývat *skoková část* funkce f. Rozdíl $f - f^{\mathrm{B}}$ nazýváme *spojitá část* funkce f a značíme f^{C}.

1.34. Poznámka. Podle Lemmatu 1.32 lze každou funkci s konečnou variací rozložit na součet funkce spojité a funkce skokové. Takový rozklad se nazývá *Jordanův rozklad* funkce s konečnou variací. Obecně jsou skoková resp. spojitá část z Jordanova rozkladu určeny jednoznačně až na konstantu. Všimněme si ještě, že použitím charakteristických funkcí podintervalů v $[a,b]$ lze definici (1.21) ekvivalentně zapsat též ve tvaru

$$f^{\mathrm{B}}(x) = \sum_{k\in K} \Delta^- f(s_k)\, \chi_{[s_k,b]}(x) + \sum_{k\in K} \Delta^+ f(s_k)\, \chi_{(s_k,b]}(x).$$

1.35. Lemma. *Nechť $f \in \mathbb{BV}[a,b]$, $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je množina bodů její nespojitosti v $[a,b]$ a nechť f^B je definována jako v Lemmatu 1.32. Definujme dále pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [a,b]$,*

$$f_n^B(x) = \sum_{k=1}^{n} \Delta^- f(s_k)\chi_{[s_k,b]}(x) + \sum_{k=1}^{n} \Delta^+ f(s_k)\chi_{(s_k,b]}(x).$$

Potom je $f_n^B \in \mathbb{S}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a platí

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{var}_a^b (f^B - f_n^B) = 0.$$

D ů k a z plyne z nerovnosti

$$\operatorname{var}_a^b (f^{\mathrm{B}} - f_n^{\mathrm{B}}) \le \sum_{k=n+1}^{\infty} (|\Delta^- f(s_k)| + |\Delta^+ f(s_k)|).$$

□

1.36. Věta (Helly). *Nechť $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{BV}[a,b]$, $K \in \mathbb{R}$,*

$$|f_n(a)| \le K \quad a \quad \operatorname{var}_a^b f_n \le K \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Potom existují funkce $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ a podposloupnost

$$\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

takové, že platí

$$|f(a)| \le K, \quad \operatorname{var}_a^b f \le K \quad a \quad \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x) \quad \text{na } [a,b].$$

K důkazu Hellyovy věty využijeme následujících dvou lemmat.
Lemma 1. *Nechť*

$$|f_n(x)| \le M < \infty \quad \text{na} \quad [a,b] \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Potom pro každou spočetnou $P \subset [a,b]$ existuje podposloupnost $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ taková, že limita

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(p)$$

je konečná pro všechna $p \in P$.

D ů k a z . Nechť $P = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$. Máme $|f_n(p_k)| \leq M < \infty$ pro všechna $n, k \in \mathbb{N}$. Podle Bolzanovy-Weierstraßovy věty lze tedy vybrat z $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ podposloupnost $\{f_{n_{k,1}}\}_{k=1}^{\infty}$, pro níž existuje konečná limita

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_{k,1}}(p_1) = q_1 \in \mathbb{R}.$$

Podobně existují

$$\{f_{n_{k,2}}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{f_{n_{k,1}}\}_{k=1}^{\infty} \quad \text{a} \quad q_2 \in \mathbb{R}$$

tak, že

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_{k,2}}(p_2) = q_2 \in \mathbb{R}.$$

Takto pro každé $j \in \mathbb{N}$ najdeme posloupnosti

$$\{f_{n_{k,j}}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{f_{n_{k,j-1}}\}_{k=1}^{\infty} \quad \text{a} \quad q_j \in \mathbb{R}$$

takové, že platí

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_{k,\ell}}(p_\ell) = q_\ell \in \mathbb{R} \quad \text{pro každé } \ell \in \{1, 2, \dots, j\}.$$

Položme $f_{n_k} = f_{n_{k,k}}$ pro $k \in \mathbb{N}$. Potom

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(p_j) = q_j \in \mathbb{R} \quad \text{pro každé } j \in \mathbb{N}.$$

□

Lemma 2. *Předpokládejme, že všechny funkce* f_n, $n \in \mathbb{N}$, *jsou neklesající na* $[a, b]$ *a že existuje* $M \in (0, \infty)$ *takové, že* $||f_n|| \leq M$ *platí pro každé* $n \in \mathbb{N}$. *Potom existují podposloupnost*

$$\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$$

a funkce $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *neklesající na* $[a, b]$ *takové, že platí*

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x) \quad \textit{na} \quad [a, b].$$

D ů k a z . Nechť $P = (\mathbb{P} \cap (a, b)) \cup [a] \cup [b]$ je množina racionálních čísel z intervalu (a, b) doplněná o body a, b. Body množiny P očíslujme tak, že bude $P = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$. Podle Lemmatu 1 existuje podposloupnost

$$\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$$

a zobrazení $\varphi\colon P \to \mathbb{R}$ takové, že platí

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(p) = \varphi(p) \quad \text{pro všechna } p \in P.$$

Zřejmě platí

$$\varphi(p') \leq \varphi(p'') \quad \text{pro všechna } p', p'' \in P, p' \leq p''.$$

Dále, definujme pro $x \in (a,b) \setminus P$

$$\varphi(x) = \sup_{p \in P \cap [a,x)} \varphi(p).$$

Potom máme

$$\varphi(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) \quad \text{pro} \quad x \in P \quad \text{a} \quad \varphi(x) = \lim_{\substack{p\to x- \\ p \in P}} \varphi(p)$$

a φ je definovaná a neklesající na $[a,b]$. Ukážeme, že v každém bodě $x_0 \in (a,b)$, ve kterém je funkce φ spojitá platí

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_0) = \varphi(x_0). \tag{1.22}$$

Vskutku, buď dáno $\varepsilon > 0$. Potom existuje $\delta_\varepsilon > 0$ takové, že

$$x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0 + \delta_\varepsilon \implies \varphi(x_0) - \varepsilon < \varphi(x) < \varphi(x_0) + \varepsilon.$$

Zvolíme-li $r' \in P \cap (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0)$ a $r'' \in P \cap (x_0, x_0 + \delta_\varepsilon)$, bude platit

$$\varphi(x_0) - \varepsilon \leq \varphi(r') \leq \varphi(x) \leq \varphi(r'') \leq \varphi(x_0) + \varepsilon.$$

Dále, zvolme k_0 tak, aby platilo

$$\varphi(r') - \varepsilon \leq f_{n_k}(r') \leq \varphi(r') + \varepsilon \quad \text{a} \quad \varphi(r'') - \varepsilon \leq f_{n_k}(r'') \leq \varphi(r'') + \varepsilon$$

pro každé $k \geq k_0$. Potom, pro každé $k \geq k_0$ dostaneme

$$\begin{aligned} \varphi(x_0) - 2\varepsilon &\leq \varphi(r') - \varepsilon \leq f_{n_k}(r') \leq f_{n_k}(x_0) \\ &\leq f_{n_k}(r'') \leq \varphi(r'') + \varepsilon \leq \varphi(x_0) + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

čili platí (1.22).

Dokázali jsme tedy, že značí-li Q množinu bodů nespojitosti funkce φ v (a,b), pak

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = \varphi(x) \quad \text{pro} \quad x \in [a,b] \setminus Q.$$

Podle Věty 1.7 je množina Q spočetná. Můžeme tedy použít ještě jednou Lemma 1 a dokázat tak existenci vybrané posloupnosti

$$\{f_{n_{k_\ell}}\}_{\ell=1}^\infty \subset \{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty,$$

která má limitu $\psi(x) \in \mathbb{R}$ pro každé $x \in Q$. Definujeme-li tedy

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{když} \quad x \in [a,b] \setminus Q, \\ \psi(x) & \text{když} \quad x \in Q, \end{cases}$$

bude

$$\lim_{\ell} f_{n_{k_\ell}}(x) = f(x) \quad \text{na } [a,b]$$

a protože funkce, která je na intervalu $[a,b]$ bodovou limitou posloupnosti funkcí neklesajících na $[a,b]$, je také neklesající, lemma je dokázáno. □

Důkaz Věty 1.36. Použitím Věty 1.4 (o rozkladu funkce s konečnou variací na rozdíl dvou funkcí neklesajících) a Lemmatu 2 se snadno ukáže existence funkce $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ a podposloupnosti $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ takových, že je $|f(a)| \leq K$ a $\lim_{k \to \infty} f_{n_k}(x) = f(x)$ na $[a,b]$. Dále, protože pro libovolné dělení $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \in \mathscr{D}[a,b]$ máme

$$\begin{aligned} V(f,D) = \sum_{j=1}^{m} |f(\alpha_j) - f(\alpha_{j-1})| &= \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{m} |f_{n_k}(\alpha_j) - f_{n_k}(\alpha_{j-1})| \\ &= \lim_{k\to\infty} V(f_{n_k}, D) \leq \lim_{k\to\infty} \operatorname{var}_a^b f_{n_k} \leq K, \end{aligned}$$

platí také $\operatorname{var}_a^b f \leq K$. □

Kapitola 2

Absolutně spojité funkce.

2.1 . Definice. Funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je *absolutně spojitá* na intervalu $[a, b]$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\sum_{j=1}^{m} |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| < \varepsilon$$

platí pro každý systém intervalů $[\alpha_j, \beta_j]$, $j = 1, 2, , \dots, m$, splňující

$$a \le \alpha_1 \le \beta_1 \le \alpha_2 \le \beta_2 \dots \le \beta_{m-1} \le \alpha_m \le \beta_m \le b \quad \text{a} \quad \sum_{j=1}^{m} (\beta_j - \alpha_j) < \delta. \tag{2.1}$$

Množinu funkcí absolutně spojitých na $[a, b]$ značíme $\mathbb{AC}[a, b]$ resp. $\mathbb{AC}$ (je-li ze souvislostí jasné, o jaký interval se jedná).

2.2 . Cvičení. (i) Každá funkce absolutně spojitá na intervalu $[a, b]$ je na tomto intervalu stejnoměrně spojitá.

(ii) Nechť funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ splňuje Lipschitzovu podmínku na intervalu $[a, b]$, tj. existuje $L \in \mathbb{R}$ takové, že

$$|f(x) - f(y)| \le L|x - y| \quad \text{platí pro všechna } x, y \in [a, b].$$

Potom $f \in \mathbb{AC}[a, b]$.

2.3 . Věta. *Každá funkce absolutně spojitá na intervalu $[a, b]$ má na tomto intervalu konečnou variaci.*

D ů k a z . Nechť $f \in \mathbb{AC}$. Zvolme $\delta > 0$ tak, aby platilo

$$\sum_{j=1}^{m} |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| < 1$$

pro každý systém intervalů $[\alpha_j, \beta_j]$, $j = 1, 2, , \dots, k$, splňující (2.1). Dále, zvolme dělení $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ intervalu $[a, b]$ tak, aby platilo

$$0 < x_i - x_{i-1} < \delta \quad \text{pro každé } i = 1, 2, \dots, k.$$

Potom pro každé $i = 1, 2, \dots, k$ a každé dělení $D^i = \{\alpha_0^i, \alpha_1^i, \dots, \alpha_{m_i}^i\}$ intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ máme

$$\sum_{j=1}^{m_i} (\alpha_j^i - \alpha_{j-1}^i) = x_i - x_{i-1} < \delta$$

a tudíž (podle Věty 1.3)

$$\operatorname{var}_a^b f = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{var}_{x_{i-1}}^{x_i} f = \sum_{i=1}^{k} \sup_{D^i \in \mathscr{D}[x_{i-1},x_i]} \sum_{j=1}^{m_i} |f(\alpha_j^i) - f(\alpha_{j-1}^i| < k < \infty.$$

□

2.4 . Věta. *Jestliže* $f,\ g \in \mathbb{AC}[a,b]$, *pak* $|f|,\ f+g,\ f\,g,\ \max\{f,g\},\ \min\{f,g\} \in \mathbb{AC}[a,b]$. *Je-li navíc* $|f(x)| > 0$ *na* $[a,b]$, *pak také* $f^{-1} \in \mathbb{AC}[a,b]$.

D ů k a z . Nechť $f,\ g \in \mathbb{AC}[a,b]$.

a) Pro libovolná $x,\ y \in [a,b]$ platí $|f(x)| \le |f(x) - f(y)| + |f(y)|$. Tudíž

$$|f(x) - f(y)| \ge \big||f(x)| - f(y)|\big|$$

a

$$\sum_{j=1}^{m} \big||f(\beta_j)| - |f(\alpha_j)|\big| \le \sum_{j=1}^{m} |f(\beta_j) - f(\alpha_j)|.$$

Odtud už ovšem okamžitě plyne, že také $|f| \in \mathbb{AC}[a,b]$.

b) Druhé a třetí tvrzení, tj. $f + g \in \mathbb{AC}[a,b]$ a $f\,g \in \mathbb{AC}[a,b]$, plynou z nerovností

$$|(f(x) + g(x)) - (f(y) + g(y))| \le |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)|$$

a

$$|f(x)\,g(x) - f(y)\,g(y)| \le \|f\|\,|g(x) - g(y)| + \|g\|\,|f(x) - f(y)|.$$

c) Protože pro libovolné $x \in [a,b]$ máme

$$\max\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}\big(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|\big)$$

a

$$\min\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}\big(f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|\big),$$

platí v důsledku a) a b) také

$$\max\{f,g\} \in \mathbb{AC}[a,b] \quad \text{a} \quad \min\{f,g\} \in \mathbb{AC}[a,b].$$

d) Konečně, je-li navíc $|f(x)| > 0$ na $[a,b]$, pak existuje $\mu > 0$ takové, že platí $|f(x)| \ge \mu$ na $[a,b]$ a tudíž také

$$\Big|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)}\Big| \le \frac{|f(x) - f(y)|}{\mu^2}.$$

Nyní už je snadné ukázat, že $f^{-1} \in \mathbb{AC}[a,b]$. □

2.5 . Poznámka. Z vět 1.24 a 2.3 okamžitě plyne, že každá absolutně spojitá funkce na intervalu $[a,b]$ má s.v. na tomto intervalu konečnou derivaci. Lze dokázat (viz [4, Věty 93 a 94]), že funkce $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ je absolutně spojitá na $[a,b]$ právě tehdy, když

$$f(x)-f(a)=\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{na } [a,b]$$

pro nějakou funkci $g\in\mathbb{L}^1[a,b]$. (Potom je $f'(t)=g(t)$ s.v. na $[a,b]$.) Speciálně, platí, že je-li $f\in\mathbb{AC}[a,b]$ a $f'(t)=0$ pro s.v. $t\in[a,b]$, pak je $f(t)$ konstantní na $[a,b]$. Dále, zobrazení

$$f\in\mathbb{AC}[a,b]\to(f(a),f')\in\mathbb{R}\times\mathbb{L}^1[a,b]$$

a

$$(c,g)\in\mathbb{R}\times\mathbb{L}^1[a,b]\to f(t):=c+\int_a^t g(s)\,\mathrm{d}s\in\mathbb{AC}[a,b]$$

představují vzájemně jednoznačný vztah mezi $\mathbb{AC}[a,b]$ a $\mathbb{R}\times\mathbb{L}^1[a,b]$. Na $\mathbb{AC}[a,b]$ definujeme normu předpisem

$$\|f\|_{\mathbb{AC}}=|f(a)|+\|f'\|_1 \quad \text{pro} \quad f\in\mathbb{AC}[a,b]$$

a $\mathbb{AC}[a,b]$ je pak Banachův prostor. Obecný spojitý lineární funkcionál na $\mathbb{AC}[a,b]$ má tvar:

$$x\in\mathbb{AC}[a,b]\to p\,x(a)+\int_a^b q\,x'\,\mathrm{d}t,$$

kde $p\in\mathbb{R}$ a $q\in\mathbb{L}^\infty[a,b]$. ($\mathbb{L}^\infty[a,b]$ značí prostor funkcí "v podstatě" ohraničených na $[a,b]$).

Další podrobnosti o funkcích absolutně spojitých lze nalézti v monografiích V. Jarníka *Diferenciální počet II* [3, V.9] a *Integrální počet II* [4, V.5] a Š. Schwabika *Integrace v* $\mathbb{R}$ *(Kurzweilova teorie)* [6, XIII.4].

Víme již (viz Lemma 1.32 a Poznámka 1.34), že každou funkci s konečnou variací na $[a,b]$ můžeme rozložit na součet funkce spojité a funkce skokové resp. na rozdíl dvou funkcí neklesajících na $[a,b]$ (viz Věta 1.4). Funkce s konečnou variací lze také rozložit na součet funkce absolutně spojité a funkce singulární. Důkaz následujícího tvrzení je uveden např. v [4, Věta 125].

2.6. Věta (LEBESGUEŮV ROZKLAD FUNKCE S KONEČNOU VARIACÍ)**.** *Pro každou funkci* $f\in\mathbb{BV}[a,b]$ *existuje singulární funkce* f^{SING} *taková, že* $f-f^{\mathrm{SING}}$ *je absolutně spojitá na* $[a,b]$. *Funkce* f^{SING} *je určena jednoznačně až na konstantu.*

2.7 . Definice. Jestliže $f\in\mathbb{BV}[a,b]$, pak funkci f^{SING} přiřazenou k f podle Věty 2.6 nazýváme *singulární část* funkce f. Dále, rozdíl $f-f^{\mathrm{SING}}$ nazýváme *absolutně spojitá část* funkce f a značíme f^{AC}. Konečně, $f^{\mathrm{SC}}:=f-f^{\mathrm{B}}-f^{\mathrm{AC}}=f^{\mathrm{C}}-f^{\mathrm{AC}}$ je *spojitá singulární část* funkce f.

Kapitola 3

Regulované funkce.

3.1 . Definice. Funkce $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ se nazývá *regulovaná* na $[a,b]$, jestliže pro každé $t\in(a,b]$ a každé $s\in[a,b)$ existují konečné limity

$$f(t-)=\lim_{\tau\to t-}f(\tau)\quad\text{a}\quad f(s+)=\lim_{\tau\to s+}f(\tau),$$

tj. má-li na intervalu $[a,b]$ nespojitosti nejvýše *1. druhu*. Množinu funkcí regulovaných na $[a,b]$ značíme $\mathbb{G}[a,b]$.

