Stieltjesův integrál

Milan Tvrdý

7. října 2009

Obsah

Základní úmluvy a označení

(i) $\mathbb{N}$ je *množina přirozených čísel* (mezi něž nezahrnujeme nulu).

(ii) $\mathbb{R}$ je *množina reálných čísel*, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

(iii) Je-li $-\infty < a < b < \infty$, pak $[a,b]$ značí *uzavřený* interval $\{t \in \mathbb{R} : a \le t \le b\}$ a (a,b) je *otevřený* interval $\{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}$. Příslušné *polouzavřené* (resp. *polootevřené* intervaly značíme $[a,b)$ a $(a,b]$. Ve všech těchto případech nazýváme body a, b *krajní body* intervalu. V případě $a = b \in \mathbb{R}$ říkáme, že interval $[a,b]$ *degeneruje* na jednobodovou množinu a píšeme $[a,b] = [a]$. Budeme též užívat obvyklé značení I^o pro vnitřek intervalu I. Je-li I interval (uzavřený resp. otevřený resp. polootevřený) s krajními body a, b značíme symbolem $|I| = |b-a|$ jeho délku ($|[a]| = 0$).

(iv) Pro $A \in \mathbb{R}$ značíme $A^+ = \max(A, 0)$ a $A^- = \max(-A, 0)$. (Připomeňme, že platí $A^+ + A^- = |A|$ a $A^+ - A^- = A$ pro každé $A \in \mathbb{R}$.)

(v) Konečný systém bodů $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ intervalu $[a,b]$ nazveme *dělením intervalu* $[a,b]$, jestliže platí $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_m = b$. Množinu všech dělení intervalu $[a,b]$ značíme $\mathscr{D}[a,b]$. Je-li $D \in \mathscr{D}[a,b]$, pak jeho elementy zpravidla značíme α_i. Pro dané dělení $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, značíme $\nu(D) = m$ a

$$|D| = \max_{i=1,2,\dots,\nu(d)} (\alpha_i - \alpha_{i-1}).$$

Bude-li to výhodné, budeme též dělení D intervalu $[a,b]$ chápat jako systém podintervalů $\{I_j; j = 1, 2, \dots, \nu(D)\}$ takových, že platí

$$\bigcup_{j=1}^{\nu(D)} I_j = [a,b], \quad \text{přičemž } I_j^o \cap I_k^o = \emptyset \quad \text{jakmile } j \ne k.$$

Jestliže dělení D' a $D'' \in \mathscr{D}[a,b]$ jsou taková, že všechny elementy z D' jsou obsaženy v D'', říkáme, že D'' je *zjemnění* dělení D' a značíme $D' \subset D''$.

(vi) Dvojici $(D, \xi) \in \mathscr{D}[a,b] \times \mathbb{R}^{\nu(D)}$ nazveme *rozšířeným dělením* intervalu $[a,b]$, jestliže platí

$$\alpha_{i-1} \le \xi_i \le \alpha_i \quad \text{pro všechna } i = 1, 2, \dots, \nu(D).$$

Množinu všech rozšířených dělení intervalu $[a,b]$ značíme $\mathscr{P}[a,b]$.

(vii) Pro libovolné funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ a $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ a reálné číslo λ součtem $f+g$ funkcí f a g rozumíme funkci $(f+g)(t) = f(t) + g(t)$, $t \in [a,b]$, a násobek λf funkce f číslem λ je funkce $(\lambda f)(t) = \lambda f(t)$, $t \in [a,b]$.

(viii) Pro libovolnou funkci $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ značíme

$$\|f\| = \sup_{t\,\in\,[a,b]} |f(t)|.$$

(Není-li funkce f ohraničená na intervalu $[a,b]$, pak je ovšem $\|f\| = \infty$.)

(ix) $\mathbb{C}[a,b]$ je prostor reálných funkcí spojitých na intervalu $[a,b]$ a zobrazení

$$f \in \mathbb{C}[a,b] \to \|f\|$$

definuje normu na $\mathbb{C}[a,b]$.

(x) $\mathbb{L}^1[a,b]$ je prostor reálných funkcí integrovatelných (ve smyslu Lebesgueově) na intervalu $[a,b]$ (s rovností $f = g \in \mathbb{L}^1[a,b] \iff f(x) = g(x)$ s.v. na $[a,b]$)) a zobrazení

$$f \in \mathbb{L}^1[a,b] \to \|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

definuje normu na $\mathbb{L}^1[a,b]$.

(xi) Pro danou množinu $M \subset \mathbb{R}$ symbolem χ_M značíme její charakteristickou funkci, tj. funkci $\mathbb{R} \to \{0,1\}$ definovanou předpisem:

$$\chi_M(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \ t \in M, \\ 0 & \text{pro } \ t \notin M. \end{cases}$$

(xii) Jestliže $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $t \in [a,b)$ a $s \in (a,b]$ a jestliže existují konečné jednostranné limity $\lim_{\tau\to t+} f(\tau)$ a $\lim_{\tau\to s-} f(\tau)$, pak značíme

$$f(t+) = \lim_{\tau\to t+} f(\tau), \quad f(s-) = \lim_{\tau\to s-} f(\tau),$$

$$\Delta^+ f(t) = f(t+) - f(t), \quad \Delta^- f(s) = f(s) - f(s-),$$

$$\Delta f(x) = f(x+) - f(x-) \quad \text{pro } \ x \in (a,b).$$

Dále, budeme užívat následující úmluvu:

$$f(a-) = f(a), \quad f(b+) = f(b), \quad \Delta^- f(a) = \Delta^+ f(b) = 0.$$

Kapitola 1

Funkce s konečnou variací.

Výklad v této kapitole se opírá zejména o monografie V. Jarníka *Diferenciální počet II* [3, Kapitola V] a *Integrální počet II* [4, Kapitola V] a dále o odstavec II.6 v monografii T.H.Hildebrandta *Theory of Integration* [1] a kapitolu XIII v monografii Š. Schwabika *Integrace v R (Kurzweilova teorie)* [6].

1.1. Definice. Pro danou funkci $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ a dělení D intervalu $[a,b]$,

$$D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \in \mathscr{D}[a,b],$$

definujeme

$$V(f,D) = \sum_{j=1}^{\nu(d)} |f(\alpha_j) - f(\alpha_{j-1})| \tag{1.1}$$

a

$$\operatorname{var}_a^b f = \sup_{D \in \mathscr{D}[a,b]} V(f,D). \tag{1.2}$$

Je-li $a = b$, definujeme $\operatorname{var}_a^b f = \operatorname{var}_a^a f = 0$. Veličinu $\operatorname{var}_a^b f$ nazýváme *variace funkce* f na intervalu $[a,b]$. Je-li $\operatorname{var}_a^b f < \infty$, říkáme, že funkce f má *konečnou variaci na* $[a,b]$. Množinu funkcí s konečnou variací na $[a,b]$ značíme $\mathbb{BV}[a,b]$.

1.2. Cvičení. Dokažte následující vlastnosti variace a funkcí s konečnou variací.

(i) Pro každou funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je $\operatorname{var}_a^b f \ge 0$.

(ii) Pro libovolné dvě funkce $f_1,\ f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ a reálné číslo c platí

$$\operatorname{var}_a^b (f_1 + f_2) \le \operatorname{var}_a^b f_1 + \operatorname{var}_a^b f_2 \quad \text{a} \quad \operatorname{var}_a^b (c\, f_1) = |c| \operatorname{var}_a^b f_1.$$

(iii) Je-li $[c,d] \subset [a,b]$, pak pro každou funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ platí

$$|f(d) - f(c)| \le \operatorname{var}_c^d f \le \operatorname{var}_a^b f.$$

(iv) Pro každou funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ platí

$$|f(x)| \le \|f\| \le \|f\|_{\mathbb{BV}} \quad \text{pro} \quad x \in [a,b].$$

Každá funkce $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ je tedy ohraničená na $[a,b]$.

(v) $\operatorname{var}_a^b f = 0 \iff f(x) \equiv f(a)$ na $[a,b]$.

(vi) Zavedeme-li pro funkce z množiny $\mathbb{BV}[a,b]$ obvyklým způsobem operace sčítání a násobení skalárem (viz 0.(vi)), stane se lineárním normovaným prostorem vzhledem k těmto operacím a vzhledem k normě $\|.\|_{\mathbb{BV}}$ definované předpisem

$$f \in \mathbb{BV}[a,b] \to \|f\|_{\mathbb{BV}} = |f(a)| + \operatorname{var}_a^b f.$$

(vii) Pro každou funkci f monotonní na $[a,b]$ platí $\operatorname{var}_a^b f = |f(b) - f(a)|$.

(viii) Pro libovolná dělení D' a D'' intervalu $[a,b]$ taková, že $D'' \subset D'$ a libovolnou funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je $V(f, D'') \le V(f, D')$.

(ix) $\operatorname{var}_a^b f = d \in \mathbb{R} \iff (\forall \varepsilon > 0\ \exists\, D_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b] \colon D_\varepsilon \subset D \implies d - \varepsilon \le V(f,D) \le d)$.

(x) $\operatorname{var}_a^b f = \infty \iff (\forall\, K > 0\, \exists\, D_K \in \mathscr{D}[a,b] : V(f, D_K) \ge K)$.

(xi) Pro libovolné dělení $D_0 \in \mathscr{D}[a,b]$ platí $\operatorname{var}_a^b f = \sup_{D \supset D_0} V(f,D)$.

(xii) Dokažte Větu 1.3.

1.3. Věta. *Pro každé $c \in (a,b)$ a každou funkci $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ platí:*

$$\operatorname{var}_a^b f = \operatorname{var}_a^c f + \operatorname{var}_c^b f.$$

□

1.4. Věta. *$f \in \mathbb{BV}[a,b]$ tehdy a jen tehdy, když existují funkce f_1 a f_2 neklesající na $[a,b]$ a takové, že platí $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ pro každé $x \in [a,b]$.*

D ů k a z . Stačí dokázat, že pro každou funkci $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ existují funkce f_1 a f_2 neklesající na $[a,b]$ a takové, že platí

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) \quad \text{na } [a,b].$$

Nechť tedy $f \in \mathbb{BV}[a,b]$. Položme

$$f_1(x) = \operatorname{var}_a^x f \quad \text{a} \quad f_2(x) = f_1(x) - f(x) \quad \text{pro } \ x \in [a,b].$$

Potom f_1 je evidentně neklesající na $[a,b]$. Dále, pro $x_2 \ge x_1$ máme vzhledem ke Větě 1.3

$$f_2(x_2) = f_1(x_1) + \operatorname{var}_{x_1}^{x_2} f - f(x_2)$$

a

$$f_2(x_2) - f_2(x_1) = \operatorname{var}_{x_1}^{x_2} f - (f(x_2) - f(x_1)) \ge 0,$$

t.zn., že f_2 je také neklesající na $[a,b]$. □

1.5. Cvičení. Nechť $f \in \mathbb{BV}[a,b]$. Dokažte, že funkce

$$p(x) = \sup_{D \in \mathscr{D}[a,x]} \sum_{j=1}^{\nu(d)} (f(\alpha_j) - f(\alpha_{j-1}))^+$$

a

$$n(x) = \sup_{D \in \mathscr{D}[a,x]} \sum_{j=1}^{\nu(d)} (f(\alpha_j) - f(\alpha_{j-1}))^-$$

jsou obě monotonní na $[a,b]$ a platí

$$f(x) = f(a) + p(x) - n(x) \quad \text{a} \quad \operatorname{var}_a^x f = p(x) + n(x) \quad \text{pro každé} \ \ x \in [a,b].$$

1.6. Důsledek. *Pro každou funkci $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ a pro všechna $t \in [a,b)$ a $s \in (a,b]$ existují konečné limity*

$$f(t+) = \lim_{\tau \to t+} f(\tau) \quad a \quad f(s-) = \lim_{\tau \to s-} f(\tau)$$

(tj. f může mít v $[a,b]$ pouze nespojitosti 1.druhu).

D ů k a z plyne z Věty 1.4 a z toho, že uvedené limity existují pro každou funkci monotonní na $[a,b]$. Např. je-li f neklesající na $[a,b]$, $t \in (a,b]$ a $t_n \searrow t+$, pak

$$\lim_{n \to \infty} f(t_n) = \inf_{n \in \mathbb{N}} f(t_n).$$

□

1.7. Věta. *Každá funkce $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ má nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti na intervalu $[a,b]$.*

D ů k a z plyne z Důsledku 1.6 a z následujícího Lemmatu. □

Lemma. *Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval, $f: J \to \mathbb{R}$ a M je množina bodů nespojitosti 1. druhu funkce f v J. Potom M je nejvýše spočetná.*
D ů k a z . Označme

$$M^+ = \{x \in J : f(x+) \neq f(x)\}, \qquad M^- = \{x \in J : f(x-) \neq f(x)\}$$

a

$$M_1^+ = \{x \in M^+ : f(x+) > f(x)\}, \quad M_2^+ = \{x \in M^+ : f(x+) < f(x)\}.$$

Potom je $M = M^+ \cup M^-$ a $M^+ = M_1^+ \cup M_2^+$. Uspořádejme množinu $\mathbb{P}$ racionálních čísel tak, aby platilo $\mathbb{P} = \{r_k\}_{k=1}^{\infty}$. Dále, definujme funkci $r: M_1^+ \to \mathbb{P}$ předpisem

$$r(x) = r_j \iff r_j \in (f(x), f(x+)) \ \wedge \ \{r_1, r_2, \dots, r_{j-1}\} \cap (f(x), f(x+)) = \emptyset$$

a pro každé $q \in \mathbb{P}$ označme

$$r_{-1}(q) = \{x \in M_1^+ : r(x) = q\}.$$

Máme

$$M_1^+ = \bigcup_{q\in\mathbb{P}} r_{-1}(q).$$

Ukážeme-li tedy, že každá množina $r_{-1}(q)$, $q\in\mathbb{P}$, je spočetná, budeme mít současně také dokázáno, že i množina M_1^+ je spočetná.

Nechť je tedy dáno libovolné $q\in\mathbb{P}$. Vzhledem k definici množiny M_1^+ a zobrazení r, pro každé $x\in r_{-1}(q)$ existuje $\delta(x)>0$ takové, že $x<y<x+\delta(x) \implies f(y)>r(x)$. Jsou-li $x_1,\ x_2\in r_{-1}(q)$ takové, že $x_1<x_2$ a $r(x_1)=r(x_2)=q$, pak musí platit

$$(x_1, x_1+\delta(x_1))\cap(x_2, x_2+\delta(x_2))=\emptyset.$$

Vskutku, kdyby bylo $x_1<x_2<x_1+\delta(x_1)$, bylo by též (vzhledem k definici δ)

$$q=r(x_1)<f(x_2)<r(x_2)=q,$$

spor. Systém intervalů$\{(x,x+\delta(x)),\ x\in r_{-1}(q)\}$ je tedy disjunktní. V každém z nich můžeme zvolit jediné racionální číslo $r\in(x,x+\delta(x))$ a tím definovat prosté zobrazení $r_{-1}(q)$ do $\mathbb{P}$. To znamená, že každá množina $r_{-1}(q)$, $q\in\mathbb{P}$, je spočetná.

b) Protože $M_2^+=\{x\in J: -f(x)<-f(x+)\}$, můžeme použít část a) tohoto důkazu k důkazu spočetnosti množiny M_2^+.

c) Konečně, $M^-=\{x\in J\colon f(-x)\neq f(-x+)\}$, takže podle částí a)–b) tohoto důkazu je také M^- spočetná množina. □

1.8. Cvičení. Přesvědčete se, že důkaz předešlého lemmatu v sobě obsahuje též důkaz následujícího tvrzení:

Každý disjunktní systém intervalů v $\mathbb{R}$ je spočetný.

1.9. Věta. *Nechť $f\in\mathbb{BV}[a,b]$. Potom*

$$\sum_{t\in[a,b)}|\Delta^+ f(t)| + \sum_{t\in(a,b]}|\Delta^- f(t)| < \infty. \tag{1.3}$$

Důkaz. Nechť S značí množinu bodů nespojitosti funkce f ležících v otevřeném intervalu (a,b). Podle Věty 1.7 je S nejvýše spočetná. Je-li konečná, je tvrzení věty evidentní. Nechť $S=\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Předpokládejme na chvíli, že funkce f je na intervalu $[a,b]$ neklesající. Potom

$$\sum_{t\in[a,b)}|\Delta^+ f(t)| + \sum_{t\in(a,b]}|\Delta^- f(t)| = \Delta^+ f(a) + \sum_{k=1}^{\infty}(\Delta^+ f(s_k)+\Delta^- f(s_k)) + \Delta^- f(b).$$

Nechť $n\in\mathbb{N}\cup[2,\infty)$ je dáno a nechť σ_k, $k=0,1,\dots,n+1$ jsou body intervalu $[a,b]$ takové, že platí

$$a=\sigma_0<\sigma_1<\dots<\sigma_n<\sigma_{n+1}=b \quad \text{a} \quad \{\sigma_k\}_{k=0}^{n+1}=\{a\}\cup\{s_k\}_{k=1}^n\cup\{b\}.$$

Zvolme dále t_k, $k = 1, 2, \dots, n+1$, tak, aby platilo

$$a < t_1 < \sigma_1 < t_2 < \sigma_2 < \dots < \sigma_n < t_{n+1} < b.$$

Potom

$$\begin{aligned}
&\Delta^+ f(a) + \sum_{k=1}^{n} \big(\Delta^+ f(s_k) + \Delta^- f(s_k)\big) + \Delta^- f(b) \\
&\quad = f(a+) - f(a) + f(\sigma_1) - f(\sigma_1-) + f(\sigma_1+) - f(\sigma_1) \\
&\qquad + \dots + f(\sigma_n+) - f(\sigma_n) + f(b) - f(b-) \\
&\quad \le f(a+) - f(a) + f(t_1) - f(a+) + f(\sigma_1-) - f(t_1) + f(\sigma_1) - f(\sigma_1-) \\
&\qquad + f(\sigma_1+) - f(\sigma_1) + f(t_2) - f(\sigma_1+) + f(\sigma_2-) - f(t_2) \\
&\qquad + \dots + f(\sigma_n+) - f(\sigma_n) + f(t_n) - f(\sigma_n+) + f(b-) - f(t_n) + f(b) - f(b-) \\
&\quad = f(b) - f(a).
\end{aligned}$$

Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ tedy platí

$$\Delta^+ f(a) + \sum_{k=0}^{n} \big(\Delta^+ f(s_k) + \Delta^- f(s_k)\big) + \Delta^- f(b) \le f(b) - f(a)$$

a tudíž

$$\sum_{t \in [a,b)} |\Delta^+ f(t)| + \sum_{t \in (a,b]} |\Delta^- f(t)| \le f(b) - f(a).$$

Tvrzení (1.3) tedy platí pro každou funkci f neklesající na $[a, b]$. Důkaz věty nyní můžeme snadno dokončit použitím Věty 1.4. □

1.10. Věta. *Prostor $\mathbb{BV}[a, b]$ je Banachův prostor (tj. úplný normovaný prostor).*

D ů k a z . Dokážeme, že $\mathbb{BV}[a, b]$ je úplný prostor, tj. že každá posloupnost cauchyovská v $\mathbb{BV}[a, b]$ má v $\mathbb{BV}[a, b]$ limitu. Předpokládejme tedy, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{BV}[a, b]$ je cauchyovská v $\mathbb{BV}[a, b]$.

a) Potom platí

$$\begin{cases} \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_\varepsilon : \\ \quad n, m \ge n_\varepsilon \implies |f_n(x) - f_m(x)| \le \|f_n - f_m\|_{\mathbb{BV}} < \varepsilon \;\; \text{pro všechna} \;\; x \in [a, b]. \end{cases} \tag{1.4}$$

Speciálně je tedy pro každé $x \in [a, b]$ posloupnost reálných čísel $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská a tudíž pro každé $x \in [a, b]$ existuje konečná limita

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x).$$

b) Nechť je dáno libovolné $\varepsilon > 0$ a nechť $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ má vlastnost (1.4). Potom pro každé $x \in [a,b]$ máme také

$$|f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f_{n_\varepsilon}(x)| \le \varepsilon$$

a tudíž pro každé $n \ge n_\varepsilon$ a každé $x \in [a,b]$ platí

$$|f(x) - f_n(x)| \le |f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)| + |f_{n_\varepsilon}(x) - f_n(x)| < 2\,\varepsilon.$$

To ovšem znamená, že

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0,$$

neboli, posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje k f stejnoměrně na $[a,b]$.

c) Číselná posloupnost $\{\operatorname{var}_a^b f_n\}_{n=1}^\infty$ je ohraničená. Podle Bolzanovy-Weierstraßovy věty z ní tedy lze vybrat podposloupnost $\{\operatorname{var}_a^b f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, pro kterou platí:

$$0 \le \lim_{k\to\infty} \operatorname{var}_a^b f_{n_k} = d < \infty,$$

tj.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, k_\varepsilon : k \ge k_\varepsilon \wedge D \in \mathscr{D}[a,b] \implies V(f_{n_k}, D) < d + \varepsilon$$

a

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall D \in \mathscr{D}[a,b] : V(f, D) = \lim_{k\to\infty} V(f_{n_k}, D) \le d + \varepsilon.$$

Odtud ovšem už plyne, že je

$$\operatorname{var}_a^b f = \sup_{D \in \mathscr{D}[a,b]} V(f, D) \le d < \infty,$$

tj. $f \in \mathbb{BV}[a,b]$.

d) Podle (1.4) máme

$$\begin{cases} \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon : \\ \quad n, m \ge n_\varepsilon \implies V(f_n - f_m, D) \le \operatorname{var}_a^b (f_n - f_m(x)) < \varepsilon \text{ pro každé } \ D \in \mathscr{D}[a,b]. \end{cases}$$

Tudíž, je-li $m \ge n_\varepsilon$, pak pro každé $D \in \mathscr{D}[a,b]$ platí

$$V(f - f_m, D) = \lim_{n\to\infty} V(f_n - f_m, D) \le \varepsilon$$

neboli

$$\operatorname{var}_a^b (f - f_m) \le \varepsilon.$$

To ovšem znamená, že

$$\lim_{m\to\infty} \|f - f_m\|_{\mathbb{BV}} = 0,$$

což zbývalo ještě dokázat. □

1.11. Cvičení. Definujme pro $n\in\mathbb{N}$:

$$f_n(x)=\begin{cases} 0 & \text{pro}\ \ 0\le x\le \frac{1}{n},\\ x\,\sin(\frac{\pi}{x}) & \text{pro}\ \ \frac{1}{n}\le x\le 1.\end{cases}$$

Ukažte, že $f_n\in\mathbb{BV}[0,1]$ pro každé $n\in\mathbb{N}$, $f_n\rightrightarrows f$ na $[0,1]$, kde

$$f(x)=\begin{cases} x\,\sin(\frac{\pi}{x}) & \text{pro}\ \ x>0,\\ 0 & \text{pro}\ \ x=0\end{cases},$$

a přitom f nemá konečnou variaci na $[0,1]$.

Nyní se budeme věnovat vlastnostem funkcí s konečnou variací vzhledem k derivování. Nejprve připomeňme pojem množin s nulovou mírou.

1.12. Definice. Množina $M\subset\mathbb{R}$ má *nulovou míru* ($\mu(M)=0$), když ke každému $\varepsilon>0$ existuje spočetný systém otevřených intervalů$\{I_j,\ j\in\mathbb{N}\}$ takový, že je

$$M\subset\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \quad \text{a} \quad \sum_{j=1}^{\infty}|I_j|<\varepsilon.$$

Řekneme, že nějaká vlastnost platí *skoro všude* (s.v.) na intervalu $[a,b]$, jestliže existuje množina $M\subset[a,b]$ nulové míry taková, že tato vlastnost platí pro každé $x\in[a,b]\setminus M$.

1.13. Cvičení.
(i) Každá spočetná podmnožina S v $\mathbb{R}$ má nulovou míru.
(ii) Sjednocení spočetně mnoha množin nulové míry má nulovou míru.

1.14. Věta. *Každá funkce $f\in\mathbb{BV}[a,b]$ má vlastní derivaci $f'(x)$ pro s.v. $x\in[a,b]$.*

Důkaz Věty 1.14 je technicky komplikovaný. Odsouváme ho proto do Dodatku 6.1.

1.15. Poznámka. Lze dokonce dokázat (viz [4, Věty 84 a 91]), že je-li $f\in\mathbb{BV}[a,b]$, pak $f'\in\mathbb{L}^1[a,b]$. **ALE !!!!** Obecně neplatí pro každou funkci $f\in\mathbb{BV}[a,b]$ zdánlivě evidentní rovnost

$$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Existují totiž funkce $f\in\mathbb{BV}[a,b]$ nekonstantní na $[a,b]$ a přitom takové, že platí $f'(x)=0$ s.v. na $[a,b]$.

1.16. Definice. Funkce $f\in\mathbb{BV}[a,b]$ se nazývá *singulární*, jestliže platí $f'(x)=0$ pro s.v. $x\in[a,b]$.

Nejjednodušším příkladem nekonstantních singulárních funkcí jsou funkce tvaru

$$f(x) = \chi_{[a,c]}(x),$$

kde $c \in (a,b)$. Jejich zobecněním jsou třídy *jednoduchých skokových funkcí* (anglicky *step functions*) resp. *skokových funkcí* (anglicky *break functions*).

1.17. Definice. Funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je *konečná skoková funkce na* $[a,b]$ ($f \in \mathbb{S} = \mathbb{S}[a,b]$), jestliže existuje dělení $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \in \mathscr{D}[a,b]$ takové, že na každém jeho dílčím otevřeném intervalu (α_{j-1}, α_j) je f konstantní.

Funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je *skoková funkce na* $[a,b]$ ($f \in \mathbb{B} = \mathbb{B}[a,b]$), jestliže existuje $c \in \mathbb{R}$, $K \subset \mathbb{N}$ a posloupnosti

$$\{s_k\}_{k \in K} \subset [a,b], \quad \{c_k\}_{k \in K} \subset \mathbb{R} \quad \text{a} \quad \{d_k\}_{k \in K} \subset \mathbb{R}$$

takové, že platí

$$\sum_{k \in K} (|c_k| + |d_k|) < \infty$$

a

$$f(x) = c + \sum_{a < s_k \le x} c_k + \sum_{a \le s_k < x} d_k \quad \text{pro} \quad x \in [a,b]. \tag{1.5}$$

1.18. Cvičení. Pro každou $f \in \mathbb{B}$ tvaru (1.5) platí

$$\operatorname{var}_a^b f = \sum_{k \in K} (|c_k| + |d_k|)$$

a tudíž $\mathbb{S} \subset \mathbb{B} \subset \mathbb{BV}[a,b]$.

1.19. Věta. *Každá skoková funkce na* $[a,b]$ *je singulární na* $[a,b]$.

D ů k a z . Nechť $c \in \mathbb{R}$, $K \subset \mathbb{N}$, $\{s_k\}_{k \in K} \subset [a,b]$, $\sum_{k \in K}(|c_k| + |d_k|) < \infty$ a

$$f(x) = c + \sum_{a < s_k \le x} c_k + \sum_{a \le s_k < x} d_k \quad \text{na } [a,b].$$

Definujme pro $x \in [a,b]$:

$$v(x) = \sum_{a < s_k \le x} |c_k| + \sum_{a \le s_k < x} |d_k| \quad \text{na } [a,b].$$

Potom je

$$v(x) = \sum_{k \in K} v_k(x) \quad \text{na} \quad [a,b],$$

kde

$$v_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{když} \;\; a \le x < s_k, \\ |c_k| & \text{když} \;\; x = s_k, \\ |c_k| + |d_k| & \text{když} \;\; s_k < x \le b. \end{cases}$$

Každá funkce v_k je neklesající na $[a, b]$ a $v_k'(x) = 0$ pro $x \ne s_k$. Máme tedy

$$v'(x) = \sum_{k \in K} v_k'(x) = 0 \quad \text{pro} \quad x \notin \{s_k\}_{k \in K}, \quad \text{tj. pro s.v. } x \in [a, b].$$

Protože pro všechna $x, y \in [a, b]$, $x \ne y$, zřejmě platí

$$\Big|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\Big| \le \Big|\frac{v(x) - v(y)}{x - y}\Big|,$$

plyne odsud tvrzení věty. □

1.20 . Poznámka. Příklad funkce, která je spojitá, neklesající a singulární na daném intervalu, je uveden v [4, V.9,cvičení 4].

1.21. Lemma. *Nechť $f \in \mathbb{BV}[a, b]$ a nechť $\{s_k\}_{k \in K}$, $K \subset \mathbb{N}$, je množina bodů nespojitosti funkce f v $[a, b]$. Definujme*

$$f^B(x) = \sum_{a < s_k \le x} \Delta^- f(s_k) + \sum_{a \le s_k < x} \Delta^+ f(s_k) \quad \textit{pro} \quad x \in [a, b]. \tag{1.6}$$

Potom je $f^B \in \mathbb{BV}[a, b]$ a funkce $f - f^B$ je spojitá na $[a, b]$.

D ů k a z . Podle Věty 1.9 máme

$$\operatorname{var}_a^b f^{\mathrm{B}} = \sum_{k \in K} (|\Delta^- f(s_k)| + |\Delta^+ f(s_k)|) < \infty$$

a tudíž $f^{\mathrm{B}} \in \mathbb{B}[a, b] \subset \mathbb{BV}[a, b]$. Dále, pro každé $x \in [a, b)$ máme

$$f^{\mathrm{B}}(x+) = \sum_{a < s_k \le x} \Delta^- f(s_k) + \sum_{a \le s_k \le x} \Delta^+ f(s_k).$$

Proto také

$$f^{\mathrm{B}}(x+) - f^{\mathrm{B}}(x) = \Delta^+ f(x)$$

a

$$(f(x+) - f^{\mathrm{B}}(x+)) - (f(x) - f^{\mathrm{B}}(x)) = \Delta^+ f(x) - \Delta^+ f(x) = 0.$$

Podobně, pro každé $x \in (a, b]$ je

$$f^{\mathrm{B}}(x-) = \sum_{a < s_k < x} \Delta^- f(s_k) + \sum_{a \le s_k < x} \Delta^+ f(s_k)),$$

a tedy

$$(f(x) - f^{\mathrm{B}}(x)) - (f(x-) - f^{\mathrm{B}}(x-)) = \Delta^- f(x) - \Delta^- f(x) = 0.$$

□

1.22. Definice. Funkce f^{B} přiřazená k f podle definice (1.6) budeme nazývat *skoková část* funkce f. Rozdíl $f - f^{\mathrm{B}}$ nazýváme *spojitá část* funkce f a značíme f^{C}.

1.23. Poznámka. Podle Lemmatu 1.21 lze každou funkci s konečnou variací rozložit na součet funkce spojité a funkce skokové. Takový rozklad se nazývá *Jordanův rozklad* funkce s konečnou variací. Obecně jsou skoková resp. spojitá část z Jordanova rozkladu určeny jednoznačně až na konstantu. Všimněme si ještě, že použitím charakteristických funkcí podintervalů v $[a,b]$ lze definici (1.6) ekvivalentně zapsat též ve tvaru

$$f^{\mathrm{B}}(x) = \sum_{k\in K} \Delta^- f(s_k)\, \chi_{[s_k,b]}(x) + \sum_{k\in K} \Delta^+ f(s_k)\, \chi_{(s_k,b]}(x).$$

1.24. Lemma. *Nechť $f \in \mathbb{BV}[a,b]$, $K \subset \mathbb{R}$, $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je množina bodů nespojitosti funkce f v intervalu $[a,b]$ a nechť f^B je definována jako v Lemmatu 1.21. Definujme dále*

$$f_n^B(x) = \sum_{k\in K\cap[1,n]} \Delta^- f(s_k)\chi_{[s_k,b]}(x) + \sum_{k\in K\cap[1,n]} \Delta^+ f(s_k)\chi_{(s_k,b]}(x)$$

pro $n\in\mathbb{N}$ a $x\in[a,b]$.

Potom je $f_n^B \in \mathbb{S}$ pro každé $n\in\mathbb{N}$ a platí

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{var}_a^b (f^B - f_n^B) = 0.$$

D ů k a z plyne z nerovnosti

$$\operatorname{var}_a^b (f^{\mathrm{B}} - f_n^{\mathrm{B}}) \le \sum_{k\in K\setminus[1,n]} (|\Delta^- f(s_k)| + |\Delta^+ f(s_k)|).$$

□

1.25. Věta (Helly). *Nechť $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{BV}[a,b]$, $\varkappa\in\mathbb{R}$,*

$$|f_n(a)| \le \varkappa \quad a \quad \operatorname{var}_a^b f_n \le \varkappa \quad \textit{pro všechna } n\in\mathbb{N}.$$

Potom existují funkce $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ a podposloupnost

$$\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

takové, že platí

$$|f(a)| \le \varkappa, \quad \operatorname{var}_a^b f \le \varkappa \quad a \quad \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x) \quad \textit{na } [a,b].$$

K důkazu Hellyovy věty využijeme následujících dvou lemmat.

Lemma 1. *Nechť*

$$|f_n(x)| \le M < \infty \quad \textit{na} \quad [a,b] \quad \textit{pro všechna } n\in\mathbb{N}.$$

Potom pro každou spočetnou $P \subset [a,b]$ existuje podposloupnost $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že limita

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(p)$$

je konečná pro všechna $p \in P$.

D ů k a z . Nechť $P = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$. Máme $|f_n(p_k)| \le M < \infty$ pro všechna $n, k \in \mathbb{N}$. Podle Bolzanovy-Weierstraßovy věty lze tedy vybrat z $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ podposloupnost $\{f_{n_{k,1}}\}_{k=1}^{\infty}$, pro níž existuje konečná limita

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_{k,1}}(p_1) = q_1 \in \mathbb{R}.$$

Podobně existují

$$\{f_{n_{k,2}}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{f_{n_{k,1}}\}_{k=1}^{\infty} \quad \text{a} \quad q_2 \in \mathbb{R}$$

tak, že

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_{k,2}}(p_2) = q_2 \in \mathbb{R}.$$

Takto pro každé $j \in \mathbb{N}$ najdeme posloupnosti

$$\{f_{n_{k,j}}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{f_{n_{k,j-1}}\}_{k=1}^{\infty} \quad \text{a} \quad q_j \in \mathbb{R}$$

takové, že platí

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_{k,\ell}}(p_\ell) = q_\ell \in \mathbb{R} \quad \text{pro každé } \ell \in \{1, 2, \dots, j\}.$$

Položme $f_{n_k} = f_{n_{k,k}}$ pro $k \in \mathbb{N}$. Potom

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(p_j) = q_j \in \mathbb{R} \quad \text{pro každé } j \in \mathbb{N}.$$

□

Lemma 2. *Předpokládejme, že všechny funkce f_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou neklesající na $[a,b]$ a že existuje $M \in (0,\infty)$ takové, že $||f_n|| \le M$ platí pro každé $n \in \mathbb{N}$. Potom existují podposloupnost*

$$\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$$

a funkce $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ neklesající na $[a,b]$ takové, že platí

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x) \quad \textit{na} \quad [a,b].$$

D ů k a z . Nechť $P = (\mathbb{P} \cap (a,b)) \cup [a] \cup [b]$ je množina racionálních čísel z intervalu (a,b) doplněná o body a, b. Body množiny P očíslujme tak, že bude $P = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$. Podle Lemmatu 1 existuje podposloupnost

$$\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$$

a zobrazení $\varphi\colon P \to \mathbb{R}$ takové, že platí

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(p) = \varphi(p) \quad \text{pro všechna } p \in P.$$

Zřejmě platí

$$\varphi(p') \le \varphi(p'') \quad \text{pro všechna } p', p'' \in P, p' \le p''.$$

Dále, definujme pro $x \in (a,b) \setminus P$

$$\varphi(x) = \sup_{p \in P \cap [a,x)} \varphi(p).$$

Potom máme

$$\varphi(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) \quad \text{pro} \quad x \in P \quad \text{a} \quad \varphi(x) = \lim_{\substack{p\to x- \\ p\in P}} \varphi(p)$$

a φ je definovaná a neklesající na $[a,b]$. Ukážeme, že v každém bodě $x_0 \in (a,b)$, ve kterém je funkce φ spojitá platí

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_0) = \varphi(x_0). \tag{1.7}$$

Vskutku, buď dáno $\varepsilon > 0$. Potom existuje $\delta_\varepsilon > 0$ takové, že

$$x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0 + \delta_\varepsilon \implies \varphi(x_0) - \varepsilon < \varphi(x) < \varphi(x_0) + \varepsilon.$$

Zvolíme-li $r' \in P \cap (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0)$ a $r'' \in P \cap (x_0, x_0 + \delta_\varepsilon)$, bude platit

$$\varphi(x_0) - \varepsilon < \varphi(r') \le \varphi(x_0) \le \varphi(r'') < \varphi(x_0) + \varepsilon.$$

Dále, zvolme k_ε tak, aby platilo

$$\varphi(r') - \varepsilon < f_{n_k}(r') < \varphi(r') + \varepsilon \quad \text{a} \quad \varphi(r'') - \varepsilon < f_{n_k}(r'') < \varphi(r'') + \varepsilon$$

pro každé $k \ge k_\varepsilon$. Potom, pro každé $k \ge k_\varepsilon$ dostaneme také

$$\begin{aligned} \varphi(x_0) - 2\varepsilon &< \varphi(r') - \varepsilon < f_{n_k}(r') \le f_{n_k}(x_0) \\ &\le f_{n_k}(r'') < \varphi(r'') + \varepsilon < \varphi(x_0) + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

čili platí (1.7).

Dokázali jsme tedy, že značí-li Q množinu bodů nespojitosti funkce φ v (a,b), pak

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = \varphi(x) \quad \text{pro} \quad x \in [a,b] \setminus Q.$$

Podle Věty 1.7 je množina Q spočetná. Můžeme tedy použít ještě jednou Lemma 1 a dokázat tak existenci vybrané posloupnosti

$$\{f_{n_{k_\ell}}\}_{\ell=1}^\infty \subset \{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty,$$

která má limitu $\psi(x) \in \mathbb{R}$ pro každé $x \in Q$. Definujeme-li tedy

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{když } \; x \in [a,b] \setminus Q, \\ \psi(x) & \text{když } \; x \in Q, \end{cases}$$

bude

$$\lim_{\ell} f_{n_{k_\ell}}(x) = f(x) \quad \text{na } [a,b]$$

a protože funkce, která je na intervalu $[a,b]$ bodovou limitou posloupnosti funkcí neklesajících na $[a,b]$, je také neklesající, lemma je dokázáno. $\square$

Důkaz Věty 1.25. Použitím Věty 1.4 (o rozkladu funkce s konečnou variací na rozdíl dvou funkcí neklesajících) a Lemmatu 2 se snadno ukáže existence funkce $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ a podposloupnosti $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ takových, že je $|f(a)| \le \varkappa$ a $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$ na $[a,b]$. Dále, protože pro libovolné dělení $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \in \mathscr{D}[a,b]$ máme

$$\begin{aligned} V(f,D) = \sum_{j=1}^{m} |f(\alpha_j) - f(\alpha_{j-1})| &= \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{m} |f_{n_k}(\alpha_j) - f_{n_k}(\alpha_{j-1})| \\ &= \lim_{k\to\infty} V(f_{n_k}, D) \le \lim_{k\to\infty} \operatorname{var}_a^b f_{n_k} \le \varkappa, \end{aligned}$$

platí také $\operatorname{var}_a^b f \le K$. $\square$

Kapitola 2

Absolutně spojité funkce.

2.1 . Definice. Funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je *absolutně spojitá* na intervalu $[a, b]$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\sum_{j=1}^{m} |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| < \varepsilon$$

platí pro každý systém intervalů $[\alpha_j, \beta_j]$, $j = 1, 2, , \ldots, m$, splňující

$$a \le \alpha_1 \le \beta_1 \le \alpha_2 \le \beta_2 \cdots \le \beta_{m-1} \le \alpha_m \le \beta_m \le b \quad \text{a} \quad \sum_{j=1}^{m} (\beta_j - \alpha_j) < \delta. \tag{2.1}$$

Množinu funkcí absolutně spojitých na $[a, b]$ značíme $\mathbb{AC}[a, b]$ resp. $\mathbb{AC}$ (je-li ze souvislostí jasné, o jaký interval se jedná).

2.2 . Cvičení. (i) Každá funkce absolutně spojitá na intervalu $[a, b]$ je na tomto intervalu stejnoměrně spojitá.

(ii) Nechť funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ splňuje Lipschitzovu podmínku na intervalu $[a, b]$, tj. existuje $L \in \mathbb{R}$ takové, že

$$|f(x) - f(y)| \le L|x - y| \quad \text{platí pro všechna } x, y \in [a, b].$$

Potom $f \in \mathbb{AC}[a, b]$.

2.3 . Věta. *Každá funkce absolutně spojitá na intervalu $[a, b]$ má na tomto intervalu konečnou variaci.*

D ů k a z . Nechť $f \in \mathbb{AC}$. Zvolme $\delta > 0$ tak, aby platilo

$$\sum_{j=1}^{m} |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| < 1$$

pro každý systém intervalů $[\alpha_j, \beta_j]$, $j = 1, 2, , \ldots, k$, splňující (2.1). Dále, zvolme dělení $\{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ intervalu $[a, b]$ tak, aby platilo

$$0 < x_i - x_{i-1} < \delta \quad \text{pro každé } i = 1, 2, \ldots, k.$$

Potom pro každé $i = 1, 2, \ldots, k$ a každé dělení $D^i = \{\alpha_0^i, \alpha_1^i, \ldots, \alpha_{m_i}^i\}$ intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ máme

$$\sum_{j=1}^{m_i} (\alpha_j^i - \alpha_{j-1}^i) = x_i - x_{i-1} < \delta$$

a tudíž (podle Věty 1.3)

$$\operatorname{var}_a^b f = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{var}_{x_{i-1}}^{x_i} f = \sum_{i=1}^{k} \sup_{D^i \in \mathscr{D}[x_{i-1},x_i]} \sum_{j=1}^{m_i} |f(\alpha_j^i) - f(\alpha_{j-1}^i| < k < \infty.$$

□

2.4 . Věta. *Jestliže* $f,\ g \in \mathbb{AC}[a,b]$, *pak* $|f|,\ f+g,\ f\,g,\ \max\{f,g\},\ \min\{f,g\} \in \mathbb{AC}[a,b]$. *Je-li navíc* $|f(x)| > 0$ *na* $[a,b]$, *pak také* $f^{-1} \in \mathbb{AC}[a,b]$.

D ů k a z . Nechť $f,\ g \in \mathbb{AC}[a,b]$.

a) Pro libovolná $x,\ y \in [a,b]$ platí $|f(x)| \le |f(x) - f(y)| + |f(y)|$. Tudíž

$$|f(x) - f(y)| \ge \big||f(x)| - f(y)|\big|$$

a

$$\sum_{j=1}^{m} \big||f(\beta_j)| - |f(\alpha_j)|\big| \le \sum_{j=1}^{m} |f(\beta_j) - f(\alpha_j)|.$$

Odtud už ovšem okamžitě plyne, že také $|f| \in \mathbb{AC}[a,b]$.

b) Druhé a třetí tvrzení, tj. $f+g \in \mathbb{AC}[a,b]$ a $f\,g \in \mathbb{AC}[a,b]$, plynou z nerovností

$$|(f(x) + g(x)) - (f(y) + g(y))| \le |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)|$$

a

$$|f(x)\,g(x) - f(y)\,g(y)| \le \|f\|\,|g(x) - g(y)| + \|g\|\,|f(x) - f(y)|.$$

c) Protože pro libovolné $x \in [a,b]$ máme

$$\max\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}\big(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|\big)$$

a

$$\min\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}\big(f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|\big),$$

platí v důsledku a) a b) také

$$\max\{f,g\} \in \mathbb{AC}[a,b] \quad \text{a} \quad \min\{f,g\} \in \mathbb{AC}[a,b].$$

d) Konečně, je-li navíc $|f(x)| > 0$ na $[a,b]$, pak existuje $\mu > 0$ takové, že platí $|f(x)| \ge \mu$ na $[a,b]$ a tudíž také

$$\Big|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)}\Big| \le \frac{|f(x) - f(y)|}{\mu^2}.$$

Nyní už je snadné ukázat, že $f^{-1} \in \mathbb{AC}[a,b]$. □

2.5 . Poznámka. Z vět 6.11 a 2.3 okamžitě plyne, že každá absolutně spojitá funkce na intervalu $[a,b]$ má s.v. na tomto intervalu konečnou derivaci. Lze dokázat (viz [4, Věty 93 a 94]), že funkce $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ je absolutně spojitá na $[a,b]$ právě tehdy, když

$$f(x)-f(a)=\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{na } [a,b]$$

pro nějakou funkci $g\in\mathbb{L}^1[a,b]$. (Potom je $f'(t)=g(t)$ s.v. na $[a,b]$.) Speciálně, platí, že je-li $f\in\mathbb{AC}[a,b]$ a $f'(t)=0$ pro s.v. $t\in[a,b]$, pak je $f(t)$ konstantní na $[a,b]$. Dále, zobrazení

$$f\in\mathbb{AC}[a,b]\to(f(a),f')\in\mathbb{R}\times\mathbb{L}^1[a,b]$$

a

$$(c,g)\in\mathbb{R}\times\mathbb{L}^1[a,b]\to f(t):=c+\int_a^t g(s)\,\mathrm{d}s\in\mathbb{AC}[a,b]$$

představují vzájemně jednoznačný vztah mezi $\mathbb{AC}[a,b]$ a $\mathbb{R}\times\mathbb{L}^1[a,b]$. Na $\mathbb{AC}[a,b]$ definujeme normu předpisem

$$\|f\|_{\mathbb{AC}}=|f(a)|+\|f'\|_1 \quad \text{pro} \quad f\in\mathbb{AC}[a,b]$$

a $\mathbb{AC}[a,b]$ je pak Banachův prostor. Obecný spojitý lineární funkcionál na $\mathbb{AC}[a,b]$ má tvar:

$$f\in\mathbb{AC}[a,b]\to p\,f(a)+\int_a^b q\,f'\,\mathrm{d}t,$$

kde $p\in\mathbb{R}$ a $q\in\mathbb{L}^\infty[a,b]$. ($\mathbb{L}^\infty[a,b]$ značí prostor funkcí "v podstatě" ohraničených na $[a,b]$).

Další podrobnosti o funkcích absolutně spojitých lze nalézti v monografiích V. Jarníka *Diferenciální počet II* [3, V.9] a *Integrální počet II* [4, V.5] a Š. Schwabika *Integrace v* $\mathbb{R}$ *(Kurzweilova teorie)* [6, XIII.4].

Víme již (viz Lemma 1.21 a Poznámka 1.23), že každou funkci s konečnou variací na $[a,b]$ můžeme rozložit na součet funkce spojité a funkce skokové resp. na rozdíl dvou funkcí neklesajících na $[a,b]$ (viz Věta 1.4). Funkce s konečnou variací lze také rozložit na součet funkce absolutně spojité a funkce singulární. Důkaz následujícího tvrzení je uveden např. v [4, Věta 125].

2.6. Věta (Lebesgueův rozklad funkce s konečnou variací)**.** *Pro každou funkci* $f\in\mathbb{BV}[a,b]$ *existuje singulární funkce* f^{SING} *taková, že* $f-f^{\mathrm{SING}}$ *je absolutně spojitá na* $[a,b]$. *Funkce* f^{SING} *je určena jednoznačně až na konstantu.*

2.7 . Definice. Jestliže $f\in\mathbb{BV}[a,b]$, pak funkci f^{SING} přiřazenou k f podle Věty 2.6 nazýváme *singulární část* funkce f. Dále, rozdíl $f-f^{\mathrm{SING}}$ nazýváme *absolutně spojitá část* funkce f a značíme f^{AC}. Konečně, $f^{\mathrm{SC}}:=f-f^{\mathrm{B}}-f^{\mathrm{AC}}=f^{\mathrm{C}}-f^{\mathrm{AC}}$ je *spojitá singulární část* funkce f.

Kapitola 3

Regulované funkce.

3.1 . Definice. Funkce $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ se nazývá *regulovaná* na $[a, b]$, jestliže pro každé $t \in (a, b]$ a každé $s \in [a, b)$ existují konečné limity

$$f(t-) = \lim_{\tau \to t-} f(\tau) \quad \text{a} \quad f(s+) = \lim_{\tau \to s+} f(\tau),$$

tj. má-li na intervalu $[a, b]$ nespojitosti nejvýše *1. druhu.* Množinu funkcí regulovaných na $[a, b]$ značíme $\mathbb{G}[a, b]$.

3.2 . Poznámka. Zřejmě platí $\mathbb{BV}[a, b] \cup \mathbb{C}[a, b] \subset \mathbb{G}[a, b]$, přičemž $\mathbb{G}[a, b] \setminus \mathbb{C}[a, b] \neq \emptyset$ a $\mathbb{G}[a, b] \setminus \mathbb{BV}[a, b] \neq \emptyset$.

Podobně jako pro funkce s konečnou variací (viz Lemma z důkazu Věty 1.7) platí pro regulované funkce: máme:

3.3 . Věta. *Každá funkce regulovaná na $[a, b]$ má na $[a, b]$ nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti.* □

3.4 . Věta. *Jestliže posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{G}[a, b]$ a funkce $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ jsou takové, že platí* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *stejnoměrně na* $[a, b]$ *(tj.* $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0$*), pak $f \in \mathbb{G}[a, b]$.*

D ů k a z . Nechť $x \in [a, b)$, nechť $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset (x, b]$ je libovolná posloupnost taková, že $x_k \to x$ pro $k \to \infty$ a nechť je dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ a $k_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby platilo

$$\|f - f_{n_0}\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{a} \quad |f_{n_0}(x_k) - f_{n_0}(x_\ell)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pro všechna } k, \ell \geq k_0.$$

Potom budeme mít pro všechna $k, \ell \geq k_0$

$$|f(x_k) - f(x_\ell)| \\ \leq |f(x_k) - f_{n_0}(x_k)| + |f_{n_0}(x_k) - f_{n_0}(x_\ell)| + |f(x_\ell) - f_{n_0}(x_\ell)| < \varepsilon,$$

tj. existuje konečná limita $f(x+) = \lim_{k\to\infty} f(x_k)$. Podobně bychom ukázali, že pro každé $x \in (a, b]$ existuje konečná limita $f(x-)$. □

3.5 . Definice. Pro libovolnou funkci $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, podinterval $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ a dělení $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \in \mathscr{D}[a, b]$ definujeme

$$\omega_{(\alpha,\beta)}(f) = \sup_{x', x'' \in (\alpha,\beta)} |f(x') - f(x'')| \quad \text{a} \quad \omega_D(f) = \max_{i=1,2,\ldots,m} \omega_{(\alpha_{i-1},\alpha_i)}(f).$$

3.6. Věta. *Následující tři tvrzení jsou ekvivalentní*

(*i*) $f \in \mathbb{G}[a,b]$.

