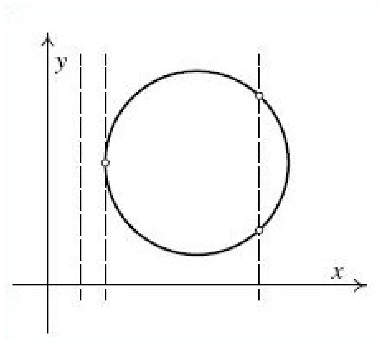
Příklady a komentáře ke kapitolám 9, 10 (Základy matematiky)

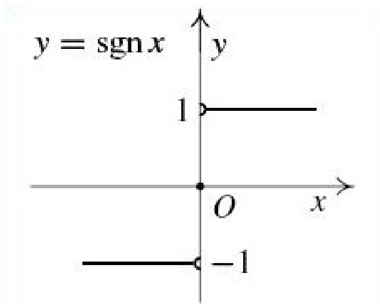
- Uvažujme předpisy funkcí $f\colon y = 2\ln x$, $g\colon y = \ln x^2$. Nemáme-li zadány $D(f), D(g)$, vyšetříme, kdy mají předpisy smysl: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, $D(g) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$. Všimněme si, že $f \neq g$, přestože pro přípustná x platí $2\ln x = \ln x^2$.

- Kružnice není grafem funkce:



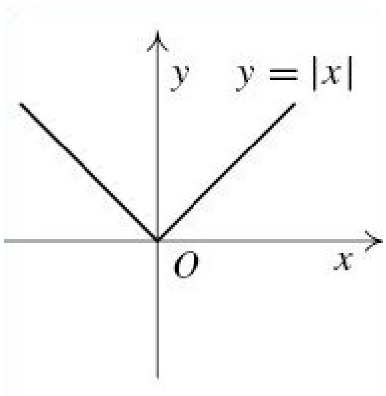
  Promyslete si, jak je porušena definice zobrazení. Lze tuto křivku popsat více funkcemi? Jakými?

- Graf funkce $f\colon y = \operatorname{sgn} x$ (čteme: signum), kde $f(x) = -1$ pro $x < 0$, $f(0) = 0$ a $f(x) = 1$ pro $x > 0$:



  Platí $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \{-1, 0, 1\}$. Funkce $\operatorname{sgn} x$ je neklesající a ohraničená na $\mathbb{R}$. Je to funkce lichá.

- Graf funkce $f(x) = |x|$:



Tato funkce je ohraničená zdola, neohraničená shora. Je to funkce sudá.

- Tzv. Dirichletova funkce je definována takto

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{I}. \end{cases} \tag{1}$$

Platí $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \{0, 1\}$. Graf této funkce nejsme schopni nakreslit. Určete si množinu všech period této funkce a všimněte si, že nejmenší perioda neexistuje.

- Dokažte, že funkce $x/(1 + x^2)$ je ohraničená na $\mathbb{R}$.
Důkaz: Platí $(|x| - 1)^2 \geq 0$, proto $x^2 + 1 \geq 2|x|$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Odtud dostáváme

$$\left| \frac{x}{1 + x^2} \right| = \frac{|x|}{1 + x^2} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} = \frac{1}{2}$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$. Tedy funkce je ohraničená.

- Pro funkce $f(x) = x^2$ a $g(x) = 1 - 2x$ vytvořte funkci $h = (3f + 2g)/f$ a určete definiční obor.
Řešení: Platí

$$h(x) = \frac{3x^2 + 2 - 4x}{x^2} = 3 - \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2},$$

$D(h) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

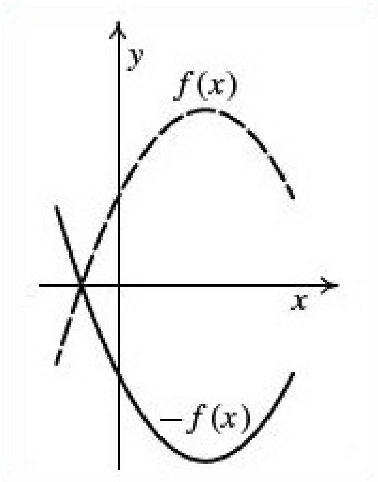
- Pro funkce $f(x) = 3 - 2x$, $g(x) = \ln x$ určete $g \circ f$ a $D(g \circ f)$.
Řešení: Platí $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \ln(3 - 2x)$. Uvědomte si, že zde nemáme $H(f) \subseteq D(f)$, neboť $H(f) = \mathbb{R}$ a $D(g) = (0, \infty)$. Potřebujeme tedy vzít $x \in D(f)$ tak, aby $3 - 2x \in (0, \infty)$, tj. $x < 3/2$. Tedy $D(g \circ f) = (-\infty, 3/2)$.