3.2 . Poznámka. Zřejmě platí $\mathbb{BV}[a,b]\cup\mathbb{C}[a,b]\subset\mathbb{G}[a,b]$, přičemž $\mathbb{G}[a,b]\setminus\mathbb{C}[a,b]\neq\emptyset$ a $\mathbb{G}[a,b]\setminus\mathbb{BV}[a,b]\neq\emptyset$.

Podobně jako pro funkce s konečnou variací (viz Lemma z důkazu Věty 1.7) platí pro regulované funkce: máme:

3.3 . Věta. *Každá funkce regulovaná na $[a,b]$ má na $[a,b]$ nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti.* □

3.4 . Věta. *Jestliže posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathbb{G}[a,b]$ a funkce $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jsou takové, že platí* $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ *stejnoměrně na $[a,b]$ (tj. $\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|=0$), pak $f\in\mathbb{G}[a,b]$.*

D ů k a z . Nechť $x\in[a,b)$, nechť $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset(x,b]$ je libovolná posloupnost taková, že $x_k\to x$ pro $k\to\infty$ a nechť je dáno libovolné $\varepsilon>0$. Zvolme $n_0\in\mathbb{N}$ a $k_0\in\mathbb{N}$ tak, aby platilo

$$\|f-f_{n_0}\|<\frac{\varepsilon}{3}\quad\text{a}\quad|f_{n_0}(x_k)-f_{n_0}(x_\ell)|<\frac{\varepsilon}{3}\quad\text{pro všechna } k,\ell\ge k_0.$$

Potom budeme mít pro všechna $k,\ell\ge k_0$

$$\begin{aligned}&|f(x_k)-f(x_\ell)|\\&\qquad\le|f(x_k)-f_{n_0}(x_k)|+|f_{n_0}(x_k)-f_{n_0}(x_\ell)|+|f(x_\ell)-f_{n_0}(x_\ell)|<\varepsilon,\end{aligned}$$

tj. existuje konečná limita $f(x+)=\lim_{k\to\infty}f(x_k)$. Podobně bychom ukázali, že pro každé $x\in(a,b]$ existuje konečná limita $f(x-)$. □

3.5 . Definice. Pro libovolnou funkci $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, podinterval $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ a dělení $D=\{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_m\}\in\mathscr{D}[a,b]$ definujeme

$$\omega_{(\alpha,\beta)}(f)=\sup_{x',x''\in(\alpha,\beta)}|f(x')-f(x'')|\quad\text{a}\quad\omega_D(f)=\max_{i=1,2,\dots,m}\omega_{(\alpha_{i-1},\alpha_i)}(f).$$

3.6. Věta. *Následující tři tvrzení jsou ekvivalentní*

(*i*) $f \in \mathbb{G}[a,b]$.

(*ii*) *Existuje posloupnost* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{S}[a,b]$ *taková, že platí* $f_n \rightrightarrows f$ *na* $[a,b]$ *pro* $n \to \infty$.

(*iii*) *Pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje dělení* $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \in \mathscr{D}[a,b]$ *takové, že* $\omega_D(f) < \varepsilon$.

D ů k a z . a) Implikace (ii) $\Longrightarrow$ (i) je dokázána Větou 3.4.

b) Předpokládejme, že platí (i) a nechť je dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Potom pro každé $x \in [a,b]$ existuje $\delta(x) > 0$ takové, že platí

$$\begin{cases} \omega_{(a,a+\delta(a))}(f) < \varepsilon, & \omega_{(b-\delta(b),b)}(f) < \varepsilon, \\ \omega_{(x-\delta(x),x)}(f) < \varepsilon \quad \text{a} & \omega_{(x,x+\delta(x))}(f) < \varepsilon \quad \text{pro všechna } x \in (a,b). \end{cases} \tag{3.1}$$

Intervaly

$$[a, a+\delta(a)),\ (x-\delta(x), x+\delta(x)),\ x \in (a,b), (b-\delta(b), b]$$

tvoří otevřené pokrytí intervalu $[a,b]$, ze kterého lze podle Vitaliovy věty (viz např. [3, Věta 81]) vybrat pokrytí konečné:

$$[a, a+\delta(a)),\ (x_i-\delta(x_i), x_i+\delta(x_i)),\ i = 1,2,\dots,m-1, (b-\delta(b), b],$$

přičemž vzhledem k (3.1) platí

$$\omega_{(x_i-\delta(x_i),x_i)}(f) < \varepsilon \quad \text{a} \quad \omega_{(x_i,x_i+\delta(x_i))}(f) < \varepsilon \text{ pro všechna } i = 1,2,\dots m-1.$$

Označme $\alpha_0 := a$ a $\alpha_m := b$ a nechť

$$D = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_1', \dots \alpha_{m-1}, \alpha_{m-1}', \alpha_m\},$$

kde

$$\alpha_i' = x_i \quad \text{a} \quad \alpha_i \in (x_i - \delta(x_i), x_{i-1} + \delta(x_{i-1})), \quad i = 1,2,\dots,m-1.$$

Potom

$$\omega_{(a,\alpha_1)}(f) \le \omega_{(a,a+\delta(a))}(f) < \varepsilon, \qquad \omega_{(\alpha_m,b)}(f) \le \omega_{(b-\delta(b),b)}(f) < \varepsilon$$

a

$$\omega_{(\alpha_i,\alpha_i')}(f) \le \omega_{(x_i-\delta(x_i),x_i)}(f) < \varepsilon \quad \text{a} \quad \omega_{(\alpha_i',\alpha_{i+1})}(f) \le \omega_{(x_i,x_i+\delta(x_i))}(f) < \varepsilon$$

pro každé $i = 1,2,\dots,m-1$, tj.

$$\omega_D(f) < \varepsilon.$$

c) Předpokládejme, že platí (iii). Nechť je dáno $\varepsilon > 0$ a nechť

$$D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \in \mathscr{D}[a,b]$$

je dělení $[a,b]$ takové, že $\omega_D(f) < \varepsilon$. Pro každé $i \in \{1,2,\dots,m\}$ zvolme $\xi_i \in (\alpha_{i-1},\alpha_i)$ a definujme

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} f(\alpha_i) & \text{pro } \ x = \alpha_i, \\ f(\xi_i) & \text{pro } \ x \in (\alpha_{i-1},\alpha_i). \end{cases}$$

Pro každé $x \in [a,b]$ máme $|f(x) - g_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ a tudíž také $\|f - g_\varepsilon\| < \varepsilon$. Jestliže tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme $f_n = g_{1/n}$, bude $f_n \in \mathbb{S}[a,b]$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$ pro $n \to \infty$. □

3.7. Důsledky.

(i) *Každá funkce regulovaná na* $[a,b]$ *je na* $[a,b]$ *ohraničená.* (*Speciálně* $G[a,b] \subset \mathbb{L}^1[a,b]$.)

(ii) *Pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje nejvýše konečně mnoho* $x \in [a,b]$ *takových, že platí*

$$|\Delta^+ f(x)| \ge \varepsilon \quad \textit{nebo} \quad |\Delta^- f(x)| \ge \varepsilon.$$

D ů k a z . Obě tvrzení plynou z vlastnosti (iii) z Věty 3.6. □

3.8. Věta. $\mathbb{G}[a,b]$ *je Banachův prostor vzhledem k normě*

$$\|f\|_{\mathbb{G}} = \|f\| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

D ů k a z . Předpokládejme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{G}[a,b]$ je cauchyovská v $\mathbb{G}[a,b]$. Jako v částech a) a b) důkazu Věty 1.10 dokážeme, že existuje funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ takové, že platí $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$. Podle Věty 3.4 ovšem platí $f \in \mathbb{G}[a,b]$ a tím je věta dokázána. □

3.9. Poznámky.

(i) $f \in \mathbb{S}[a,b] \iff f$ je konečná lineární kombinace charakteristických funkcí intervalů $[a,\tau]$, $[a,\tau)$, $\tau \in (a,b]$, a charakteristických funkcí jednobodových intervalů $[\tau]$, $\tau \in [a,b]$, tj.

$$\mathbb{S}[a,b] = \mathrm{Lin}\Big(\chi_{[a,\tau]}, \chi_{[a,\tau)}, \chi_{[\tau]}, \tau \in (a,b], \chi_{[a]}\Big).$$

(Lin(M) značí lineární obal množiny M.)

(ii) Množina $\mathbb{S}[a,b]$ je podle tvrzení (ii) Věty 3.6 hustá v $\mathbb{G}[a,b]$, tj. $\overline{\mathbb{S}[a,b]} = \mathbb{G}[a,b]$, kde $\overline{\mathbb{S}[a,b]}$ značí uzávěr $\mathbb{S}[a,b]$ v $\mathbb{G}[a,b]$.

3.10. Lemma. *Nechť* $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{G}$ *a* $f_n \rightrightarrows f$ *na* $[a,b]$. *Potom platí též*

$$f_n(x-) \rightrightarrows f(x-) \quad \textit{a} \quad f_n(x+) \rightrightarrows f(x+) \quad \textit{na } [a,b],$$

kde $f(a-) = f(a)$, $f(b+) = f(b)$ *a* $f_k(a-) = f_k(a)$ *a* $f_k(b+) = f_k(b)$ *pro* $k \in \mathbb{N}$.

D ů k a z . Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$\widetilde{f}_n(x) = \begin{cases} f_n(x+) & \text{když} \;\; x \in [a,b), \\ f_n(b) & \text{když} \;\; x = b \end{cases}$$

a

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x+) & \text{když} \;\; x \in [a,b), \\ f(b) & \text{když} \;\; x = b. \end{cases}$$

Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Existuje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takové, že je $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$ pro každé $n \geq n_\varepsilon$ a každé $t \in [a,b]$. Odtud ovšem limitním přechodem $t \to x+$ dostaneme, že také pro každé $x \in [a,b)$ a každé $n \geq n_\varepsilon$ platí

$$|\widetilde{f}_n(x) - \widetilde{f}(x)| = \lim_{t \to x+} |f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon,$$

tj.

$$\lim_{n \to \infty} \|\widetilde{f}_n - \widetilde{f}\| = 0$$

neboli

$$f_n(x+) \rightrightarrows f(x+).$$

Podobně bychom ukázali, že platí i $f_n(x-) \rightrightarrows f(x-)$ na $[a,b]$. $\square$

3.11. Důsledek. *Množiny*

$$\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b] = \{f \in \mathbb{G} \colon f(x-) = f(x) \;\; na \;\; (a,b)\},$$
$$\mathbb{G}_{\mathrm{R}}[a,b] = \{f \in \mathbb{G} \colon f(x+) = f(x) \;\; na \;\; (a,b)\}$$

a

$$\mathbb{G}_{reg}[a,b] = \{f \in \mathbb{G} \colon f(x-) + f(x+) = 2\,f(x) \;\; na \;\; (a,b)\}$$

jsou uzavřené v $\mathbb{G}[a,b]$ a tudíž jsou to také Banachovy prostory vzhledem k operacím a normě indukovaným z $\mathbb{G}[a,b]$.

$\square$

3.12. Lemma. $\overline{\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b]} = \mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$.

D ů k a z . Nechť $f \in \mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$ a $\varepsilon > 0$. Podle Věty 3.6 (ii) existuje $\varphi \in \mathbb{S}[a,b]$ takové, že

$$|f(x) - \varphi(x)| \leq \|f - \varphi\| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } x \in [a,b].$$

Dále, pro každé $x \in (a,b)$ existuje $\delta(x) > 0$ takové, že $(x - \delta(x), x] \subset (a,b)$ a

$$|f(x) - f(t)| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } t \in (x - \delta(x), x].$$

Pro každé $x \in (a,b)$ a $t \in (x - \delta(x), x]$ tedy máme

$$|\varphi(x) - \varphi(t)| \leq |\varphi(x) - f(x)| + |f(x) - f(t)| + |f(t) - \varphi(t)| < 3\,\varepsilon,$$

tj.

$$|\varphi(x) - \varphi(x-)| < 3\,\varepsilon.$$

Položme

$$g(x) = \begin{cases} \varphi(x-) & \text{pro} \quad x \in (a,b), \\ \varphi(x) & \text{pro} \quad x = a \text{ nebo } x = b. \end{cases}$$

Potom pro každé $x \in (a,b)$ platí

$$|f(x) - g(x)| \le |f(x) - \varphi(x)| + |\varphi(x) - \varphi(x-)| < 4\,\varepsilon,$$

tj. množina $\mathbb{G}_{\mathrm{L}} \cap \mathbb{S}_{\mathrm{L}}[a,b]$ je hustá v $\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$. $\square$

3.13. Poznámka. $\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b] = \mathrm{Lin}\Big(1, \chi_{(\tau,b]}, \tau \in [a,b), \chi_{[b]}\Big).$

Další podrobnosti týkající se regulovaných funkcí lze nalézti zejména v monografii Ch. Hönigově *Volterra Stieltjes-Integral Equations* [2, sec.3]

Kapitola 4

Riemannův-Stieljesův integrál

Text této kapitoly se opírá zejména o Hildebrandtovu monografii [1, Chapter II].

4.1. Definice. Pro libovolné dvě funkce $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ a rozšířené dělení $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$ intervalu $[a,b]$, $D = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$, definujeme

$$S_{f\Delta g}(D,\xi) := \sum_{j=1}^{m} f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})].$$

(Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme psát zjednodušeně $S(D,\xi)$ místo $S_{f\Delta g}(D,\xi)$.)

Nechť $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Řekneme, že existuje *normový Riemannův-Stieltjesův integrál* ((n) RS-integrál)

$$(\mathrm{n})\int_a^b f\,\mathrm{d}g = (\mathrm{n})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x)$$

a má hodnotu $I \in \mathbb{R}$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že platí

$$\Big((D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b] \quad \wedge \quad |D| < \delta\Big) \implies |S(D,\xi) - I| < \varepsilon.$$

Řekneme, že existuje σ *Riemannův-Stieltjesův integrál* ((σ) RS-integrál)

$$(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}g = (\sigma)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x)$$

a má hodnotu $I \in \mathbb{R}$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení $D_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b]$ takové, že platí

$$\Big((D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b] \quad \wedge \quad D_\varepsilon \subset D\Big) \implies |S(D,\xi) - I| < \varepsilon.$$

Existuje-li integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ (v některém z výše uvedených smyslů), pak pro libovolné funkce f, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definujeme:

$$\int_b^a f\,\mathrm{d}g = -\int_a^b f\,\mathrm{d}g.$$

Dále, pro každé $c \in [a,b]$ a pro všechny funkce f, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definujeme:

$$\int_c^c f\,\mathrm{d}g = 0.$$

4.2 . Cvičení. *Jestliže funkce* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *a* $g \in \mathbb{BV}[a, b]$ *jsou takové, že existuje* RS-*integrál* $\int_a^b f \, \mathrm{d}g$ *(v normovém či zjemňovacím smyslu), pak platí:*

$$\Big| \int_a^b f \, \mathrm{d}g \Big| \le \|f\| \operatorname{var}_a^b g.$$

Pro každá dvě dělení D', $D'' \in \mathscr{D}[a, b]$ taková, že $D' \subset D''$ (D'' je zjemnění D') platí $|D''| \le |D'|$. Snadno lze tedy dokázat následující tvrzení:

4.3. Věta. *Je-li* (n) $\int_a^b f \, \mathrm{d}g = I \in \mathbb{R}$, *pak platí také* $(\sigma) \int_a^b f \, \mathrm{d}g = I$. □

4.4. Poznámka. Nechť $f \in \mathbb{G}[a, b]$, $x_0 \in (a, b)$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c\,d > 0$ a

$$g(x) = -c\,\chi_{[a,x_0)}(x) + d\,\chi_{(x_0,b]}(x) = \begin{cases} -c & \text{pro } x < x_0, \\ 0 & \text{pro } x = x_0, \\ d & \text{pro } x > x_0. \end{cases}$$

Pro libovolné rozšířené dělení

$$(D, \xi) = \Big(\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}, (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)\Big) \in \mathscr{P}[a, b]$$

intervalu $[a, b]$ máme

$$S(D, \xi) = \begin{cases} f(\xi')\,(c + d) & \text{je-li } x_0 \in (\alpha_j, \alpha_{j+1}),\ \xi_j = \xi' \ne x_0, \\ f(x_0)\,(c + d) & \text{je-li } x_0 \in (\alpha_j, \alpha_{j+1}),\ \xi_j = x_0, \\ f(\xi')\,c + f(\xi'')\,d & \text{je-li } x_0 = \alpha_j,\ \xi_{j-1} = \xi' \ne x_0,\ \xi_j = \xi'' \ne x_0, \\ f(x_0)\,c + f(\xi'')\,d & \text{je-li } x_0 = \alpha_j,\ \xi_{j-1} = x_0,\ \xi_j = \xi'' \ne x_0, \\ f(\xi')\,c + f(x_0)\,d & \text{je-li } x_0 = \alpha_j,\ \xi_{j-1} = \xi' \ne x_0,\ \xi_j = x_0. \end{cases}$$

Odtud vidíme, že pokud je $-c = g(x_0-) \ne d = g(x_0+)$, pak k tomu, aby částečné součty $S(D, \xi)$ konvergovaly pro $|D| \to 0$ k nějaké konečné hodnotě I, je nutné, aby funkce f byla v bodě x_0 spojitá ($\lim_{\xi \to x_0} f(\xi) = f(x_0)$). Lze tedy očekávat, že pro existenci normového integrálu (n) $\int_a^b f \, \mathrm{d}g$ bude nutné, aby funkce f a g neměly žádný společný bod nespojitosti.

Nyní, nechť $D_0 \in \mathscr{D}[a, b]$ je libovolné dělení obsahující x_0. Pro každé jeho zjemnění D potom máme

$$S(D, \xi) \in \{f(\xi')\,c + f(\xi'')\,d,\ f(x_0)\,c + f(\xi'')\,d,\ f(\xi')\,c + f(x_0)\,d\},$$

kde $\xi' < x_0$ a $\xi'' > x_0$. Bude-li tedy funkce f regulovaná na $[a, b]$, bude množina $\mathcal{Q}$ hromadných bodů množiny $\{S(D, \xi) \colon (D, \xi) \in \mathscr{P}[a, b] \wedge D_0 \subset D\}$ nejvýše tříbodová:

$$\mathcal{Q} = \{f(x_0-)\,c + f(x_0+)\,d,\ f(x_0)\,c + f(x_0+)\,d,\ f(x_0-)\,c + f(x_0)\,d\}$$

To naznačuje, že pro existenci integrálu $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ bude nutné (a mohlo by stačit (?)), aby pro funkce f a g a libovolné $x \in [a,b]$ platilo:

$$(\Delta^+ f(x)\,\Delta^+ g(x) = 0) \quad \wedge \quad (\Delta^- f(x)\,\Delta^- g(x) = 0).$$

Standardním způsobem lze dokázat následující tvrzení.