(*ii*) *Existuje posloupnost* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{S}[a,b]$ *taková, že platí* $f_n \rightrightarrows f$ *na* $[a,b]$ *pro* $n \to \infty$.

(*iii*) *Pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje dělení* $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \in \mathscr{D}[a,b]$ *takové, že* $\omega_D(f) < \varepsilon$.

D ů k a z . a) Implikace (ii) $\Longrightarrow$ (i) je dokázána Větou 3.4.

b) Předpokládejme, že platí (i) a nechť je dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Potom pro každé $x \in [a,b]$ existuje $\delta(x) > 0$ takové, že platí

$$x - \delta(x) > a \ \text{ pro všechna } \ x \in (a,b], \quad x + \delta(x) < b \ \text{ pro všechna } \ x \in [a,b)$$

a

$$\begin{cases} \omega_{(a,a+\delta(a))}(f) < \varepsilon, & \omega_{(b-\delta(b),b)}(f) < \varepsilon, \\ \omega_{(x-\delta(x),x)}(f) < \varepsilon \quad \text{a} & \omega_{(x,x+\delta(x))}(f) < \varepsilon \quad \text{pro všechna } x \in (a,b). \end{cases} \tag{3.1}$$

Intervaly

$$[a, a+\delta(a)),\ (x-\delta(x), x+\delta(x)),\ x \in (a,b), (b-\delta(b), b]$$

tvoří otevřené pokrytí intervalu $[a,b]$, ze kterého lze podle Vitaliovy věty (viz např. [3, Věta 81]) vybrat pokrytí konečné:

$$[a, a+\delta(a)),\ (x_i-\delta(x_i), x_i+\delta(x_i)),\ i = 1,2,\dots,m-1, (b-\delta(b), b],$$

přičemž vzhledem k (3.1) platí

$$\omega_{(x_i-\delta(x_i),x_i)}(f) < \varepsilon \quad \text{a} \quad \omega_{(x_i,x_i+\delta(x_i))}(f) < \varepsilon \text{ pro všechna } i = 1,2,\dots m-1.$$

Označme $\alpha_0 := a$ a $\alpha_m := b$ a nechť

$$D = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_1', \dots \alpha_{m-1}, \alpha_{m-1}', \alpha_m\},$$

kde

$$\alpha_i' = x_i \quad \text{a} \quad \alpha_i \in (x_i - \delta(x_i), x_{i-1} + \delta(x_{i-1})) \cap (x_{i-1}, x_i), \quad i = 1,2,\dots,m-1.$$

Potom

$$\omega_{(a,\alpha_1)}(f) \le \omega_{(a,a+\delta(a))}(f) < \varepsilon, \qquad \omega_{(\alpha_m,b)}(f) \le \omega_{(b-\delta(b),b)}(f) < \varepsilon$$

a

$$\omega_{(\alpha_i,\alpha_i')}(f) \le \omega_{(x_i-\delta(x_i),x_i)}(f) < \varepsilon \quad \text{a} \quad \omega_{(\alpha_i',\alpha_{i+1})}(f) \le \omega_{(x_i,x_i+\delta(x_i))}(f) < \varepsilon$$

pro každé $i = 1,2,\dots,m-1$, tj.

$$\omega_D(f) < \varepsilon.$$

c) Předpokládejme, že platí (iii). Nechť je dáno $\varepsilon > 0$ a nechť

$$D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \in \mathscr{D}[a,b]$$

je dělení $[a,b]$ takové, že $\omega_D(f) < \varepsilon$. Pro každé $i \in \{1,2,\dots,m\}$ zvolme $\xi_i \in (\alpha_{i-1}, \alpha_i)$ a definujme

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} f(\alpha_i) & \text{pro} \quad x = \alpha_i, \\ f(\xi_i) & \text{pro} \quad x \in (\alpha_{i-1}, \alpha_i). \end{cases}$$

Pro každé $x \in [a,b]$ máme $|f(x) - g_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ a tudíž také $\|f - g_\varepsilon\| < \varepsilon$. Jestliže tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme $f_n = g_{1/n}$, bude $f_n \in \mathbb{S}[a,b]$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$ pro $n \to \infty$. □

3.7. Důsledky.

(i) *Každá funkce regulovaná na $[a,b]$ je na $[a,b]$ ohraničená. Tudíž také $G[a,b] \subset \mathbb{L}^1[a,b]$.*

(ii) *Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje nejvýše konečně mnoho $x \in [a,b]$ takových, že platí*

$$|\Delta^+ f(x)| \geq \varepsilon \quad \textit{nebo} \quad |\Delta^- f(x)| \geq \varepsilon.$$

D ů k a z . Obě tvrzení plynou z vlastnosti (iii) z Věty 3.6. □

3.8. Věta. *$\mathbb{G}[a,b]$ je Banachův prostor vzhledem k normě*

$$\|f\|_{\mathbb{G}} = \|f\| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

D ů k a z . Předpokládejme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{G}[a,b]$ je cauchyovská v $\mathbb{G}[a,b]$. Jako v částech a) a b) důkazu Věty 1.10 dokážeme, že existuje funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ takové, že platí $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$. Podle Věty 3.4 ovšem platí $f \in \mathbb{G}[a,b]$ a tím je věta dokázána. □

3.9. Poznámky.

(i) $f \in \mathbb{S}[a,b] \iff f$ je konečná lineární kombinace charakteristických funkcí intervalů $[a,\tau]$, $[a,\tau)$, $\tau \in (a,b]$, a charakteristických funkcí jednobodových intervalů $[\tau]$, $\tau \in [a,b]$, tj.

$$\mathbb{S}[a,b] = \mathrm{Lin}\Big(\chi_{[a,\tau]}, \chi_{[a,\tau)}, \chi_{[\tau]}, \tau \in (a,b], \chi_{[a]}\Big).$$

($\mathrm{Lin}(M)$ značí lineární obal množiny M.)

(ii) Množina $\mathbb{S}[a,b]$ je podle tvrzení (ii) Věty 3.6 hustá v $\mathbb{G}[a,b]$, tj. $\overline{\mathbb{S}[a,b]} = \mathbb{G}[a,b]$, kde $\overline{\mathbb{S}[a,b]}$ značí uzávěr $\mathbb{S}[a,b]$ v $\mathbb{G}[a,b]$.

3.10. Lemma. *Nechť* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{G}$ *a* $f_n \rightrightarrows f$ *na* $[a,b]$. *Potom platí též*

$$f_n(x-) \rightrightarrows f(x-) \quad a \quad f_n(x+) \rightrightarrows f(x+) \quad na\ [a,b],$$

kde $f(a-)=f(a)$, $f(b+)=f(b)$ *a* $f_k(a-)=f_k(a)$ *a* $f_k(b+)=f_k(b)$ *pro* $k\in\mathbb{N}$.

D ů k a z . Pro $n\in\mathbb{N}$ položme

$$\widetilde{f}_n(x) = \begin{cases} f_n(x+) & \text{když } x\in[a,b), \\ f_n(b) & \text{když } x=b \end{cases}$$

a

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x+) & \text{když } x\in[a,b), \\ f(b) & \text{když } x=b. \end{cases}$$

Nechť je dáno $\varepsilon>0$. Existuje $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ takové, že je $|f_n(t)-f(t)|<\varepsilon$ pro každé $n\ge n_\varepsilon$ a každé $t\in[a,b]$. Odtud ovšem limitním přechodem $t\to x+$ dostaneme, že také pro každé $x\in[a,b)$ a každé $n\ge n_\varepsilon$ platí

$$|\widetilde{f}_n(x)-\widetilde{f}(x)| = \lim_{t\to x+} |f_n(t)-f(t)| \le \varepsilon,$$

tj.

$$\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{f}_n - \widetilde{f}\| = 0$$

neboli

$$f_n(x+) \rightrightarrows f(x+).$$

Podobně bychom ukázali, že platí i $f_n(x-)\rightrightarrows f(x-)$ na $[a,b]$. □

3.11. Důsledek. *Množiny*

$$\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b] = \{f\in\mathbb{G}\colon f(x-)=f(x)\ na\ (a,b)\},$$
$$\mathbb{G}_{\mathrm{R}}[a,b] = \{f\in\mathbb{G}\colon f(x+)=f(x)\ na\ (a,b)\}$$

a

$$\mathbb{G}_{reg}[a,b] = \{f\in\mathbb{G}\colon f(x-)+f(x+)=2\,f(x)\ na\ (a,b)\}$$

jsou uzavřené v $\mathbb{G}[a,b]$ *a tudíž jsou to také Banachovy prostory vzhledem k operacím a normě indukovaným z* $\mathbb{G}[a,b]$. □

3.12. Lemma. $\overline{\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]} = \mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$.

D ů k a z . Nechť $f\in\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$ a $\varepsilon>0$. Podle Věty 3.6 (ii) existuje $\varphi\in\mathbb{S}[a,b]$ takové, že

$$|f(x)-\varphi(x)| \le \|f-\varphi\| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } x\in[a,b].$$

Dále, pro každé $x\in(a,b)$ existuje $\delta(x)>0$ takové, že $x-\delta(x)>a$ a

$$|f(x)-f(t)|<\varepsilon \quad \text{pro všechna } t\in(x-\delta(x),x].$$

Pro každé $x \in (a,b)$ a $t \in (x-\delta(x), x]$ tedy máme

$$|\varphi(x)-\varphi(t)| \le |\varphi(x)-f(x)| + |f(x)-f(t)| + |f(t)-\varphi(t)| < 3\,\varepsilon,$$

tj.

$$|\varphi(x)-\varphi(x-)| < 3\,\varepsilon.$$

Položme

$$g(x) = \begin{cases} \varphi(x-) & \text{pro } \ x \in (a,b), \\ \varphi(x) & \text{pro } \ x = a \text{ nebo } x = b. \end{cases}$$

Potom pro každé $x \in (a,b)$ platí

$$|f(x)-g(x)| \le |f(x)-\varphi(x)| + |\varphi(x)-\varphi(x-)| < 4\,\varepsilon,$$

tj. množina $\mathbb{G}_{\mathrm{L}} \cap \mathbb{S}_{\mathrm{L}}[a,b]$ je hustá v $\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$. □

3.13. Poznámka. $\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b] = \mathrm{Lin}\Big(1, \chi_{(\tau,b]}, \tau \in [a,b), \chi_{[b]}\Big)$.

Další podrobnosti týkající se regulovaných funkcí lze nalézti zejména v monografii Ch. Hönig: *Volterra Stieltjes-Integral Equations*[2, sec.3].

Kapitola 4

Riemannův-Stieljesův integrál

Text této kapitoly se opírá zejména o Hildebrandtovu monografii [1, Chapter II].

4.1. Definice. Pro libovolné dvě funkce f, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ a rozšířené dělení $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$ intervalu $[a,b]$, $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$, definujeme

$$S_{f\Delta g}(D,\xi) := \sum_{j=1}^{m} f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})].$$

(Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme psát zjednodušeně $S(D,\xi)$ místo $S_{f\Delta g}(D,\xi)$.)

Nechť $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Řekneme, že existuje *normový Riemannův-Stieltjesův integrál* ((n) RS-integrál)

$$(\mathrm{n}) \int_a^b f \,\mathrm{d}[g] = (\mathrm{n}) \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}[g(x)]$$

a má hodnotu $I \in \mathbb{R}$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že platí

$$\Big((D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b] \quad \wedge \quad |D| < \delta\Big) \implies |S(D,\xi) - I| < \varepsilon.$$

Řekneme, že existuje σ *Riemannův-Stieltjesův integrál* ((σ) RS-integrál)

$$(\sigma) \int_a^b f \,\mathrm{d}[g] = (\sigma) \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}[g(x)]$$

a má hodnotu $I \in \mathbb{R}$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení $D_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b]$ takové, že platí

$$\Big((D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b] \quad \wedge \quad D_\varepsilon \subset D\Big) \implies |S(D,\xi) - I| < \varepsilon.$$

Existuje-li integrál $\int_a^b f \,\mathrm{d}[g]$ (v některém z výše uvedených smyslů), pak pro libovolné funkce f, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definujeme:

$$\int_b^a f \,\mathrm{d}[g] = -\int_a^b f \,\mathrm{d}[g].$$

Dále, pro každé $c \in [a,b]$ a pro všechny funkce f, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definujeme:

$$\int_c^c f \,\mathrm{d}[g] = 0.$$

4.2 . Cvičení. *Jestliže funkce* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *a* $g \in \mathbb{BV}[a,b]$ *jsou takové, že existuje* RS-*integrál* $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ *(v normovém či zjemňovacím smyslu), pak platí:*

$$\Big|\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]\Big| \le \|f\|\,\mathrm{var}_a^b\, g.$$

Pro každá dvě dělení D', $D'' \in \mathscr{D}[a,b]$ taková, že $D' \subset D''$ (D'' je zjemnění D') platí $|D''| \le |D'|$. Snadno lze tedy dokázat následující tvrzení:

4.3. Věta. *Je-li* (n) $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] = I \in \mathbb{R}$, *pak platí také* $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] = I$. □

4.4. Poznámka. Nechť $f \in \mathbb{G}[a,b]$, $x_0 \in (a,b)$, $c,d \in \mathbb{R}$, $c\,d > 0$ a

$$g(x) = -c\,\chi_{[a,x_0)}(x) + d\,\chi_{(x_0,b]}(x) = \begin{cases} -c & \text{pro } x < x_0, \\ 0 & \text{pro } x = x_0, \\ d & \text{pro } x > x_0. \end{cases}$$

Pro libovolné rozšířené dělení

$$(D,\xi) = \Big(\{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_m\},(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m)\Big) \in \mathscr{P}[a,b]$$

intervalu $[a,b]$ máme

$$S(D,\xi) = \begin{cases} f(\xi')\,(c+d) & \text{je-li } x_0 \in (\alpha_j,\alpha_{j+1}),\ \xi_j = \xi' \ne x_0, \\ f(x_0)\,(c+d) & \text{je-li } x_0 \in (\alpha_j,\alpha_{j+1}),\ \xi_j = x_0, \\ f(\xi')\,c + f(\xi'')\,d & \text{je-li } x_0 = \alpha_j,\ \xi_{j-1} = \xi' \ne x_0,\ \xi_j = \xi'' \ne x_0, \\ f(x_0)\,c + f(\xi'')\,d & \text{je-li } x_0 = \alpha_j,\ \xi_{j-1} = x_0,\ \xi_j = \xi'' \ne x_0, \\ f(\xi')\,c + f(x_0)\,d & \text{je-li } x_0 = \alpha_j,\ \xi_{j-1} = \xi' \ne x_0,\ \xi_j = x_0. \end{cases}$$

Odtud vidíme, že pokud je $-c = g(x_0-) \ne d = g(x_0+)$, pak k tomu, aby částečné součty $S(D,\xi)$ konvergovaly pro $|D| \to 0$ k nějaké konečné hodnotě I, je nutné, aby funkce f byla v bodě x_0 spojitá ($\lim_{\xi\to x_0} f(\xi) = f(x_0)$). Lze tedy očekávat, že pro existenci normového integrálu (n) $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ bude nutné, aby funkce f a g neměly žádný společný bod nespojitosti.

Nyní, nechť $D_0 \in \mathscr{D}[a,b]$ je libovolné dělení obsahující x_0. Pro každé jeho zjemnění D potom máme

$$S(D,\xi) \in \{f(\xi')\,c + f(\xi'')\,d,\ f(x_0)\,c + f(\xi'')\,d,\ f(\xi')\,c + f(x_0)\,d\},$$

kde $\xi' < x_0$ a $\xi'' > x_0$. Bude-li tedy funkce f regulovaná na $[a,b]$, bude množina $\mathcal{Q}$ hromadných bodů množiny $\{S(D,\xi) \colon (D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b] \wedge D_0 \subset D\}$ nejvýše tříbodová:

$$\mathcal{Q} = \{f(x_0-)\,c + f(x_0+)\,d,\ f(x_0)\,c + f(x_0+)\,d,\ f(x_0-)\,c + f(x_0)\,d\}$$

To naznačuje, že pro existenci integrálu $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ bude nutné (a mohlo by stačit (?)), aby pro funkce f a g a libovolné $x\in[a,b]$ platilo:

$$(\Delta^+ f(x)\,\Delta^+ g(x)=0) \quad\wedge\quad (\Delta^- f(x)\,\Delta^- g(x)=0).$$

Standardním způsobem lze dokázat následující tvrzení.

4.5. Věta (Bolzano - Cauchyova podmínka). *Pro dané funkce $f,g\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ existuje normový integrál $(n)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ právě tehdy, když je splněna podmínka:*

$$\begin{cases} \forall\,\varepsilon>0\,\exists\,\delta>0\colon \Big((D',\xi'),(D'',\xi'')\in\mathscr{P}[a,b]\wedge|D'|<\delta\wedge|D''|<\delta\Big)\\ \implies |S(D',\xi')-S(D'',\xi'')|<\varepsilon. \end{cases} \tag{4.1}$$

Podobně, $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]\in\mathbb{R}$ právě tehdy, když platí

$$\begin{cases} \forall\,\varepsilon>0\,\exists\,D_\varepsilon\in\mathscr{D}[a,b]\colon \Big((D',\xi'),(D'',\xi'')\in\mathscr{P}[a,b]\wedge D'\supset D_\varepsilon\wedge D''\supset D_\varepsilon\Big)\\ \implies |S(D',\xi')-S(D'',\xi'')|<\varepsilon. \end{cases} \tag{4.2}$$

D ů k a z . Nutnost splnění uvedených podmínek pro existenci příslušných integrálů je zřejmá z Definice 4.1.

Předpokládejme, že je splněna podmínka (4.2). Potom můžeme vybrat posloupnost rozšířených dělení $\{(D_k,\xi_k)\}_{k=1}^\infty$ intervalu $[a,b]$ takovým způsobem, že bude platit

$$|S(D,\xi)-S(D_k,\xi_k)|<\frac{1}{k} \quad \text{pro každé } D\supset D_k \quad\text{a}\quad (D,\xi)\in\mathscr{P}[a,b] \tag{4.3}$$

a přitom současně

$$D_k\subset D_\ell \quad\text{a}\quad |S(D_k,\xi_k)-S(D_\ell,\xi_\ell)|<\frac{1}{k} \quad\text{pro každé } k\in\mathbb{N} \quad\text{a}\quad \ell\ge k. \tag{4.4}$$

Posloupnost $\{S(D_k,\xi_k)\}_{k=1}^\infty$ je cauchyovská posloupnost reálných čísel a existuje tedy reálné číslo $I\in\mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{k\to\infty} S(D_k,\xi_k)=I.$$

Nyní, nechť je dáno $\varepsilon>0$. Zvolíme-li k_ε tak, aby bylo současně

$$\frac{1}{k_\varepsilon}<\frac{\varepsilon}{2} \quad\text{a}\quad |S(D_{k_\varepsilon},\xi_{k_\varepsilon})-I|<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{4.5}$$

bude, vzhledem k (4.3) a (4.5), pro každé $D\supset D_{k_\varepsilon}$ a každé $(D,\xi)\in\mathscr{P}[a,b]$ platit

$$|S(D,\xi)-I|\le|S(D,\xi)-S(D_{k_\varepsilon},\xi_{k_\varepsilon})|+|S(D_{k_\varepsilon},\xi_{k_\varepsilon})-I|<\varepsilon,$$

neboli

$$I = (\sigma) \int_a^b f \, \mathrm{d}[g].$$

Implikace:(4.2) $\Longrightarrow$ (n)$\int_a^b f \, \mathrm{d}[g] \in \mathbb{R}$ by se dokazovala podobně a ponechává se čtenáři jako cvičení. □

Pokud nebude v následujících tvrzeních explicitně zmíněno, zda se jedná o normový integrál či o (σ)-integrál, bude to znamenat, že tvrzení platí pro oba typy integrálu.

4.6. Věta. *Jestliže existuje integrál* $\int_a^b f \, \mathrm{d}[g]$ *a* $c \in (a,b)$, *pak existují také integrály*

$$\int_a^c f \, \mathrm{d}[g] \quad a \quad \int_c^b f \, \mathrm{d}[g]$$

a platí

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}[g] = \int_a^c f \, \mathrm{d}[g] + \int_c^b f \, \mathrm{d}[g].$$

D ů k a z . Existenci integrálů

$$\int_a^c f \, \mathrm{d}[g] \quad \text{a} \quad \int_c^b f \, \mathrm{d}[g]$$

dokážeme snadno pomocí předchozí věty.

Dále, nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme rozšířená dělení $(D', \xi') \in \mathscr{P}[a,c]$ a $(D'', \xi'') \in \mathscr{P}[c,b]$ tak, aby platilo

$$\Bigl|S(D',\xi') - \int_a^c f \, \mathrm{d}[g]\Bigr| + \Bigl|S(D'',\xi'') - \int_c^b f \, \mathrm{d}[g]\Bigr| + \Bigl|S(D,\xi) - \int_a^b f \, \mathrm{d}[g]\Bigr| < \varepsilon, \tag{4.6}$$

kde

$$(D,\xi) = (D' \cup D', (\xi', \xi'')) \in \mathscr{P}[a,b].$$

Potom bude $S(D,\xi) = S(D',\xi') + S(D'',\xi'')$ a tudíž

$$\begin{aligned}
&\Bigl|\int_a^b f \, \mathrm{d}[g] - \int_a^c f \, \mathrm{d}[g] - \int_c^b f \, \mathrm{d}[g]\Bigr| \\
&\quad \le \Bigl|\int_a^b f \, \mathrm{d}[g] - S(D,\xi)\Bigr| + \bigl|S(D,\xi) - S(D',\xi') - S(D'',\xi'')\bigr| \\
&\qquad + \Bigl|S(D',\xi') - \int_a^c f \, \mathrm{d}[g]\Bigr| + \Bigl|S(D,\xi) - \int_a^b f \, \mathrm{d}[g]\Bigr| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

4.7 . Cvičení. *Pro oba integrály (normový i zjemňovací) podrobně dokažte, že z existence integrálu* $\int_a^b f \, \mathrm{d}[g]$ *opravdu plyne existence rozšířených dělení* $(D', \xi') \in \mathscr{P}[a,c]$ *a* $(D'', \xi'') \in \mathscr{P}[c,b]$ *takových, že platí* (4.6).

Další tvrzení plyne přímo z Definice 4.1.