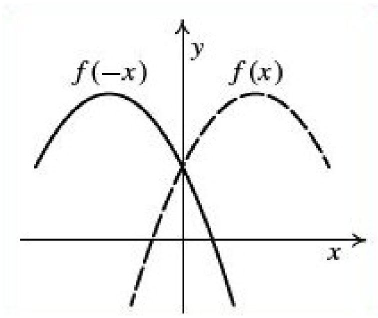
- Ověřte, že funkce $f(x) = (x+2)/(x-3)$ je prostá a najděte f^{-1}. Určete definiční obory a obory hodnot obou funkcí.
Řešení: Zřejmě $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Vezměme $x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 \neq x_2$. Je lehké vidět, že

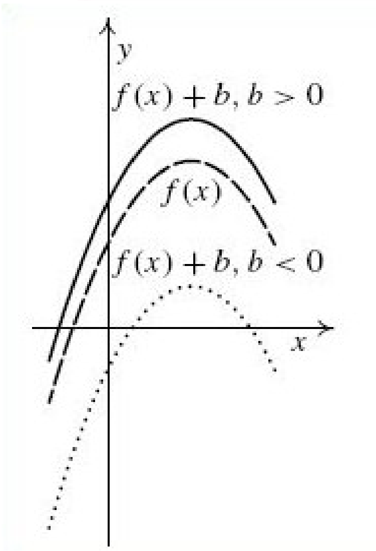
$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{5(x_2 - x_1)}{(x_1 - 3)(x_2 - 3)} \neq 0.$$

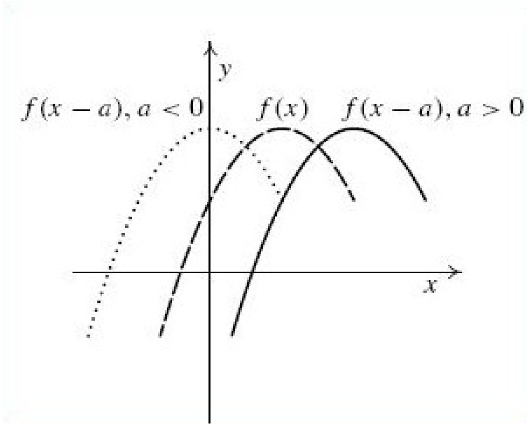
Proto f je prostá. Tedy existuje f^{-1} a navíc platí $H(f^{-1}) = D(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Inverzní funkci získáme tak, že z rovnosti $y = (x+2)/(x-3)$ vyjáříme x, tj. $x = (2+3y)/(y-1)$. Přeznačením dostáváme $f^{-1}(x) = (2 + 3x)/(x - 1)$. Určíme zbývající obory: $H(f) = D(f^{-1}) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

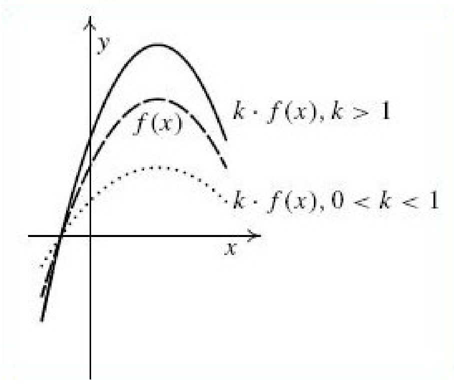
- Grafy ilustrující transformace grafu funkce:

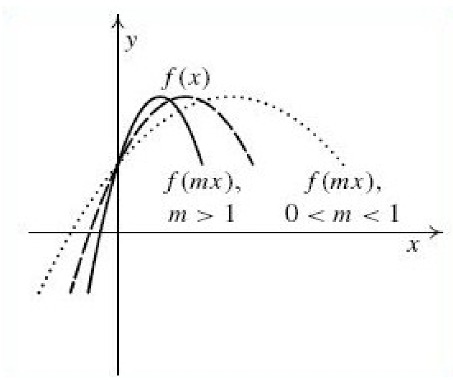








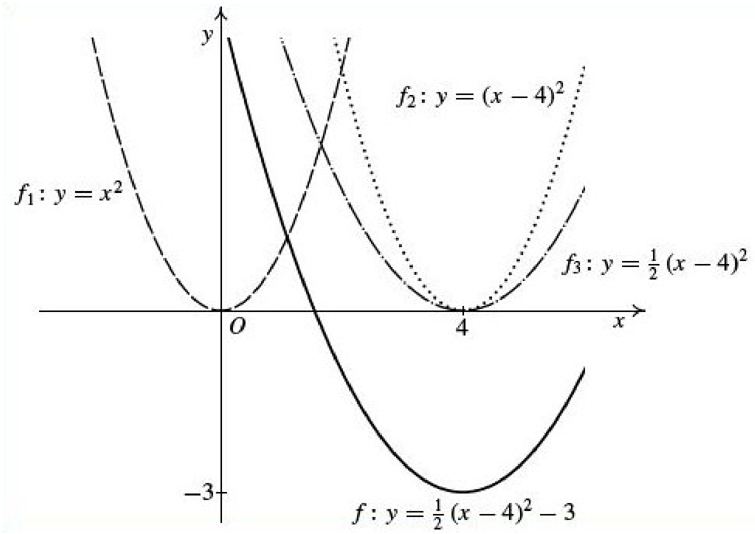




- Pomocí transformací grafu (základní elementární) funkce $y = x^2$, nakreslete graf funkce $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 5$.
Řešení: Nejprve provedeme vhodnou úpravu (doplnění na čtverec):

$$f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 8x + 16 - 16) + 5 = \frac{1}{2}(x-4)^2 - 3.$$

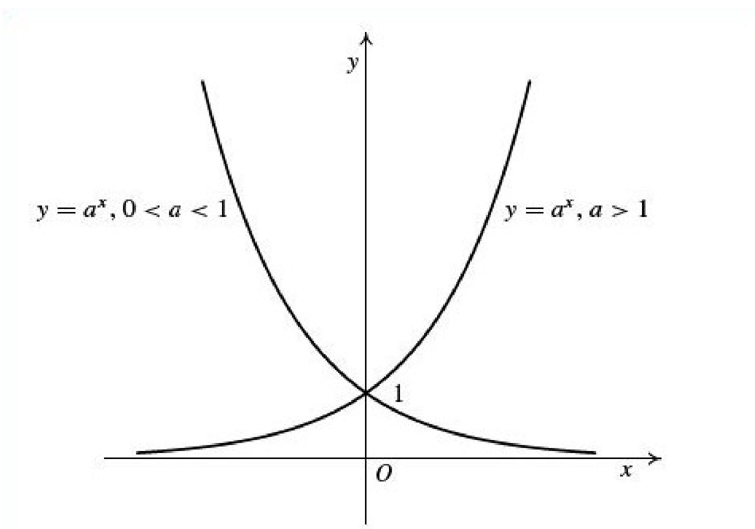
Nyní postupně sestrojíme funkce f_1, f_2, f_3, f:



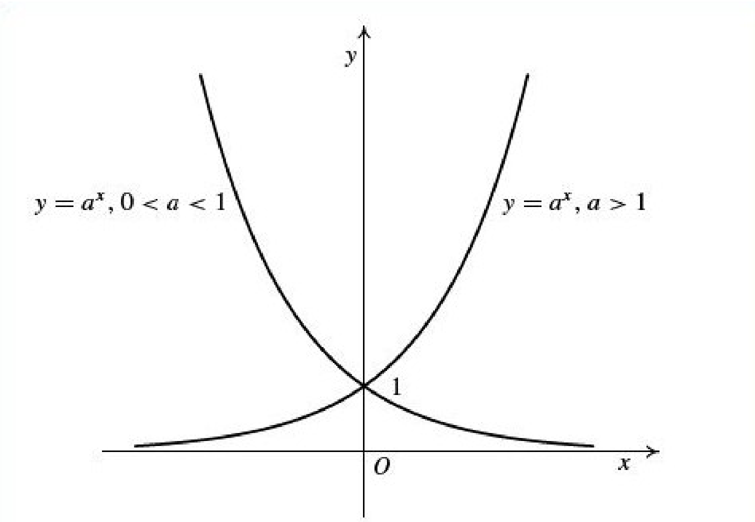
- Rozložte v $\mathbb{R}$ polynom $P(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 1$.
  Řešení: Platí
$$\begin{aligned} P(x) &= x^3(x^2 - 2x + 1) + x^2 - 2x + 1 \\ &= (x^2 - 2x + 1)(x^3 + 1) \\ &= (x^2 - 2x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1) \\ &= (x - 1)^2(x + 1)(x^2 - x + 1). \end{aligned}$$