4.5 . Věta (BOLZANO - CAUCHYOVA PODMÍNKA). *Pro dané funkce $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ existuje normový integrál $(n)\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ právě tehdy, když je splněna podmínka:*

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \colon \Big((D',\xi'), (D'',\xi'') \in \mathscr{P}[a,b] \wedge |D'| < \delta \wedge |D''| < \delta \Big) \\ \implies |S(D',\xi') - S(D'',\xi'')| < \varepsilon. \end{cases} \tag{4.1}$$

Podobně, $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}g \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když platí

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0\, \exists D_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b] \colon \Big((D',\xi'), (D'',\xi'') \in \mathscr{P}[a,b] \wedge D' \supset D_\varepsilon \wedge D'' \supset D_\varepsilon \Big) \\ \implies |S(D',\xi') - S(D'',\xi'')| < \varepsilon. \end{cases} \tag{4.2}$$

D ů k a z . Nutnost splnění uvedených podmínek pro existenci příslušných integrálů je zřejmá z Definice 4.1.

Předpokládejme, že je splněna podmínka (4.2). Potom můžeme vybrat posloupnost rozšířených dělení $\{(D_k,\xi_k)\}_{k=1}^\infty$ intervalu $[a,b]$ takovým způsobem, že bude platit

$$|S(D,\xi) - S(D_k,\xi_k)| < \frac{1}{k} \quad \text{pro každé } D \supset D_k \quad \text{a} \quad (D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b] \tag{4.3}$$

a přitom současně

$$D_k \subset D_\ell \quad \text{a} \quad |S(D_k,\xi_k) - S(D_\ell,\xi_\ell)| < \frac{1}{k} \quad \text{pro každé } k \in \mathbb{N} \quad \text{a} \quad \ell \ge k. \tag{4.4}$$

Posloupnost $\{S(D_k,\xi_k)\}_{k=1}^\infty$ je cauchyovská posloupnost reálných čísel a existuje tedy reálné číslo $I \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{k\to\infty} S(D_k,\xi_k) = I.$$

Nyní, nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Zvolíme-li k_ε tak, aby bylo současně

$$\frac{1}{k_\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad |S(D_{k_\varepsilon},\xi_{k_\varepsilon}) - I| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{4.5}$$

bude, vzhledem k (4.3) a (4.5), pro každé $D \supset D_{k_\varepsilon}$ a každé $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$ platit

$$|S(D,\xi) - I| \le |S(D,\xi) - S(D_{k_\varepsilon},\xi_{k_\varepsilon})| + |S(D_{k_\varepsilon},\xi_{k_\varepsilon}) - I| < \varepsilon,$$

neboli

$$I = (\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}g.$$

Implikace:(4.2) $\Longrightarrow$ $(\mathrm{n})\int_a^b f\,\mathrm{d}g \in \mathbb{R}$ by se dokazovala podobně a ponechává se čtenáři jako cvičení. □

Pokud nebude v následujících tvrzeních explicitně zmíněno, zda se jedná o normový integrál či o (σ)-integrál, bude to znamenat, že tvrzení platí pro oba typy integrálu.

4.6. Věta. *Jestliže existuje integrál* $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ *a* $c \in (a,b)$, *pak existují také integrály*

$$\int_a^c f\,\mathrm{d}g \quad a \quad \int_c^b f\,\mathrm{d}g$$

a platí

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g = \int_a^c f\,\mathrm{d}g + \int_c^b f\,\mathrm{d}g.$$

D ů k a z . Existenci integrálů

$$\int_a^c f\,\mathrm{d}g \quad \text{a} \quad \int_c^b f\,\mathrm{d}g$$

dokážeme snadno pomocí předchozí věty.

Dále, nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme rozšířená dělení $(D', \xi') \in \mathscr{P}[a,c]$ a $(D'', \xi'') \in \mathscr{P}[c,b]$ tak, aby platilo

$$\left|S(D',\xi') - \int_a^c f\,\mathrm{d}g\right| + \left|S(D'',\xi'') - \int_c^b f\,\mathrm{d}g\right| + \left|S(D,\xi) - \int_a^b f\,\mathrm{d}g\right| < \varepsilon, \tag{4.6}$$

kde

$$(D,\xi) = (D' \cup D', (\xi', \xi'')) \in \mathscr{P}[a,b].$$

Potom bude $S(D,\xi) = S(D',\xi') + S(D'',\xi'')$ a tudíž

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f\,\mathrm{d}g - \int_a^c f\,\mathrm{d}g - \int_c^b f\,\mathrm{d}g\right| \\
&\quad \le \left|\int_a^b f\,\mathrm{d}g - S(D,\xi)\right| + \left|S(D,\xi) - S(D',\xi') - S(D'',\xi'')\right| \\
&\qquad + \left|S(D',\xi') - \int_a^c f\,\mathrm{d}g\right| + \left|S(D,\xi) - \int_a^b f\,\mathrm{d}g\right| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

4.7 . Cvičení. *Pro oba integrály (normový i zjemňovací) podrobně dokažte, že z existence integrálu* $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ *opravdu plyne existence rozšířených dělení* $(D',\xi') \in \mathscr{P}[a,c]$ *a* $(D'',\xi'') \in \mathscr{P}[c,b]$ *takových, že platí* (4.6).

Další tvrzení plyne přímo z Definice 4.1.

4.8. Cvičení. Nechť $f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 \colon [a,b] \to \mathbb{R}$, a nechť existují integrály:

$$\int_a^b f_1 \,\mathrm{d}g, \quad \int_a^b f_2 \,\mathrm{d}g, \quad \int_a^b f \,\mathrm{d}g_1 \quad \text{a} \quad \int_a^b f_2 \,\mathrm{d}g_2.$$

Potom pro libovolná $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ platí

$$\int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2) \,\mathrm{d}g = c_1 \int_a^b f_1 \,\mathrm{d}g + c_2 \int_a^b f_2 \,\mathrm{d}g,$$

a

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}[c_1 g_1 + c_2 g_2] = c_1 \int_a^b f \,\mathrm{d}g_1 + c_2 \int_a^b f \,\mathrm{d}g_2.$$

4.9. Věta. *Nechť $g \in \mathbb{BV}[a,b]$ a ohraničené funkce f a $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou takové, že*

$$\int_a^b f_n \,\mathrm{d}g \in \mathbb{R} \quad \textit{pro všechna } n \in \mathbb{N} \tag{4.7}$$

a

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0. \tag{4.8}$$

Potom existuje také integrál $\int_a^b f \,\mathrm{d}g$ a platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \,\mathrm{d}g = \int_a^b f \,\mathrm{d}g. \tag{4.9}$$

D ů k a z provedeme pro σ-integrál:

Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Vzhledem k předpokladu (4.8) můžeme zvolit $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tak, aby platilo

$$n \geq n_\varepsilon \implies \Big(\|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{\operatorname{var}_a^b g}\Big) \wedge \Big(\|f_n\| < \|f\| + 1\Big). \tag{4.10}$$

Dále, za našich předpokladů (viz Cvičení 4.2) je pro $n \geq n_\varepsilon$

$$\Big|\int_a^b f_n \,\mathrm{d}g\Big| \leq \|f_n\| \operatorname{var}_a^b g \leq (\|f\| + 1) \operatorname{var}_a^b g.$$

Můžeme tedy vybrat podposloupnost $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ v $\mathbb{N}$ a $I \in \mathbb{R}$ tak, že bude platit

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_{n_k} \,\mathrm{d}g = I.$$

Speciálně, existuje $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takové, že

$$n_{k_\varepsilon} \geq n_\varepsilon \quad \text{a} \quad \Big(k \geq k_\varepsilon \implies \big|\int_a^b f_{n_k}\,\mathrm{d}g - I\big| < \varepsilon\Big). \tag{4.11}$$

Dále, nechť $D_\varepsilon = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \in \mathscr{D}$ je takové dělení intervalu $[a,b]$, že

$$\Big((D,\xi) \in \mathscr{P}\Big) \wedge \Big(D_\varepsilon \subset D\Big) \implies \big|S_{k_\varepsilon}(D,\xi) - \int_a^b f_{n_{k_\varepsilon}}\,\mathrm{d}g\big| < \varepsilon, \tag{4.12}$$

kde

$$S_{k_\varepsilon}(D,\xi) = \sum_{j=1}^m f_{n_{k_\varepsilon}}(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})].$$

Protože je $n_{k_\varepsilon} \geq n_\varepsilon$ (viz (4.11)), znamená (4.10), že pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$ splňující $D_\varepsilon \subset D$ je

$$\big|S(D,\xi) - S_{k_\varepsilon}(D,\xi)\big| \leq \|f - f_{n_{k_\varepsilon}}\|\operatorname{var}_a^b g < \varepsilon.$$

Vzhledem k (4.11)-(4.12) tedy dostáváme

$$|S(D,\xi) - I| \leq |S(D,\xi) - S_{k_\varepsilon}(D,\xi)| + \big|S_{k_\varepsilon}(D,\xi) - \int_a^b f_{n_{k_\varepsilon}}\,\mathrm{d}g\big| + \big|\int_a^b f_{n_{k_\varepsilon}}\,\mathrm{d}g - I\big| < 3\,\varepsilon.$$

Odtud okamžitě plyne, že platí

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g = I.$$

Konečně, protože podle Cvičení 4.2 máme

$$\big|\int_a^b f_n\,\mathrm{d}g - \int_a^b f\,\mathrm{d}g\big| \leq \|f_n - f\|\operatorname{var}_a^b g,$$

tvrzení (4.9) plyne nyní snadno z předpokladu (4.8). □

4.10 . Poznámka. Všimněme si, že podle definice existuje $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}g \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení $D_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b]$ takové, že:

$$\Big((D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b] \;\wedge\; D \supset D_\varepsilon\Big) \implies \Big|\sum_{j=1}^{\nu(D)} \Big(f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}g\Big)\Big| < \varepsilon.$$

4.11 . Lemma (SAKS-HENSTOCK). *Nechť $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ a nechť existuje $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}g$. Buď dáno $\varepsilon > 0$ a nechť $D_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b]$ je takové, že*

$$\Big|S(D,\xi) - (\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}g\Big| < \varepsilon$$

platí pro každé rozšířené dělení $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$ *takové, že* $D \supset D_\varepsilon$. *Potom pro každé takové dělení*

$$(D,\xi) = \big(\{\alpha_0,\alpha_2,\dots,\alpha_m\},(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m)\big)$$

platí také

$$\sum_{j=1}^{m}\Big|f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1}]-(\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}g\Big| < 6\,\varepsilon. \tag{4.13}$$

D ů k a z . a) Pro každou dvojici (D',ξ'), $(D'',\xi') \in \mathscr{P}[a,b]$ takovou, že je $D' \supset D_\varepsilon$ a $D'' \supset D_\varepsilon$ máme

$$|S(D',\xi') - S(D'',\xi'')| < 2\,\varepsilon. \tag{4.14}$$

Nechť $(D,\xi)\in\mathscr{P}[a,b]$, $D=\{\alpha_0,\alpha_2,\dots,\alpha_m\}$, $\xi=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m)$ a $D\supset D_\varepsilon$. Pro každé $j\in\{1,2,\dots,m\}$ můžeme zvolit $D_\varepsilon^{(j)}\in\mathscr{D}[\alpha_{j-1},\alpha_j]$ a $\xi^{(j)}\in\mathbb{R}^m$ tak, aby platilo

$$(D_\varepsilon^{(j)},\xi^{(j)})\in\mathscr{P}[\alpha_{j-1},\alpha_j]$$

a

$$\Big|S(D_\varepsilon^{(j)},\xi^{(j)})-(\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}g\Big| < \frac{\varepsilon}{m}. \tag{4.15}$$

Nechť

$$U=\{j_1,j_2,\dots,j_k\}\subset\{1,2,\dots,m\},\quad 1\le j_1<j_2<\dots<j_k\le m,$$

je daná podmnožina indexů. Potom pro každý vektor $\xi=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m)\in\mathbb{R}^m$ takový, že $(D,\xi)\in\mathscr{P}[a,b]$, máme

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{j\in U}\Big(f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-(\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}g\Big)\Big| \\
&\quad\le\Big|\sum_{j\in U}\Big(f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-S(D_\varepsilon^{(j)},\xi^{(j)})\Big)\Big| \\
&\qquad+\Big|\sum_{j\in U}\Big(S(D_\varepsilon^{(j)},\xi^{(j)})-(\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}g\Big)\Big| \\
&\quad=\Big|S(D,\xi)-\sum_{j\notin U}f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-\sum_{j\in U}S(D_\varepsilon^{(j)},\xi^{(j)})\Big| \\
&\qquad+\Big|\sum_{j\in U}\Big(S(D_\varepsilon^{(j)},\xi^{(j)})-(\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}g\Big)\Big| \\
&\quad=\big|S(D,\xi)-S(D',\xi')\big|+\Big|\sum_{j\in U}\Big(S(D_\varepsilon^{(j)},\xi^{(j)})-(\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}g\Big)\Big|,
\end{aligned}$$

kde $(D',\xi') \in \mathscr{P}[a,b]$, $D' = D \cup \bigcup_{j\in U} D_\varepsilon^{(j)}$. Odtud, vzhledem k (4.14) a (4.15), plyne

$$\Big|\sum_{j\in U}\Big(f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-(\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}g\Big)\Big| \le 2\,\varepsilon + k\,\frac{\varepsilon}{m} < 3\,\varepsilon. \tag{4.16}$$

b) Označme

$$U^+ = \{j \in \{1,2,\dots,m\}\colon f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-(\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}g \ge 0\}.$$

Po dosazení $U = U^+$ do (4.16) získáme nerovnost

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j\in U^+}\big|f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-(\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}g\big| \\ \quad\displaystyle = \sum_{j\in U^+}\Big(f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-(\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}g\Big) < 3\,\varepsilon. \end{cases} \tag{4.17}$$

Podobně, pro $U = U^-$,

$$U^- = \{j \in \{1,2,\dots,m\}\colon f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-(\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}g < 0\},$$

dostaneme

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j\in U^-}\Big|f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-(\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}g\Big| \\ \quad\displaystyle = -\sum_{j\in U^-}\Big(f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-(\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}g\Big) < 3\,\varepsilon. \end{cases} \tag{4.18}$$

Odtud a z (4.17) plyne

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{m}\big|f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-(\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}g\big| \\ &\quad= \sum_{j\in U^+} f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-(\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}g \\ &\qquad - \sum_{j\in U^-} f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-(\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}g \\ &\quad\le \big|\sum_{j\in U^+} f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-(\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}g\big| \\ &\qquad + \big|\sum_{j\in U^-} f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-(\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}g\big| < 6\,\varepsilon, \end{aligned}$$

tj. platí (4.13). □

4.12. Cvičení.

(i) Dokažte, že za předpokladů Lemmatu 4.11 pro libovolný systém

$$a \le \alpha_1 \le \xi_1 \le \beta_1 \le \alpha_2 \le \xi_2 \le \beta_2 \le \cdots \le \alpha_k \le \xi_k \le \beta_k \le b$$

(může být $\beta_i < \alpha_{i+1}$)

platí

$$\Big|\sum_{j=1}^{k} f(\xi_j)\,[g(\beta_j) - g(\alpha_j)] - (\sigma)\int_{\alpha_j}^{\beta_j} f\,\mathrm{d}g\Big| < 3\,\varepsilon.$$

(ii) Formulujte a dokažte Lemma 4.11 pro normový integrál.