4.8 . Cvičení. Nechť $f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 \colon [a,b] \to \mathbb{R}$, a nechť existují integrály:

$$\int_a^b f_1 \,\mathrm{d}[g], \quad \int_a^b f_2 \,\mathrm{d}[g], \quad \int_a^b f \,\mathrm{d}[g]_1 \quad \text{a} \quad \int_a^b f_2 \,\mathrm{d}[g]_2.$$

Potom pro libovolná $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ platí

$$\int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2) \,\mathrm{d}[g] = c_1 \int_a^b f_1 \,\mathrm{d}[g] + c_2 \int_a^b f_2 \,\mathrm{d}[g],$$

a

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}[c_1 g_1 + c_2 g_2] = c_1 \int_a^b f \,\mathrm{d}[g]_1 + c_2 \int_a^b f \,\mathrm{d}[g]_2.$$

4.9 . Věta. *Nechť $g \in \mathbb{BV}[a,b]$ a ohraničené funkce f a $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou takové, že*

$$\int_a^b f_n \,\mathrm{d}[g] \in \mathbb{R} \quad \textit{pro všechna } n \in \mathbb{N} \tag{4.7}$$

a

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0. \tag{4.8}$$

Potom existuje také integrál $\int_a^b f \,\mathrm{d}[g]$ a platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \,\mathrm{d}[g] = \int_a^b f \,\mathrm{d}[g]. \tag{4.9}$$

D ů k a z provedeme pro σ integrál:

Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Vzhledem k předpokladu (4.8) můžeme zvolit $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tak, aby platilo

$$n \ge n_\varepsilon \implies \Big(\|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{\operatorname{var}_a^b g}\Big) \wedge \Big(\|f_n\| < \|f\| + 1\Big). \tag{4.10}$$

Dále, za našich předpokladů (viz Cvičení 4.2) je pro $n \ge n_\varepsilon$

$$\Big|\int_a^b f_n \,\mathrm{d}[g]\Big| \le \|f_n\| \operatorname{var}_a^b g \le (\|f\| + 1) \operatorname{var}_a^b g.$$

Můžeme tedy vybrat podposloupnost $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ v $\mathbb{N}$ a $I \in \mathbb{R}$ tak, že bude platit

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_{n_k} \,\mathrm{d}[g] = I.$$

Speciálně, existuje $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takové, že

$$n_{k_\varepsilon} \geq n_\varepsilon \quad \text{a} \quad \Big(k \geq k_\varepsilon \implies \Big|\int_a^b f_{n_k}\,\mathrm{d}[g] - I\Big| < \varepsilon\Big). \tag{4.11}$$

Dále, nechť $D_\varepsilon = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \in \mathscr{D}$ je takové dělení intervalu $[a,b]$, že

$$\Big((D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]\Big) \wedge \Big(D_\varepsilon \subset D\Big) \implies \Big|S_{k_\varepsilon}(D,\xi) - \int_a^b f_{n_{k_\varepsilon}}\,\mathrm{d}[g]\Big| < \varepsilon, \tag{4.12}$$

kde

$$S_{k_\varepsilon}(D,\xi) = \sum_{j=1}^{m} f_{n_{k_\varepsilon}}(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})].$$

Protože je $n_{k_\varepsilon} \geq n_\varepsilon$ (viz (4.11)), znamená (4.10), že pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$ splňující $D_\varepsilon \subset D$ je

$$\big|S(D,\xi) - S_{k_\varepsilon}(D,\xi)\big| \leq \|f - f_{n_{k_\varepsilon}}\| \operatorname{var}_a^b g < \varepsilon.$$

Vzhledem k (4.11)-(4.12) tedy dostáváme

$$|S(D,\xi) - I| \leq |S(D,\xi) - S_{k_\varepsilon}(D,\xi)| + \Big|S_{k_\varepsilon}(D,\xi) - \int_a^b f_{n_{k_\varepsilon}}\,\mathrm{d}[g]\Big| + \Big|\int_a^b f_{n_{k_\varepsilon}}\,\mathrm{d}[g] - I\Big| < 3\,\varepsilon.$$

Odtud okamžitě plyne, že platí

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] = I.$$

Konečně, protože podle Cvičení 4.2 máme

$$\Big|\int_a^b f_n\,\mathrm{d}[g] - \int_a^b f\,\mathrm{d}[g]\Big| \leq \|f_n - f\| \operatorname{var}_a^b g,$$

tvrzení (4.9) plyne nyní snadno z předpokladu (4.8). □

4.10. Poznámka. Všimněme si, že podle definice existuje $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení $D_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b]$ takové, že:

$$\Big((D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b] \ \wedge\ D \supset D_\varepsilon\Big) \implies \Big|\sum_{j=1}^{\nu(D)} \Big(f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big)\Big| < \varepsilon.$$

4.11. Lemma (SAKS-HENSTOCK). *Nechť $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ a nechť existuje $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$. Buď dáno $\varepsilon > 0$ a nechť $D_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b]$ je takové, že*

$$\Big|S(D,\xi) - (\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]\Big| < \varepsilon$$

platí pro každé rozšířené dělení $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$ *takové, že* $D \supset D_\varepsilon$. *Potom pro každé takové dělení*

$$(D,\xi) = \big(\{\alpha_0,\alpha_2,\dots,\alpha_m\},(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m)\big)$$

platí také

$$\sum_{j=1}^{m}\Big|f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1}]-(\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big| < 6\,\varepsilon. \tag{4.13}$$

D ů k a z . a) Pro každou dvojici (D',ξ'), $(D'',\xi') \in \mathscr{P}[a,b]$ takovou, že je $D' \supset D_\varepsilon$ a $D'' \supset D_\varepsilon$ máme

$$|S(D',\xi') - S(D'',\xi'')| < 2\,\varepsilon. \tag{4.14}$$

Nechť $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$, $D = \{\alpha_0,\alpha_2,\dots,\alpha_m\}$, $\xi = (\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m)$ a $D \supset D_\varepsilon$. Pro každé $j \in \{1,2,\dots,m\}$ můžeme zvolit $D_\varepsilon^{(j)} \in \mathscr{D}[\alpha_{j-1},\alpha_j]$ a $\xi^{(j)} \in \mathbb{R}^m$ tak, aby platilo

$$(D_\varepsilon^{(j)},\xi^{(j)}) \in \mathscr{P}[\alpha_{j-1},\alpha_j]$$

a

$$\Big|S(D_\varepsilon^{(j)},\xi^{(j)}) - (\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big| < \frac{\varepsilon}{m}. \tag{4.15}$$

Nechť

$$U = \{j_1,j_2,\dots,j_k\} \subset \{1,2,\dots,m\}, \quad 1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_k \le m,$$

je daná podmnožina indexů. Potom pro každý vektor $\xi = (\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m) \in \mathbb{R}^m$ takový, že $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$, máme

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{j\in U}\Big(f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-(\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big)\Big| \\
&\quad\le \Big|\sum_{j\in U}\Big(f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-S(D_\varepsilon^{(j)},\xi^{(j)})\Big)\Big| \\
&\qquad+\Big|\sum_{j\in U}\Big(S(D_\varepsilon^{(j)},\xi^{(j)})-(\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big)\Big| \\
&\quad= \Big|S(D,\xi)-\sum_{j\notin U} f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-\sum_{j\in U} S(D_\varepsilon^{(j)},\xi^{(j)})\Big| \\
&\qquad+\Big|\sum_{j\in U}\Big(S(D_\varepsilon^{(j)},\xi^{(j)})-(\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big)\Big| \\
&\quad= \big|S(D,\xi)-S(D',\xi')\big| + \Big|\sum_{j\in U}\Big(S(D_\varepsilon^{(j)},\xi^{(j)})-(\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big)\Big|,
\end{aligned}$$

kde $(D',\xi') \in \mathscr{P}[a,b]$, $D' = D \cup \bigcup_{j\in U} D_\varepsilon^{(j)}$. Odtud, vzhledem k (4.14) a (4.15), plyne

$$\Big|\sum_{j\in U}\Big(f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-(\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big)\Big| \le 2\,\varepsilon + k\,\frac{\varepsilon}{m} < 3\,\varepsilon. \tag{4.16}$$

b) Označme

$$U^+ = \{j \in \{1,2,\dots,m\}\colon f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-(\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g] \ge 0\}.$$

Po dosazení $U = U^+$ do (4.16) získáme nerovnost

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j\in U^+}\Big|f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-(\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big| \\ \displaystyle\quad = \sum_{j\in U^+}\Big(f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-(\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big) < 3\,\varepsilon. \end{cases} \tag{4.17}$$

Podobně, pro $U = U^-$,

$$U^- = \{j \in \{1,2,\dots,m\}\colon f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-(\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g] < 0\},$$

dostaneme

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j\in U^-}\Big|f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-(\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big| \\ \displaystyle\quad = -\sum_{j\in U^-}\Big(f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-(\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big) < 3\,\varepsilon. \end{cases} \tag{4.18}$$

Odtud a z (4.17) plyne

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^m \Big|f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-(\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big| \\ &\quad = \sum_{j\in U^+} f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-(\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g] \\ &\qquad\quad - \sum_{j\in U^-} f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-(\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g] \\ &\quad \le \Big|\sum_{j\in U^+} f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-(\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big| \\ &\qquad\quad + \Big|\sum_{j\in U^-} f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-(\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big| < 6\,\varepsilon, \end{aligned}$$

tj. platí (4.13). □

4.12. Cvičení.

(i) Dokažte, že za předpokladů Lemmatu 4.11 pro libovolný systém

$$a \le \alpha_1 \le \xi_1 \le \beta_1 \le \alpha_2 \le \xi_2 \le \beta_2 \le \cdots \le \alpha_k \le \xi_k \le \beta_k \le b$$

(může být $\beta_i < \alpha_{i+1}$ pro nějaké $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$)

platí

$$\Big| \sum_{j=1}^{k} f(\xi_j)\,[g(\beta_j) - g(\alpha_j)] - (\sigma)\int_{\alpha_j}^{\beta_j} f\,\mathrm{d}[g] \Big| < 3\,\varepsilon.$$

(ii) Formulujte a dokažte Lemma 4.11 pro normový integrál.

Důležitým důsledkem Saks-Henstockova lemmatu je následující tvrzení:

4.13. Věta (Substituce). *Nechť $f, g, h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, přičemž f je ohraničená na intervalu $[a,b]$ a $\int_a^b g\,\mathrm{d}[h] \in \mathbb{R}$. Potom existuje jeden z integrálů*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\Big[\int_a^x g\,\mathrm{d}[h]\Big] \quad a \quad \int_a^b f\,g\,\mathrm{d}[h] \tag{4.19}$$

právě tehdy když existuje i ten druhý. V takovém případě pak platí

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\Big[\int_a^x g\,\mathrm{d}[h]\Big] = \int_a^b f\,g\,\mathrm{d}[h]. \tag{4.20}$$

D ů k a z provedeme opět pouze pro σ integrál:

Nejprve si povšimněme, že z existence integrálu $\int_a^b g\,\mathrm{d}[h] \in \mathbb{R}$ plyne, že pro libovolné $x \in [a,b]$ je definovaná funkce

$$w(x) = \int_a^x g\,\mathrm{d}[h]$$

(viz Věta 4.6). Dále, pro každé rozšířené dělení

$$(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b], \quad D = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m\}, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$$

máme:

$$\Big| \sum_{j=1}^{m} f(\xi_j)\,g(\xi_j)\,[h(\alpha_j) - h(\alpha_{j-1})] - \sum_{j=1}^{m} f(\xi_j)\,[w(\alpha_j) - w(\alpha_{j-1})] \Big|$$

$$\le \sum_{j=1}^{m} |f(\xi_j)|\,\Big| g(\xi_j)\,[h(\alpha_j) - h(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} g\,\mathrm{d}[h] \Big|$$

$$\le \|f\| \Big(\sum_{j=1}^{m} \Big| g(\xi_j)\,[h(\alpha_j) - h(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} g\,\mathrm{d}[h] \Big| \Big)$$

Buď dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Zvolme $D_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b]$ tak aby platilo

$$\Big| S(D,\xi) - (\sigma)\int_a^b f \,\mathrm{d}[g] \Big| < \varepsilon$$

pro každé rozšířené dělení $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$ takové, že $D \supset D_\varepsilon$. Potom podle Saks-Henstockova lemmatu (Lemma 4.11) bude platit

$$\sum_{j=1}^{m} \Big| g(\xi_j)\,[h(\alpha_j) - h(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} g \,\mathrm{d}[h] \Big| < 6\,\varepsilon$$

pro každé $D \in \mathscr{D}[a,b]$ takové, že $D \supset D_\varepsilon$, To ovšem znamená, že pro integrální součty příslušné k integrálům (4.19) bude platit:

$$\Big| \sum_{j=1}^{m} f(\xi_j)\,g(\xi_j)\,[h(\alpha_j) - h(\alpha_{j-1})] - \sum_{j=1}^{m} f(\xi_j)\,[w(\alpha_{j-1}) - w(\alpha_j)] \Big| < \|f\|\,6\,\varepsilon.$$

Odtud už důkaz našeho tvrzení snadno plyne. □

4.14 . Věta (INTEGRACE PER-PARTES). *$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ existuje právě tehdy, když existuje integrál $\int_a^b g\,\mathrm{d}[f]$. V takovém případě pak platí*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] + \int_a^b g\,\mathrm{d}[f] = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a). \tag{4.21}$$

D ů k a z . Pro libovolné rozšířené dělení

$$(D,\xi) = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}, (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)\} \in \mathscr{P}[a,b]$$

platí

$$\begin{aligned}
&S_{f\Delta g}(D,\xi)\\
&\quad = f(\xi_1)\,[g(\alpha_1) - g(a)] + f(\xi_2)\,[g(\alpha_2) - g(\alpha_1)] + \dots + f(\xi_m)\,[g(b) - g(\alpha_{m-1})]\\
&\quad = -f(a)\,g(a) - [f(\xi_1) - f(a)]\,g(a) - [f(\xi_2) - f(\alpha_1)]\,g(\alpha_1)\\
&\qquad -[f(\alpha_1) - f(\xi_1)]\,g(\alpha_1) - \dots - [f(\xi_m) - f(\alpha_{m-1})]\,g(\alpha_{m-1})\\
&\qquad -[f(\alpha_{m-1}) - f(\xi_{m-1})]\,g(\alpha_{m-1}) - [f(b) - f(\xi_m)]\,g(b) + f(b)\,g(b)\\
&\quad = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - S_{g\Delta f}(D',\xi'),
\end{aligned}$$

kde

$$\xi' = (a, \alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}, \alpha_{m-1}, b) \quad \text{a} \quad D' = \{a, \xi_1, \alpha_1, \xi_2, \alpha_2, \dots \alpha_{m-1}, \xi_m, b\}$$

je zjemněním D. (Stane-li se, že $\xi_j = \alpha_{j-1}$ resp. $\xi_j = \alpha_j$ pro nějaké j, musíme ovšem tyto body ξ_j z D' i z ξ' vynechat.) Nechť je dáno $\varepsilon > 0$ a nechť existuje integrál $\int_a^b g\,\mathrm{d}[f]$. Zvolme dělení D_ε intervalu $[a,b]$ tak, aby pro každé jeho zjemnění D' a každé $(D',\xi') \in \mathscr{P}[a,b]$ platilo

$$\Big|S_{g\Delta f}(D',\xi') - \int_a^b g\,\mathrm{d}[f]\Big| < \varepsilon.$$

Vzhledem k výše uvedenému máme tedy pro každé $D \supset D_\varepsilon$ a každé příslušné rozšířené dělení (D,ξ)

$$S_{f\Delta g}(D,\xi) - f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) + \int_a^b g\,\mathrm{d}[f] = \int_a^b g\,\mathrm{d}[f] - S_{g\Delta f}(D',\xi'),$$

kde $D' \supset D \supset D_\varepsilon$ a tudíž

$$\Big|S_{f\Delta g}(D,\xi) - f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) + \int_a^b g\,\mathrm{d}[f]\Big| = \Big|\int_a^b g\,\mathrm{d}[f] - S_{g\Delta f}(D',\xi')\Big| < \varepsilon.$$

Odtud už snadno plyne existence integrálu $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ a platnost vztahu (4.21).

Druhá implikace by se dokazovala symetricky. □

4.15. Lemma. *Je-li*

$$a_n \geq 0 \quad \textit{pro všechna } n \in \mathbb{N} \quad \textit{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty,$$

pak existuje posloupnost $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *taková, že platí*

$$c_n > 0 \quad \textit{pro všechna } n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n\to\infty} c_n = 0 \quad \textit{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,a_n = \infty. \tag{4.22}$$

D ů k a z . Označíme-li $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ pro $n \in \mathbb{N}$, bude $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ neklesající posloupnost a

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty. \tag{4.23}$$

Speciálně, pro dostatečně velká n ($n \geq n_0$) bude $s_n > 0$. Můžeme tudíž definovat

$$c_n = \begin{cases} 1 & \text{pro } \ n < n_0, \\ \dfrac{1}{s_n} & \text{pro } \ n \geq n_0. \end{cases}$$

Zřejmě je $c_n > 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. Na druhou stranu, pro libovolná $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n \geq n_0$ máme

$$\sum_{k=n}^{m} c_k\,a_k = \sum_{k=n}^{m} \frac{a_k}{s_k} \geq \frac{\sum_{k=n}^m a_k}{s_m} = 1 - \frac{s_{n-1}}{s_m}.$$

Vzhledem k (4.23), pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $m_n > n$ takové, že je $\dfrac{s_{n-1}}{s_{m_n}} < \dfrac{1}{2}$, tj.

$$\sum_{k=n}^{m_n} c_k\, a_k > \frac{1}{2}.$$

To ovšem znamená, že musí platit (4.22). □

4.16 . Lemma. *Funkce $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ má konečnou variaci na $[a,b]$ právě tehdy, když platí*

$$\begin{cases} \forall\, x \in (a,b]\ \exists\, \delta_1 \in (0, x-a) \colon \operatorname{var}_{x-\delta_1}^{x} g < \infty \\ a \\ \forall\, x \in [a,b)\ \exists\, \delta_2 \in (0, b-x) \colon \operatorname{var}_{x}^{x+\delta_2} g < \infty. \end{cases} \tag{4.24}$$

D ů k a z plyne z Borelovy věty o konečném pokrytí a z Věty 1.3. □

4.17 . Věta. *Integrál $\int_a^b f\, \mathrm{d}[g]$ existuje pro každou funkci f spojitou na $[a,b]$ pouze tehdy, když g má konečnou variaci na $[a,b]$.*

D ů k a z . Předpokládejme, že je $\operatorname{var}_a^b g = \infty$. Podle Lemmatu 4.16 existuje $x_0 \in [a,b]$ pro které není splněna jedna z podmínek (4.24). Nechť tedy např. $x_0 \in (a,b]$ a nechť pro každé $\delta \in (0, x_0 - a)$ platí

$$\operatorname{var}_{x_0-\delta}^{x_0} f = \infty.$$

Potom také existuje rostoucí posloupnost $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$ bodů v $(0, x_0)$ taková, že

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k = x_0 \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |g(\alpha_k) - g(\alpha_{k-1})| = \infty.$$

Dále, podle Lemmatu 4.15 existuje posloupnost $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ kladných čísel taková, že platí

$$\lim_{k\to\infty} c_k = \infty \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, |g(\alpha_k) - g(\alpha_{k-1})| = \infty.$$

Položme

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \ x \le \alpha_0 \text{ resp. } x \ge x_0 \text{ resp. } x \in \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}, \\ c_k \operatorname{sign}(g(\alpha_k) - g(\alpha_{k-1})) & \text{pro } \ x = \xi_k := \dfrac{\alpha_k + \alpha_{k-1}}{2} \end{cases}$$

a ve zbývajících bodech intervalu $[a,b]$ dodefinujme funkci f lineárně. Takto definovaná funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bude zřejmě spojitá na $[a,b]$ a přitom pro ní bude platit

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(\xi_k)\, [g(\alpha_k) - g(\alpha_{k-1})] = \infty.$$

Speciálně, pro každé $M > 0$ existuje $N_M \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{k=1}^{N_M} f(\xi_k)\,[g(\alpha_k) - g(\alpha_{k-1})] > M.$$

Pro dané $M>0$, označme $D_M = \{a, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{N_M}, x_0, b\}$ a $\xi_M = (a, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{N_M}, x_0, b)$. Potom je $(D_M, \xi_M) \in \mathscr{P}$ a $S(D_M, \xi_M) > M$. To ale znamená, že integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ nemůže existovat, a to ani zjemňovací ani normový. $\square$

4.18 . Věta. *Integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ existuje pro každou konečnou skokovou funkci f pouze tehdy, když f je spojitá na $[a,b]$.*

D ů k a z . Nechť $x_0 \in (a,b)$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c\,d > 0$ a nechť funkce $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ je definována podobně jako v Poznámce 4.4:

$$g(x) = -c\,\chi_{[a,x_0)}(x) + d\,\chi_{(x_0,b]}(x) \quad \text{pro} \quad x \in [a,b].$$

Podle Poznámky 4.4 může integrál $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ existovat pouze tehdy, bude-li platit

$$c\,\Delta^- f(x_0) = 0 \quad \text{a} \quad d\,\Delta^+ f(x_0) = 0,$$

tj. $\Delta^- f(x_0) = \Delta^+ f(x_0) = 0$, tj. má-li existovat integrál $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$, musí být f spojitá v každém bodě $x_0 \in (a,b)$. Podobně bychom dokázali také, že v takovém případě musí být f spojitá v bodě a zprava a v bodě b zleva.

Modifikace důkazu pro normový integrál je zřejmá. $\square$

4.19 . Věta. *Jestliže $c \in [a,b]$ a jestliže existují integrály*

$$I_1 = (\sigma)\int_a^c f\,\mathrm{d}[g] \quad a \quad I_2 = (\sigma)\int_c^b f\,\mathrm{d}[g],$$

pak existuje také integrál $I = (\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ a platí $I = I_1 + I_2$.

D ů k a z . Buď dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme dělení $D'_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,c]$ a $D''_\varepsilon \in \mathscr{D}[c,b]$ tak, aby platilo

$$\bigl|S(D',\xi') - I_1\bigr| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } (D',\xi') \in \mathscr{P}[a,c] \quad \text{taková, že } D' \supset D'_\varepsilon$$

a

$$\bigl|S(D'',\xi'') - I_2\bigr| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } (D'',\xi'') \in \mathscr{P}[c,b] \quad \text{taková, že } D'' \supset D''_\varepsilon.$$

Nyní, nechť $D_\varepsilon = D'_\varepsilon \cup D''_\varepsilon$. Protože je $c \in D_\varepsilon$, každé rozšířené dělení $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$ splňující $D \supset D_\varepsilon$ můžeme rozdělit:

$$D = D' \cup D'' \quad \text{a} \quad \xi = (\xi', \xi'')$$

tak, že bude platit $(D',\xi') \in \mathscr{P}[a,c]$, $(D'',\xi'') \in \mathscr{P}[c,b]$, $D' \supset D'_\varepsilon$ a $D'' \supset D''_\varepsilon$. Navíc, je

$$S(D,\xi) = S(D',\xi') + S(D'',\xi'').$$

Vzhledem k definici D'_ε a D''_ε tedy pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$ splňující $D \supset D_\varepsilon$ máme

$$\big|S(D,\xi) - (I_1 + I_2)\big| \le \big|S(D',\xi') - I_1\big| + \big|S(D'',\xi'') - I_2\big| < 2\,\varepsilon,$$

tj. dokázali jsme tvrzení věty. □

Kapitola věnovaná RS-integrálům bude zakončena uvedením několika dalších důležitých tvrzení. Pro důkazy zatím odkazuju čtenáře na kapitolu II již zmíněné Hildebrandtovy monografie [1].

4.20. Definice. Řekneme, že funkce $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ splňují v bodě $x \in (a,b)$ podmínku (PA) (*podmínku pseudoaditivity*), jestliže

$$\begin{cases} \text{Pro každé } \varepsilon > 0 \text{ existuje } \delta_0 > 0 \text{ takové, že pro všechna} \\ \quad \delta' \in (0,\delta_0),\ \ \delta'' \in (0,\delta_0),\ \ \xi \in [x-\delta', x+\delta''],\ \ \xi' \in [x-\delta', x] \text{ a } \ \xi'' \in [x, x+\delta''] \\ \text{platí:} \\ \quad \big|f(\xi)\,[g(x+\delta'') - g(x-\delta')] \\ \qquad -f(\xi')\,[g(x) - g(x-\delta')] - f(\xi'')\,[g(x+\delta'') - g(x)]\big| < \varepsilon. \end{cases}$$

Následující tvrzení plyne z [1, Theorem II.3.10]), kde je ovšem třeba intervalovou funkci $f(I)$ nahradit mnohoznačnou intervalovou funkcí

$$F\colon [c,d] \to f(\xi)\,[g(d) - g(c)], \quad \xi \in [c,d].$$

4.21. Věta. *Normový integrál* $(n)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ *existuje právě tehdy, když existuje* $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ *a je splněna podmínka* (PA).

4.22. Poznámka. Ve Větě 4.21 stačí místo splnění podmínky (PA) v každém bodě $x \in (a,b)$ požadovat splnění poněkud slabšího předpokladu:

$$\begin{cases} \text{Pro každé } \varepsilon > 0 \text{ existuje dělení } D_\varepsilon \text{ intervalu } [a,b] \text{ takové, že:} \\ \quad |S(D,\xi) - I| < \varepsilon \quad \text{pro každé } \ (D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b] \text{ takové, že } \ D \supset D_\varepsilon \\ \quad \text{a} \\ \quad \text{(PA) platí pro každé } \ \alpha \in D_\varepsilon \cap (a,b). \end{cases}$$

4.23. Věta. *Nechť* $x \in (a,b)$. *Funkce* $f,\ g\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ *splňují podmínku (PA) v bodě* $x \in (a,b)$ *právě tehdy, když alespoň jedna z nich je v bodě* x *spojitá.*

4.24. Poznámka. Je-li f ohraničená v okolí bodu $x \in (a,b)$ a g spojitá v bodě x, pak funkce f, g splňují podmínku (PA) v bodě x.

4.25. Důsledek. ([1, Corollary II,10,6]) (n) $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ *existuje pouze tehdy, když funkce* f *a* g *nemají společný bod nespojitosti v* (a,b).

4.26 . Důsledek. *Nechť $c \in (a,b)$ a nechť funkce $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ splňují (PA) v bodě c. Potom, jestliže existují integrály:*

$$(\mathrm{n})\int_a^c f\,\mathrm{d}[g] = I_1 \quad a \quad (\mathrm{n})\int_c^b f\,\mathrm{d}[g] = I_2,$$

pak existuje také integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ a platí

$$(\mathrm{n})\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] = I_1 + I_2.$$

4.27 . Věta. *Nechť $f \in \mathbb{C}[a,b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a,b]$. Potom existují oba integrály*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] \quad i \quad \int_a^b g\,\mathrm{d}[f].$$

4.28 . Definice. Nechť f, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ a $I \subset [a,b]$. Potom definujeme

$$\omega(f;I) = \sup_{x',x''\in I} |f(x') - f(x'')|$$

a

$$\omega(Sf\Delta g;I) = \sup_{(D',\xi'),(D'',\xi'')\in\mathscr{P}(I)} |S(D',\xi') - S(D'',\xi'')|.$$

($\omega(f;I)$ nazýváme *modul spojitosti* funkce f na I.)

4.29 . Věta. $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ *existuje právě tehdy, když*

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,D_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b]\ \forall\,D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \supset D_\varepsilon\colon \sum_{j=1}^m \omega(Sf\Delta g;[\alpha_{j-1},\alpha_j]) < \varepsilon.$$

4.30. Věta. *Jestliže existuje $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení $D_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b]$ takové, že platí:*

$$(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b] \quad \wedge \quad D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \supset D_\varepsilon$$
$$\Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^m \omega(f;[\alpha_{j-1},\alpha_j])\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] < \varepsilon.$$

4.31 . Věta. *Jestliže existuje $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$, pak platí obě následující tvrzení:*

(*i*) *Pro každé $x \in [a,b)$ je alespoň jedna z funkcí f, g spojitá v x zprava,*

(*ii*) *Pro každé $x \in (a,b]$ je alespoň jedna z funkcí f, g spojitá v x zleva.*

Kapitola 5

Kurzweilův-Stieltjesův integrál

5.1 . Definice. Funkce $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}^+ = (0,\infty)$ se nazývají *kalibry* na intervalu $[a,b]$, množinu kalibrů na intervalu $[a,b]$ značíme $\mathscr{G} = \mathscr{G}[a,b]$.

