

Comparing NN and ARMA models in artificial market

Jiří Krtek

Matematicko–fyzikální fakulta Univerzity Karlovy v Praze
ÚTIA AV ČR

26. listopadu 2009

Co je to neuronová síť?

- ▶ pokus vytvořit umělou inteligenci
- ▶ inspirováno přírodou – mozkem
- ▶ schopnost učit se a zobecňovat

Použití NN

- ▶ rozpoznávání vzorů
- ▶ předpovídání ČŘ
- ▶ komprese
- ▶ optimalizace

Pro

- ▶ můžeme aproximovat libovolnou funkci
- ▶ schopnost zobecňovat \Rightarrow robustnost

Proti

- ▶ volba topologie
- ▶ učení sítě
- ▶ černá skříňka

Proč umělý trh?

- ▶ nekonvenční
- ▶ soutěž v obchodování, ne v "trefení" správné ceny

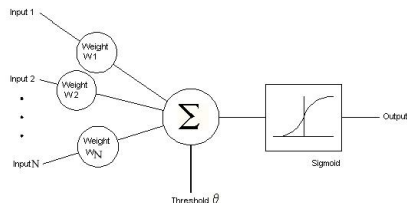
Nevýhody

1. zdlouhavé
2. jen pro určité modely

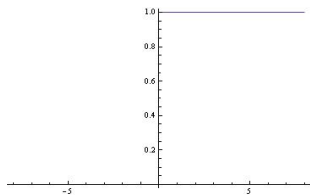
Značení:

- ▶ vektor vstupů... $\mathbf{x} = (1, x_1, \dots, x_n)^T$
- ▶ výstup... y
- ▶ vektor vah... $\mathbf{w} = (w_0, \dots, w_n)^T$
- ▶ práh... $\theta \equiv -w_0$
- ▶ aktivační funkce... f

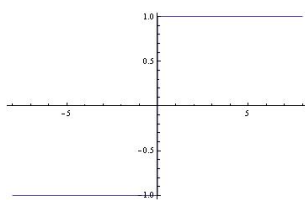
$$\Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^n x_i w_i - \theta\right) = f(\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{w}) = y$$



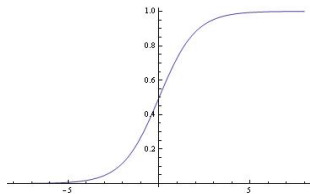
Aktivační funkce



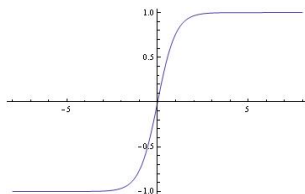
Obrázek: $I_{\{x \geq 1\}}$



Obrázek: signum



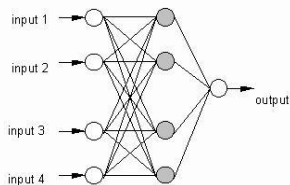
Obrázek: sigmoida



Obrázek: tanh

Notation:

- ▶ vstupní vrstva... \mathbf{x}
- ▶ skrytá vrstva... $\mathbf{w}_j, j = 1, \dots, h, \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_h)^T, f$
- ▶ výstupní vrstva... y, \mathbf{v}
- ▶ značení... $\eta = (\mathbf{w}_1^T, \dots, \mathbf{w}_h^T, \mathbf{v}^T)^T$



Dynamika sítě

1. $u_i = f(\mathbf{x}^T \mathbf{w}_i), i = 1, \dots, h$
2. $y = \mathbf{u}^T \mathbf{v} = \psi_h(\mathbf{x}, \eta)$

Věta

Nechť $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ ryze rostoucí s $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. Nechť

$J = \{\psi_h(\mathbf{x}, \eta); h \geq 1, \eta \in \mathbb{R}^{(n+1)h+h+1}\}$. Potom:

1. Pro každou borelovsky měřitelnou funkci $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ existuje posloupnost $\psi_k \in J$, $k \geq 1$, taková, že $\mu(x; |g(x) - \psi_k(x)| > \varepsilon) \rightarrow 0$ pro $k \rightarrow +\infty$, $\varepsilon > 0$, kde μ je libovolná psní míra na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.
2. Pro každou rostoucí funkci $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ existuje posloupnost $\psi_k \in J$, $k \geq 1$, taková, že $\sup_{x \in C} |g(x) - \psi_k(x)| \rightarrow 0$ pro $k \rightarrow +\infty$, kde C je libovolná kompaktní podmnožina \mathbb{R}^n .