Důležitým důsledkem Saks-Henstockova lemmatu je následující tvrzení:

4.13. Věta (Substituce). *Nechť $f, g, h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, přičemž f je ohraničená na intervalu $[a,b]$ a $\int_a^b g\,\mathrm{d}h \in \mathbb{R}$. Potom existuje jeden z integrálů*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\Big[\int_a^x g\,\mathrm{d}h\Big] \quad a \quad \int_a^b f\,g\,\mathrm{d}h \tag{4.19}$$

právě tehdy když existuje i ten druhý. V takovém případě pak platí

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\Big[\int_a^x g\,\mathrm{d}h\Big] = \int_a^b f\,g\,\mathrm{d}h. \tag{4.20}$$

D ů k a z provedeme opět pouze pro σ integrál:

Nejprve si povšimněme, že z existence integrálu $\int_a^b g\,\mathrm{d}h \in \mathbb{R}$ plyne, že pro libovolné $x \in [a,b]$ je definovaná funkce

$$w(x) = \int_a^x g\,\mathrm{d}h$$

(viz Věta 4.6). Dále, pro každé rozšířené dělení

$$(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b], \quad D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$$

máme:

$$\Big|\sum_{j=1}^{m} f(\xi_j)\,g(\xi_j)\,[h(\alpha_j) - h(\alpha_{j-1})] - \sum_{j=1}^{m} f(\xi_j)\,[w(\alpha_j) - w(\alpha_{j-1})]\Big|$$

$$\le \sum_{j=1}^{m} |f(\xi_j)|\,\Big|g(\xi_j)\,[h(\alpha_j) - h(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} g\,\mathrm{d}h\Big|$$

$$\le \|f\|\,\Big(\sum_{j=1}^{m} \Big|g(\xi_j)\,[h(\alpha_j) - h(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} g\,\mathrm{d}h\Big|\Big)$$

Buď dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Zvolme $D_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b]$ tak, aby nerovnost

$$\left| S(D,\xi) - (\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}g \right| < \varepsilon$$

platila pro každé rozšířené dělení $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$ takové, že $D \supset D_\varepsilon$. Podle Saks-Henstockova lemmatu (Lemma 4.11) pak platí také

$$\sum_{j=1}^m \left| g(\xi_j)\,[h(\alpha_j) - h(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} g\,\mathrm{d}h \right| < 6\,\varepsilon.$$

pro každé rozšířené dělení $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$ takové, že $D \supset D_\varepsilon$. To znamená, že pro integrální součty příslušné k integrálům (4.19) máme

$$\Big| \sum_{j=1}^m f(\xi_j)\,g(\xi_j)\,[h(\alpha_j) - h(\alpha_{j-1})] - \sum_{j=1}^m f(\xi_j)\,[w(\alpha_{j-1}) - w(\alpha_j)] \Big| < \|f\|\,6\,\varepsilon.$$

Odtud už důkaz našeho tvrzení snadno plyne. □

4.14. Věta (INTEGRACE PER-PARTES). *$\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ existuje právě tehdy, když existuje integrál $\int_a^b g\,\mathrm{d}f$. V takovém případě pak platí*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g + \int_a^b g\,\mathrm{d}f = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a). \tag{4.21}$$

D ů k a z . Pro libovolné rozšířené dělení

$$(D,\xi) = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}, (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)\} \in \mathscr{P}$$

platí

$$\begin{aligned}
&S_{f\Delta g}(D,\xi)\\
&\quad = f(\xi_1)\,[g(\alpha_1) - g(a)] + f(\xi_2)\,[g(\alpha_2) - g(\alpha_1)] + \dots + f(\xi_m)\,[g(b) - g(\alpha_{m-1})]\\
&\quad = -f(a)\,g(a) - [f(\xi_1) - f(a)]\,g(a) - [f(\xi_2) - f(\alpha_1)]\,g(\alpha_1)\\
&\qquad -[f(\alpha_1) - f(\xi_1)]\,g(\alpha_1) - \dots - [f(\xi_m) - f(\alpha_{m-1})]\,g(\alpha_{m-1})\\
&\qquad -[f(\alpha_{m-1}) - f(\xi_{m-1})]\,g(\alpha_{m-1}) - [f(b) - f(\xi_m)]\,g(b) + f(b)\,g(b)\\
&\quad = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - S_{g\Delta f}(D',\xi'),
\end{aligned}$$

kde

$$\xi' = (a, \alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}, \alpha_{m-1}, b) \quad \text{a} \quad D' = \{a, \xi_1, \alpha_1, \xi_2, \alpha_2, \dots \alpha_{m-1}, \xi_m, b\}$$

je zjemněním D. (Stane-li se, že $\xi_j = \alpha_{j-1}$ resp. $\xi_j = \alpha_j$ pro nějaké j, musíme ovšem tyto body ξ_j z D' i z ξ' vynechat.) Nechť je dáno $\varepsilon > 0$ a nechť existuje integrál $\int_a^b g\,\mathrm{d}f$. Zvolme dělení D_ε intervalu $[a,b]$ tak, aby pro každé jeho zjemnění D' a každé $(D',\xi') \in \mathscr{P}[a,b]$ platilo

$$\left| S_{g\Delta f}(D',\xi') - \int_a^b g\,\mathrm{d}f \right| < \varepsilon.$$

Vzhledem k výše uvedenému máme tedy pro každé $D \supset D_\varepsilon$ a každé příslušné rozšířené dělení (D,ξ)

$$S_{f\Delta g}(D,\xi) - f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) + \int_a^b g\,\mathrm{d}f = \int_a^b g\,\mathrm{d}f - S_{g\Delta f}(D',\xi'),$$

kde $D' \supset D \supset D_\varepsilon$ a tudíž

$$\left| S_{f\Delta g}(D,\xi) - f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) + \int_a^b g\,\mathrm{d}f \right| = \left| \int_a^b g\,\mathrm{d}f - S_{g\Delta f}(D',\xi') \right| < \varepsilon.$$

Odtud už snadno plyne existence integrálu $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ a platnost vztahu (4.21).

Druhá implikace by se dokazovala symetricky. □

4.15. Lemma. *Je-li*

$$a_n \ge 0 \quad \textit{pro všechna } n \in \mathbb{N} \quad \textit{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty,$$

pak existuje posloupnost $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *taková, že platí*

$$c_n > 0 \quad \textit{pro všechna } n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n\to\infty} c_n = 0 \quad \textit{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, a_n = \infty. \tag{4.22}$$

D ů k a z . Označíme-li $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ pro $n \in \mathbb{N}$, bude $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ neklesající posloupnost a

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty. \tag{4.23}$$

Speciálně, pro dostatečně velká n ($n \ge n_0$) bude $s_n > 0$. Můžeme tudíž definovat

$$c_n = \begin{cases} 1 & \text{pro } \; n < n_0, \\ \dfrac{1}{s_n} & \text{pro } \; n \ge n_0. \end{cases}$$

Zřejmě je $c_n > 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. Na druhou stranu, pro libovolná $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n \ge n_0$ máme

$$\sum_{k=n}^{m} c_k\, a_k = \sum_{k=n}^{m} \frac{a_k}{s_k} \ge \frac{\sum_{k=n}^m a_k}{s_m} = 1 - \frac{s_{n-1}}{s_m}.$$

Vzhledem k (4.23), pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $m_n > n$ takové, že je $\dfrac{s_{n-1}}{s_{m_n}} < \dfrac{1}{2}$, tj.

$$\sum_{k=n}^{m_n} c_k\, a_k > \frac{1}{2}.$$

To ovšem znamená, že musí platit (4.22). □

4.16 . Lemma. *Funkce $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ má konečnou variaci na $[a,b]$ právě tehdy, když platí*

$$\begin{cases} \forall\, x \in (a,b]\ \exists\, \delta_1 \in (0, x-a) \colon \operatorname{var}_{x-\delta_1}^{x} g < \infty \\ a \\ \forall\, x \in [a,b)\ \exists\, \delta_2 \in (0, b-x) \colon \operatorname{var}_{x}^{x+\delta_2} g < \infty. \end{cases} \tag{4.24}$$

D ů k a z plyne z Borelovy věty o konečném pokrytí a z Věty 1.3. □

4.17 . Věta. *Integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ existuje pro každou funkci f spojitou na $[a,b]$ pouze tehdy, když g má konečnou variaci na $[a,b]$.*

D ů k a z . Předpokládejme, že je $\operatorname{var}_a^b g = \infty$. Podle Lemmatu 4.16 existuje $x_0 \in [a,b]$ pro které není splněna jedna z podmínek (4.24). Nechť tedy např. $x_0 \in (a,b]$ a nechť pro každé $\delta \in (0, x_0 - a)$ platí

$$\operatorname{var}_{x_0-\delta}^{x_0} f = \infty.$$

Potom také existuje rostoucí posloupnost $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$ bodů v $(0, x_0)$ taková, že

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k = x_0 \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |g(\alpha_k) - g(\alpha_{k-1})| = \infty.$$

Dále, podle Lemmatu 4.15 existuje posloupnost $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ kladných čísel taková, že platí

$$\lim_{k\to\infty} c_k = \infty \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, |g(\alpha_k) - g(\alpha_{k-1})| = \infty.$$

Položme

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x \le \alpha_0 \text{ resp. } x \ge x_0 \text{ resp. } x \in \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}, \\ c_k \operatorname{sign}(g(\alpha_k) - g(\alpha_{k-1})) & \text{pro} \quad x = \xi_k := \dfrac{\alpha_k + \alpha_{k-1}}{2} \end{cases}$$

a ve zbývajících bodech intervalu $[a,b]$ dodefinujme funkci f lineárně. Takto definovaná funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bude zřejmě spojitá na $[a,b]$ a přitom pro ní bude platit

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(\xi_k)\,[g(\alpha_k) - g(\alpha_{k-1})] = \infty.$$

Speciálně, pro každé $M > 0$ existuje $N_M \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{k=1}^{N_M} f(\xi_k)\,[g(\alpha_k) - g(\alpha_{k-1})] > M.$$

Pro dané $M > 0$, označme $D_M = \{a, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{N_M}, x_0, b\}$ a $\xi_M = (a, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{N_M}, x_0, b)$. Potom je $(D_M, \xi_M) \in \mathscr{P}$ a $S(D_M, \xi_M) > M$. To ale znamená, že integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ nemůže existovat, a to ani zjemňovací ani normový. $\square$

4.18. Věta. *Integrál* $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ *existuje pro každou konečnou skokovou funkci* f *pouze tehdy, když* f *je spojitá na* $[a, b]$.

D ů k a z . Nechť $x_0 \in (a, b)$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c\,d > 0$ a nechť funkce $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ je definována podobně jako v Poznámce 4.4:

$$g(x) = -c\,\chi_{[a,x_0)}(x) + d\,\chi_{(x_0,b]}(x) \quad \text{pro} \quad x \in [a, b].$$

Podle Poznámky 4.4 může integrál $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ existovat pouze tehdy, bude-li platit

$$c\,\Delta^- f(x_0) = 0 \quad \text{a} \quad d\,\Delta^+ f(x_0) = 0,$$

tj. $\Delta^- f(x_0) = \Delta^+ f(x_0) = 0$, tj. má-li existovat integrál $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}g$, musí být f spojitá v každém bodě $x_0 \in (a, b)$. Podobně bychom dokázali také, že v takovém případě musí být f spojitá v bodě a zprava a v bodě b zleva.

Modifikace důkazu pro normový integrál je zřejmá. $\square$

4.19. Věta. *Jestliže* $c \in [a, b]$ *a jestliže existují integrály*

$$I_1 = (\sigma)\int_a^c f\,\mathrm{d}g \quad a \quad I_2 = (\sigma)\int_c^b f\,\mathrm{d}g,$$

pak existuje také integrál $I = (\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ *a platí* $I = I_1 + I_2$.

D ů k a z . Buď dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme dělení $D'_\varepsilon \in \mathscr{D}[a, c]$ a $D''_\varepsilon \in \mathscr{D}[c, b]$ tak, aby platilo

$$\big|S(D', \xi') - I_1\big| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } (D', \xi') \in \mathscr{P}[a, c] \quad \text{taková, že } D' \supset D'_\varepsilon$$

a

$$\big|S(D'', \xi'') - I_2\big| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } (D'', \xi'') \in \mathscr{P}[c, b] \quad \text{taková, že } D'' \supset D''_\varepsilon.$$

Nyní, nechť $D_\varepsilon = D'_\varepsilon \cup D''_\varepsilon$. Protože je $c \in D_\varepsilon$, každé rozšířené dělení $(D, \xi) \in \mathscr{P}[a, b]$ splňující $D \supset D_\varepsilon$ můžeme rozdělit:

$$D = D' \cup D'' \quad \text{a} \quad \xi = (\xi', \xi'')$$

tak, že bude platit $(D', \xi') \in \mathscr{P}[a, c]$, $(D'', \xi'') \in \mathscr{P}[c, b]$, $D' \supset D'_\varepsilon$ a $D'' \supset D''_\varepsilon$. Navíc, je

$$S(D, \xi) = S(D', \xi') + S(D'', \xi'').$$

Vzhledem k definici D'_ε a D''_ε tedy pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$ splňující $D \supset D_\varepsilon$ máme

$$\big|S(D,\xi) - (I_1 + I_2)\big| \le \big|S(D',\xi') - I_1\big| + \big|S(D'',\xi'') - I_2\big| < 2\,\varepsilon,$$

tj. dokázali jsme tvrzení věty. □

Kapitola věnovaná RS-integrálům bude zakončena uvedením několika dalších důležitých tvrzení. Pro důkazy zatím odkazuju čtenáře na kapitolu II již zmíněné Hildebrandtovy monografie [1].

4.20 . Definice. Řekneme, že funkce $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ splňují podmínku (PA) (*podmínku pseudoaditivity*) v bodě $x \in (a,b)$, jestliže

$$\begin{cases} \text{Pro každé } \varepsilon > 0 \text{ existuje } \delta_0 > 0 \text{ takové, že pro všechna} \\ \quad \delta' \in (0,\delta_0),\ \ \delta'' \in (0,\delta_0),\ \ \xi \in [x-\delta', x+\delta''],\ \ \xi' \in [x-\delta', x] \text{ a } \ \xi'' \in [x, x+\delta''] \\ \text{platí:} \\ \quad \big|f(\xi)\,[g(x+\delta'') - g(x-\delta')] \\ \qquad -f(\xi')\,[g(x) - g(x-\delta')] - f(\xi'')\,[g(x+\delta'') - g(x)]\big| < \varepsilon. \end{cases}$$

Následující tvrzení plyne z [1, Theorem II.3.10]), kde je ovšem třeba intervalovou funkci $f(I)$ nahradit mnohoznačnou intervalovou funkcí

$$F\colon [c,d] \to f(\xi)\,[g(d) - g(c)], \quad \xi \in [c,d].$$

4.21 . Věta. *Normový integrál* (n) $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ *existuje právě tehdy, když existuje* $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ *a je splněna podmínka* (PA) *v každém bodě* $x \in (a,b)$.

4.22 . Poznámka. Ve Větě 4.21 stačí místo splnění podmínky (PA) v každém bodě $x \in (a,b)$ požadovat splnění poněkud slabšího předpokladu:

$$\begin{cases} \text{Pro každé } \varepsilon > 0 \text{ existuje dělení } D_\varepsilon \text{ intervalu } [a,b] \text{ takové, že:} \\ \quad |S(D,\xi) - I| < \varepsilon \quad \text{pro každé } \ (D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b] \text{ takové, že } \ D \supset D_\varepsilon \\ \quad \text{a} \\ \quad \text{(PA) platí pro každé } \ \alpha \in D_\varepsilon \cap (a,b). \end{cases}$$

4.23 . Věta. *Nechť* $x \in (a,b)$. *Funkce* $f,\ g\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ *splňují podmínku (PA) v bodě* $x \in (a,b)$ *právě tehdy, když alespoň jedna z nich je v bodě* x *spojitá.*

4.24 . Poznámka. Je-li f ohraničená v okolí bodu $x \in (a,b)$ a g spojitá v bodě x, pak funkce f, g splňují podmínku (PA) v bodě x.

4.25 . Důsledek. ([1, Corollary II,10,6]) (n) $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ *existuje pouze tehdy, když funkce* f *a* g *nemají společný bod nespojitosti v* (a,b).

4.26. Důsledek. *Nechť $c \in (a,b)$ a nechť funkce $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ splňují (PA) v bodě c. Potom, jestliže existují integrály:*

$$(\mathrm{n})\int_a^c f\,\mathrm{d}g = I_1 \quad a \quad (\mathrm{n})\int_c^b f\,\mathrm{d}g = I_2,$$

pak existuje také integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ a platí

$$(\mathrm{n})\int_a^b f\,\mathrm{d}g = I_1 + I_2.$$

4.27. Věta. *Nechť $f \in \mathbb{C}[a,b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a,b]$. Potom existují oba integrály*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g \quad i \quad \int_a^b g\,\mathrm{d}f.$$

4.28. Definice. Nechť f, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ a $I \subset [a,b]$. Potom definujeme

$$\omega(f;I) = \sup_{x',x'' \in I} |f(x') - f(x'')|$$

a

$$\omega(Sf\Delta g;I) = \sup_{(D',\xi'),(D'',\xi'') \in \mathscr{P}(I)} |S(D',\xi') - S(D'',\xi'')|.$$

($\omega(f;I)$ nazýváme *modul spojitosti* funkce f na I.)

4.29. Věta. $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ *existuje právě tehdy, když*

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,D_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b]\ \forall\,D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \supset D_\varepsilon\colon \sum_{j=1}^{m} \omega(Sf\Delta g;[\alpha_{j-1},\alpha_j]) < \varepsilon.$$

4.30. Věta. *Jestliže existuje $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}g$, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení $D_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b]$ takové, že platí:*

$$(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b] \quad \wedge \quad D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \supset D_\varepsilon$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^{m} \omega(f;[\alpha_{j-1},\alpha_j])\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] < \varepsilon.$$

4.31. Věta. *Jestliže existuje $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}g$, pak platí obě následující tvrzení:*

(*i*) *Pro každé $x \in [a,b)$ je alespoň jedna z funkcí f, g spojitá v x zprava,*

(*ii*) *Pro každé $x \in (a,b]$ je alespoň jedna z funkcí f, g spojitá v x zleva.*

Kapitola 5

Kurzweilův-Stieltjesův integrál

5.1 . Definice. Funkce $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}^+ = (0,\infty)$ se nazývají *kalibry* na intervalu $[a,b]$, množinu kalibrů na intervalu $[a,b]$ značíme $\mathscr{G} = \mathscr{G}[a,b]$.

Pro daný kalibr $\delta \in \mathscr{G}$, řekneme, že rozšířené dělení $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$ je δ-*jemné* (píšeme $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta) = \mathscr{A}(\delta;[a,b])$), jestliže platí

$$[\alpha_{j-1},\alpha_j] \subset (\xi_j - \delta(\xi_j), \xi_j + \delta(\xi_j)) \quad \text{pro všechna } j = 1,2,\dots,\nu(D).$$

Pro dané funkce $f,g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ a rozšířené dělení $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$ definujeme (jako v kapitole 4)

$$S(D,\xi)(= S_{f\Delta g}(D,\xi)) := \sum_{j=1}^{\nu(D)} f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})].$$

5.2 . Definice (Kurzweil)**.** Nechť $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ a $I \in \mathbb{R}$. Řekneme, že existuje *Kurzweilův-Stieltjesův integrál* (KS-integrál)

$$(\mathrm{KS})\int_a^b f\,\mathrm{d}g = (\mathrm{KS})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x)$$

a má hodnotu $I \in \mathbb{R}$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje kalibr $\delta_\varepsilon \in \mathscr{G}$ takový, že

$$\Big| I - S(D,\xi) \Big| < \varepsilon \tag{5.1}$$

platí pro všechna δ_ε–jemná rozšířená dělení (D,ξ) (tj. pro všechna $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$).

Jestliže existuje integrál $(\mathrm{KS})\int_a^b f\,\mathrm{d}g$, definujeme $(\mathrm{KS})\int_b^a f\,\mathrm{d}g = -(\mathrm{KS})\int_a^b f\,\mathrm{d}g$. Dále, $(\mathrm{KS})\int_a^a f\,\mathrm{d}g = 0$.

Tato definice má smysl díky následujícímu lemmatu.