Pro daný kalibr $\delta \in \mathscr{G}$, řekneme, že rozšířené dělení $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$ je δ-*jemné* (píšeme $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta) = \mathscr{A}(\delta;[a,b])$), jestliže platí

$$[\alpha_{j-1},\alpha_j] \subset (\xi_j - \delta(\xi_j), \xi_j + \delta(\xi_j)) \quad \text{pro všechna } j = 1,2,\dots,\nu(D).$$

Pro dané funkce $f,g \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ a rozšířené dělení $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$ definujeme (jako v kapitole 4)

$$S(D,\xi)(= S_{f\Delta g}(D,\xi)) := \sum_{j=1}^{\nu(D)} f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})].$$

5.2 . Definice (Kurzweil)**.** Nechť $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ a $I \in \mathbb{R}$. Řekneme, že existuje *Kurzweilův-Stieltjesův integrál* (KS-integrál)

$$(\mathrm{KS})\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] = (\mathrm{KS})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}[g(x)]$$

a má hodnotu $I \in \mathbb{R}$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje kalibr $\delta_\varepsilon \in \mathscr{G}$ takový, že

$$\Big| I - S(D,\xi) \Big| < \varepsilon \tag{5.1}$$

platí pro všechna δ_ε–jemná rozšířená dělení (D,ξ) (tj. pro všechna $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$).

Jestliže existuje integrál $(\mathrm{KS})\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$, definujeme $(\mathrm{KS})\int_b^a f\,\mathrm{d}[g] = -(\mathrm{KS})\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$. Dále, $(\mathrm{KS})\int_a^a f\,\mathrm{d}[g] = 0$.

Tato definice má smysl díky následujícímu lemmatu.

5.3 . Lemma (Cousin)**.** *Pro každý kalibr $\delta \in \mathscr{G}$ je množina $\mathscr{A}(\delta)$ všech δ–jemných rozšířených dělení intervalu $[a,b]$ neprázdná.*

D ů k a z . Nechť je dáno $\delta \in \mathscr{G}$. Označme M množinu všech $c \in (a,b]$ pro něž je $\mathscr{A}(\delta;[a,c]) \neq \emptyset$. Protože je $\delta(a) > 0$, položíme-li $c = \min\{a+\delta(a), b\}$, $D = \{a,c\}$ a $\xi = a$, bude $c \in (a,b]$ a $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta;[a,c])$, tj. $c \in M$ a $M \neq \emptyset$. Položme $d = \sup M$. Protože je $\delta(d) > 0$, existuje $c \in (d-\delta(d), d] \cap M$. Je-li $c < d$, pak existuje $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta;[a,c])$. Definujme $\widetilde{D} = D \cup \{d\}$ a $\widetilde{\xi} = (\xi,d) \in \mathbb{R}^{\nu(D)+1}$. Potom $(\widetilde{D},\widetilde{\xi}) \in \mathscr{P}[a,d]$ a protože je $[c,d] \in (d-\delta(d), d+\delta(d))$, znamená to, že $(\widetilde{D},\widetilde{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta;[a,d])$, tj. $d \in M$. Konečně, kdyby bylo $d < b$, pak bychom mohli zvolit $c \in (d, d + \delta(d)) \cap (d, b)$ a ukázat, že $c \in M$, což by znamenalo spor s definicí $d = \sup M$. To znamená, že platí $d = \sup M = b$ a důkaz je proveden. $\square$

Nebude-li uvedeno jinak, bude mít v následujícím textu symbol integrálu vždy smysl KS-integrálu.

Důkazy tvrzení uvedených v této kapitole byly jednak převzaty z monografické publikace [5], jednak jsou modifikacemi důkazů analogických tvrzení pro speciální případ $g(x) \equiv x$ ze Schwabikovy monografie [6].

5.4. Poznámka. Jsou-li δ a $\delta_0 \in \mathscr{G}$ kalibry na intervalu $[a, b]$, pro které je $\delta(x) \leq \delta_0(x)$ na $[a, b]$, pak každé rozšířené dělení intervalu $[a, b]$, které je δ–jemné je také δ_0–jemné, tj. platí $\mathscr{A}(\delta) \subset \mathscr{A}(\delta_0)$. Platí-li tedy nějaká vlastnost pro všechna $(D, \xi) \in \mathscr{A}(\delta_0)$ tím spíše platí i pro všechna $(D, \xi) \in \mathscr{A}(\delta)$. Speciálně, je-li δ_0 libovolný kalibr na intervalu $[a, b]$, stačí v Definici 5.2 požadovat existenci kalibru δ_ε, pro který kromě vlastností v definici požadovaných platí navíc i $\delta_\varepsilon(x) \leq \delta_0(x)$ na $[a, b]$.

Pro existenci KS-integrálu platí podmínka Bolzanova-Cauchyova typu:

5.5. Věta (BOLZANOVA-CAUCHYOVA PODMÍNKA). *Nechť $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Potom integrál $\int_a^b f \,\mathrm{d}[g]$ existuje právě tehdy, když je splněna následující podmínka:*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in \mathscr{G}\colon \Big((D, \xi), (D', \xi') \in \mathscr{A}(\delta)\Big) \implies \Big|S(D, \xi) - S(D', \xi')\Big| < \varepsilon. \tag{5.2}$$

D ů k a z . a) Existuje-li integrál $\int_a^b f \,\mathrm{d}[g] = I \in \mathbb{R}$, pak podle Definice 5.2 pro každé $\varepsilon > 0$ existuje kalibr $\delta_\varepsilon \in \mathscr{G}$ takový, že je $|S(D, \xi) - I| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro všechna $(D, \xi) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$. Pro všechny dvojice (D, ξ), $(D', \xi') \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ tedy máme

$$|S(D, \xi) - S(D', \xi')| \leq |S(D, \xi) - I| + |S(D', \xi') - I| < \varepsilon,$$

tj. je splněna (B-C) podmínka (5.2).

b) Předpokládejme nyní, že je splněna (B-C) podmínka (5.2). Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Podle (5.2) můžeme zvolit kalibr δ_ε tak, aby

$$|S(D, \xi) - S(D', \xi')| < \frac{\varepsilon}{2}$$

platilo pro všechna (D, ξ), $(D', \xi') \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$. Označme nyní

$$M = \{m \in \mathbb{R}\colon \exists\, \delta_m \in \mathscr{G} \text{ such that } (D, \xi) \in \mathscr{A}(\delta_m) \implies S(D, \xi) \geq m\}$$

Zvolíme-li libovolně $(D_0, \xi_0) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$, bude pro každé $(D, \xi) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ platit

$$S(D_0, \xi_0) - \frac{\varepsilon}{2} < S(D, \xi) < S(D_0, \xi_0) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.3}$$

Odtud plyne, že $(-\infty, S(D_0,\xi_0)-\frac{\varepsilon}{2})\subset M$, a tudíž množina M není prázdná. Dále, pro každé $m\in M$ a každé $(D,\xi)\in\mathscr{A}(\widetilde{\delta}_m)$, kde

$$\widetilde{\delta}_m(x)=\min\{\delta_m(x),\delta_\varepsilon(x)\}\quad \text{na } [a,b],$$

máme také $(D,\xi)\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ a tudíž

$$m\le S(D,\xi)<S(D_0,\xi_0)+\frac{\varepsilon}{2},\quad \text{tj.}\quad M\subset(-\infty,S(D_0,\xi_0)+\frac{\varepsilon}{2}).$$

To ale znamená, že množina M je shora ohraničená, tj. $\sup M<\infty$, a platí

$$S(D_0,\xi_0)-\frac{\varepsilon}{2}\le\sup M\le S(D_0,\xi_0)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Toto spolu s nerovností (5.3) implikuje, že platí

$$|S(D,\xi)-\sup M|<\varepsilon\quad \text{pro všechna } (D,\xi)\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$$

neboli

$$\sup M=\int_a^b f\,\mathrm{d}[g].$$

□

KS-integrál má obvyklé lineární vlastnosti:

5.6. Věta. *Nechť $f,\ f_1,\ f_2,\ g,\ g_1,\ g_2\colon[a,b]\to\mathbb{R}$, a nechť existují integrály:*

$$\int_a^b f_1\,\mathrm{d}[g],\quad \int_a^b f_2\,\mathrm{d}[g],\quad \int_a^b f\,\mathrm{d}[g]_1\quad a\quad \int_a^b f\,\mathrm{d}[g]_2.$$

Potom pro libovolná $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ platí

$$\int_a^b (c_1\,f_1+c_2\,f_2)\,\mathrm{d}[g]=c_1\int_a^b f_1\,\mathrm{d}[g]+c_2\int_a^b f_2\,\mathrm{d}[g],$$

a

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[c_1\,g_1+c_2\,g_2]=c_1\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]_1+c_2\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]_2.$$

D ů k a z . Ukažme si např. důkaz prvního tvrzení: Buď dáno $\varepsilon>0$. Podle předpokladu existují kalibry $\delta_1\in\mathscr{G}$ a $\delta_2\in\mathscr{G}$ takové, že platí

$$(D,\xi)\in\mathscr{A}(\delta_i)\implies |S_{f_i\Delta g}(D,\xi)]-\int_a^b f_i\,\mathrm{d}[g]|<\varepsilon\quad \text{pro}\quad i=1,2.$$

Pro $x\in[a,b]$ položme $\delta_\varepsilon(x)=\min\{\delta_1(x),\delta_2(x)\}$. Označme $h=c_1\,f_1+c_2\,f_2$. Protože pro každé $(D,\xi)\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ platí

$$\begin{aligned}S_{h\Delta g}(D,\xi)]&=\sum_{j=1}^{\nu(D)}(c_1\,f_1(\xi_j)+c_2\,f_2(\xi_j))\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]\\&=c_1\,S_{f_1\Delta g}(D,\xi)]+c_2\,S_{f_2\Delta g}(D,\xi)],\end{aligned}$$

dostáváme

$$\begin{aligned}&\Big|S_{h\Delta g}(D,\xi)] - c_1\int_a^b f_1\,\mathrm{d}[g] + c_2\int_a^b f_2\,\mathrm{d}[g]\Big|\\ &\quad\le |c_1|\,\Big|S_{f_1\Delta g}(D,\xi)] - \int_a^b f_1\,\mathrm{d}[g]\Big| + |c_2|\,\Big|S_{f_2\Delta g}(D,\xi)] - \int_a^b f_2\,\mathrm{d}[g]\Big|\\ &\quad< (|c_1| + |c_2|)\,\varepsilon.\end{aligned}$$

Odtud už ovšem naše tvrzení bezprostředně plyne.

Druhé tvrzení věty by se dokazovalo obdobně a důkaz lze ponechat čtenáři jako cvičení. □

5.7 . Věta. *Jestliže existuje integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ a jestliže $[c,d]\subset[a,b]$, pak existuje také integrál $\int_c^d f\,\mathrm{d}[g]$.*

D ů k a z . Předpokládejme, že je $a < c < d < b$. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Podle (B-C) podmínky (viz Věta 5.5) můžeme zvolit kalibr $\delta_\varepsilon \in \mathscr{G}$ tak, aby platilo

$$|S(\widetilde{D},\widetilde{\xi}) - S(\widetilde{D}',\widetilde{\xi}')| < \varepsilon \tag{5.4}$$

pro všechna δ_ε–jemná rozšířená dělení $(\widetilde{D},\widetilde{\xi})$ a $(\widetilde{D}',\widetilde{\xi}')$ intervalu $[a,b]$. Mějme nyní libovolnou dvojici (D,ξ), $(D',\xi')\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon;[c,d])$. Dále, zvolme libovolně $(D^-,\xi^-)\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon;[a,c])$, $(D^+,\xi^+)\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon;[d,b])$ a doplňme jimi (D,ξ) a (D',ξ') na rozšířená dělení intervalu $[a,b]$, tj. položme

$$\widetilde{D} = D^-\cup D\cup D^+,\quad \widetilde{\xi} = (\xi^-,\xi,\xi^+),$$

a

$$\widetilde{D}' = D^-\cup D'\cup D^+,\quad \widetilde{\xi}' = (\xi^-,\xi',\xi^+).$$

Zřejmě je $(\widetilde{D},\widetilde{\xi})\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon;[a,b])$ a $(\widetilde{D}',\widetilde{\xi}')\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon;[a,b])$ a vzhledem k (5.4) platí

$$|S(D,\xi) - S(D',\xi')| = |S(\widetilde{D},\widetilde{\xi}) - S(\widetilde{D}',\widetilde{\xi}')| < \varepsilon.$$

Odtud, vzhledem ke Větě 5.5, již existence integrálu $\int_c^d f\,\mathrm{d}[g]$ bezprostředně plyne. Modifikace důkazu pro případ, že $c = a$ resp. $d = b$ je zřejmá. □

5.8. Věta. *Nechť $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ a $c\in[a,b]$. Integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ existuje právě tehdy když existují oba integrály $\int_a^c f\,\mathrm{d}[g]$ a $\int_c^b f\,\mathrm{d}[g]$. Potom navíc platí také rovnost*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] = \int_a^c f\,\mathrm{d}[g] + \int_c^b f\,\mathrm{d}[g].$$

Důkaz. a) Existuje-li integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$, pak podle Věty 5.7 existují také oba integrály $\int_a^c f\,\mathrm{d}[g]$ a $\int_c^b f\,\mathrm{d}[g]$.

b) Nechť

$$\int_a^c f\,\mathrm{d}[g] = I_1 \quad \text{a} \quad \int_c^b f\,\mathrm{d}[g] = I_2.$$

Budiž dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme kalibry $\delta'_\varepsilon \in \mathscr{G}[a,c]$ a $\delta''_\varepsilon \in \mathscr{G}[c,b]$ tak, aby pro všechna $(D',\xi') \in \mathscr{A}(\delta'_\varepsilon;[a,c])$ a $(D'',\xi'') \in \mathscr{A}(\delta''_\varepsilon;[c,b])$ platilo

$$|S(D',\xi') - I_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad |S(D'',\xi'') - I_2| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.5}$$

Definujme nyní kalibr δ_ε na $[a,b]$ předpisem

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \min\left\{\delta'_\varepsilon(x), \frac{1}{4}(c-x)\right\} & \text{když } x \in [a,c), \\ \min\{\delta'_\varepsilon(c), \delta''_\varepsilon(c)\} & \text{když } x = c, \\ \min\left\{\delta''_\varepsilon(x), \frac{1}{4}(x-c)\right\} & \text{když } x \in (c,b]. \end{cases}$$

Potom,

$$\xi + \delta(\xi) \le \xi + \frac{1}{4}(c-\xi) < c \quad \text{je-li } \xi < c,$$

a

$$\xi - \delta(\xi) \ge \xi - \frac{1}{4}(c-\xi) > c \quad \text{je-li } \xi > c.$$

Pro žádné $\xi \neq c$ tedy nemůže platit $|c-\xi| < \delta(\xi)$. T.zn., že pro každé δ_ε–jemné rozšířené dělení (D,ξ) intervalu $[a,b]$ musí existovat index $k \in \{1,2,\dots,\nu(D)\}$ takový, že $\xi_k = c$. Navíc, bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že platí

$$\alpha_{k-1} < \alpha_k = \xi_k = \xi_{k+1} = c < \alpha_{k+1}.$$

(Kdyby bylo $\alpha_{k-1} < c = \xi_k < \alpha_k$, upravili bychom příslušný člen v součtu $S(D,\xi)$ následujícím způsobem:

$$f(c)\,[g(\alpha_k) - g(\alpha_{k-1})] = f(c)\,[g(\alpha_k) - g(c)] + f(c)\,[g(c) - g(\alpha_{k-1})].)$$

To znamená, že každé rozšířené dělení $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon;[a,b])$ intervalu $[a,b]$ můžeme rozdělit: $D = D' \cup D''$, $\xi = (\xi',\xi'')$ tak, že bude

$$(D',\xi') \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon;[a,c]) \subset \mathscr{A}(\delta'_\varepsilon;[a,c]) \quad \text{a} \quad (D'',\xi'') \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon;[c,b]) \subset \mathscr{A}(\delta''_\varepsilon;[c,b]).$$

Tudíž, vzhledem k (5.5),

$$\begin{aligned} |S(D,\xi) - (I_1+I_2)| &= |S(D',\xi') + S(D'',\xi'') - (I_1+I_2)| \\ &\le |S(D',\xi') - I_1| + |S(D'',\xi'') - I_2| < \varepsilon, \end{aligned}$$

tj. $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] = I_1 + I_2$. □

5.9. Příklady.

(i) Z Definice 5.2 je zřejmé, že je-li $f(t) \equiv f(a)$ na $[a,b]$, pak

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] = f(a)\,[g(b) - g(a)] \quad \text{a} \quad \int_a^b g\,\mathrm{d}[f] = 0$$

pro každou funkci $g : [a,b] \to \mathbb{R}$.

(ii) Pro libovolnou funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ platí

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[\chi_{(\tau,b]}] = f(\tau) \qquad \text{pro} \quad \tau \in [a,b),$$

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[\chi_{[\tau,b]}] = f(\tau) \qquad \text{pro} \quad \tau \in (a,b),$$

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[\chi_{[a,\tau]}] = -f(\tau) \qquad \text{pro} \quad \tau \in (a,b),$$

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[\chi_{[a,\tau)}] = -f(\tau) \qquad \text{pro} \quad \tau \in (a,b],$$

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[\chi_{[\tau]}] = \begin{cases} -f(a) & \text{když} \quad \tau = a, \\ 0 & \text{když} \quad \tau \in (a,b), \\ f(b) & \text{když} \quad \tau = b. \end{cases}$$

Ukažme si odvození prvého a druhého z uvedených vztahů. Zbývající se z nich už snadno odvodí použitím Věty 5.8. Nechť $g(x) = \chi_{(\tau,b]}(x)$ na $[a,b]$. Potom je

$$\int_a^\tau f\,\mathrm{d}[g] = 0.$$

Dále, položme

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{když} \quad x = \tau \\ \frac{1}{4}(x-\tau) & \text{když} \quad x \in (\tau,b]. \end{cases}$$

Pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta;[\tau,b])$ pak musí platit $\tau = \alpha_0 = \xi_1$ a tudíž

$$S(D,\xi) = f(\tau)\,[g(\alpha_1) - g(\tau)] = f(\tau).$$

S přihlédnutím k Poznámce 5.4 vídíme tedy, že platí

$$\int_\tau^b f\,\mathrm{d}[g] = f(\tau).$$

Důkaz našeho vztahu teď už snadno dokončíme použitím Věty 5.8.

Druhý vztah se dokazuje podobně. Tentokrát ovšem máme $g(x)=\chi_{[\tau,b]}(x)$ na $[a,b]$, $\int_\tau^b f\,\mathrm{d}[g]=0$ a položíme

$$\delta(x)=\begin{cases} 1 & \text{když } x=\tau \\ \frac{1}{4}(\tau-x) & \text{když } x\in[a,\tau). \end{cases}$$

Pro každé $(D,\xi)\in\mathscr{A}(\delta;[a,\tau])$ pak máme $\tau=\alpha_m=\xi_m$ a tudíž

$$S(D,\xi)=f(\tau)\,[g(\tau)-g(\alpha_{m-1})]=f(\tau) \quad \text{a} \quad \int_a^\tau f\,\mathrm{d}[g]=f(\tau).$$

(iii) Pro libovolnou funkci $g\in\mathbb{G}[a,b]$ platí

$$\int_a^b \chi_{(\tau,b]}\,\mathrm{d}[g]=g(b)-g(\tau+) \quad \text{pro } \tau\in[a,b),$$

$$\int_a^b \chi_{[\tau,b]}\,\mathrm{d}[g]=g(b)-g(\tau-) \quad \text{pro } \tau\in(a,b),$$

$$\int_a^b \chi_{[a,\tau]}\,\mathrm{d}[g]=g(\tau+)-g(a) \quad \text{pro } \tau\in(a,b),$$

$$\int_a^b \chi_{[a,\tau)}\,\mathrm{d}[g]=g(\tau-)-g(a) \quad \text{pro } \tau\in(a,b]$$

a

$$\int_a^b \chi_{[\tau]}\,\mathrm{d}[g]=\begin{cases} g(a+)-g(a) & \text{když } \tau=a, \\ g(\tau+)-g(\tau-) & \text{když } \tau\in(a,b), \\ g(b)-g(b-) & \text{když } \tau=b. \end{cases}$$

Ukažeme si zase jen odvození prvého a druhého z uvedených vztahů. Nechť tedy $f(x)=\chi_{(\tau,b]}(x)$ na $[a,b]$. Potom je

$$\int_a^\tau f\,\mathrm{d}[g]=0.$$

Buďiž dáno kladné ε. Zvolme nyní $\eta>0$ tak, aby platilo $g(\tau+)-g(t)<\varepsilon$ pro každé $t\in(\tau,\tau+\eta)$ a definujme

$$\delta(x)=\begin{cases} \eta & \text{když } x=\tau \\ \frac{1}{4}(x-\tau) & \text{když } x\in(\tau,b]. \end{cases}$$

Pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta;[\tau,b])$ musí platit $\tau = \alpha_0 = \xi_1$ a

$$\begin{aligned} &|S(D,\xi) - [g(b) - g(\tau+)]| \\ &\quad = |[g(b) - g(\alpha_{m-1})] + [g(\alpha_{m-1}) - g(\alpha_{m-2}] \\ &\qquad + \cdots + [g(\alpha_2) - g(\alpha_1)] - [g(b) - g(\tau+)]| \\ &\quad = |g(\tau+) - g(\alpha_1)|. \end{aligned}$$

Protože $\tau < \alpha_1 < \tau + \delta(\tau) = \tau + \eta$, plyne odtud, že

$$|S(D,\xi) - [g(b) - g(\tau+)]| < \varepsilon \quad \text{pro každé } \ (D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta;[\tau,b]).$$

Tudíž

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] = \int_a^\tau f\,\mathrm{d}[g] + \int_\tau^b f\,\mathrm{d}[g] = g(b) - g(\tau+).$$

V druhém případě, $f(x) = \chi_{[\tau,b]}(x)$ na $[a,b]$, máme

$$\int_\tau^b f\,\mathrm{d}[g] = g(b) - g(\tau).$$

Pro dané $\eta > 0$ definujeme opět

$$\delta(x) = \begin{cases} \eta & \text{když } \ x = \tau \\ \frac{1}{4}(\tau - x) & \text{když } \ x \in [a,\tau). \end{cases}$$

Tím si opět vynutíme, že pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta;[a,\tau])$ musí být $\tau = \alpha_m = \xi_m$ a tudíž

$$S(D,\xi) = [g(\tau) - g(\alpha_{m-1})],$$

kde $\alpha_{m-1} \in (\tau - \eta, \tau)$. Jako v předchozím případě, odtud plyne, že platí

$$\int_a^\tau f\,\mathrm{d}[g] = g(\tau) - g(\tau-),$$

tj.

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] = \int_a^\tau f\,\mathrm{d}[g] + \int_\tau^b f\,\mathrm{d}[g] = g(b) - g(\tau-).$$

5.10. Důsledek. *Jestliže $g \in \mathbb{G}[a,b]$ a $f \in \mathbb{S}[a,b]$, pak oba integrály*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] \quad i \quad \int_a^b g\,\mathrm{d}[f]$$

existují.

5.11 . Poznámka. Je-li $D \in \mathscr{D}[a,b]$ a $\delta(x) = |D|$ na $[a,b]$, pak je $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta)$ pro každé $\xi \in \mathbb{R}^{\nu(D)}$ takové, že $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$. Na druhou stranu, je-li $\delta \in \mathscr{G}[a,b]$ takový kalibr, že $\delta(x) \geq \frac{\Delta}{2} > 0$, pak pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$ platí $|D| < \Delta$. Speciálně, jestliže existuje normový RS-integrál $(\mathrm{n})\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$, pak také existuje KS-integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ a má tutéž hodnotu. Naopak, jestliže existuje KS-integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] = I$, přičemž pro každé $\varepsilon > 0$ lze najít kalibr $\delta \in \mathscr{G}[a,b]$ takový, že platí $\inf_{x\in[a,b]} \delta(x) > 0$ a

$$|S(D,\xi) - I| < \varepsilon \quad \text{pro každé } (D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta),$$

pak existuje také $(\mathrm{n})\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ a platí rovnost $(\mathrm{n})\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] = I$.

Následující věta popisuje vztah (σ)RS-integrálu a KS-integrálu.

5.12 . Věta. *Jestliže existuje* (σ)RS-*integrál* $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$, *pak existuje také* KS-*integrál* $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ *a platí*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] = (\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g].$$

D ů k a z . Označme $(\sigma)I = \int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$. Buď dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Z předpokladu o existenci (σ)RS-integrálu plyne, že existuje dělení $D_\varepsilon = \{s_0, s_1, \dots, s_m\} \in \mathscr{D}[a,b]$ takové, že pro každé rozšířené dělení $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$, kde D je zjemněním D_ε platí (5.1). Položme nyní

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\min\{|x - s_j|; j = 0,1,\dots,m\} & \text{když } \; x \notin D_\varepsilon\,, \\[2ex] \qquad \varepsilon & \text{když } \; x \in D_\varepsilon. \end{cases}$$

Potom $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ pouze tehdy, když

$$D_\varepsilon \subset \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{\nu(D)}\}. \tag{5.6}$$

Navíc máme ještě

$$S(D,\xi) = \sum_{j=1}^{\nu(D)} \Big[f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\xi_j)] + f(\xi_j)\,[g(\xi_j) - g(\alpha_{j-1})] \Big] = S(D',\xi'), \tag{5.7}$$

kde $D' = \{\alpha_0, \xi_1, \alpha_1, \xi_2, \dots, \xi_{\nu(D)}, \alpha_{\nu(D)}\}$ a $\xi' = (\xi_1, \xi_1, \xi_2, \xi_2, \dots, \xi_{\nu(D)}, \xi_{\nu(D)})$. Podle (5.6) je

$$D_\varepsilon \subset \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{\nu(D)}\} \subset D'$$

a vzhledem k (5.7) odtud plyne

$$|S(D,\xi) - I| = |S(D',\xi') - I| < \varepsilon, \quad \text{t.j.} \quad \int_a^b f\,\mathrm{d}[g] = I.$$

□

5.13. Příklad. V případě $g(x) \equiv x$ budeme místo o KS-integrálu mluvit o K-integrálu (Kurzweilův integrál). K-integrál je zřejmě zobecněním klasického Riemannova integrálu.