Motivace

Umělý trh

- ▶ Podstatou práce není zkoumat trh samotný
- ▶ Podobnost se skutečným trhem
- ▶ "Hrací hřiště" – jeden agent = jedna strategie

Agenti

- ▶ předpovídání – jedna ze strategií FNN, SRN, VAR, VARMA
- ▶ různý počet vstupů
- ▶ dva výstupy – dividenda a změna ceny akcie
- ▶ počáteční peníze
- ▶ počáteční počet akcií
- ▶ snaha co nejvíce rozmnožit počáteční bohatství
- ▶ všichni stejně rizikově averzní

Stavba trhu

Prostředí trhu

- ▶ Bezrizikové aktivum s pevnou mírou výnosnosti r
- ▶ Rizikové aktivum
 1. cena v čase $t \dots p_t$
 2. dividenda v čase $t \dots d_t = \bar{d} + \rho(d_{t-1} - \bar{d}) + \varepsilon_{d,t}$

Agent i

- ▶ Počet akcií, které drží v čase $t \dots h_{i,t}$
- ▶ Předpověď budoucí ceny rizikového aktiva $E_{i,t}[p_{t+1}]$ a budoucí dividendy $E_{i,t}[d_{t+1}]$ v čase t
- ▶ $h_{i,t+1}^*$ počet akcií, které by chtěl agent i držet v čase $t + 1$
- ▶ Předpoklad CARA užitkové funkce a normálního rozdělení předpovědí

$$\Rightarrow h_{i,t+1}^* = \frac{E_{i,t}[p_{t+1} + d_{t+1}] - (1+r)p_t}{\lambda \sigma^2}$$

Vzorec pro podmíněný rozptyl předpovědi (pro všechny stejné):

$$\sigma_{i,t}^2 = (1 - \theta)\sigma_{t-1|n}^2 + \theta(p_t + d_t - E_{i,t-1}[p_t + d_t])^2,$$

kde

$$\sigma_{t|n}^2 = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} [P_{t-j} - \bar{P}_{t|n}]^2}{n-1} \quad (1)$$

s

$$\bar{P}_{t|n} = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} P_{t-j}}{n}. \quad (2)$$

$\sigma_{t|n}^2$ je historická volatilita.

Značení:

$$b_{i,t+1} = \begin{cases} h_{i,t+1}^* - h_{i,t}, & h_{i,t+1}^* \geq h_{i,t}, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

$$a_{i,t+1} = \begin{cases} h_{i,t} - h_{i,t+1}^*, & h_{i,t+1}^* < h_{i,t}, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

$$B_{t+1} = \sum_{i=1}^N b_{i,t+1}$$

$$A_{t+1} = \sum_{i=1}^N a_{i,t+1}$$

Úvod

Teorie NN

Umělý trh

Simulace

Kolik bude mít agent i v čase $t + 1$ akcií?

$$h_{i,t+1} = \begin{cases} h_{i,t} + b_{i,t+1} - a_{i,t+1}, & B_{t+1} = A_{t+1}, \\ h_{i,t} + \frac{A_{t+1}}{B_{t+1}} b_{i,t+1} - a_{i,t+1}, & B_{t+1} > A_{t+1}, \\ h_{i,t} + b_{i,t+1} - \frac{B_{t+1}}{A_{t+1}} a_{i,t+1}, & B_{t+1} < A_{t+1}. \end{cases}$$

Jak se změní cena akcií?

$$p_{t+1} = p_t(1 + \beta(B_{t+1} - A_{t+1})) + \varepsilon_{r,t},$$

kde β je např. \tanh a $\varepsilon_{r,t}$ má např. $N(0, \sigma_r^2)$ – šum.

Značení:

- ▶ $W_{i,t}$...bohatství agenta i v čase t
- ▶ $M_{i,t}$...peníze agenta i v čase t
- ▶ $h_{i,t}$...počet akcií agenta i v čase t

$$\Rightarrow W_{i,t} = M_{i,t} + h_{i,t} \cdot p_t$$

$$W_{i,t} = M_{i,t-1} \cdot (1 + r) + h_{i,t-1} \cdot (p_t + d_t)$$

Učení agentů jen na úrovni přepočítávání parametrů daných strategií. Jednou za k časových kroků.

1. porovnání bohatství všech agentů nabitého od minulého kontrolního okamžiku... $W_{i,t} - W_{i,t-k}$,
2. utvoření žebříčku agentů – pořadí agenta $R_{i,t}$,
3. $\Rightarrow r_{i,t} = \frac{R_{i,t}}{N}$ je pst, že agent přepočítá parametry své strategie, protože nabyl v mezidobí malého bohatství.

Druhý krok

Označme $\chi_{i,t}^k = \frac{W_{i,t} - W_{i,t-k}}{|W_{i,t-k}|}$ míru růstu bohatství agenta i .

$$\Rightarrow s_{i,t} = \frac{1}{1 + \exp\{\chi_{i,t}^k\}}$$

je pst přepočítání parametrů ve 2. kroku – byl málo efektivní.