5.3 . Lemma (Cousin)**.** *Pro každý kalibr $\delta \in \mathscr{G}$ je množina $\mathscr{A}(\delta)$ všech δ–jemných rozšířených dělení intervalu $[a,b]$ neprázdná.*

D ů k a z . Nechť je dáno $\delta \in \mathscr{G}$. Označme M množinu všech $c \in (a,b]$ pro něž je $\mathscr{A}(\delta;[a,c]) \neq \emptyset$. Protože je $\delta(a) > 0$, položíme-li $c = \min\{a+\delta(a), b\}$, $D = \{a,c\}$ a $\xi = a$, bude $c \in (a,b]$ a $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta;[a,c])$, tj. $c \in M$ a $M \neq \emptyset$. Položme $d = \sup M$. Protože je $\delta(d) > 0$, existuje $c \in (d-\delta(d), d] \cap M$. Je-li $c < d$, pak existuje $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta;[a,c])$. Definujme $\widetilde{D} = D \cup \{d\}$ a $\widetilde{\xi} = (\xi, d) \in \mathbb{R}^{\nu(D)+1}$. Potom $(\widetilde{D},\widetilde{\xi}) \in \mathscr{P}[a,d]$ a protože je $[c,d] \in (d-\delta(d), d+\delta(d))$, znamená to, že $(\widetilde{D},\widetilde{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta;[a,d])$, tj. $d \in M$. Konečně, kdyby bylo $d < b$, pak bychom mohli zvolit $c \in (d, d + \delta(d)) \cap (d, b)$ a ukázat, že $c \in M$, což by znamenalo spor s definicí $d = \sup M$. To znamená, že platí $d = \sup M = b$ a důkaz je proveden. $\square$

Nebude-li uvedeno jinak, bude mít v následujícím textu symbol integrálu vždy smysl KS-integrálu.

Důkazy tvrzení uvedených v této kapitole byly jednak převzaty z monografické publikace [5], jednak jsou modifikacemi důkazů analogických tvrzení pro speciální případ $g(x) \equiv x$ ze Schwabikovy monografie [6].

5.4. Poznámka. Jsou-li δ a $\delta_0 \in \mathscr{G}$ kalibry na intervalu $[a, b]$, pro které je $\delta(x) \le \delta_0(x)$ na $[a, b]$, pak každé rozšířené dělení intervalu $[a, b]$, které je δ–jemné je také δ_0–jemné, tj. platí $\mathscr{A}(\delta) \subset \mathscr{A}(\delta_0)$. Platí-li tedy nějaká vlastnost pro všechna $(D, \xi) \in \mathscr{A}(\delta_0)$ tím spíše platí i pro všechna $(D, \xi) \in \mathscr{A}(\delta)$. Speciálně, je-li δ_0 libovolný kalibr na intervalu $[a, b]$, stačí v Definici 5.2 požadovat existenci kalibru δ_ε, pro který kromě vlastností v definici požadovaných platí navíc i $\delta_\varepsilon(x) \le \delta_0(x)$ na $[a, b]$.

Pro existenci KS-integrálu platí podmínka Bolzanova-Cauchyova typu:

5.5. Věta (BOLZANOVA-CAUCHYOVA PODMÍNKA). *Nechť $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Potom integrál $\int_a^b f \, \mathrm{d}g$ existuje právě tehdy, když je splněna následující podmínka:*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta \in \mathscr{G} \colon \Big((D, \xi), (D', \xi') \in \mathscr{A}(\delta) \Big) \implies \Big| S(D, \xi) - S(D', \xi') \Big| < \varepsilon. \tag{5.2}$$

D ů k a z . a) Existuje-li integrál $\int_a^b f \, \mathrm{d}g = I \in \mathbb{R}$, pak podle Definice 5.2 pro každé $\varepsilon > 0$ existuje kalibr $\delta_\varepsilon \in \mathscr{G}$ takový, že je $|S(D, \xi) - I| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro všechna $(D, \xi) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$. Pro všechny dvojice (D, ξ), $(D', \xi') \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ tedy máme

$$|S(D, \xi) - S(D', \xi')| \le |S(D, \xi) - I| + |S(D', \xi') - I| < \varepsilon,$$

tj. je splněna (B-C) podmínka (5.2).

b) Předpokládejme nyní, že je splněna (B-C) podmínka (5.2). Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Podle (5.2) můžeme zvolit kalibr δ_ε tak, aby

$$|S(D, \xi) - S(D', \xi')| < \frac{\varepsilon}{2}$$

platilo pro všechna (D, ξ), $(D', \xi') \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$. Označme nyní

$$M = \{ m \in \mathbb{R} \colon \exists \, \delta_m \in \mathscr{G} \text{ such that } (D, \xi) \in \mathscr{A}(\delta_m) \implies S(D, \xi) \ge m \}$$

Zvolíme-li libovolně $(D_0, \xi_0) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$, bude pro každé $(D, \xi) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ platit

$$S(D_0, \xi_0) - \frac{\varepsilon}{2} < S(D, \xi) < S(D_0, \xi_0) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.3}$$

Odtud plyne, že $(-\infty, S(D_0,\xi_0)-\frac{\varepsilon}{2}) \subset M$, a tudíž množina M není prázdná. Dále, pro každé $m\in M$ a každé $(D,\xi)\in\mathscr{A}(\widetilde{\delta}_m)$, kde

$$\widetilde{\delta}_m(x)=\min\{\delta_m(x),\delta_\varepsilon(x)\}\quad \text{na } [a,b],$$

máme také $(D,\xi)\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ a tudíž

$$m\le S(D,\xi)<S(D_0,\xi_0)+\frac{\varepsilon}{2},\quad \text{tj.}\quad M\subset(-\infty,S(D_0,\xi_0)+\frac{\varepsilon}{2}).$$

To ale znamená, že množina M je shora ohraničená, tj. $\sup M<\infty$, a platí

$$S(D_0,\xi_0)-\frac{\varepsilon}{2}\le\sup M\le S(D_0,\xi_0)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Toto spolu s nerovností (5.3) implikuje, že platí

$$|S(D,\xi)-\sup M|<\varepsilon\quad \text{pro všechna } (D,\xi)\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$$

neboli

$$\sup M=\int_a^b f\,\mathrm{d}g.$$

□

KS-integrál má obvyklé lineární vlastnosti:

5.6. Věta. *Nechť* $f,\ f_1,\ f_2,\ g,\ g_1,\ g_2\colon[a,b]\to\mathbb{R}$, *a nechť existují integrály:*

$$\int_a^b f_1\,\mathrm{d}g,\quad \int_a^b f_2\,\mathrm{d}g,\quad \int_a^b f\,\mathrm{d}g_1\quad a\quad \int_a^b f\,\mathrm{d}g_2.$$

Potom pro libovolná $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ *platí*

$$\int_a^b(c_1\,f_1+c_2\,f_2)\,\mathrm{d}g=c_1\int_a^b f_1\,\mathrm{d}g+c_2\int_a^b f_2\,\mathrm{d}g,$$

a

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[c_1\,g_1+c_2\,g_2]=c_1\int_a^b f\,\mathrm{d}g_1+c_2\int_a^b f\,\mathrm{d}g_2.$$

D ů k a z . Ukažme si např. důkaz prvního tvrzení: Buď dáno $\varepsilon>0$. Podle předpokladu existují kalibry $\delta_1\in\mathscr{G}$ a $\delta_2\in\mathscr{G}$ takové, že platí

$$(D,\xi)\in\mathscr{A}(\delta_i)\implies |S_{f_i\Delta g}(D,\xi)]-\int_a^b f_i\,\mathrm{d}g|<\varepsilon\quad \text{pro}\ \ i=1,2.$$

Pro $x\in[a,b]$ položme $\delta_\varepsilon(x)=\min\{\delta_1(x),\delta_2(x)\}$. Označme $h=c_1\,f_1+c_2\,f_2$. Protože pro každé $(D,\xi)\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ platí

$$\begin{aligned}S_{h\Delta g}(D,\xi)]&=\sum_{j=1}^{\nu(D)}(c_1\,f_1(\xi_j)+c_2\,f_2(\xi_j))\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]\\&=c_1\,S_{f_1\Delta g}(D,\xi)]+c_2\,S_{f_2\Delta g}(D,\xi)],\end{aligned}$$

dostáváme

$$\begin{aligned}
&\left|S_{h\Delta g}(D,\xi)] - c_1 \int_a^b f_1 \,\mathrm{d}g + c_2 \int_a^b f_2 \,\mathrm{d}g\right| \\
&\qquad \le |c_1| \left|S_{f_1\Delta g}(D,\xi)] - \int_a^b f_1 \,\mathrm{d}g\right| + |c_2| \left|S_{f_2\Delta g}(D,\xi)] - \int_a^b f_2 \,\mathrm{d}g\right| \\
&\qquad < (|c_1| + |c_2|)\, \varepsilon.
\end{aligned}$$

Odtud už ovšem naše tvrzení bezprostředně plyne.

Druhé tvrzení věty by se dokazovalo obdobně a důkaz lze ponechat čtenáři jako cvičení. □

5.7 . Věta. *Jestliže existuje integrál* $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ *a jestliže* $[c,d] \subset [a,b]$, *pak existuje také integrál* $\int_c^d f\,\mathrm{d}g$.

D ů k a z . Předpokládejme, že je $a < c < d < b$. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Podle (B-C) podmínky (viz Věta 5.5) můžeme zvolit kalibr $\delta_\varepsilon \in \mathscr{G}$ tak, aby platilo

$$|S(\widetilde{D},\widetilde{\xi}) - S(\widetilde{D}',\widetilde{\xi}')| < \varepsilon \tag{5.4}$$

pro všechna δ_ε–jemná rozšířená dělení $(\widetilde{D},\widetilde{\xi})$ a $(\widetilde{D}',\widetilde{\xi}')$ intervalu $[a,b]$. Mějme nyní libovolnou dvojici (D,ξ), $(D',\xi') \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon;[c,d])$. Dále, zvolme libovolně $(D^-,\xi^-) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon;[a,c])$, $(D^+,\xi^+) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon;[d,b])$ a doplňme jimi (D,ξ) a (D',ξ') na rozšířená dělení intervalu $[a,b]$, tj. položme

$$\widetilde{D} = D^- \cup D \cup D^+, \quad \widetilde{\xi} = (\xi^-,\xi,\xi^+),$$

a

$$\widetilde{D}' = D^- \cup D' \cup D^+, \quad \widetilde{\xi}' = (\xi^-,\xi',\xi^+).$$

Zřejmě je $(\widetilde{D},\widetilde{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon;[a,b])$ a $(\widetilde{D}',\widetilde{\xi}') \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon;[a,b])$ a vzhledem k (5.4) platí

$$|S(D,\xi) - S(D',\xi')| = |S(\widetilde{D},\widetilde{\xi}) - S(\widetilde{D}',\widetilde{\xi}')| < \varepsilon.$$

Odtud, vzhledem ke Větě 5.5, již existence integrálu $\int_c^d f\,\mathrm{d}g$ bezprostředně plyne. Modifikace důkazu pro případ, že $c = a$ resp. $d = b$ je zřejmá. □

5.8 . Věta. *Nechť* $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *a* $c \in [a,b]$. *Integrál* $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ *existuje právě tehdy když existují oba integrály* $\int_a^c f\,\mathrm{d}g$ *a* $\int_c^b f\,\mathrm{d}g$. *Potom navíc platí také rovnost*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g = \int_a^c f\,\mathrm{d}g + \int_c^b f\,\mathrm{d}g.$$

D ů k a z . a) Existuje-li integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$, pak podle Věty 5.7 existují také oba integrály $\int_a^c f\,\mathrm{d}g$ a $\int_c^b f\,\mathrm{d}g$.

b) Nechť

$$\int_a^c f\,\mathrm{d}g = I_1 \quad \text{a} \quad \int_c^b f\,\mathrm{d}g = I_2.$$

Budiž dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme kalibry $\delta'_\varepsilon \in \mathscr{G}[a,c]$ a $\delta''_\varepsilon \in \mathscr{G}[c,b]$ tak, aby pro všechna $(D',\xi') \in \mathscr{A}(\delta'_\varepsilon;[a,c])$ a $(D'',\xi'') \in \mathscr{A}(\delta''_\varepsilon;[c,b])$ platilo

$$|S(D',\xi') - I_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad |S(D'',\xi'') - I_2| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.5}$$

Definujme nyní kalibr δ_ε na $[a,b]$ předpisem

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \min\left\{\delta'_\varepsilon(x), \frac{1}{4}(c-x)\right\} & \text{když} \;\; x \in [a,c), \\ \min\left\{\delta'_\varepsilon(c), \delta''_\varepsilon(c)\right\} & \text{když} \;\; x = c, \\ \min\left\{\delta''_\varepsilon(x), \frac{1}{4}(x-c)\right\} & \text{když} \;\; x \in (c,b]. \end{cases}$$

Potom,

$$\xi + \delta(\xi) \le \xi + \frac{1}{4}(c-\xi) < c \quad \text{je-li} \;\; \xi < c,$$

a

$$\xi - \delta(\xi) \ge \xi - \frac{1}{4}(c-\xi) > c \quad \text{je-li} \;\; \xi > c.$$

Pro žádné $\xi \neq c$ tedy nemůže platit $|c-\xi| < \delta(\xi)$. T.zn., že pro každé δ_ε–jemné rozšířené dělení (D,ξ) intervalu $[a,b]$ musí existovat index $k \in \{1,2,\dots,\nu(D)\}$ takový, že $\xi_k = c$. Navíc, bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že platí

$$\alpha_{k-1} < \alpha_k = \xi_k = \xi_{k+1} = c < \alpha_{k+1}.$$

(Kdyby bylo $\alpha_{k-1} < c = \xi_k < \alpha_k$, upravili bychom příslušný člen v součtu $S(D,\xi)$ následujícím způsobem:

$$f(c)\,[g(\alpha_k) - g(\alpha_{k-1})] = f(c)\,[g(\alpha_k) - g(c)] + f(c)\,[g(c) - g(\alpha_{k-1})].)$$

To znamená, že každé rozšířené dělení $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon;[a,b])$ intervalu $[a,b]$ můžeme rozdělit: $D = D' \cup D''$, $\xi = (\xi',\xi'')$ tak, že bude

$$(D',\xi') \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon;[a,c]) \subset \mathscr{A}(\delta'_\varepsilon;[a,c]) \quad \text{a} \quad (D'',\xi'') \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon;[c,b]) \subset \mathscr{A}(\delta''_\varepsilon;[c,b]).$$

Tudíž, vzhledem k (5.5),

$$\begin{aligned} |S(D,\xi) - (I_1+I_2)| &= |S(D',\xi') + S(D'',\xi'') - (I_1+I_2)| \\ &\le |S(D',\xi') - I_1| + |S(D'',\xi'') - I_2| < \varepsilon, \end{aligned}$$

tj. $\int_a^b f\,\mathrm{d}g = I_1 + I_2$. $\square$

5.9. Příklady.

(i) Z Definice 5.2 je zřejmé, že je-li $f(t) \equiv f(a)$ na $[a,b]$, pak

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}g = f(a)\,[g(b) - g(a)] \quad \text{a} \quad \int_a^b g \,\mathrm{d}f = 0$$

pro každou funkci $g : [a,b] \to \mathbb{R}$.

(ii) Pro libovolnou funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ platí

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}[\chi_{(\tau,b]}] = f(\tau) \qquad \text{pro} \quad \tau \in [a,b),$$

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}[\chi_{[\tau,b]}] = f(\tau) \qquad \text{pro} \quad \tau \in (a,b),$$

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}[\chi_{[a,\tau]}] = -f(\tau) \qquad \text{pro} \quad \tau \in (a,b),$$

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}[\chi_{[a,\tau)}] = -f(\tau) \qquad \text{pro} \quad \tau \in (a,b],$$

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}[\chi_{[\tau]}] = \begin{cases} -f(a) & \text{když} \quad \tau = a, \\ 0 & \text{když} \quad \tau \in (a,b), \\ f(b) & \text{když} \quad \tau = b. \end{cases}$$

Ukažme si odvození prvého a druhého z uvedených vztahů. Zbývající se z nich už snadno odvodí použitím Věty 5.8. Nechť $g(x) = \chi_{(\tau,b]}(x)$ na $[a,b]$. Potom je

$$\int_a^\tau f \,\mathrm{d}g = 0.$$

Dále, položme

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{když} \quad x = \tau \\ \frac{1}{4}(x - \tau) & \text{když} \quad x \in (\tau,b]. \end{cases}$$

Pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta;[\tau,b])$ pak musí platit $\tau = \alpha_0 = \xi_1$ a tudíž

$$S(D,\xi) = f(\tau)\,[g(\alpha_1) - g(\tau)] = f(\tau).$$

S přihlédnutím k Poznámce 5.4 vidíme tedy, že platí

$$\int_\tau^b f \,\mathrm{d}g = f(\tau).$$

Důkaz našeho vztahu teď už snadno dokončíme použitím Věty 5.8.