(i) Nechť $f(x) = 0$ na $[a,b] \setminus W$, kde W je spočetná podmnožina $[a,b]$, $W = \{w_k\}_{k=1}^{\infty}$. Buď dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Definujme

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{když } x \notin W, \\ \dfrac{\varepsilon}{2^{k+1}(1+|f(w_k)|)} & \text{když } x = w_k \in W. \end{cases}$$

Pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$ se v příslušném integrálním součtu $S(D,\xi)$,

$$S(D,\xi) = \sum_{j=1}^{m} f(\xi_j)\,[\alpha_j - \alpha_{j-1}],$$

uplatní pouze takové sčítance, pro které existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že platí $\xi_j = w_k \in W$. Pro každé δ_ε–jemné rozšířené dělení (D,ξ) intervalu $[a,b]$, (tj. $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$, kde $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \in \mathscr{D}[a,b]$ a $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$) a každý takový index j ovšem musí platit

$$\alpha_j - \alpha_{j-1} \le \frac{\varepsilon}{2^k(1+|f(w_k)|)}$$

a tudíž je

$$|S(D,\xi)| \le \sum_{k=1}^{\infty} |f(w_k)|\,|\frac{\varepsilon}{2^k(1+|f(w_k)|)} \le \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \varepsilon.$$

Podle Definice 5.2 je tedy $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

(ii) Nechť existuje Newtonův integrál $(\mathrm{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, kde funkce F je spojitá na $[a,b]$ a platí

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pro každé } x \in (a,b), \qquad F'(a+) = f(a), \qquad F'(b-) = f(b).$$

Ukážeme, že pak existuje také K-integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a rovná se také $F(b) - F(a)$.

Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Pro každé $\xi \in [a,b]$ zvolme $\delta_\varepsilon(\xi) > 0$ tak, aby platilo

$$|F(x) - F(\xi) - f(\xi)(x-\xi)| < \frac{\varepsilon}{b-a}\,|x-\xi|$$

$$\text{pro všechna } x \in [a,b] \cap (\xi - \delta_\varepsilon(\xi), \xi + \delta_\varepsilon(\xi)).$$

Pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ $(D = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m)$ a každé $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tedy platí

$$\begin{aligned} &|F(\alpha_j) - F(\alpha_{j-1}) - f(\xi_j)\,[\alpha_j - \alpha_{j-1}]| \\ &\quad\le |F(\alpha_j) - F(\xi_j) - f(\xi_j)\,[\alpha_j - \xi_j]| + |F(\xi_j) - F(\alpha_{j-1}) - f(\xi_j)\,[\xi_j - \alpha_{j-1}]| \\ &\quad\le \frac{\varepsilon}{b-a}\,(|\alpha_j - \xi_j| + |\xi_j - \alpha_{j-1}|) = \frac{\varepsilon}{b-a}\,[\alpha_j - \alpha_{j-1}] \end{aligned}$$

a tudíž

$$|S(D,\xi)-[F(b)-F(a)]| = \Big|\sum_{j=1}^{m}(F(\alpha_j)-F(\alpha_{j-1})-f(\xi_j)\,[\alpha_j-\alpha_{j-1}])\Big|$$

$$\le \sum_{j=1}^{m}|F(\alpha_j)-F(\alpha_{j-1})-f(\xi_j)\,[\alpha_j-\alpha_{j-1})| \le \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{j=1}^{m}[\alpha_j-\alpha_{j-1}] = \varepsilon,$$

tj.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a).$$

5.14. Věta. *Jestliže* $g\in\mathbb{BV}[a,b]$ *a* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *je taková, že integrály*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] \quad a \quad \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}[\operatorname{var}_a^x g]$$

existují, pak platí

$$\Big|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}[g(x)]\Big| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}[\operatorname{var}_a^x g] \le \|f\|\operatorname{var}_a^b g. \tag{5.8}$$

D ů k a z . Pro každé rozšířené dělení (D,ξ) intervalu $[a,b]$ platí

$$|S(D,\xi)| \le \sum_{j=1}^{\nu(D)}|f(\xi_j)|\,|g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})|$$

$$\le \sum_{j=1}^{\nu(D)}|f(\xi_j)|\operatorname{var}_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} g \le \|f\|\operatorname{var}_a^b g.$$

□

5.15. Věta. *Nechť* $g\in\mathbb{BV}[a,b]$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *je funkce ohraničená na* $[a,b]$ *a* $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ *je posloupnost funkcí definovaných na intervalu* $[a,b]$ *taková, že platí*

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\| = 0 \tag{5.9}$$

a existují všechny integrály $\int_a^b f_n\,\mathrm{d}[g]$, $n\in\mathbb{N}$. *Potom existuje také integrál* $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ *a platí*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,\mathrm{d}[g] = \int_a^b f\,\mathrm{d}[g]. \tag{5.10}$$

D ů k a z . a) Z předpokladu (5.9) plyne, že existuje $n_0\in\mathbb{N}$ takové, že platí

$$\|f_n\| \le \|f\|+1 \quad \text{pro všechna } n\ge n_0.$$

Podle Věty 5.14 tedy máme

$$\Big|\int_a^b f_n \,\mathrm{d}[g]\Big| \le (\|f\|+1)\operatorname{var}_a^b g \quad \text{pro všechna } n \ge n_0$$

a podle Bolzanovy-Weierstraßovy věty tedy existuje podposloupnost $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ v $\mathbb{N}$ a $I \in \mathbb{R}$ takové, že platí $n_1 \ge n_0$ a

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_{n_k} \,\mathrm{d}[g] = I. \tag{5.11}$$

Označme

$$\begin{cases} I_k := \displaystyle\int_a^b f_{n_k} \,\mathrm{d}[g] & \text{pro } k \in \mathbb{N}, \\ S_k(D,\xi) := S_{f_{n_k}\Delta g}(D,\xi) & \text{pro } \ k \in \mathbb{N},\ (D,\xi) \in \mathscr{D}[a,b], \\ S(D,\xi) := S_{f\Delta g}(D,\xi), & \text{pro } \ (D,\xi) \in \mathscr{D}[a,b]. \end{cases} \tag{5.12}$$

b) Buď dáno $\varepsilon > 0$. Vzhledem k (5.9) a (5.11) můžeme zvolit $k_0 \in \mathbb{N}$ tak, že platí

$$|I_k - I| < \varepsilon, \quad \|f_{n_k} - f\| < \varepsilon \quad \text{pro} \quad k \ge k_0 \quad \text{a} \quad |S(D,\xi) - S_{k_0}(D,\xi)| < \varepsilon \operatorname{var}_a^b g.$$

Dále, nechť $\delta_0 \in \mathscr{G}[a,b]$ je kalibr na $[a,b]$ takový, že pro všechna δ_0–jemná rozšířená dělení (D,ξ) intervalu $[a,b]$ platí

$$|S_{k_0}(D,\xi)] - I_{k_0}| < \varepsilon.$$

Pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta_0)$ tedy máme

$$|S(D,\xi) - I| \le |S(D,\xi) - S_{k_0}(D,\xi)]| + |S_{k_0}(D,\xi)] - I_{k_0}| + |I_{k_0} - I| < \varepsilon\,(\operatorname{var}_a^b g + 2).$$

Odtud

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}[g] = I = \lim_{k\to\infty} \int_a^b f_{n_k} \,\mathrm{d}[g].$$

c) Konečně, opětným použitím Věty 5.14,

$$\Big|\int_a^b f_n \,\mathrm{d}[g] - \int_a^b f \,\mathrm{d}[g]\Big| \le \|f_n - f\| \operatorname{var}_a^b g \quad \text{pro každé} \ \ n \in \mathbb{N}.$$

Platí tedy i (5.10). □

5.16. Věta. *Nechť* $f \in \mathbb{G}$ *a* $g \in \mathbb{BV}$. *Potom* $\int_a^b f \,\mathrm{d}[g]$ *existuje a platí* (5.8).

D ů k a z . Podle Věty 3.6 (ii) existuje posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konečných skokových funkcí, která konverguje stejnoměrně na $[a,b]$ k funkci f. Podle Věty 5.6 a Příkladů 5.9(iii) integrál $\int_a^b f_n \,\mathrm{d}[g]$ existuje pro každé $n \in \mathbb{N}$. To znamená, že podle Věty 5.15 existuje také integrál $\int_a^b f \,\mathrm{d}[g]$ a platí (5.10) a, navíc, podle Věty 5.14 platí také (5.8). □

5.17 . Věta. *Nechť* $g \in \mathbb{BV}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *je funkce ohraničená na* $[a,b]$ *a* $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost funkcí definovaných na intervalu* $[a,b]$ *taková, že platí*

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{var}_a^b (g_n - g) = 0$$

a existují všechny integrály $\int_a^b f \,\mathrm{d}[g]_n$, $n \in \mathbb{N}$. *Potom existuje také integrál* $\int_a^b f \,\mathrm{d}[g]$ *a platí*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f \,\mathrm{d}[g]_n = \int_a^b f \,\mathrm{d}[g]. \tag{5.13}$$

D ů k a z . Zaveďme opět značení (5.12). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat

$$g_n(a) = g(a) = 0 \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Dále je důkaz podobný důkazu Věty 5.15. Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že platí

$$\|g_n\|_{\mathbb{BV}} = \operatorname{var}_a^b g_n \le \operatorname{var}_a^b g + 1 \quad \text{pro všechna } n \ge n_0.$$

Podle Věty 5.14 tedy máme

$$\Big| \int_a^b f \,\mathrm{d}[g]_n \Big| \le \|f\| \,(\operatorname{var}_a^b g + 1) \quad \text{pro všechna } n \ge n_0$$

a podle Bolzanovy-Weierstraßovy věty tedy existuje podposloupnost $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ v $\mathbb{N}$ a $I \in \mathbb{R}$ takové, že platí $n_1 \ge n_0$ a

$$\lim_{k\to\infty} I_k = \lim_{k\to\infty} \int_a^b f \,\mathrm{d}[g]_{n_k} = I.$$

Použijeme opět označení zavedené v (5.12). Buď dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme $k_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby platilo

$$|I_k - I| < \varepsilon \quad \text{a} \quad \operatorname{var}_a^b (g_{n_k} - g) < \varepsilon \quad \text{pro} \;\; k \ge k_0.$$

Dále, nechť $\delta_0 \in \mathscr{G}[a,b]$ je kalibr na $[a,b]$ takový, že pro všechna δ_0-jemná rozšířená dělení (D,ξ) intervalu $[a,b]$ platí

$$|S_{k_0}(D,\xi)] - I_{k_0}| < \varepsilon.$$

Pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta_0)$ tedy máme

$$|S(D,\xi) - I| \le |S(D,\xi) - S_{k_0}(D,\xi)| + |S_{k_0}(D,\xi) - I_{k_0}| + |I_{k_0} - I| < \varepsilon\,(\|f\| + 2).$$

Odtud

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}[g] = I = \lim_{k\to\infty} \int_a^b f \,\mathrm{d}[g]_{n_k}.$$

Konečně, opětným použitím Věty 5.14,

$$\Big|\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]_n - \int_a^b f\,\mathrm{d}[g]\Big| \le \|f\|\,\mathrm{var}_a^b(g_n - g) \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Platí tedy (5.13). □

Podle Věty 5.16 integrál

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$$

existuje pro všechny $f \in \mathbb{G}$ a $g \in \mathbb{BV}$. Chtěli bychom ukázat, že tento integrál vždy existuje i v symetrické situaci: $f \in \mathbb{BV}$ a $g \in \mathbb{G}$. Rozložíme-li funkci f na součet spojité části f^{C} a skokové části f^{B} (viz Lemma 1.21 a Definice 6.9) a vzpomeneme-li si na Lemma 1.24, podle kterého existuje posloupnost konečných skokových funkcí $f_n^{\mathrm{B}} \in \mathbb{S}[a,b]$ taková, že platí

$$\lim_{n\to\infty} \|f^{\mathrm{B}} - f_n^{\mathrm{B}}\|_{\mathbb{BV}} = 0,$$

zjistíme, že ke svému cíli dospějeme, budeme-li umět dokázat existenci integrálu

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$$

pro každou funkci $f \in \mathbb{BV} \cap \mathbb{C}$ a každou $g \in \mathbb{G}$ a budeme-li mít k dispozici konvergenční větu, ze které by plynulo, že platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n^{\mathrm{B}}\,\mathrm{d}[g] = \int_a^b f^{\mathrm{B}}\,\mathrm{d}[g].$$

Tyto úkoly splníme v následujících třech krocích.

5.18. Lemma. *Integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ existuje pro každou funkci $f \in \mathbb{BV} \cap \mathbb{C}$ a každou funkci $g \in \mathbb{G}$.*

D ů k a z . Nechť $f \in \mathbb{BV} \cap \mathbb{C}$ a $g \in \mathbb{G}$. Podle Věty 5.12 a Věty 4.14 (o integraci-per-partes pro RS integrál) nám bude stačit, ukážeme-li, že pak existuje (σ) RS-integrál $(\sigma)\int_a^b g\,\mathrm{d}[f]$.

Nechť $\tau \in [a,b]$, $g = \chi_{[a,\tau]}$. Zřejmě je

$$\int_a^\tau g\,\mathrm{d}[f] = f(\tau) - f(a).$$

Pro každé rozšířené dělení $(D,\xi) \in \mathscr{P}[\tau,b]$, $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$, máme

$$S(D,\xi) = \begin{cases} 0 & \text{je-li } \xi_1 > \tau, \\ f(\alpha_1) - f(\tau) & \text{je-li } \xi_1 = \tau. \end{cases}$$

Díky spojitosti funkce f můžeme tedy k danému $\varepsilon > 0$ vždy najít dělení D_ε takové, že bude

$$|S(D,\xi)| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } (D,\xi) \in \mathscr{P}[\tau,b] \quad \text{taková, že } D \supset D_\varepsilon,$$

tj.

$$(\sigma)\int_\tau^b \chi_{[a,\tau]}\,\mathrm{d}[f] = 0$$

a

$$(\sigma)\int_a^b \chi_{[a,\tau]}\,\mathrm{d}[f] = f(\tau) - f(a).$$

Podobně bychom ukázali, že

$$(\sigma)\int_a^b \chi_{[a,\tau)}\,\mathrm{d}[f] = f(\tau) - f(a) \quad \text{pro} \quad \tau \in (a,b],$$

$$(\sigma)\int_a^b \chi_{[\tau,b]}\,\mathrm{d}[f] = f(b) - f(\tau) \quad \text{pro} \quad \tau \in [a,b],$$

$$(\sigma)\int_a^b \chi_{(\tau,b]}\,\mathrm{d}[f] = f(b) - f(\tau) \quad \text{pro} \quad \tau \in [a,b),$$

a

$$(\sigma)\int_a^b \chi_{[\tau]}\,\mathrm{d}[f] = 0 \qquad\qquad \text{pro} \quad \tau \in [a,b].$$

To znamená, že $(\sigma)\int_a^b g\,\mathrm{d}[f]$ existuje pro každou funkci $f \in \mathbb{BV}[a,b] \cap \mathbb{C}[a,b]$ a každou $g \in \mathbb{S}[a,b]$. Důkaz lemmatu tedy plyne z Věty 3.6(ii) a z věty o limitním přechodu při stejnoměrmé konvergenci pro (σ) RS-integrály. □

5.19. Věta. *Nechť funkce g ohraničená na $[a,b]$ a $f \in \mathbb{BV}$ jsou takové, že existuje integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$. Potom platí*

$$\Big|\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]\Big| \le (|f(a)| + |f(b)| + \operatorname{var}_a^b f)\,\|g\|. \tag{5.14}$$

D ů k a z . Pro libovolné $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$, $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$, máme

$$\begin{aligned} S(D,\xi) &= f(\xi_1)\,[g(\alpha_1) - g(a)] + f(\xi_2)\,[g(\alpha_2) - g(\alpha_1)] + \ldots + f(\xi_m)\,[g(b) - g(\alpha_{m-1})] \\ &= f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) \\ &\quad - [f(\xi_1) - f(a)]\,g(a) - [f(\xi_2) - f(\xi_1)]\,g(\alpha_1) - \ldots - [f(b) - f(\xi_m)]\,g(b) \\ &= f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - \sum_{j=0}^{m} [f(\xi_{j+1}) - f(\xi_j)]\,g(\alpha_j), \end{aligned}$$

kde $\xi_0 = a$ a $\xi_{m+1} = b$. Odtud plyne, že pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$ platí

$$|S(D,\xi)| \le \Big(|f(a)| + |f(b)| + \sum_{j=0}^{m} |f(\xi_{j+1}) - f(\xi_j)|\Big)\, \|g\|,$$

neboli

$$|S(D,\xi)| \le (|f(a)| + |f(b)| + \operatorname{var}_a^b f)\, \|g\|$$

odkud už tvrzení Věty okamžitě plyne. $\square$

5.20 . Věta. *Nechť funkce g je ohraničená na $[a,b]$, $f \in \mathbb{BV}$ a nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{BV}$ je posloupnost taková, že*

$$\int_a^b f_n\, \mathrm{d}[g] \quad \textit{existuje pro každé } n \in \mathbb{N} \quad \textit{a platí } \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\mathbb{BV}} = 0.$$

Potom existuje také integrál $\int_a^b f\, \mathrm{d}[g]$ a platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\, \mathrm{d}[g] = \int_a^b f\, \mathrm{d}[g].$$

D ů k a z . Podle Věty 5.19 platí

$$\Big|\int_a^b (f_n - f_m)\, \mathrm{d}[g]\Big| \le 2\, \|g\|\, \|f_n - f_m\|_{\mathbb{BV}} \quad \text{pro libovolná } m, n \in \mathbb{N}.$$

Posloupnost $\{\int_a^b f_n\, \mathrm{d}[g]\}_{n=1}^{\infty}$ je tedy cauchyovská a existuje tudíž $I \in \mathbb{R}$ takové, že platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\, \mathrm{d}[g] = I.$$

Ukážeme, že $\int_a^b f\, \mathrm{d}[g] = I$. Budiž dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby platilo

$$\Big|\int_a^b f_{n_0}\, \mathrm{d}[g] - I\Big| < \varepsilon \quad \text{a} \quad \|f_{n_0} - f\|_{\mathbb{BV}} < \varepsilon.$$

Dále, zvolme $\delta_\varepsilon \in \mathscr{G}$ tak, aby pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ platilo

$$\Big|S_{n_0}(D,\xi) - \int_a^b f_{n_0}\, \mathrm{d}[g]\Big| < \varepsilon,$$

kde značíme $S_{n_0}(D,\xi) = S_{f_{n_0}\Delta g}(D,\xi)$. Potom pro libovolné $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ máme

$$\begin{aligned}
&|S(D,\xi) - I| \\
&\quad \le |S(D,\xi) - S_{n_0}(D,\xi)| + \Big|S_{n_0}(D,\xi) - \int_a^b f_{n_0}\, \mathrm{d}[g]\Big| + \Big|\int_a^b f_{n_0}\, \mathrm{d}[g] - I\Big| \\
&\quad \le 2\,\varepsilon\, (\|g\| + 1)
\end{aligned}$$

odkud už snadno odvodíme, že platí

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] = I = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\,\mathrm{d}[g].$$

□

5.21. Věta. *Jestliže $f \in \mathbb{BV}$ a $g \in \mathbb{G}$, pak integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ existuje a platí (5.14).*

D ů k a z . Nechť $f = f^{\mathrm{C}} + f^{\mathrm{B}}$ je Jordanův rozklad funkce f. Potom $\int_a^b f^{\mathrm{C}}\,\mathrm{d}[g]$ existuje podle Lemmatu 5.18 a $\int_a^b f^{\mathrm{B}}\,\mathrm{d}[g]$ existuje podle Lemmatu 1.24 a Věty 5.20. Podle Věty 5.6 tedy existuje také $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$. Konečně, podle Věty 5.19 platí (5.14). □

5.22. Důsledek. *Jestliže $g_n \in \mathbb{G}$, $n \in \mathbb{N}$, a $g_n \rightrightarrows g$ na $[a,b]$ pro $n \to \infty$, pak $g \in \mathbb{G}$ a pro každou funkci $f \in \mathbb{BV}$ platí*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f\,\mathrm{d}[g]_n = \int_a^b f\,\mathrm{d}[g]. \tag{5.15}$$

□

5.23. Věta (Věta o integraci per-partes). *Jestliže $f \in \mathbb{G}$ a $g \in \mathbb{BV}$, pak existují oba integrály*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] \quad a \quad \int_a^b g\,\mathrm{d}[f]$$

a platí

$$\begin{aligned} \int_a^b f\,\mathrm{d}[g] + \int_a^b g\,\mathrm{d}[f] &= f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) \\ &\quad + \sum_{t\in[a,b]} \Big(\Delta^- f(t)\,\Delta^- g(t) - \Delta^+ f(t)\,\Delta^+ g(t)\Big). \end{aligned} \tag{5.16}$$

D ů k a z . Důkaz povedeme tak, že bude současně alternativním důkazem existenčního tvrzení z Věty 5.21.

Nechť je tedy $f \in \mathbb{G}[a,b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a,b]$ a nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Podle Věty 5.16 existuje integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ a můžeme tedy zvolit kalibr δ_1 tak, aby pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta_1)$ platilo

$$\Big|S(D,\xi) - \int_a^b f\,\mathrm{d}[g]\Big| < \varepsilon. \tag{5.17}$$

Dále, pro každé $x \in [a,b]$ můžeme zvolit $\delta_2(x) > 0$ tak, aby platilo

$$\begin{cases} s \in (x - \delta_2(x), x) \cap [a,b] \implies |f(s) - f(x-)| < \varepsilon \quad \text{a} \quad |g(s) - g(x-)| < \varepsilon, \\ s \in (x, x + \delta_2(x)) \cap [a,b] \implies |f(s) - f(x+)| < \varepsilon \quad \text{a} \quad |g(s) - g(x+)| < \varepsilon. \end{cases} \tag{5.18}$$

Podle tvrzení (ii) Důsledku 3.7 má množina

$$M_\varepsilon = \big\{x \in [a,b] \colon |\Delta^+ f(x)| \ge \varepsilon \ \vee |\Delta^- f(x)| \ge \varepsilon\big\}$$

nejvýše konečný počet prvků. Pro každý bod $x \in [a,b] \setminus M_\varepsilon$ je tedy kladná jeho vzdálenost

$$\operatorname{dist}(x, M_\varepsilon) = \min\{|x-y| \colon y \in M_\varepsilon\}$$

od množiny M_ε. Definujme

$$\delta_3(x) = \begin{cases} \operatorname{dist}(x, M_\varepsilon) & \text{když } \ x \in [a,b] \setminus M_\varepsilon, \\ \delta_2(x) & \text{když } \ x \in M_\varepsilon \end{cases} \tag{5.19}$$

a

$$\delta_\varepsilon(x) = \min\{\delta_1(x), \delta_2(x), \delta_3(x)\} \quad \text{pro } \ x \in [a,b]. \tag{5.20}$$

Nechť

$$(D,\xi) = (\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}, (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon).$$

Potom, vzhledem k (5.19) a (5.20), musí být $M_\varepsilon \subset \Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m\}$. Jednoduchými úpravami zjistíme, že platí

$$\begin{aligned}
&S_{f\Delta g}(D,\xi) + S_{g\Delta f}(D,\xi) \\
&\quad = \sum_{j=1}^m \big(f(\xi_j)\, g(\alpha_j) - f(\xi_j)\, g(\alpha_{j-1}) + f(\alpha_j)\, g(\xi_j) - f(\alpha_{j-1})\, g(\xi_j)\big) \\
&\quad = f(b)\, g(b) + \sum_{j=1}^m \big(f(\xi_j)\, g(\alpha_j) + f(\alpha_j)\, g(\xi_j) - f(\xi_j)\, g(\xi_j) - f(\alpha_j)\, g(\alpha_j)\big) \\
&\qquad - f(a)\, g(a) - \sum_{j=1}^m \big(f(\xi_j)\, g(\alpha_{j-1}) + f(\alpha_{j-1})\, g(\xi_j) - f(\xi_j)\, g(\xi_j) - f(\alpha_{j-1})\, g(\alpha_{j-1})\big) \\
&\quad = f(b)\, g(b) - f(a)\, g(a) - \sum_{j=1}^m \big(f(\alpha_j) - f(\xi_j)\big)\big(g(\alpha_j) - g(\xi_j)\big) \\
&\qquad + \sum_{j=1}^m \big(f(\xi_j) - f(\alpha_{j-1})\big)\big(g(\xi_j) - g(\alpha_{j-1})\big).
\end{aligned}$$