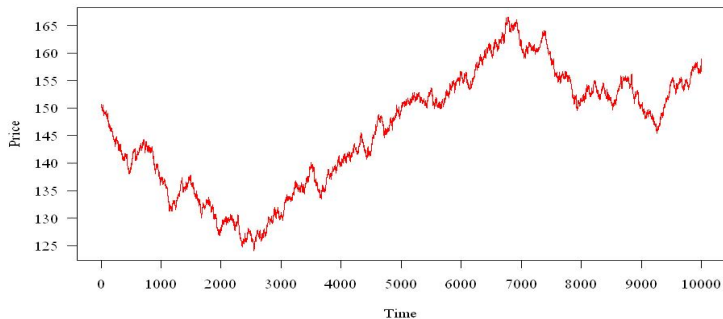
\Rightarrow celková pst, že agent přepočítá parametry své strategie:

$$u_{i,t} = r_{i,t} + (1 - r_{i,t})s_{i,t} = \frac{R_{i,t}}{N} + \frac{N - R_{i,t}}{N} \cdot \frac{1}{1 + \exp\{\chi_{i,t}^k\}}$$

Jaké vlastnosti by měl trh mít?

1. výnosy $r_t = \log(p_t) - \log(p_{t-1})$ mají rozdělení s těžkými konci
2. cena rizikového aktiva odpovídá náhodné procházce
 - ▶ $\{p_t\}$ má jednotkový kořen
 - ▶ r_t jsou i.i.d.

Price Evolution



Co bylo splněno?

- ▶ $\{p_t\}$ má jednotkový kořen
- ▶ r_t jsou i.i.d.

Nelze zamítnout hypotézu, že r_t mají normální rozdělení.

pořadí	strategie	bohatství	počet učení
1	VARMA(3,2)	3385824	36
2	VARMA(2,2)	2623202	38
3	SRN(2,2)	2234082	40
4	FNN(1,1)	2225980	27
5	VARMA(1,2)	2223562	34
6	VARMA(3,1)	2220488	37
7	FNN(1,1)	2219796	36
8	VAR(3)	2201358	36

strategy	pr. konečné bohatství	pr. počet učení
VAR	2171119	43.6
VARMA	2226319	47.3
FNN	2064486	50.7
SRN	2047640	54.3

Market parameters	
Initial amount of money	100
Total amount of shares	30
interest rate r	0.001
price adjustment function	tanh
price adjustment β_1	2×10^{-6}
price adjustment β_2	2×10^{-6}
Price process	
Initial mean μ_p	150
Initial variance σ_p^2	0.16
noise parameter σ_r^2	0.04
Dividend process	
ρ	0.95
d	0.2
σ_d	0.02
Learning parameters	
k	150
m	180
Traders	
Number of traders in each group	15
Total number of traders	60
Risk aversion parameter λ	3
parameter θ	0.01333
parameter n	10

- [1] Šíma, J., and Neruda, R.: *Teoretické Otázky Neuronových Sítí*. Matfyzpress, Praha, 1996.
- [2] Lütkepohl, H.: *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*. Springer, 2005.
- [3] Chen, S., and Yeh, C.: *Genetic Programming in Agent-Based Artificial Markets: Simulations and Analysis*.
- [4] Reinsel, G. C.: *Elements of Multivariate Time Series Analysis*. Springer, 2003.
- [5] Matassini, L., and Franci, F.: On Financial Markets Trading, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **3–4** (2001), 526–542.
- [6] LeBaron, B.: *Building the Santa Fe Artificial Stock Market*. Brandeis University, 2002.
- [7] Saracoglu, R.: *The Maximum Likelihood Estimation of Parameters in Mixed Autoregressive Moving-Average Multivariate Models*. Federal Reserve Bank of Minneapolis, 1977.
- [8] Berndt, E. K., and Hall, B. H., and Hall, R. E., and Hausman, J. A.: Estimation and Inference in Nonlinear Structural Models, *Annals of Economic and Social Measurement* (1974), 653–665.
- [9] Dorffner, G.: Neural Networks for Time Series Processing, *Neural Network World* **6** (1996), 447–468.
- [10] Boden, M.: *A Guide to Recurrent Neural Networks and Backpropagation*. In the Dallas project, 2002.
- [11] Hamilton, J. D.: *Time Series Analysis*. Princeton University Press, 1994.
- [12] Palmer, R. G., and Arthur, W. B., and Holland, J. H., and LeBaron, B., and Taylor, P.: Artificial Economic Life: A Simple Model of a Stockmarket, *Physica D* **75** (1994), 264–274.
- [13] Mcnelis, P. D.: *Neural Networks in Finance: Gaining Predictive Edge in the Market*. Elsevier Academic Press, 2005.
- [14] Franke, J., and Härdle, W. K., and Hafner, C. M.: *Statistics of Financial Markets: An Introduction*. Springer, 2008.

Děkuji za pozornost. Vaše dotazy.