Druhý vztah se dokazuje podobně. Tentokrát ovšem máme $g(x) = \chi_{[\tau,b]}(x)$ na $[a,b]$, $\int_\tau^b f \, \mathrm{d}g = 0$ a položíme

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{když } x = \tau \\ \frac{1}{4}(\tau - x) & \text{když } x \in [a,\tau). \end{cases}$$

Pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta;[a,\tau])$ pak máme $\tau = \alpha_m = \xi_m$ a tudíž

$$S(D,\xi) = f(\tau)\,[g(\tau) - g(\alpha_{m-1})] = f(\tau) \quad \text{a} \quad \int_a^\tau f \, \mathrm{d}g = f(\tau).$$

(iii) Pro libovolnou funkci $g \in \mathbb{G}[a,b]$ platí

$$\int_a^b \chi_{(\tau,b]} \, \mathrm{d}g = g(b) - g(\tau+) \quad \text{pro} \quad \tau \in [a,b),$$

$$\int_a^b \chi_{[\tau,b]} \, \mathrm{d}g = g(b) - g(\tau-) \quad \text{pro} \quad \tau \in (a,b),$$

$$\int_a^b \chi_{[a,\tau]} \, \mathrm{d}g = g(\tau+) - g(a) \quad \text{pro} \quad \tau \in (a,b),$$

$$\int_a^b \chi_{[a,\tau)} \, \mathrm{d}g = g(\tau-) - g(a) \quad \text{pro} \quad \tau \in (a,b]$$

a

$$\int_a^b \chi_{[\tau]} \, \mathrm{d}g = \begin{cases} g(a+) - g(a) & \text{když } \tau = a, \\ g(\tau+) - g(\tau-) & \text{když } \tau \in (a,b), \\ g(b) - g(b-) & \text{když } \tau = b. \end{cases}$$

Ukažeme si zase jen odvození prvého a druhého z uvedených vztahů. Nechť tedy $f(x) = \chi_{(\tau,b]}(x)$ na $[a,b]$. Potom je

$$\int_a^\tau f \, \mathrm{d}g = 0.$$

Buďiž dáno kladné ε. Zvolme nyní $\eta > 0$ tak, aby platilo $g(\tau+) - g(t) < \varepsilon$ pro každé $t \in (\tau, \tau+\eta)$ a definujme

$$\delta(x) = \begin{cases} \eta & \text{když } x = \tau \\ \frac{1}{4}(x - \tau) & \text{když } x \in (\tau,b]. \end{cases}$$

Pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta;[\tau,b])$ musí platit $\tau = \alpha_0 = \xi_1$ a

$$\begin{aligned}
&|S(D,\xi) - [g(b) - g(\tau+)]| \\
&\quad = |[g(b) - g(\alpha_{m-1})] + [g(\alpha_{m-1}) - g(\alpha_{m-2}] \\
&\qquad + \dots + [g(\alpha_2) - g(\alpha_1)] - [g(b) - g(\tau+)]| \\
&\quad = |g(\tau+) - g(\alpha_1)|.
\end{aligned}$$

Protože $\tau < \alpha_1 < \tau + \delta(\tau) = \tau + \eta$, plyne odtud, že

$$|S(D,\xi) - [g(b) - g(\tau+)]| < \varepsilon \quad \text{pro každé} \;\; (D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta;[\tau,b]).$$

Tudíž

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g = \int_a^\tau f\,\mathrm{d}g + \int_\tau^b f\,\mathrm{d}g = g(b) - g(\tau+).$$

V druhém případě, $f(x) = \chi_{[\tau,b]}(x)$ na $[a,b]$, máme

$$\int_\tau^b f\,\mathrm{d}g = g(b) - g(\tau).$$

Pro dané $\eta > 0$ definujeme opět

$$\delta(x) = \begin{cases} \eta & \text{když} \;\; x = \tau \\ \frac{1}{4}(\tau - x) & \text{když} \;\; x \in [a,\tau). \end{cases}$$

Tím si opět vynutíme, že pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta;[a,\tau])$ musí být $\tau = \alpha_m = \xi_m$ a tudíž

$$S(D,\xi) = [g(\tau) - g(\alpha_{m-1})],$$

kde $\alpha_{m-1} \in (\tau - \eta, \tau)$. Jako v předchozím případě, odtud plyne, že platí

$$\int_a^\tau f\,\mathrm{d}g = g(\tau) - g(\tau-),$$

tj.

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g = \int_a^\tau f\,\mathrm{d}g + \int_\tau^b f\,\mathrm{d}g = g(b) - g(\tau-).$$

5.10. Důsledek. *Jestliže $g \in \mathbb{G}[a,b]$ a $f \in \mathbb{S}[a,b]$, pak oba integrály*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g \quad i \quad \int_a^b g\,\mathrm{d}f$$

existují.

5.11 . Poznámka. Je-li $D \in \mathscr{D}[a,b]$ a $\delta(x) = |D|$ na $[a,b]$, pak je $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta)$ pro každé $\xi \in \mathbb{R}^{\nu(D)}$ takové, že $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$. Na druhou stranu, je-li $\delta \in \mathscr{G}[a,b]$ takový kalibr, že $\delta(x) \geq \frac{\Delta}{2} > 0$, pak pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$ platí $|D| < \Delta$. Speciálně, jestliže existuje normový RS-integrál $(\mathrm{n})\int_a^b f\,\mathrm{d}g$, pak také existuje KS-integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ a má tutéž hodnotu. Naopak, jestliže existuje KS-integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}g = I$, přičemž pro každé $\varepsilon > 0$ lze najít kalibr $\delta \in \mathscr{G}[a,b]$ takový, že platí $\inf_{x\in[a,b]} \delta(x) > 0$ a

$$|S(D,\xi) - I| < \varepsilon \quad \text{pro každé } (D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta),$$

pak existuje také $(\mathrm{n})\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ a platí rovnost $(\mathrm{n})\int_a^b f\,\mathrm{d}g = I$.

Následující věta popisuje vztah (σ)RS-integrálu a KS-integrálu.

5.12 . Věta. *Jestliže existuje* (σ)RS-*integrál* $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}g$, *pak existuje také* KS-*integrál* $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ *a platí*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g = (\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}g.$$

D ů k a z . Označme $(\sigma)I = \int_a^b f\,\mathrm{d}g$. Buď dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Z předpokladu o existenci (σ)RS-integrálu plyne, že existuje dělení $D_\varepsilon = \{s_0, s_1, \ldots, s_m\} \in \mathscr{D}[a,b]$ takové, že pro každé rozšířené dělení $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$, kde D je zjemněním D_ε platí (5.1). Položme nyní

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\min\{|x - s_j|; j = 0,1,\ldots,m\} & \text{když } x \notin D_\varepsilon\,, \\ \varepsilon & \text{když } x \in D_\varepsilon. \end{cases}$$

Potom $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ pouze tehdy, když

$$D_\varepsilon \subset \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{\nu(D)}\}. \tag{5.6}$$

Navíc máme ještě

$$S(D,\xi) = \sum_{j=1}^{\nu(D)} \Big[f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\xi_j)] + f(\xi_j)\,[g(\xi_j) - g(\alpha_{j-1})] \Big] = S(D',\xi'), \tag{5.7}$$

kde $D' = \{\alpha_0, \xi_1, \alpha_1, \xi_2, \ldots, \xi_{\nu(D)}, \alpha_{\nu(D)}\}$ a $\xi' = (\xi_1, \xi_1, \xi_2, \xi_2, \ldots, \xi_{\nu(D)}, \xi_{\nu(D)})$. Podle (5.6) je

$$D_\varepsilon \subset \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{\nu(D)}\} \subset D'$$

a vzhledem k (5.7) odtud plyne

$$|S(D,\xi) - I| = |S(D',\xi') - I| < \varepsilon, \quad \text{t.j.} \quad \int_a^b f\,\mathrm{d}g = I.$$

$\square$

5.13. Příklad. V případě $g(x) \equiv x$ budeme místo o KS-integrálu mluvit o K-integrálu (Kurzweilův integrál). K-integrál je zřejmě zobecněním klasického Riemannova integrálu.

(i) Nechť $f(x) = 0$ na $[a,b] \setminus W$, kde W je spočetná podmnožina $[a,b]$, $W = \{w_k\}_{k=1}^{\infty}$. Buď dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Definujme

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{když } x \notin W, \\ \dfrac{\varepsilon}{2^{k+1}(1+|f(w_k)|)} & \text{když } x = w_k \in W. \end{cases}$$

Pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$ se v příslušném integrálním součtu $S(D,\xi)$,

$$S(D,\xi) = \sum_{j=1}^{m} f(\xi_j)\,[\alpha_j - \alpha_{j-1}],$$

uplatní pouze takové sčítance, pro které existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že platí $\xi_j = w_k \in W$. Pro každé δ_ε–jemné rozšířené dělení (D,ξ) intervalu $[a,b]$, (tj. $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$, kde $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \in \mathscr{D}[a,b]$ a $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$) a každý takový index j ovšem musí platit

$$\alpha_j - \alpha_{j-1} \le \frac{\varepsilon}{2^k(1+|f(w_k)|)}$$

a tudíž je

$$|S(D,\xi)| \le \sum_{k=1}^{\infty} |f(w_k)|\,|\frac{\varepsilon}{2^k(1+|f(w_k)|)} \le \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \varepsilon.$$

Podle Definice 5.2 je tedy $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

(ii) Nechť existuje Newtonův integrál $(\mathrm{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, kde funkce F je spojitá na $[a,b]$ a platí

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pro každé } x \in (a,b), \quad F'(a+) = f(a), \quad F'(b-) = f(b).$$

Ukážeme, že pak existuje také K-integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a rovná se také $F(b) - F(a)$.

Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Pro každé $\xi \in [a,b]$ zvolme $\delta_\varepsilon(\xi) > 0$ tak, aby platilo

$$|F(x) - F(\xi) - f(\xi)(x-\xi)| < \frac{\varepsilon}{b-a}\,|x-\xi|$$

$$\text{pro všechna } x \in [a,b] \cap (\xi - \delta_\varepsilon(\xi), \xi + \delta_\varepsilon(\xi)).$$

Pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ $(D = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m)$ a každé $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tedy platí

$$\begin{aligned} &|F(\alpha_j) - F(\alpha_{j-1}) - f(\xi_j)\,[\alpha_j - \alpha_{j-1}]| \\ &\quad \le |F(\alpha_j) - F(\xi_j) - f(\xi_j)\,[\alpha_j - \xi_j]| + |F(\xi_j) - F(\alpha_{j-1}) - f(\xi_j)\,[\xi_j - \alpha_{j-1}]| \\ &\quad \le \frac{\varepsilon}{b-a}\,(|\alpha_j - \xi_j| + |\xi_j - \alpha_{j-1}|) = \frac{\varepsilon}{b-a}\,[\alpha_j - \alpha_{j-1}] \end{aligned}$$

a tudíž

$$\begin{aligned}|S(D,\xi)-[F(b)-F(a)]| &= \Big|\sum_{j=1}^{m}(F(\alpha_j)-F(\alpha_{j-1})-f(\xi_j)\,[\alpha_j-\alpha_{j-1}])\Big| \\ &\le \sum_{j=1}^{m}|F(\alpha_j)-F(\alpha_{j-1})-f(\xi_j)\,[\alpha_j-\alpha_{j-1})| \le \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{j=1}^{m}[\alpha_j-\alpha_{j-1}]=\varepsilon,\end{aligned}$$

tj.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a).$$

5.14. Věta. *Jestliže $g\in\mathbb{BV}[a,b]$ a $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ je taková, že integrály*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g \quad a \quad \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}[\mathrm{var}_a^x g]$$

existují, pak platí

$$\Big|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x)\Big| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}[\mathrm{var}_a^x g] \le \|f\|\,\mathrm{var}_a^b\, g. \tag{5.8}$$

D ů k a z . Pro každé rozšířené dělení (D,ξ) intervalu $[a,b]$ platí

$$\begin{aligned}|S(D,\xi)| &\le \sum_{j=1}^{\nu(D)}|f(\xi_j)|\,|g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})| \\ &\le \sum_{j=1}^{\nu(D)}|f(\xi_j)|\,\mathrm{var}_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} g \le \|f\|\,\mathrm{var}_a^b\, g.\end{aligned}$$

□

5.15. Věta. *Nechť $g\in\mathbb{BV}[a,b]$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ je funkce ohraničená na $[a,b]$ a $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí definovaných na intervalu $[a,b]$ taková, že platí*

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0 \tag{5.9}$$

a existují všechny integrály $\int_a^b f_n\,\mathrm{d}g$, $n\in\mathbb{N}$. Potom existuje také integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ a platí

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,\mathrm{d}g = \int_a^b f\,\mathrm{d}g. \tag{5.10}$$

D ů k a z . a) Z předpokladu (5.9) plyne, že existuje $n_0\in\mathbb{N}$ takové, že platí

$$\|f_n\|\le\|f\|+1 \quad \text{pro všechna } n\ge n_0.$$

Podle Věty 5.14 tedy máme

$$\Big|\int_a^b f_n\,\mathrm{d}g\Big| \le (\|f\|+1)\operatorname{var}_a^b g \quad \text{pro všechna } n \ge n_0$$

a podle Bolzanovy-Weierstraßovy věty tedy existuje podposloupnost $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ v $\mathbb{N}$ a $I \in \mathbb{R}$ takové, že platí $n_1 \ge n_0$ a

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_{n_k}\,\mathrm{d}g = I. \tag{5.11}$$

Označme

$$\begin{cases} I_k := \displaystyle\int_a^b f_{n_k}\,\mathrm{d}g & \text{pro } k \in \mathbb{N}, \\ S_k(D,\xi) := S_{f_{n_k}\Delta g}(D,\xi) & \text{pro } \; k \in \mathbb{N},\ (D,\xi) \in \mathscr{D}[a,b], \\ S(D,\xi) := S_{f\Delta g}(D,\xi), & \text{pro } \; (D,\xi) \in \mathscr{D}[a,b]. \end{cases} \tag{5.12}$$

b) Buď dáno $\varepsilon > 0$. Vzhledem k (5.9) a (5.11) můžeme zvolit $k_0 \in \mathbb{N}$ tak, že platí

$$|I_k - I| < \varepsilon, \quad \|f_{n_k} - f\| < \varepsilon \quad \text{pro } \; k \ge k_0 \quad \text{a} \quad |S(D,\xi) - S_{k_0}(D,\xi)| < \varepsilon \operatorname{var}_a^b g.$$

Dále, nechť $\delta_0 \in \mathscr{G}[a,b]$ je kalibr na $[a,b]$ takový, že pro všechna δ_0-jemná rozšířená dělení (D,ξ) intervalu $[a,b]$ platí

$$|S_{k_0}(D,\xi)] - I_{k_0}| < \varepsilon.$$

Pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta_0)$ tedy máme

$$|S(D,\xi) - I| \le |S(D,\xi) - S_{k_0}(D,\xi)]| + |S_{k_0}(D,\xi)] - I_{k_0}| + |I_{k_0} - I| < \varepsilon\,(\operatorname{var}_a^b g + 2).$$

Odtud

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g = I = \lim_{k\to\infty} \int_a^b f_{n_k}\,\mathrm{d}g.$$

c) Konečně, opětným použitím Věty 5.14,

$$\Big|\int_a^b f_n\,\mathrm{d}g - \int_a^b f\,\mathrm{d}g\Big| \le \|f_n - f\|\operatorname{var}_a^b g \quad \text{pro každé } \; n \in \mathbb{N}.$$

Platí tedy i (5.10). □

5.16. Věta. *Nechť $f \in \mathbb{G}$ a $g \in \mathbb{BV}$. Potom $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ existuje a platí* (5.8).

D ů k a z . Podle Věty 3.6 (ii) existuje posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konečných skokových funkcí, která konverguje stejnoměrně na $[a,b]$ k funkci f. Podle Věty 5.6 a Příkladů 5.9(iii) integrál $\int_a^b f_n\,\mathrm{d}g$ existuje pro každé $n \in \mathbb{N}$. To znamená, že podle Věty 5.15 existuje také integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ a platí (5.10) a, navíc, podle Věty 5.14 platí také (5.8). □

5.17 . Věta. *Nechť $g \in \mathbb{BV}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je funkce ohraničená na $[a,b]$ a $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí definovaných na intervalu $[a,b]$ taková, že platí*

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{var}_a^b (g_n - g) = 0$$

a existují všechny integrály $\int_a^b f\,\mathrm{d}g_n$, $n \in \mathbb{N}$. Potom existuje také integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ a platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f\,\mathrm{d}g_n = \int_a^b f\,\mathrm{d}g. \tag{5.13}$$

D ů k a z . Zaveďme opět značení (5.12). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat

$$g_n(a) = g(a) = 0 \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Dále je důkaz podobný důkazu Věty 5.15. Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že platí

$$\|g_n\|_{\mathbb{BV}} = \operatorname{var}_a^b g_n \le \operatorname{var}_a^b g + 1 \quad \text{pro všechna } n \ge n_0.$$

Podle Věty 5.14 tedy máme

$$\Big| \int_a^b f\,\mathrm{d}g_n \Big| \le \|f\| \,(\operatorname{var}_a^b g + 1) \quad \text{pro všechna } n \ge n_0$$

a podle Bolzanovy-Weierstraßovy věty tedy existuje podposloupnost $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ v $\mathbb{N}$ a $I \in \mathbb{R}$ takové, že platí $n_1 \ge n_0$ a

$$\lim_{k\to\infty} I_k = \lim_{k\to\infty} \int_a^b f\,\mathrm{d}g_{n_k} = I.$$

Použijeme opět označení zavedené v (5.12). Buď dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme $k_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby platilo

$$|I_k - I| < \varepsilon \quad \text{a} \quad \operatorname{var}_a^b (g_{n_k} - g) < \varepsilon \quad \text{pro} \quad k \ge k_0.$$

Dále, nechť $\delta_0 \in \mathscr{G}[a,b]$ je kalibr na $[a,b]$ takový, že pro všechna δ_0-jemná rozšířená dělení (D,ξ) intervalu $[a,b]$ platí

$$|S_{k_0}(D,\xi)] - I_{k_0}| < \varepsilon.$$

Pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta_0)$ tedy máme

$$|S(D,\xi) - I| \le |S(D,\xi) - S_{k_0}(D,\xi)| + |S_{k_0}(D,\xi) - I_{k_0}| + |I_{k_0} - I| < \varepsilon\,(\|f\| + 2).$$

Odtud

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g = I = \lim_{k\to\infty} \int_a^b f\,\mathrm{d}g_{n_k}.$$

Konečně, opětným použitím Věty 5.14,

$$\Big|\int_a^b f\,\mathrm{d}g_n - \int_a^b f\,\mathrm{d}g\Big| \le \|f\|\,\mathrm{var}_a^b\,(g_n - g) \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Platí tedy (5.13). □

Podle Věty 5.16 integrál

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g$$

existuje pro všechny $f \in \mathbb{G}$ a $g \in \mathbb{BV}$. Chtěli bychom ukázat, že tento integrál vždy existuje i v symetrické situaci: $f \in \mathbb{BV}$ a $g \in \mathbb{G}$. Rozložíme-li funkci f na součet spojité části f^{C} a skokové části f^{B} (viz Lemma 1.32 a Definice 1.22) a vzpomeneme-li si na Lemma 1.35, podle kterého existuje posloupnost konečných skokových funkcí $f_n^{\mathrm{B}} \in \mathbb{S}[a,b]$ taková, že platí

$$\lim_{n\to\infty} \|f^{\mathrm{B}} - f_n^{\mathrm{B}}\|_{\mathbb{BV}} = 0,$$

zjistíme, že ke svému cíli dospějeme, budeme-li umět dokázat existenci integrálu

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g$$

pro každou funkci $f \in \mathbb{BV} \cap \mathbb{C}$ a každou $g \in \mathbb{G}$ a budeme-li mít k dispozici konvergenční větu, ze které by plynulo, že platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n^{\mathrm{B}}\,\mathrm{d}g = \int_a^b f^{\mathrm{B}}\,\mathrm{d}g.$$

Tyto úkoly splníme v následujících třech krocích.