Dále,

$$\Big|\sum_{a<\xi\le b}\Delta^+ f(\xi)\,\Delta^+ g(\xi)-\sum_{a\le\xi<b}\Delta^- f(\xi)\,\Delta^- g(\xi)\Big|$$
$$\le\sum_{\xi\,\in\,M_\varepsilon\cap[a,b)}|\Delta^+ f(\xi)|\,|\Delta^+ g(\xi)|+\sum_{\xi\,\in\,[a,b)\setminus M_\varepsilon}|\Delta^+ f(\xi)|\,|\Delta^+ g(\xi)|$$
$$+\sum_{\xi\,\in\,M_\varepsilon\cap(a,b]}|\Delta^- f(\xi)|\,|\Delta^- g(\xi)|+\sum_{\xi\,\in\,(a,b]\setminus M_\varepsilon}|\Delta^- f(\xi)|\,|\Delta^- g(\xi)|$$
$$\le\Big(\sum_{\xi\,\in\,M_\varepsilon\cap[a,b)}|\Delta^+ f(\xi)|+\sum_{\xi\,\in\,M_\varepsilon\cap(a,b]}|\Delta^- f(\xi)|+2\,\varepsilon\Big)\operatorname{var}_a^b g<\infty.$$

Máme tedy

$$\Big|S_{g\Delta f}(D,\xi)-f(b)\,g(b)+f(a)\,g(a)+\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$$
$$+\sum_{a<\xi\le b}\Delta^+ f(\xi)\,\Delta^+ g(\xi)-\sum_{a\le\xi<b}\Delta^- f(\xi)\,\Delta^- g(\xi)\Big| \tag{5.21}$$
$$\le\Big|\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]-S_{f\Delta g}(D,\xi)\Big|$$
$$+\Big|\sum_{j=1}^m(f(\xi_j)-f(\alpha_{j-1}))\,(g(\xi_j)-g(\alpha_{j-1}))-\sum_{a<\xi\le b}\Delta^- f(\xi)\,\Delta^- g(\xi)\Big|$$
$$+\Big|\sum_{j=1}^m(f(\alpha_j)-f(\xi_j))\,(g(\alpha_j)-g(\xi_j))-\sum_{a\le\xi<b}\Delta^+ f(\xi)\,\Delta^+ g(\xi)\Big|.$$

Dále,

$$\Big|\sum_{j=1}^m(f(\alpha_j)-f(\xi_j))\,(g(\alpha_j)-g(\xi_j))-\sum_{a\le\xi<b}\Delta^+ f(\xi)\,\Delta^+ g(\xi)\Big|$$
$$=\Big|\sum_{j=1}^m(f(\alpha_j)-f(\xi_j+)+\Delta^+ f(\xi_j))\,(g(\alpha_j)-g(\xi_j+)+\Delta^+ g(\xi_j))$$
$$-\sum_{j=1}^m\Delta^+ f(\xi_j)\,\Delta^+ g(\xi_j)-\sum_{\xi\,\in\,[a,b)\setminus\Xi}\Delta^+ f(\xi)\,\Delta^+ g(\xi)\Big|$$

$$= \Big| \sum_{j=1}^{m} (f(\alpha_j) - f(\xi_j+))\,(g(\alpha_j) - g(\xi_j+)) + \sum_{j=1}^{m} (f(\alpha_j) - f(\xi_j+))\,\Delta^+ g(\xi_j)$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \Delta^+ f(\xi_j)\,(g(\alpha_j) - g(\xi_j+)) - \sum_{\xi\,\in\,[a,b)\setminus\Xi} \Delta^+ f(\xi)\,\Delta^+ g(\xi)\Big|$$

Předposlední součet přitom můžeme rozdělit do dvou součtů: jeden, ve kterém se sčítá přes ta j, pro která je $\xi_j \in M_\varepsilon$ a druhý, který obsahuje všechny ostatní sčítance. Odtud, vzhledem k (5.18) a vzhledem k definici množiny M_ε, plyne, že je

$$\Big| \sum_{j=1}^{m} (f(\alpha_j) - f(\xi_j))\,(g(\alpha_j) - g(\xi_j)) - \sum_{a\le\xi<b} \Delta^+ f(\xi)\,\Delta^+ g(\xi)\Big|$$

$$\le \Big(2 \sum_{j=1}^{m} |g(\alpha_j) - g(\xi_j+)| + 2 \sum_{j=1}^{m} |\Delta^+ g(\xi_j)| + \sum_{\xi\,\in\,M_\varepsilon} |\Delta^+ f(\xi_j)|\Big)\,\varepsilon \le K^+\,\varepsilon,$$

kde

$$K^+ = 4\,\mathrm{var}_a^b\, g + \sum_{\xi\,\in\,M_\varepsilon\cap(a,b]} |\Delta^+ f(\xi)| < \infty.$$

Podobně bychom ověřili, že platí

$$\Big| \sum_{j=1}^{m} (f(\xi_j) - f(\alpha_{j-1}))\,(g(\xi_j) - g(\alpha_{j-1})) - \sum_{a<\xi\le b} \Delta^- f(\xi)\,\Delta^- g(\xi)\Big| \le K^-\,\varepsilon,$$

kde

$$K^- = 4\,\mathrm{var}_a^b\, g + \sum_{\xi\,\in\,M_\varepsilon\cap(a,b]} |\Delta^- f(\xi)| < \infty.$$

Dosazením do (5.21) a využitím ještě (5.17) konečně získáme odhad

$$\Big| S_{g\Delta f}(D,\xi) - f(b)\,g(b) + f(a)\,g(a) + \int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$$

$$+ \sum_{a<\xi\le b} \Delta^+ f(\xi)\,\Delta^+ g(\xi) - \sum_{a\le\xi<b} \Delta^- f(\xi)\,\Delta^- g(\xi)\Big| \le \big(1 + K^+K^-\big)\,\varepsilon.$$

Protože (D,ξ) bylo libovolné δ_ε–jemné dělení, plyne odtud už, že existuje integrál $\int_a^b g\,\mathrm{d}[f]$ a platí (5.16). □

5.24 . Lemma (SAKS-HENSTOCK). *Nechť $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ jsou takové, že integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ existuje. Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno a nechť $\delta \in \mathscr{G}[a,b]$ je kalibr na $[a,b]$ takový, že platí*

$$\Big| S(D,\xi) - \int_a^b f\,\mathrm{d}[g]\Big| < \varepsilon \quad \textit{pro všechna} \;\; (D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta).$$

Potom pro libovolný systém $\{([s_j,t_j],\tau_j),\ j=1,2,\dots,k\}$ *takový, že*

$$\begin{cases} a \le s_1 \le \tau_1 \le t_1 \le s_2 \le \dots \le s_k \le \tau_k \le t_k \le b, \\ [s_j,t_j] \subset [\tau_j-\delta(\tau_j),\tau_j+\delta(\tau_j)], \quad j=1,2,\dots,k, \end{cases} \tag{5.22}$$

platí nerovnost

$$\Big|\sum_{j=1}^{k}\Big[f(\tau_j)\,[g(t_j)-g(s_j)] - \int_{s_j}^{t_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big]\Big| < \varepsilon. \tag{5.23}$$

D ů k a z . Buď dáno $\eta > 0$. Označme $t_0 = a$, $s_{k+1} = b$. Je-li $j \in \{1,2,\dots,k\}$ a $t_j < s_{j+1}$, pak můžeme najít kalibr δ^j a rozšířené dělení $(D^j,\xi^j) \in \mathscr{A}(\delta^j;[t_j,s_{j+1}])$ takové, že $\delta^j(x) \le \delta(x)$ pro každé $x \in [a,b]$ a

$$\Big|S(D^j,\xi^j) - \int_{t_j}^{s_{j+1}} f\,\mathrm{d}[g]\Big| < \frac{\eta}{k+1}. \tag{5.24}$$

Nyní sestavme δ–jemné rozšířené dělení $(\widetilde{D},\widetilde{\xi})$ intervalu $[a,b]$ tak, aby platilo

$$\sum_{j=1}^{k} f(\tau_j)\,[g(t_j)-g(s_j)] + \sum_{j=0}^{k} S(D^j,\xi^j) = S(\widetilde{D},\widetilde{\xi}).$$

(Je-li $t_j = s_{j+1}$, klademe $S(D^j,\xi^j) = 0$.) Vzhledem k předpokladům lemmatu tedy máme

$$\begin{aligned} &\Big|\sum_{j=1}^{k}\Big(f(\tau_j)\,[g(t_j)-g(s_j)] - \int_{s_j}^{t_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big) + \sum_{j=0}^{k}\Big(S(D^j,\xi^j) - \int_{t_j}^{s_{j+1}} f\,\mathrm{d}[g]\Big)\Big| \\ &\qquad = \Big|S(\widetilde{D},\widetilde{\xi}) - \int_a^b f\,\mathrm{d}[g]\Big| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Odtud a z (5.24) dostáváme pro libovolné $\eta > 0$

$$\begin{aligned} &\Big|\sum_{j=1}^{k} f(\tau_j)\,[g(t_j)-g(s_j)] - \int_{s_j}^{t_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big| \\ &\qquad \le \Big|S(\widetilde{D},\widetilde{\xi}) - \int_a^b f\,\mathrm{d}[g]\Big| + \Big|\sum_{j=0}^{k}\Big(S(D^j,\xi^j) - \int_{t_j}^{s_{j+1}} f\,\mathrm{d}[g]\Big)\Big| \\ &\qquad < \varepsilon + \frac{k\,\eta}{k+1} < \varepsilon + \eta, \end{aligned}$$

tj. platí (5.23). □

5.25. Věta. *Nechť* $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ *existuje a* $c \in [a,b]$. *Potom platí*

$$\lim_{x\to c,\, x\in[a,b]} \Big(\int_a^x f\,\mathrm{d}[g] + f(c)\,[g(c)-g(x)]\Big) = \int_a^c f\,\mathrm{d}[g]. \tag{5.25}$$

D ů k a z . Buď dáno $\varepsilon > 0$ a nechť $\delta_\varepsilon \in \mathscr{G}[a,b]$ je takový kalibr, že

$$\Big|S(D,\xi) - \int_a^b f\,\mathrm{d}[g]\Big| < \varepsilon$$

platí všechna $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$. Pro každé $x \in (c, c+\delta_\varepsilon(c)) \cap [a,b]$ systém $\{[s_1,t_1],\tau_1\}$, kde $s_1 = \tau_1 = c$ a $t_1 = x$, vyhovuje podmínkám (5.22). Podle Saks-Henstockova lemmatu (Lemma 5.24) tedy máme

$$\Big|f(c)\,[g(x)-g(c)] - \int_c^x f\,\mathrm{d}[g]\Big| < \varepsilon. \tag{5.26}$$

Podobně, je-li $x \in (c-\delta_\varepsilon(c), c) \cap [a,b]$, pak použitím Lemmatu 5.24 na systém $\{[x,c],c\}$ dostaneme nerovnost

$$\Big|f(c)\,[g(c)-g(x)] - \int_x^c f\,\mathrm{d}[g]\Big| < \varepsilon$$

Pro každé $x \in (c-\delta_\varepsilon(c), c+\delta_\varepsilon(c)) \cap [a,b]$ tedy platí nerovnost (5.26) a tudíž také nerovnost

$$\Big|\int_a^c f\,\mathrm{d}[g] - \int_a^x f\,\mathrm{d}[g] - f(c)\,[g(c)-g(x)]\Big| = \Big|\int_c^x f\,\mathrm{d}[g] - f(c)\,[g(x)-g(c)]\Big| < \varepsilon,$$

tj. platí (5.25). □

5.26 . Důsledek. *Nechť* $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ *existuje,* $g \in \mathbb{G}[a,b]$ *a nechť funkce* $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ *je definována předpisem*

$$h(x) = \int_a^x f\,\mathrm{d}[g], \quad x \in [a,b].$$

Potom $h \in \mathbb{G}[a,b]$ *a*

$$h(t+) = h(t) + f(t)\Delta^+ g(t) \quad a \quad h(s-) = h(s) - f(s)\Delta^- g(s) \ \ pro \ \ t \in [a,b), \ \ s \in (a,b].$$

□

5.27 . Věta (HAKE). (*i*) *Nechť* $\int_a^x f\,\mathrm{d}[g]$ *existuje pro každé* $x \in [a,b)$ *a nechť*

$$\lim_{x \to b-} \Big(\int_a^x f\,\mathrm{d}[g] + f(b)\,[g(b)-g(x)]\Big) = I \in \mathbb{R}.$$

Potom také

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] = I.$$

(*ii*) *Nechť* $\int_x^b f\,\mathrm{d}[g]$ *existuje pro každé* $x \in (a,b]$ *a nechť*

$$\lim_{x\to a+}\Big(\int_x^b f\,\mathrm{d}[g] + f(a)\,[g(x)-g(a)]\Big) = I \in \mathbb{R}.$$

Potom také

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] = I.$$

D ů k a z . (i) Buď dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme $\Delta > 0$ tak, aby platilo

$$\Big|\int_a^x f\,\mathrm{d}[g] + f(b)\,[g(b)-g(x)] - I\Big| < \varepsilon \quad \text{pro každé} \quad x \in [b-\Delta, b). \tag{5.27}$$

Položme $x_k = b - \dfrac{b-a}{k+1}$ pro $k \in \mathbb{N}$. Posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí a $\lim_{k\to\infty} x_k = b$ a

$$\forall\, k \in \mathbb{N}\ \exists\, \delta_k \in \mathscr{G}[a,x_k] : (D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta_k,[a,x_k]) \Longrightarrow \Big|S(D,\xi) - \int_a^{x_k} f\,\mathrm{d}[g]\Big| < \frac{\varepsilon}{2^k} \tag{5.28}$$

Pro každé $\tau \in [a,b)$ označme symbolem $\kappa(\tau)$ jednoznačně určené přirozené číslo k takové, že $\tau \in [x_{k-1}, x_k)$.

Dále, definujme kalibr δ_0 na $[a,b)$ tak, aby platilo

$$\delta_0(\tau) \le \delta_k(\tau) \quad \text{a} \quad [\tau-\delta_0(\tau), \tau+\delta_0(\tau)] \subset [a,x_k] \quad \text{pro každé} \quad k \in \mathbb{N} \text{ a každé } \ \tau \in [x_{k-1}, x_k).$$

Nyní, nechť je dáno $x \in [a,b)$ a nechť $p \in \mathbb{N}$ je takové, že $x \in [x_{p-1}, x_p)$ (tj. $p = \kappa(x)$) a nechť

$$(B,\eta) = \big(\{\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_m\}, (\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_m)\big)$$

je libovolné δ_0–jemné dělení intervalu $[a,x]$. Pro každé $k \in \mathbb{N}\cap[1,p]$ a každé $j \in \mathbb{N}\cap[1,m]$ takové, že $\kappa(\eta_j) = k$ pak máme

$$\eta_j - \delta_k(\eta_j) \le \eta_j - \delta_0(\eta_j) \le \beta_{j-1} < \beta_j \le \eta_j + \delta_0(\eta_j) \le \eta_j + \delta_k(\eta_j).$$

Vzhledem k (5.28) a definici kalibru δ_0, tedy vidíme, že pro každé $k \in \{1,2,\ldots,p\}$ systém

$$\{\{[\beta_{j-1},\beta_j],\eta_j\},\ j = 1,2,\ldots,m,\ \kappa(\eta_1) = k\}$$

splňuje předpoklady Saks-Henstockova lemmatu 5.24). Pro každé $k \in \{1,2,\ldots,p\}$ tedy platí nerovnost

$$\Big|\sum_{k(\eta_j)=k} f(\eta_j)\,[g(\beta_j)-g(\beta_{j-1})] - \int_{\beta_{j-1}}^{\beta_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big| < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Tudíž

$$
\begin{aligned}
&\Big|\sum_{j=1}^{m}\Big(f(\eta_j)\,[g(\beta_j)-g(\beta_{j-1})]-\int_a^x f\,\mathrm{d}[g]\Big)\Big|\\
&\quad=\Big|\sum_{k=1}^{p}\Big(\sum_{\kappa(\eta_j)=k} f(\eta_j)\,[g(\beta_j)-g(\beta_{j-1})]-\int_{\beta_{j-1}}^{\beta_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big)\Big|\\
&\quad\le\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\sum_{\kappa(\eta_j)=k}\Big(f(\eta_j)\,[g(\beta_j)-g(\beta_{j-1})]-\int_{\beta_{j-1}}^{\beta_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big)\Big|<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k}=\varepsilon,
\end{aligned}
$$

tj.

$$
|S(B,\eta)-\int_a xf\,\mathrm{d}[g]\Big)|<\varepsilon\quad\text{pro všechna}\ \ (B,\eta)\in\mathscr{A}(\delta_0,[a,x]) \tag{5.29}
$$

Nyní, položme

$$
\delta^*(x)=\begin{cases}\min\{b-x,\,\delta^0(x)\} & \text{pro}\ \ x\in[a,b),\\ \dfrac{\Delta}{2}\quad\text{pro}\ \ x=b.\end{cases}
$$

Pak pro každé δ^*−jemné dělení

$$
(\widetilde{D},\widetilde{\xi})=\big(\{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_m\},(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m)\big)
$$

intervalu $[a,b]$ musí platit $\xi_m=\alpha_m=b$, $\alpha_{m-1}\in(b-\Delta,b)$ a tudíž, vzhledem k (5.27) a (5.29),

$$
\begin{aligned}
\Big|S(D,\xi)-I\Big|&=\Big|\sum_{j=1}^{m-1} f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]+f(b)\,[g(b)-g(\alpha_{m-1})]-I\Big|\\
&\le\Big|\sum_{j=1}^{m-1} f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-\int_a^{\alpha_{m-1}} f\,\mathrm{d}[g]\Big|\\
&\qquad+\Big|\int_a^{\alpha_{m-1}} f\,\mathrm{d}[g]+f(b)\,[g(b)-g(\alpha_{m-1})]-I\Big|<2\,\varepsilon,
\end{aligned}
$$

t.j. $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]=I$.

Důkaz tvrzení (ii) se provede analogicky a ponechávám ho čtenáři jako cvičení. □

5.28. Lemma. *Nechť $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ existuje. Potom pro každé $\varepsilon>0$ existuje kalibr $\delta\in\mathscr{G}[a,b]$ takový, že platí*

$$
\sum_{j=1}^{m}\Big|f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big|<\varepsilon \tag{5.30}
$$

pro každé $(D,\xi)\in\mathscr{A}(\delta)$, $D=\{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_m\}$, $\xi=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m)$.

D ů k a z . Buď dáno $\varepsilon > 0$ a nechť $\delta \in \mathscr{G}([a,b])$ je kalibr takový, že

$$\Big|S(D,\xi) - \int_a^b f\,\mathrm{d}[g]\Big| < \frac{\varepsilon}{2}$$

platí pro všechna δ–jemná rozšířená dělení (D,ξ) intervalu $[a,b]$. Nyní, nechť

$$(D,\xi) = \big(\{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_m\},\quad \xi = (\xi_1,\xi_2,\dots,m)\big) \in \mathscr{A}(\delta).$$

Označme

$$J^+ = \Big\{j \in \{1,2,\dots,m\} \colon f(\xi_j)\,[g(\alpha_j - g(\alpha_{j-1}) - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g] \geq 0\Big\}$$

a

$$J^- = \{1,2,\dots,m\} \setminus J^+.$$

Systém $\{([\alpha_{j-1},\alpha_j],\xi_j),\ j \in J^+\}$ splňuje předpoklady (5.22) z Lemmatu 5.24 na místě $\{([s_j,t_j],\tau_j)\}$. Podle Lemmatu 5.24 tedy platí

$$\Bigg|\sum_{j\,\in\,J^+}\Big(f(\xi_j)[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big)\Bigg|$$
$$= \sum_{j\,\in\,J^+}\Big|f(\xi_j)[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Podobně

$$\Bigg|\sum_{j\,\in\,J^-}\Big(f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big)\Bigg|$$
$$= \sum_{j\,\in\,J^-}\Big|f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Odtud už nerovnost (5.30) okamžitě vyplývá. □

5.29 . Věta (Věta o substituci). *Je-li funkce $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ ohraničená a integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ existuje, pak oba integrály*

$$\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}\Big[\int_a^x f\,\mathrm{d}[g]\Big],\qquad \int_a^b h(x)\,f(x)\,\mathrm{d}[g(x)]$$

existují jakmile existuje alespoň jeden z nich a v takovém případě pak platí:

$$\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}\Big[\int_a^x f\,\mathrm{d}[g]\Big] = \int_a^b h(x)\,f(x)\,\mathrm{d}[g(x)].$$

D ů k a z . Podle Věty 5.7 je funkce

$$k(x) = \int_a^x f\,\mathrm{d}[g]$$

definovaná pro každé $x \in [a,b]$.

a) Předpokládejme, že existuje integrál

$$\int_a^b h\,f\,\mathrm{d}[g].$$

Nechť je dáno $\varepsilon > 0$ a nechť δ_ε je kalibr na $[a,b]$ takový, že pro každé $\delta_\varepsilon-$jemné dělení $(D,\xi) = \big(\{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_m\},(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m)\big)$ intervalu $[a,b]$ platí

$$\sum_{j=1}^m \Big| h(\xi_j)\,f(\xi_j)\,[g(\alpha_j - g(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} h\,f\,\mathrm{d}[g]\Big| < \varepsilon$$

a

$$\sum_{j=1}^m \Big| f(\xi_j)\,[g(\alpha_j - g(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big| < \varepsilon.$$

(Takový kalibr existuje podle Lemmatu 5.28.) Pro každé $\delta_\varepsilon-$jemné dělení

$$(D,\xi) = \big(\{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_m\},(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m)\big)$$

intervalu $[a,b]$ tedy máme:

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{j=1}^m h(\xi_j)\,[k(\alpha_j) - k(\alpha_{j-1})] - \int_a^b h\,f\,\mathrm{d}[g]\Big|\\
&\quad\le \sum_{j=1}^m \Big| h(\xi_j) \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g] - h(\xi_j)\,f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})]\Big|\\
&\qquad + \sum_{j=1}^m \Big| h(\xi_j)\,f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} h\,f\,\mathrm{d}[g]\Big|\\
&\quad\le \|h\| \sum_{j=1}^m \Big| \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g] - f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})]\Big|\\
&\qquad + \sum_{j=1}^m \Big| h(\xi_j)\,f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} h\,f\,\mathrm{d}[g]\Big|\\
&\quad\le (\|h\| + 1)\,\varepsilon,
\end{aligned}$$

tj. existuje integrál $\int_a^b h\,\mathrm{d}[k]$ a platí

$$\int_a^b h\,\mathrm{d}[k] = \int_a^b h\,f\,\mathrm{d}[g].$$

b) Obrácená implikace by se dokazovala podobně – opět za vydatné pomoci Lemmatu 5.28. □

5.30. Věta (Věta o dominované konvergenci). *Nechť* $f, f_n \in \mathbb{G}[a,b]$,

$$|f_n(x)| \le C < \infty \text{ pro } n \in \mathbb{N} \quad a \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \text{ na } [a,b].$$

Potom

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \, \mathrm{d}[g] = \int_a^b f \, \mathrm{d}[g] \quad \text{pro každou funkci } g \in \mathbb{BV}[a,b].$$

5.31. Důsledek. *Nechť* $A \in \mathbb{BV}[a,b]$. *Potom operátor*

$$x \in \mathbb{BV}[a,b] \to L\,x \in \mathbb{BV}[a,b],$$

$$\text{kde } (L\,x)(t) = \int_a^t \mathrm{d}[A(s)]\,x(s) \quad \text{pro } t \in [a,b]$$

je kompaktní (totálně spojitý) lineární operátor.

Důkaz. Je třeba dokázat, že pro každou posloupnost $\{x_n\}$ ohraničenou v $\mathbb{BV}[a,b]$, její obraz $\{L\,x_n\} \subset \mathbb{BV}[a,b]$ obsahuje podposloupnost, která konverguje v $\mathbb{BV}[a,b]$.

Nechť je tedy $\{x_n\} \subset \mathbb{BV}[a,b]$ posloupnost taková, že $\|x_n\|_{\mathbb{BV}} \le C < infty$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Podle Hellyovy věty (Věta 1.25) pak existuje podposloupost $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ a funkce $x \in \mathbb{BV}[a,b]$ takové, že

$$\|x\|_{\mathbb{BV}} \le C \quad \text{and} \quad \lim_{k\to\infty} x_{n_k}(t) = x(t) \quad \text{pro každé } t \in [a,b].$$

Označme $z_k(t) = x_{n_k}(t) - x(t)$ pro $k \in \mathbb{N}$ a $t \in [a,b]$. Potom

$$|z_k(t)| \le 2\,C \quad \text{pro} \quad k \in \mathbb{N} \quad \text{a} \quad t \in [a,b].$$

Pro libovolnou funkci $u \in \mathbb{B}[a,b]$ a libovolnou dvojici t_1, t_2 bodů z $[a,b]$ takových, že $a \le t_1 < t_2 \le b$ máme podle Věty 5.14

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}[A]\,u\right| \le \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}[\operatorname{var}_{t_1}^s A]\,|u(s)| = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}[\operatorname{var}_a^s A]\,|u(s)|\,.$$

Pro libovolné $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \in \mathscr{D}[a,b]$ a každé $k \in \mathbb{N}$ tedy platí

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^m |(L\,z_k)(\alpha_j) - (L\,z_k)(\alpha_{j-1})| &= \sum_{j=1}^m \left|\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} \mathrm{d}[A(s)]\,z_k(s)\right| \\ &\le \sum_{j=1}^m \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} \mathrm{d}[\operatorname{var}_a^s A]\,|z_k(s)| \le \int_a^b \mathrm{d}[\operatorname{var}_a^s A]\,|z_k(s)|\,,\end{aligned}$$

neboli

$$\|L\,z_k\|_{\mathbb{BV}} = \operatorname{var}_a^b (L\,z_k) \le \int_a^b \mathrm{d}[\operatorname{var}_a^s A]\,|z_k(s)|\,.$$

Použitím Věty 5.30 dostaneme konečně

$$\lim_{k\to\infty} \|L\,x_{n_k} - L\,x\|_{\mathbb{BV}} = \lim_{k\to\infty} \|L\,z_k\|_{\mathbb{BV}} \le \lim_{k\to\infty} \int_a^b \mathrm{d}[\operatorname{var}_a^s A]\,|z_k(s)| = 0.$$

□

Kapitola 6

Dodatky

6.1 Důkaz Věty 1.14

Pro důkaz Věty 1.14 je účelné zavést následující definice.