5.18. Lemma. *Integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ existuje pro každou $f \in \mathbb{BV} \cap \mathbb{C}$ a každou $g \in \mathbb{G}$.*

D ů k a z . Nechť $f \in \mathbb{BV} \cap \mathbb{C}$ a $g \in \mathbb{G}$. Podle Věty 5.12 a Věty 4.14 (o integraci-per-partes pro RS integrál) nám bude stačit, ukážeme-li, že pak existuje (σ) RS-integrál $(\sigma)\int_a^b g\,\mathrm{d}f$.

Nechť $\tau \in [a,b]$, $g = \chi_{[a,\tau]}$. Zřejmě je

$$\int_a^\tau g\,\mathrm{d}f = f(\tau) - f(a).$$

Pro každé rozšířené dělení $(D,\xi) \in \mathscr{P}[\tau,b]$ máme

$$S(D,\xi) = \begin{cases} 0 & \text{je-li } \xi_1 > \tau, \\ f(\alpha_1) - f(\tau) & \text{je-li } \xi_1 = \tau. \end{cases}$$

Díky spojitosti funkce f můžeme tedy k danému $\varepsilon > 0$ vždy najít dělení D_ε takové, že bude

$$|S(D,\xi)| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } (D,\xi) \in \mathscr{P}[\tau,b] \quad \text{taková, že } D \supset D_\varepsilon,$$

tj.

$$(\sigma)\int_\tau^b \chi_{[a,\tau]}\,\mathrm{d}f = 0$$

a

$$(\sigma)\int_a^b \chi_{[a,\tau]}\,\mathrm{d}f = f(\tau) - f(a).$$

Podobně bychom ukázali, že

$$(\sigma)\int_a^b \chi_{[a,\tau)}\,\mathrm{d}f = f(\tau) - f(a) \quad \text{pro} \quad \tau \in (a,b],$$

$$(\sigma)\int_a^b \chi_{[\tau,b]}\,\mathrm{d}f = f(b) - f(\tau) \quad \text{pro} \quad \tau \in [a,b],$$

$$(\sigma)\int_a^b \chi_{(\tau,b]}\,\mathrm{d}f = f(b) - f(\tau) \quad \text{pro} \quad \tau \in [a,b),$$

a

$$(\sigma)\int_a^b \chi_{[\tau]}\,\mathrm{d}f = 0 \qquad\qquad \text{pro} \quad \tau \in [a,b].$$

To znamená, že $(\sigma)\int_a^b g\,\mathrm{d}f$ existuje pro každou funkci $f \in \mathbb{BV}[a,b] \cap \mathbb{C}[a,b]$ a každou $g \in \mathbb{S}[a,b]$. Důkaz lemmatu tedy plyne z Věty 3.6(ii) a z věty o limitním přechodu při stejnoměrné konvergenci pro (σ) RS-integrály. $\square$

5.19. Věta. *Nechť funkce g ohraničená na $[a,b]$ a $f \in \mathbb{BV}$ jsou takové, že existuje integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$. Potom platí*

$$\Big|\int_a^b f\,\mathrm{d}g\Big| \le (|f(a)| + |f(b)| + \operatorname{var}_a^b f)\,\|g\|. \tag{5.14}$$

D ů k a z . Pro libovolné $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$, $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$, máme

$$\begin{aligned} S(D,\xi) &= f(\xi_1)\,[g(\alpha_1) - g(a)] + f(\xi_2)\,[g(\alpha_2) - g(\alpha_1)] + \dots + f(\xi_m)\,[g(b) - g(\alpha_{m-1})] \\ &= f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) \\ &\quad - [f(\xi_1) - f(a)]\,g(a) - [f(\xi_2) - f(\xi_1)]\,g(\alpha_1) - \dots - [f(b) - f(\xi_m)]\,g(b) \\ &= f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - \sum_{j=0}^{m} [f(\xi_{j+1}) - f(\xi_j)]\,g(\alpha_j), \end{aligned}$$

kde $\xi_0 = a$ a $\xi_{m+1} = b$. Odtud plyne, že pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$ platí

$$|S(D,\xi)| \le \Big(|f(a)| + |f(b)| + \sum_{j=0}^{m} |f(\xi_{j+1}) - f(\xi_j)|\Big)\, \|g\|,$$

neboli

$$|S(D,\xi)| \le (|f(a)| + |f(b)| + \operatorname{var}_a^b f)\, \|g\|$$

odkud už tvrzení Věty okamžitě plyne. $\square$

5.20 . Věta. *Nechť funkce g je ohraničená na $[a,b]$, $f \in \mathbb{BV}$ a nechť $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{BV}$ je posloupnost taková, že*

$$\int_a^b f_n \,\mathrm{d}g \quad \textit{existuje pro každé } n \in \mathbb{N} \quad \textit{a platí } \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\mathbb{BV}} = 0.$$

Potom existuje také integrál $\int_a^b f \,\mathrm{d}g$ a platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \,\mathrm{d}g = \int_a^b f \,\mathrm{d}g.$$

D ů k a z . Podle Věty 5.19 platí

$$\Big|\int_a^b (f_n - f_m) \,\mathrm{d}g\Big| \le 2\,\|g\|\,\|f_n - f_m\|_{\mathbb{BV}} \quad \text{pro libovolná } m,n \in \mathbb{N}.$$

Posloupnost $\{\int_a^b f_n \,\mathrm{d}g\}_{n=1}^\infty$ je tedy cauchyovská a existuje tudíž $I \in \mathbb{R}$ takové, že platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \,\mathrm{d}g = I.$$

Ukážeme, že $\int_a^b f \,\mathrm{d}g = q$. Budiž dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby platilo

$$\Big|\int_a^b f_{n_0} \,\mathrm{d}g - I\Big| < \varepsilon \quad \text{a} \quad \|f_{n_0} - f\|_{\mathbb{BV}} < \varepsilon.$$

Dále, zvolme $\delta \in \mathscr{G}$ tak, aby pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta)$ platilo

$$\Big|S_0(D,\xi) - \int_a^b f_{n_0} \,\mathrm{d}g\Big| < \varepsilon,$$

kde značíme $S_0(D,\xi) = S_{f_{n_0}\Delta g}(D,\xi)$. Potom pro libovolné $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta)$ máme

$$\begin{aligned} |S(D,\xi) - I| &\le |S(D,\xi) - S_0(D,\xi)| + \Big|S_0(D,\xi) - \int_a^b f_{n_0} \,\mathrm{d}g\Big| + \Big|\int_a^b f_{n_0} \,\mathrm{d}g - I\Big| \\ &\le 2\varepsilon\,(\|g\| + 1) \end{aligned}$$

odkud už snadno odvodíme, že platí

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g = I = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\,\mathrm{d}g.$$

□

5.21. Věta. *Jestliže $f \in \mathbb{BV}$ a $g \in \mathbb{G}$, pak integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ existuje a platí* (5.14).

D ů k a z . Nechť $f = f^{\mathrm{C}} + f^{\mathrm{B}}$ je Jordanův rozklad funkce f. Potom $\int_a^b f^{\mathrm{C}}\,\mathrm{d}g$ existuje podle Lemmatu 5.18 a $\int_a^b f^{\mathrm{B}}\,\mathrm{d}g$ existuje podle Lemmatu 1.35 a Věty 5.20. Podle Věty 5.6 tedy existuje také $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$. Konečně, podle Věty 5.19 platí (5.14). □

5.22. Důsledek. *Jestliže $g_n \in \mathbb{G}$, $n \in \mathbb{N}$, a $g_n \rightrightarrows g$ na $[a,b]$ pro $n \to \infty$, pak $g \in \mathbb{G}$ a pro každou funkci $f \in \mathbb{BV}$ platí*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f\,\mathrm{d}g_n = \int_a^b f\,\mathrm{d}g. \tag{5.15}$$

□

5.23. Věta (Věta o integraci per-partes)**.** *Jestliže $f \in \mathbb{G}$ a $g \in \mathbb{BV}$, pak existují oba integrály*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g \quad a \quad \int_a^b g\,\mathrm{d}f$$

a platí

$$\begin{aligned}\int_a^b f\,\mathrm{d}g + \int_a^b g\,\mathrm{d}f &= f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) \\ &+ \sum_{t\in[a,b]} \Big(\Delta^- f(t)\,\Delta^- g(t) - \Delta^+ f(t)\,\Delta^+ g(t)\Big).\end{aligned} \tag{5.16}$$

D ů k a z . Důkaz povedeme tak, že bude současně alternativním důkazem existenčního tvrzení z Věty 5.21.

Nechť je tedy $f \in \mathbb{G}[a,b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a,b]$ a nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Podle Věty 5.16 existuje integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ a můžeme tedy zvolit kalibr δ_1 tak, aby pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta_1)$ platilo

$$\Big|S(D,\xi) - \int_a^b f\,\mathrm{d}g\Big| < \varepsilon. \tag{5.17}$$

Dále, pro každé $x \in [a,b]$ můžeme zvolit $\delta_2(x) > 0$ tak, aby platilo

$$\begin{cases} s \in (x - \delta_2(x), x) \cap [a,b] \implies |f(s) - f(x-)| < \varepsilon \quad \text{a} \quad |g(s) - g(x-)| < \varepsilon, \\ s \in (x, x + \delta_2(x)) \cap [a,b] \implies |f(s) - f(x+)| < \varepsilon \quad \text{a} \quad |g(s) - g(x+)| < \varepsilon. \end{cases} \tag{5.18}$$

Podle tvrzení (ii) Důsledku 3.7 má množina

$$M_\varepsilon = \big\{x \in [a,b] \colon |\Delta^+ f(x)| \ge \varepsilon \ \vee |\Delta^- f(x)| \ge \varepsilon\big\}$$

nejvýše konečný počet prvků. Pro každý bod $x \in [a,b] \setminus M_\varepsilon$ je tedy kladná jeho vzdálenost

$$\operatorname{dist}(x, M_\varepsilon) = \min\{|x-y| \colon y \in M_\varepsilon\}$$

od množiny M_ε. Definujme

$$\delta_3(x) = \begin{cases} \operatorname{dist}(x, M_\varepsilon) & \text{když } \ x \in [a,b] \setminus M_\varepsilon, \\ \delta_2(x) & \text{když } \ x \in M_\varepsilon \end{cases} \tag{5.19}$$

a

$$\delta_\varepsilon(x) = \min\{\delta_1(x), \delta_2(x), \delta_3(x)\} \quad \text{pro } \ x \in [a,b]. \tag{5.20}$$

Nechť

$$(D,\xi) = (\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}, (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon).$$

Potom, vzhledem k (5.19) a (5.20), musí být $M_\varepsilon \subset \Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m\}$. Jednoduchými úpravami zjistíme, že platí

$$\begin{aligned} &S_{f\Delta g}(D,\xi) + S_{g\Delta f}(D,\xi) \\ &\quad = \sum_{j=1}^m \big(f(\xi_j)\, g(\alpha_j) - f(\xi_j)\, g(\alpha_{j-1}) + f(\alpha_j)\, g(\xi_j) - f(\alpha_{j-1})\, g(\xi_j)\big) \\ &\quad = f(b)\, g(b) + \sum_{j=1}^m \big(f(\xi_j)\, g(\alpha_j) + f(\alpha_j)\, g(\xi_j) - f(\xi_j)\, g(\xi_j) - f(\alpha_j)\, g(\alpha_j)\big) \\ &\qquad - f(a)\, g(a) - \sum_{j=1}^m \big(f(\xi_j)\, g(\alpha_{j-1}) + f(\alpha_{j-1})\, g(\xi_j) - f(\xi_j)\, g(\xi_j) - f(\alpha_{j-1})\, g(\alpha_{j-1})\big) \\ &\quad = f(b)\, g(b) - f(a)\, g(a) - \sum_{j=1}^m \big(f(\alpha_j) - f(\xi_j)\big)\big(g(\alpha_j) - g(\xi_j)\big) \\ &\qquad + \sum_{j=1}^m \big(f(\xi_j) - f(\alpha_{j-1})\big)\big(g(\xi_j) - g(\alpha_{j-1})\big). \end{aligned}$$

Dále,

$$
\begin{aligned}
&\Big| \sum_{a<\xi\le b} \Delta^+ f(\xi)\, \Delta^+ g(\xi) - \sum_{a\le\xi<b} \Delta^- f(\xi)\, \Delta^- g(\xi) \Big| \\
&\quad \le \sum_{\xi\,\in\, M_\varepsilon\cap[a,b)} |\Delta^+ f(\xi)|\, |\Delta^+ g(\xi)| + \sum_{\xi\,\in\,[a,b)\setminus M_\varepsilon} |\Delta^+ f(\xi)|\, |\Delta^+ g(\xi)| \\
&\qquad + \sum_{\xi\,\in\, M_\varepsilon\cap(a,b]} |\Delta^- f(\xi)|\, |\Delta^- g(\xi)| + \sum_{\xi\,\in\,(a,b]\setminus M_\varepsilon} |\Delta^- f(\xi)|\, |\Delta^- g(\xi)| \\
&\quad \le \Big(\sum_{\xi\,\in\, M_\varepsilon\cap[a,b)} |\Delta^+ f(\xi)| + \sum_{\xi\,\in\, M_\varepsilon\cap(a,b]} |\Delta^- f(\xi)| + 2\,\varepsilon \Big) \operatorname{var}_a^b g < \infty.
\end{aligned}
$$

Máme tedy

$$
\begin{aligned}
&\Big| S_{g\Delta f}(D,\xi) - f(b)\, g(b) + f(a)\, g(a) + \int_a^b f \,\mathrm{d}g \\
&\qquad + \sum_{a<\xi\le b} \Delta^+ f(\xi)\, \Delta^+ g(\xi) - \sum_{a\le\xi<b} \Delta^- f(\xi)\, \Delta^- g(\xi) \Big| \\
&\le \Big| \int_a^b f \,\mathrm{d}g - S_{f\Delta g}(D,\xi) \Big| \\
&\qquad + \Big| \sum_{j=1}^m (f(\xi_j) - f(\alpha_{j-1}))\, (g(\xi_j) - g(\alpha_{j-1})) - \sum_{a<\xi\le b} \Delta^- f(\xi)\, \Delta^- g(\xi) \Big| \\
&\qquad + \Big| \sum_{j=1}^m (f(\alpha_j) - f(\xi_j))\, (g(\alpha_j) - g(\xi_j)) - \sum_{a\le\xi<b} \Delta^+ f(\xi)\, \Delta^+ g(\xi) \Big|.
\end{aligned}
\tag{5.21}
$$

Dále,

$$
\begin{aligned}
&\Big| \sum_{j=1}^m (f(\alpha_j) - f(\xi_j))\, (g(\alpha_j) - g(\xi_j)) - \sum_{a\le\xi<b} \Delta^+ f(\xi)\, \Delta^+ g(\xi) \Big| \\
&= \Big| \sum_{j=1}^m (f(\alpha_j) - f(\xi_j+) + \Delta^+ f(\xi_j))\, (g(\alpha_j) - g(\xi_j+) + \Delta^+ g(\xi_j)) \\
&\qquad - \sum_{j=1}^m \Delta^+ f(\xi_j)\, \Delta^+ g(\xi_j) - \sum_{\xi\,\in\,[a,b)\setminus\Xi} \Delta^+ f(\xi)\, \Delta^+ g(\xi) \Big|
\end{aligned}
$$

$$= \Big| \sum_{j=1}^{m} (f(\alpha_j) - f(\xi_j+))\,(g(\alpha_j) - g(\xi_j+)) + \sum_{j=1}^{m} (f(\alpha_j) - f(\xi_j+))\,\Delta^+ g(\xi_j)$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \Delta^+ f(\xi_j)\,(g(\alpha_j) - g(\xi_j+)) - \sum_{\xi\,\in\,[a,b)\setminus\Xi} \Delta^+ f(\xi)\,\Delta^+ g(\xi)\Big|$$

Předposlední součet přitom můžeme rozdělit do dvou součtů: jeden, ve kterém se sčítá přes ta j, pro která je $\xi_j \in M_\varepsilon$ a druhý, který obsahuje všechny ostatní sčítance. Odtud, vzhledem k (5.18) a vzhledem k definici množiny M_ε, plyne, že je

$$\Big| \sum_{j=1}^{m} (f(\alpha_j) - f(\xi_j))\,(g(\alpha_j) - g(\xi_j)) - \sum_{a \le \xi < b} \Delta^+ f(\xi)\,\Delta^+ g(\xi)\Big|$$

$$\le \Big(2 \sum_{j=1}^{m} |g(\alpha_j) - g(\xi_j+)| + 2 \sum_{j=1}^{m} |\Delta^+ g(\xi_j)| + \sum_{\xi\,\in\,M_\varepsilon} |\Delta^+ f(\xi_j)|\Big)\,\varepsilon \le K^+\,\varepsilon,$$

kde

$$K^+ = 4 \operatorname{var}_a^b g + \sum_{\xi\,\in\,M_\varepsilon \cap (a,b]} |\Delta^+ f(\xi)| < \infty.$$

Podobně bychom ověřili, že platí

$$\Big| \sum_{j=1}^{m} (f(\xi_j) - f(\alpha_{j-1}))\,(g(\xi_j) - g(\alpha_{j-1})) - \sum_{a < \xi \le b} \Delta^- f(\xi)\,\Delta^- g(\xi)\Big| \le K^-\,\varepsilon,$$

kde

$$K^- = 4 \operatorname{var}_a^b g + \sum_{\xi\,\in\,M_\varepsilon \cap (a,b]} |\Delta^- f(\xi)| < \infty.$$

Dosazením do (5.21) a využitím ještě (5.17) konečně získáme odhad

$$\Big| S_{g\Delta f}(D,\xi) - f(b)\,g(b) + f(a)\,g(a) + \int_a^b f\,\mathrm{d}g$$

$$+ \sum_{a < \xi \le b} \Delta^+ f(\xi)\,\Delta^+ g(\xi) - \sum_{a \le \xi < b} \Delta^- f(\xi)\,\Delta^- g(\xi)\Big| \le \big(1 + K^+ K^-\big)\,\varepsilon.$$

Protože (D,ξ) bylo libovolné δ_ε–jemné dělení, plyne odtud už, že existuje integrál $\int_a^b g\,\mathrm{d}f$ a platí (5.16). □

5.24. Lemma (SAKS-HENSTOCK)**.** *Nechť $f,\ g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jsou takové, že integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ existuje. Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno a nechť $\delta \in \mathscr{G}[a,b]$ je kalibr na $[a,b]$ takový, že platí*

$$\Big| S(D,\xi) - \int_a^b f\,\mathrm{d}g \Big| < \varepsilon \quad \textit{pro všechna} \quad (D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta).$$

Potom pro libovolný systém $\{([s_j,t_j],\tau_j),\ j=1,2,\dots,k\}$ *takový, že*

$$\begin{cases} a \le s_1 \le \tau_1 \le t_1 \le s_2 \le \dots \le s_k \le \tau_k \le t_k \le b, \\ [s_j,t_j] \subset [\tau_j - \delta(\tau_j), \tau_j + \delta(\tau_j)], \quad j=1,2,\dots,k, \end{cases} \tag{5.22}$$

platí nerovnost

$$\Big|\sum_{j=1}^{k}\Big[f(\tau_j)\,[g(t_j)-g(s_j)] - \int_{s_j}^{t_j} f\,\mathrm{d}g\Big]\Big| < \varepsilon. \tag{5.23}$$

D ů k a z . Buď dáno $\eta > 0$. Označme $t_0 = a$, $s_{k+1} = b$. Je-li $j \in \{1,2,\dots,k\}$ a $t_j < s_{j+1}$, pak můžeme najít kalibr δ^j a rozšířené dělení $(D^j,\xi^j) \in \mathscr{A}(\delta^j;[t_j,s_{j+1}])$ takové, že $\delta^j(x) \le \delta(x)$ pro každé $x \in [a,b]$ a

$$\Big|S(D^j,\xi^j) - \int_{t_j}^{s_{j+1}} f\,\mathrm{d}g\Big| < \frac{\eta}{k+1}. \tag{5.24}$$

Nyní sestavme δ–jemné rozšířené dělení $(\widetilde{D},\widetilde{\xi})$ intervalu $[a,b]$ tak, aby platilo

$$\sum_{j=1}^{k} f(\tau_j)\,[g(t_j)-g(s_j)] + \sum_{j=0}^{k} S(D^j,\xi^j) = S(\widetilde{D},\widetilde{\xi}).$$

(Je-li $t_j = s_{j+1}$, klademe $S(D^j,\xi^j) = 0$.) Vzhledem k předpokladům lemmatu tedy máme

$$\begin{aligned} &\Big|\sum_{j=1}^{k}\Big(f(\tau_j)\,[g(t_j)-g(s_j)] - \int_{s_j}^{t_j} f\,\mathrm{d}g\Big) + \sum_{j=0}^{k}\Big(S(D^j,\xi^j) - \int_{t_j}^{s_{j+1}} f\,\mathrm{d}g\Big)\Big| \\ &\qquad = \Big|S(\widetilde{D},\widetilde{\xi}) - \int_a^b f\,\mathrm{d}g\Big| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Odtud a z (5.24) dostáváme pro libovolné $\eta > 0$

$$\begin{aligned} &\Big|\sum_{j=1}^{k} f(\tau_j)\,[g(t_j)-g(s_j)] - \int_{s_j}^{t_j} f\,\mathrm{d}g\Big| \\ &\qquad \le \Big|S(\widetilde{D},\widetilde{\xi}) - \int_a^b f\,\mathrm{d}g\Big| + \Big|\sum_{j=0}^{k}\Big(S(D^j,\xi^j) - \int_{t_j}^{s_{j+1}} f\,\mathrm{d}g\Big)\Big| \\ &\qquad < \varepsilon + \frac{k\,\eta}{k+1} < \varepsilon + \eta, \end{aligned}$$

tj. platí (5.23). □

5.25. Věta. *Nechť* $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ *existuje a* $c \in [a,b]$. *Potom platí*

$$\lim_{x\to c,\,x\in[a,b]}\Big(\int_a^x f\,\mathrm{d}g + f(c)\,[g(c)-g(x)]\Big) = \int_a^c f\,\mathrm{d}g. \tag{5.25}$$

D ů k a z . Buď dáno $\varepsilon > 0$ a nechť $\delta_\varepsilon \in \mathscr{G}[a,b]$ je takový kalibr, že

$$\left|S(D,\xi) - \int_a^b f\,\mathrm{d}g\right| < \varepsilon$$

platí všechna $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$. Pro každé $x \in (c, c+\delta_\varepsilon(c)) \cap [a,b]$ systém $\{[s_1,t_1],\tau_1\}$, kde $s_1 = \tau_1 = c$ a $t_1 = x$, vyhovuje podmínkám (5.22). Podle Saks-Henstockova lemmatu (Lemma 5.24) tedy máme

$$\left|f(c)\,[g(x)-g(c)] - \int_c^x f\,\mathrm{d}g\right| < \varepsilon. \tag{5.26}$$

Podobně, je-li $x \in (c-\delta_\varepsilon(c), c) \cap [a,b]$, pak použitím Lemmatu 5.24 na systém $\{[x,c],c\}$ dostaneme nerovnost

$$\left|f(c)\,[g(c)-g(x)] - \int_x^c f\,\mathrm{d}g\right| < \varepsilon$$

Pro každé $x \in (c-\delta_\varepsilon(c), c+\delta_\varepsilon(c)) \cap [a,b]$ tedy platí nerovnost (5.26) a tudíž také nerovnost

$$\left|\int_a^c f\,\mathrm{d}g - \int_a^x f\,\mathrm{d}g - f(c)\,[g(c)-g(x)]\right| = \left|\int_c^x f\,\mathrm{d}g - f(c)\,[g(x)-g(c)]\right| < \varepsilon,$$

tj. platí (5.25). □

5.26 . Důsledek. *Nechť* $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ *existuje,* $g \in \mathbb{G}[a,b]$ *a nechť funkce* $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ *je definována předpisem*

$$h(x) = \int_a^x f\,\mathrm{d}g, \quad x \in [a,b].$$

Potom $h \in \mathbb{G}[a,b]$ *a*

$$h(t+) = h(t) + f(t)\Delta^+ g(t) \quad a \quad h(s-) = h(s) - f(s)\Delta^- g(s) \ \ pro \ \ t \in [a,b), \ s \in (a,b].$$

□

5.27 . Věta (HAKE). (*i*) *Nechť* $\int_a^x f\,\mathrm{d}g$ *existuje pro každé* $x \in [a,b)$ *a nechť*

$$\lim_{x\to b-} \left(\int_a^x f\,\mathrm{d}g + f(b)\,[g(b)-g(x)]\right) = I \in \mathbb{R}.$$

Potom také

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g = I.$$

(*ii*) *Nechť* $\int_x^b f\,\mathrm{d}g$ *existuje pro každé* $x\in(a,b]$ *a nechť*

$$\lim_{x\to a+}\Big(\int_x^b f\,\mathrm{d}g + f(a)\,[g(x)-g(a)]\Big) = I \in \mathbb{R}.$$

Potom také

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g = I.$$

D ů k a z . (i) Buď dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme $\Delta > 0$ tak, aby platilo

$$\Big|\int_a^x f\,\mathrm{d}g + f(b)\,[g(b)-g(x)] - I\Big| < \varepsilon \quad \text{pro každé} \ \ x\in[b-\Delta,b). \tag{5.27}$$

Položme $x_0 = a$ a $x_k = b - \dfrac{1}{k}$ pro $k\in\mathbb{N}$. Posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí, $x_k \to b$ a

$$\forall\, k\in\mathbb{N}\ \exists\,\delta^k\in\mathscr{G}[a,x_k]\colon (D,\xi)\in\mathscr{A}(\delta^k,[a,x_k]) \Longrightarrow \Big|S(D,\xi) - \int_a^{x_k} f\,\mathrm{d}g\Big| < \frac{\varepsilon}{2^k} \tag{5.28}$$

Pro každé $x\in[a,b)$ označme symbolem $k(x)$ jednoznačně určené přirozené číslo k takové, že $x\in[x_{k-1},x_k)$. Dále, definujme kalibr δ^0 na $[a,b]$ tak, aby pro každé $k\in\mathbb{N}$ a $\tau\in[x_{k-1},x_k)$ platilo

$$\delta^0(\tau)\le\delta^k(\tau) \quad \text{a} \quad [\tau-\delta^0(\tau),\tau+\delta^0(\tau)]\subset[a,x_{k(\tau)}]$$

Nyní, nechť je dáno libovolné $x\in[a,b)$ a nechť $p\in\mathbb{N}$ je takové, že $x\in[x_{p-1},x_p)$ (tj. $p=k(x)$) a nechť

$$(B,\eta) = \big(\{\beta_0,\beta_1,\dots,\beta_m\},(\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_m)\big)$$

je libovolné δ^0–jemné dělení intervalu $[a,x]$. Pro každé $j\in\{1,2,\dots,m\}$ pak máme

$$\eta_j-\delta^k(\eta_j)\le\eta_j-\delta^k(\eta_j)\le\beta_{j-1}<\beta_j\le\eta_j+\delta^k(\eta_j)\le\eta_j+\delta^k(\eta_j).$$

Vzhledem k (5.28) a definici kalibru δ^0, tedy vidíme, že pro každé $k\in\{1,2,\dots,p\}$ systém

$$\{\beta_{j-1},\eta_j,\beta_j,\ j=1,2,\dots,m,\ k(\eta_1)=k\}$$

splňuje předpoklady Saks-Henstockova lemmatu 5.24). Pro každé $k\in\{1,2,\dots,p\}$ tedy platí nerovnost

$$\Big|\sum_{k(\eta_j)=k} f(\eta_j)\,[g(\beta_j)-g(\beta_{j-1})] - \int_{\beta_{j-1}}^{\beta_j} f\,\mathrm{d}g\Big| < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Tudíž

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{j=1}^{m}\Big(f(\eta_j)\,[g(\beta_j)-g(\beta_{j-1})]-\int_{\beta_{j-1}}^{\beta_j} f\,\mathrm{d}g\Big)\Big|\\
&\quad=\Big|\sum_{k=1}^{p}\Big(\sum_{k(\eta_j)=k} f(\eta_j)\,[g(\beta_j)-g(\beta_{j-1})]-\int_{\beta_{j-1}}^{\beta_j} f\,\mathrm{d}g\Big)\Big|\\
&\quad\le\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\sum_{k(\eta_j)=k}\Big(f(\eta_j)\,[g(\beta_j)-g(\beta_{j-1})]-\int_{\beta_{j-1}}^{\beta_j} f\,\mathrm{d}g\Big)\Big|<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k}=\varepsilon,
\end{aligned}$$

tj.

$$\Big|\sum_{j=1}^{m}\Big(f(\eta_j)\,[g(\beta_j)-g(\beta_{j-1})]-\int_{\beta_{j-1}}^{\beta_j} f\,\mathrm{d}g\Big)\Big|<\varepsilon. \tag{5.29}$$

Nyní, položme

$$\delta^*(x)=\begin{cases}\min\{b-x,\,\Delta^0(x)\} & \text{pro } x\in[a,b),\\ \dfrac{\Delta}{2} \quad \text{pro } x=b.\end{cases}$$

Pak pro každé δ^*–jemné dělení

$$(\widetilde{D},\widetilde{\xi})=\big(\{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_m\},(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m)\big)$$

intervalu $[a,b]$ musí platit $\xi_m=\alpha_m=b$, $\alpha_{m-1}\in(b-\Delta,b)$ a tudíž, vzhledem k (5.27) a (5.29),

$$\begin{aligned}
\Big|S(D,\xi)-I\Big|&=\Big|\sum_{j=1}^{m-1} f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]+f(b)\,[g(b)-g(\alpha_{m-1})]-I\Big|\\
&\le\Big|\sum_{j=1}^{m-1} f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-\int_a^{\alpha_{m-1}} f\,\mathrm{d}g\Big|\\
&\qquad+\Big|\int_a^{\alpha_{m-1}} f\,\mathrm{d}g+f(b)\,[g(b)-g(\alpha_{m-1})]-I\Big|<2\,\varepsilon,
\end{aligned}$$

t.j. $\int_a^b f\,\mathrm{d}g=I$.

Důkaz tvrzení (ii) se provede analogicky a ponechávám ho čtenáři jako cvičení. □

5.28. Lemma. *Nechť $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ existuje. Potom pro každé $\varepsilon>0$ existuje kalibr $\delta\in\mathscr{G}[a,b]$ takový, že platí*

$$\sum_{j=1}^{m}\Big|f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}g\Big|<\varepsilon \tag{5.30}$$

pro každé $(D,\xi)\in\mathscr{A}(\delta)$, $D=\{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_m\}$, $\xi=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m)$.

D ů k a z . Buď dáno $\varepsilon > 0$ a nechť $\delta \in \mathscr{G}(\delta_\varepsilon)$ je kalibr takový, že

$$\Big|S(D,\xi) - \int_a^b f\,\mathrm{d}g\Big| < \frac{\varepsilon}{2}$$

platí pro všechna δ–jemná rozšířená dělení (D,ξ) intervalu $[a,b]$. Nyní, nechť

$$(D,\xi) = \big(\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, m)\big) \in \mathscr{A}(\delta).$$

Označme

$$J^+ = \Big\{j \in \{1,2,\dots,m\} \colon f(\xi_j)\,[g(\alpha_j - g(\alpha_{j-1}) - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}g \ge 0\Big\}$$

a

$$J^- = \{1,2,\dots,m\} \setminus J^+.$$

Systém $\{([\alpha_{j-1},\alpha_j],\xi_j),\ j \in J^+\}$ splňuje předpoklady (5.22) z Lemmatu 5.24 na místě $\{([s_j,t_j],\tau_j)\}$. Podle Lemmatu 5.24 tedy platí

$$\Big|\sum_{j\,\in\,J^+}\Big(f(\xi_j)[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}g\Big)\Big| = \sum_{j\,\in\,J^+}\Big|f(\xi_j)[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}g\Big| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Podobně

$$\Big|\sum_{j\,\in\,J^-}\Big(f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}g\Big)\Big| = \sum_{j\,\in\,J^-}\Big|f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}g\Big| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Odtud už nerovnost (5.30) okamžitě vyplývá. □

5.29 . Věta (Věta o substituci). *Je-li funkce $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ ohraničená a integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ existuje, pak oba integrály*

$$\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}\Big[\int_a^x f\,\mathrm{d}g\Big], \qquad \int_a^b h(x)\,f(x)\,\mathrm{d}[g(x)]$$

existují jakmile existuje alespoň jeden z nich a v takovém případě pak platí:

$$\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}\Big[\int_a^x f\,\mathrm{d}g\Big] = \int_a^b h(x)\,f(x)\,\mathrm{d}[g(x)].$$

D ů k a z . Podle Věty 5.7 je funkce

$$k(x) = \int_a^x f\,\mathrm{d}g$$

definovaná pro každé $x \in [a,b]$.

a) Předpokládejme, že existuje integrál

$$\int_a^b h\,f\,\mathrm{d}g.$$

Nechť je dáno $\varepsilon > 0$ a nechť δ_ε je kalibr na $[a,b]$ takový, že pro každé $\delta_\varepsilon-$jemné dělení $(D,\xi) = \big(\{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_m\},(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m)\big)$ intervalu $[a,b]$ platí

$$\sum_{j=1}^m \Big| h(\xi_j)\,f(\xi_j)\,[g(\alpha_j - g(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} h\,f\,\mathrm{d}g\Big| < \varepsilon$$

a

$$\sum_{j=1}^m \Big| f(\xi_j)\,[g(\alpha_j - g(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}g\Big| < \varepsilon.$$

(Takový kalibr existuje podle Lemmatu 5.28.) Pro každé $\delta_\varepsilon-$jemné dělení

$$(D,\xi) = \big(\{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_m\},(\xi,\xi_2,\dots,\xi_m)\big)$$

intervalu $[a,b]$ tedy máme:

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{j=1}^m h(\xi_j)\,[k(\alpha_j) - k(\alpha_{j-1})] - \int_a^b h\,f\,\mathrm{d}g\Big| \\
&\quad\le \sum_{j=1}^m \Big| h(\xi_j)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}g - h(\xi_j)\,f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})]\Big| \\
&\qquad + \sum_{j=1}^m \Big| h(\xi_j)\,f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} h\,f\,\mathrm{d}g\Big| \\
&\quad\le \|h\| \sum_{j=1}^m \Big| \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}g - f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})]\Big| \\
&\qquad + \sum_{j=1}^m \Big| h(\xi_j)\,f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} h\,f\,\mathrm{d}g\Big| \\
&\quad\le (\|h\|+1)\,\varepsilon,
\end{aligned}$$

tj. existuje integrál $\int_a^b h\,\mathrm{d}k$ a platí

$$\int_a^b h\,\mathrm{d}k = \int_a^b h\,f\,\mathrm{d}g.$$

b) Obrácená implikace by se dokazovala podobně – opět za vydatné pomoci Lemmatu 5.28. $\square$

5.30. Věta (Věta o dominované konvergenci). *Nechť* $f, f_n \in \mathbb{G}[a,b]$,

$$|f_n(x)| \le M < \infty \ \textit{pro} \ \ n \in \mathbb{N} \quad \textit{a} \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \ \textit{na} \ \ [a,b].$$

Potom

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \,\mathrm{d}g = \int_a^b f \,\mathrm{d}g \quad \textit{pro každou funkci} \ \ g \in \mathbb{BV}[a,b].$$

Literatura

[1] T. H. Hildebrandt. *Theory of Integration.* (Academic Press, New York-London, 1963).

[2] Ch. S. Hönig. *Volterra Stieltjes-Integral Equations*, (North Holland and American Elsevier, Mathematics Studies 16, Amsterdam and New York, 1975).

[3] V. Jarník. *Diferenciální počet II.*

[4] V. Jarník. *Integrální počet II.*

[5] M. Tvrdý. *Differential and integral equations in the space of regulated functions.* Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics vol.25 (2002), pp. 1–104.

[6] Š. Schwabik. *Integrace v R (Kurzweilova teorie).* (Karolinum, Universita Karlova v Praze, 1999)