6.1. Definice. Funkce $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je *shora (zdola) polospojitá v bodě* $x_0 \in [a,b]$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in [a,b] \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ platí

$$F(x) < F(x_0) + \varepsilon \qquad (F(x) > F(x_0) - \varepsilon).$$

Je-li funkce f shora resp. zdola polospojitá v každém bodě intervalu $[a,b]$, říkáme, že je *shora* resp. *zdola polospojitá na intervalu* $[a,b]$.

6.2. Poznámka. Je zřejmé, že funkce f je spojitá v bodě x_0 právě tehdy, když je v něm současně polospojitá shora i zdola.

6.3 . Cvičení. Každá funkce polospojitá shora (zdola) na ohraničeném a uzavřeném intervalu je na tomto intervalu ohraničená shora (zdola).

Další příjemnou vlastností funkcí shora polospojitých na intervalu $[a,b]$ je to, že tyto funkce nabývají na tomto intervalu svého maxima:

6.4 . Tvrzení. *Je-li funkce* $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ *shora polospojitá na intervalu* $[a,b]$, *potom existuje bod* $x_0 \in [a,b]$ *takový, že*

$$F(x) \le F(x_0) \quad \textit{pro každé } x \in [a,b].$$

D ů k a z . Označme

$$M = \sup_{x \in [a,b]} F(x).$$

Podle Cvičení 6.3 je $M < \infty$. Množina

$$Q_k = \{x \in [a,b] \colon F(x) \ge M - \frac{1}{k}\} \tag{6.1}$$

je pro každé $k \in \mathbb{N}$ neprázdná. Ukážeme, že je také uzavřená:
Nechť x^* je hromadný bod množiny Q_k. Zřejmě $x^* \in [a,b]$. Předpokládejme, že $x^* \notin Q_k$. Platí tedy $F(x^*) < M - \frac{1}{k}$. Dále, z polospojitosti shora funkce f plyne, že k danému $\varepsilon = M - \frac{1}{k} - F(x^*) > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že platí

$$F(x) < F(x^*) + \varepsilon = F(x^*) + M - \frac{1}{k} - F(x^*) = M - \frac{1}{k}$$
$$\text{pro všechna } x \in (x^* - \delta, x^* + \delta) \cap [a,b],$$

což je ovšem spor s tím, že x^* je hromadný bod množiny Q_k. Každá množina Q_k, $k \in \mathbb{N}$, je tedy uzavřená. Dále, vzhledem k tomu, že posloupnost $\left\{M - \frac{1}{k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí, plyne z (6.1), že platí

$$[a,b] \supset Q_1 \supset Q_2 \cdots \supset Q_k \supset Q_{k+1} \ldots .$$

Podle Cantorovy věty (viz např. [3, Věta 157]) je tudíž množina $\bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k$ neprázdná. Budiž x_0 její libovolný prvek. Potom

$$M - \frac{1}{k} \leq F(x_0) \leq M \quad \text{platí pro každé } k \in \mathbb{N},$$

což je možné pouze, když

$$F(x_0) = M = \sup_{x \in [a,b]} F(x).$$

□

6.5 . Cvičení. Je-li funkce $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ zdola polospojitá na intervalu $[a,b]$, potom existuje bod $x_0 \in [a,b]$ takový, že

$$F(x) \geq F(x_0) \quad \text{pro každé } x \in [a,b].$$

6.6 . Tvrzení. *Nechť funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je taková, že pro každé $t \in [a,b)$ a každé $s \in (a,b]$ existují limity*

$$f(t+) = \lim_{\tau \to t+} f(\tau) \quad a \quad f(s-) = \lim_{\tau \to s-} f(\tau).$$

Definujme funkci $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ předpisem

$$F(x) = \max\{f(x-), f(x), f(x+)\} \quad \textit{pro } x \in (a,b), \quad F(a) = f(a+) \quad a \quad F(b) = f(b-).$$

Potom je funkce F shora polospojitá na intervalu $[a,b]$.

D ů k a z . Budiž dán libovolný bod $x_0 \in (a,b)$. Potom platí $f(x_0) \leq F(x_0)$. Dále, vzhledem k předpokladu o existenci limit $f(x_0-)$ a $f(x_0+)$, pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že platí

$$f(x) < f(x_0-) + \varepsilon \leq F(x_0) + \varepsilon \quad \text{pro všechna } x \in (x_0 - \delta, x_0),$$

$$f(x) < f(x_0+) + \varepsilon \leq F(x_0) + \varepsilon \quad \text{pro všechna } x \in (x_0, x_0 + \delta).$$

Máme tedy

$$f(x) < F(x_0) + \varepsilon \qquad \text{pro všechna } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Odtud plyne dále, že platí

$$f(x-) \leq F(x_0) + \varepsilon \quad \text{a} \quad f(x+) < F(x_0) + \varepsilon \quad \text{pro všechna } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

čili

$$F(x) \leq F(x_0) + \varepsilon \quad \text{pro všechna } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

T. zn., že f je polospojitá shora v bodě x_0. Podobně bychom postupovali také v případech $x_0 = a$ resp. $x_0 = b$. □

6.7. Lemma (Riesz). *Nechť funkce f a $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ splňují předpoklady Tvrzení 6.6. Potom je množina*

$$E = \{x \in (a,b)\colon \text{existuje } \xi > x \text{ tak, že } f(\xi) > F(x)\}$$

otevřená. Když je $E \neq \emptyset$, pak E sestává z nejvýše spočetného systému po dvou disjunktních otevřených intervalů (a_k, b_k) a pro každý z nich platí

$$f(a_k+) \leq F(b_k).$$

D ů k a z . Je-li $E = \emptyset$, není co dokazovat. Nechť tedy $x_0 \in E$. Potom existuje $\xi \in (x_0, b]$ takové, že platí

$$\varepsilon := f(\xi) - F(x_0) > 0.$$

Vzhledem k polospojitosti funkce F v bodě x_0 existuje $\delta > 0$ takové, že $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [a, b]$ a

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \implies F(x) < F(x_0) + \varepsilon = f(\xi).$$

To ovšem také znamená, že je

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset E,$$

tj. množina E je otevřená.

Je známo (viz [3, Věta 69]), že každá neprázdná otevřená množina je sjednocením nejvýše spočetného systému po dvou disjunktních otevřených intervalů. Tedy také množina E je sjednocením takového systému $\{(a_k, b_k)\}$. Zvolme libovolný interval (a_k, b_k) z tohoto systému a v něm libovolný bod x_0. Podle Tvrzení 6.4 existuje $x_1 \in [x_0, b]$ takové, že

$$F(x_1) = \max_{x \in [x_0, b]} F(x). \tag{6.2}$$

Kdyby bylo $x_1 < b_k$ pak by také bylo $x_1 \in E$ a tudíž by pro nějaké $\xi \in (x_1, b]$ bylo

$$F(\xi) \geq f(\xi) > F(x_1),$$

což je ovšem spor s (6.2). Máme tedy

$$x_1 \geq b_k.$$

Vzhledem k (6.2) máme také $F(b_k) \leq F(x_1)$. Předpokládejme, že je

$$F(b_k) < F(x_1) = \max\{f(x_1-), f(x_1), f(x_1+)\}.$$

Potom také musí být $x_1 > b_k$ a musí existovat $\xi \in (b_k, b)$ takové, že je $f(\xi) > F(b_k)$ čili $b_k \in E$, což ovšem není možné. Je tedy

$$F(b_k) = F(x_1) = \max_{x \in [x_0, b]} F(x) \geq F(x_0) \geq f(x_0)$$

pro každé $x_0 \in (a_k, b_k)$. Limitním přechodem $x_0 \to a_k+$ dostaneme konečně

$$F(b_k) \geq f(a_k+),$$

což uzavírá důkaz lemmatu. □

6.8 . Poznámka. Funkce splňující předpoklady Tvrzení 6.6 a Lemmatu 6.7 nazýváme *regulované funkce*. Podrobněji o nich pojednáme v kapitole 3.

6.9 . Definice. Nechť $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je daná funkce. Pro $x \in (a,b]$ definujeme *horní resp. dolní Diniho derivovaná čísla zleva* $D^- f(x)$ resp. $D_- f(x)$ takto:

$$D^- f(x) = \limsup_{t\to x-} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} \quad \text{a} \quad D_- f(x) = \liminf_{t\to x-} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}.$$

Podobně se definují *horní resp. dolní Diniho derivovaná čísla zprava* v bodech $x \in [a,b)$:

$$D^+ f(x) = \limsup_{\xi\to x+} \frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x} \quad \text{a} \quad D_+ f(x) = \liminf_{\xi\to x+} \frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}.$$

6.10 . Poznámka. Pro libovolnou funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ a body $x \in (a,b]$ a $y \in [a,b)$ jsou její derivovaná čísla $D^- f(x)$, $D_- f(x)$, $D^+ f(y)$, $D_+ f(y)$ jednoznačně určena. Mohou ovšem nabývat také hodnot ∞ resp. $-\infty$. Funkce f má v bodě x vlastní derivaci zleva právě tehdy, když $D^- f(x) = D_- f(x) \in \mathbb{R}$. Podobně, f má v bodě x vlastní derivaci zprava právě tehdy, když $D^+ f(x) = D_+ f(x) \in \mathbb{R}$, a vlastní derivaci právě tehdy, když $D^- f(x) = D_- f(x) = D^+ f(x) = D_+ f(x) \in \mathbb{R}$.

Z Definice 6.9 ihned plyne, že pro $x \in (a,b]$ a $y \in [a,b)$ platí

$$-\infty \leq D_- f(x) \leq D^- f(x) \leq +\infty \quad \text{a} \quad -\infty \leq D_+ f(y) \leq D^+ f(y) \leq +\infty.$$

Podle Důsledku 1.6 a Lemmatu obsaženém v důkazu Věty 1.7 již víme, že každá monotonní funkce na intervalu $[a,b]$ má na tomto intervalu nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti. Nyní si ukážeme, že každá monotonní funkce má vlastní derivaci "téměř všude" na definičním intervalu.

6.11 . Věta. *Každá funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monotonní na $[a,b]$ má pro s.v. $x \in [a,b]$ konečnou derivaci $f'(x)$.*

D ů k a z . Předpokládejme např., že f je neklesající. Potom pro všechna $x, \xi \in [a,b]$, $x \neq \xi$, máme

$$\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x} \geq 0$$

a vzhledem k Definici 6.9 tedy také

$$0 \leq D_- f(x) \leq D_+ f(x) \leq \infty \quad \text{a} \quad 0 \leq D_+ f(x) \leq D^+ f(x) \leq \infty \tag{6.3}$$

pro všechna $x, \in (a,b)$.

Důkaz věty bude rozdělen na 3 kroky:

• I. Nejprve ukážeme, že platí:

$$D^+ f(x) < \infty \quad \text{pro s.v. } x \in (a,b). \tag{6.4}$$

• II. Poté ukážeme, že platí

$$D^+ f(x) \le D_- f(x) \quad \text{pro s.v. } x \in (a,b). \tag{6.5}$$

• III. Konečně, ukážeme, že důkaz věty je už snadným důsledkem tvrzení (6.4) a (6.5).

▶ I. Nejprve tedy dokážeme platnost tvrzení (6.4). Označme symbolem S množinu bodů nespojitosti funkce f v (a,b) a

$$E_\infty = \{x \in (a,b) \setminus S \colon D^+ f(x) = \infty\}.$$

Podle Věty 1.7 je množina S nanejvýše spočetná a tedy (viz Cvičení 1.13 a)) má nulovou míru ($\mu(S)=0$). Je-li $E_\infty = \emptyset$, není co dokazovat. Předpokládejme tedy, že je $E_\infty \neq \emptyset$. Nechť je dáno libovolné $c > 0$. Máme

$$E_\infty \subset E_c = \{x \in (a,b) \setminus S \colon D^+ f(x) > c\}. \tag{6.6}$$

Jestliže $x \in E_c$, pak podle Definice 6.9 existuje $\xi \in (x,b)$ takové, že platí

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} > c,$$

tj.

$$\text{pro každé } x \in E_c \text{existuje } \xi \in (a,b) \text{takové, že } g(\xi) > G(x), \tag{6.7}$$

kde

$$g(x) := f(x) - c\,x \quad \text{pro} \quad x \in [a,b], \tag{6.8}$$

a

$$G(x) := \begin{cases} g(a+) & \text{pro} \quad x = a, \\ \max\{g(x-), g(x), g(x+)\} & \text{pro} \quad x \in (a,b), \\ g(b-) & \text{pro} \quad x = b. \end{cases} \tag{6.9}$$

(Zde jsme využili toho, že $E_c \cap S = \emptyset$ a tudíž $G(x) = g(x)$ pro každé $x \in E_c$.) Podle (6.7) máme dále

$$E_c \subset E := \{x \in (a,b) \colon \text{existuje } \xi > x \text{ tak, že } g(\xi) > G(x)\}. \tag{6.10}$$

Protože funkce f je neklesající na $[a,b]$, je také g na tomto intervalu neklesající a tudíž také regulovaná (viz Důsledek 1.6). Podle Tvrzení 6.6 je G polospojitá shora na $[a,b]$ a tudíž podle Lemmatu 6.7 je množina E z (6.10) sjednocením nejvýše spočetného systému po dvou disjunktních otevřených intervalů(a_k, b_k), $k \in K \subset \mathbb{N}$ a pro každý z nich platí $g(a_k+) \le G(b_k)$. Vzhledem k (6.8) a (6.9) a vzhledem k tomu, že funkce f je neklesající na $[a, b]$, tedy máme

$$f(a_k+) - c\,a_k \le G(b_k) = \max\{f(b_k-), f(b_k), f(b_k+)\} - c\,b_k \le f(b_k+),$$

neboli

$$c\,(b_k - a_k) \le f(b_k+) - f(a_k+).$$

Sečtením přes všechna k odtud dostaneme

$$c \sum_{k \in K} (b_k - a_k) \le \sum_{k \in K} [f(b_k+) - f(a_k+)] \le f(b) - f(a),$$

neboli

$$\sum_{k \in K} (b_k - a_k) \le \frac{f(b) - f(a)}{c}.$$

Pokud tedy k danému $\varepsilon > 0$ zvolíme $c > 0$ tak velké, aby platilo

$$\frac{f(b) - f(a)}{c} < \varepsilon,$$

docílíme toho, že bude

$$\sum_{k \in K} (b_k - a_k) < \varepsilon,$$

což ovšem znamená, že množina E a tudíž také množina $E_\infty \cup S \cup [a] \cup [b]$ mají nulovou míru (viz (6.6), (6.10) a Cvičení 1.13b)). Tvrzení (6.4) je tedy dokázáno.

▶ II. Pro daná čísla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\alpha \ge 0 \quad \text{a} \quad \beta \ge \alpha, \tag{6.11}$$

definujme

$$E_{\alpha\,\beta} = \{x \in (a, b) \setminus S \colon D^+ f(x) \alpha \quad \text{a} \quad D_- f(x) < \beta\}$$

a

$$E_\beta = \{x \in (a, b) \colon D_f(x) < \beta\}.$$

Nechť $y \in E_\beta$. Pak existuje $\eta \in (a, x)$ takové, že

$$f(\eta) - \beta\,\eta > f(y) - \beta\,y.$$

Pro $x \in [-b, -a]$ definujme

$$g(x) = f(-x) + \beta\,x.$$

Je-li $y = -x \in (a, b) \cap E_\beta$, pak podle výše uvedeného existuje $\xi > x$ ($\xi = -\eta$) takové, že je

$$g(\xi) > G(x) = g(x),$$

kde funkce G je přiřazena k g opět relací (6.9). (Jelikož je $S \cap E_\beta = \emptyset$ a $x \in E_\beta$, je $G(x) = g(x)$.) Použitím Lemmatu 6.7 pro funkci g na intervalu $(-b, -a)$ dostaneme, že existuje nejvýše spočetně mnoho otevřených a navzájem disjunktních intervalů $(-b_k, -a_k)$, které obsahují ty body $x \in (-b, -a)$, pro které je $-x \in E_\beta$ a platí

$$g(-b_k+) \le G(-a_k).$$

Protože f je neklesající na $[a, b]$, funkce g je nerostoucí na $[-b, -a]$. To má za následek, že $g(x-) \ge g(x) \ge g(x+)$ pro každé $x \in (a, b)$. Máme tedy

$$G(-a_k) = g(-a_k-) \quad \text{a tudíž } f(b_k-) - \beta\, b_k \le f(a_k+) = \beta\, a_k,$$

tj.

$$f(b_k-) - f(a_k+) \le \beta\,(b_k - a_k) \quad \text{pro každé } k.$$

(a) Nyní, pro $\alpha \ge 0$ označme

$$\widetilde{E}_\alpha = \{x \in [a, b] \setminus S \colon D^+ f(x) > \alpha\}.$$

Podobně jako v analogické situaci výše, pro každé $y \in \widetilde{E}_\alpha$ můžeme najít $\eta \in (a, y)$ takové, že je

$$\frac{f(\eta) - f(y)}{\eta - y} < \alpha, \tag{6.12}$$

tj.

$$f(\eta) - \alpha\,\eta > f(y) - \alpha\, y. \tag{6.13}$$

Definujme

$$g(x) = f(-x) - \alpha\,(-x) \quad \text{pro} \quad x \in [-b, -a]$$

a

$$G(x) = \begin{cases} g(-b+) & \text{pro} \quad x = -b, \\ \max\{g(x-), g(x), g(x+)\} & \text{pro} \quad x \in (-b, -a), \\ g(-a-) & \text{pro} \quad x = -a. \end{cases}$$

Vzhledem k (6.13), pro každé $x \in (a, b)$ takové, že $-x \in \widetilde{E}_\alpha$ existuje $\xi \in (x, -a)$, pro které platí $g(\xi) > G(x)$. (Stačí najít k $y = -x$ $\eta \in (a, y)$ splňující (6.12) a pak položit $\xi = -\eta$.) Použitím Lemmatu 6.7 tedy můžeme ukázat, že existuje nejvýše spočetný systém po dvou disjunktních otevřených intervalů(a_k, b_k), $k \in K \subset \mathbb{N}$, takový, že platí

$$\widetilde{E}_\alpha \subset \bigcup_{k \in K} (-b_k, -a_k)$$

a

$$g(-b_k+) = f(b_k-) - \alpha\, b_k \le G(-a_k) \le f(a_k+) - \alpha\, a_k.$$

Poslední nerovnost ovšem znamená, že pro každé $k \in K$ platí

$$f(b_k-) - f(a_k+) \le \alpha\,(b_k - a_k). \tag{6.14}$$

.

(b) Nechť $k \in K$ a $x \in E_\beta \cap (a_k, b_k)$. Potom máme $D^+ f(x) > \beta$ a tudíž existuje $\xi \in (x, b_k)$ takové, že platí

$$f(\xi) - \beta\,\xi > f(x) - \beta\, x.$$

Použijeme-li opět Rieszovo lemma (Lemma 6.7), dostaneme odtud existenci nejvýše spočetného systému po dvou disjunktních otevřených intervalů $(a_{k\,\ell}, b_{k\,\ell})$, $\ell \in L \subset \mathbb{N}$, takového, že platí

$$E_\beta \cap (a_k, b_k) \subset \bigcup_{\ell \in L} (a_{k\,\ell}, b_{k\,\ell})$$

a

$$f(a_{k\,\ell}+) - \beta\, a_{k\,\ell} \le f(b_{k\,\ell}+) - \beta\, b_{k\,\ell},$$

tj.

$$\beta\,(b_{k\,\ell} - a_{k\,\ell}) \le f(b_{k\,\ell}+) - f(a_{k\,\ell}+) \quad \text{pro každé } \ell \in L.$$

Po sečtení přes všechna $\ell \in L$ odtud a z (6.14) získáme vztahy

$$\beta \sum_{\ell \in L} (b_{k\,\ell} - a_{k\,\ell}) \le \sum_{\ell \in L} \big(f(b_{k\,\ell}+) - f(a_{k\,\ell}+)\big) \le f(b_k-) - f(a_k+) \le \alpha\,(b_k - a_k)$$

a (sečtením přes všechna $k \in K$)

$$\beta \sum_{k \in K\, \ell \in L} (b_{k\,\ell} - a_{k\,\ell}) \le \alpha \sum_{k \in K} (b_k - a_k). \tag{6.15}$$

Označíme-li tedy

$$|\mathfrak{L}_1| = \sum_{k \in K} (b_k - a_k) \quad \text{a} \quad |\mathfrak{L}_2| = \sum_{k \in K\, \ell \in L} (b_{k\,\ell} - a_{k\,\ell}),$$

budeme moci nerovnost (6.15) přepsat ve tvaru

$$|\mathfrak{L}_1| \le \frac{\alpha}{\beta}\, |\mathfrak{L}_2|.$$

Když výše uvedené procedury (a) i (b) budeme provádět střídavě v postupně vznikajících intervalech, dostaneme posloupnost systémůintervalů $\mathfrak{L}_1 \supset \mathfrak{L}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{L}_n \supset \ldots$, z nichž každý obsahuje $E_{\alpha\,\beta} = E_\beta \cap \widetilde{E}_\alpha$, přičemž

$$|\mathfrak{L}_{2n}| \le \frac{\alpha}{\beta}\, |\mathfrak{L}_{2n-1}| \le \frac{\alpha}{\beta}\, |\mathfrak{L}_{2n-2}|$$

platí pro každé $n \in \mathbb{N}$. Odtud pak dále odvodíme, že je

$$|\mathfrak{L}_{2n}| \le \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n |\mathfrak{L}_1| \le \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n (b-a).$$

Protože máme $0 \le \frac{\alpha}{\beta} < 1$, plyne odtud, že je $|\mathfrak{L}_{2n}| \to 0$ pro $n \to \infty$.

Nyní, k danému $\varepsilon > 0$ zvolíme $n \in \mathbb{N}$ tak, aby bylo

$$(\frac{\alpha}{\beta})^n (b-a) < \varepsilon.$$

Potom bude $E_{\alpha\beta} \subset \mathfrak{L}_{2n}$ a přitom také $|\mathfrak{L}_{2n}| \le \varepsilon$, což podle Definice 1.12 znamená, že $\mu(E_{\alpha\beta}) = 0$ pro libovolnou dvojici $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ splňující (6.11).

Označme

$$E_* = \{x \in (a,b) \setminus S \colon D_- f(x) < D^+ f(x)\}$$

Potom pro každé $x \in E_*$ existují racionální čísla $\alpha, \beta \in \mathbb{P}$ splňující (6.11) a

$$D_- f(x) < \alpha < \beta < D^+ f(x).$$

To znamená, že je E_* obsažena v množině

$$\widetilde{E} := \bigcup_{\substack{0 \le \alpha < \beta \\ \alpha, \beta \in \mathbb{P}}} E_{\alpha,\beta},$$

která je sjednocením spočetně mnoha množin nulové míry a tudíž má také nulovou míru (viz Cvičení 1.13b). Tím spíše je $\mu(E_*) = 0$ a tedy také

$$\mu(E_* \cup S \cup [a] \cup [b]) = 0,$$

což dokazuje platnost tvrzení (6.5).

► III. Funkce

$$\widetilde{f} \colon x \in [-b, -a] \to -f(-x)$$

je zřejmě neklesající na $[-b, -a]$ a platí

$$D_- \widetilde{f}(-x) = D_+ f(x) \quad \text{a} \quad D^+ \widetilde{f}(-y) = D^- f(y)$$

pro všechna $x \in [a, b)]$ a $y \in (a, b]$. Použijeme-li tedy (6.5) na funkci $\widetilde{f}$, dostaneme

$$D^- f(x) = D^+ \widetilde{f}(-x) \le D_- \widetilde{f}(-x) = D_+ f(x) \quad \text{pro s.v. } x \in [a, b].$$

Vzhledem k (6.3) a (6.4) tedy pro s.v. $x \in [a, b]$ budeme mít

$$0 \le D^+ f(x) \le D_- f(x) \le D^- f(x) \le D_+ f(x) \le D^+ f(x) < \infty,$$

tj.

$$0 \le D^+ f(x) = D_- f(x) = D^- f(x) = D_- f(x) = f'(x) < \infty.$$

□

Věta 1.14 je přímým důsledkem vět 6.11 a 1.4.

Literatura

[1] T. H. Hildebrandt. *Theory of Integration.* (Academic Press, New York-London, 1963).

[2] Ch. S. Hönig. *Volterra Stieltjes-Integral Equations*, (North Holland and American Elsevier, Mathematics Studies 16, Amsterdam and New York, 1975).

[3] V. Jarník. *Diferenciální počet II.*

[4] V. Jarník. *Integrální počet II.*

[5] M. Tvrdý. *Differential and integral equations in the space of regulated functions.* Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics vol.25 (2002), pp. 1–104.

[6] Š. Schwabik. *Integrace v R (Kurzweilova teorie).* (Karolinum, Universita Karlova v Praze, 1999)