- Vyjádřete racionální ryze lomenou funkci
$$R(x) = \frac{2x^6 - 9x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 7x + 4}{x^4 - 3x^2 + 2x - 1}.$$
  jako součet polynomu a racionální ryze lomené funkce.
  Řešení: Dělením polynomů v čitateli a jmenovateli (proveďte sami) dostáváme
$$R(x) = 2x^3 - 3 + \frac{x^2 - x + 1}{x^4 - 3x^2 + 2x - 1}.$$

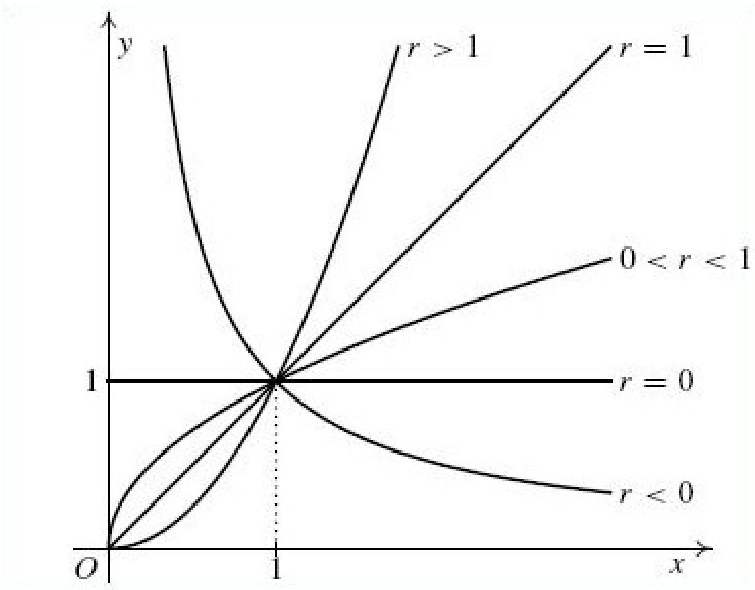
- Graf exponenciální funkce $y = a^x$ pro různé hodnoty a:



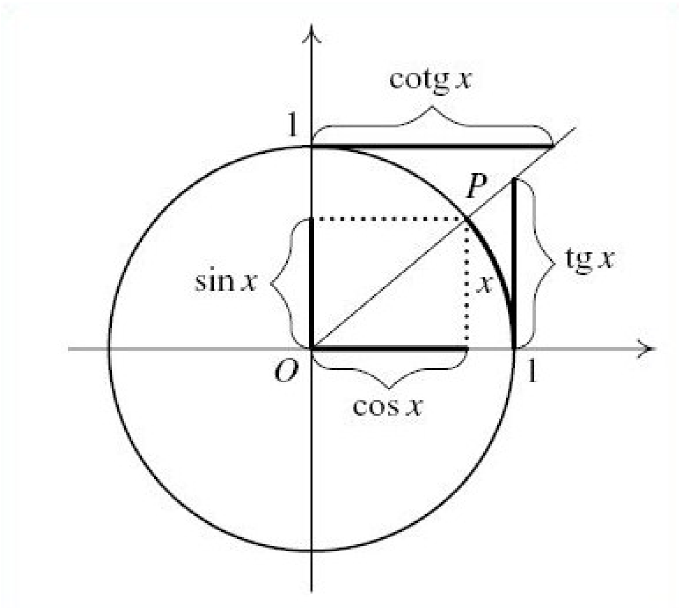
- Graf logaritmické funkce $y = \log_a x$ pro různé hodnoty a:



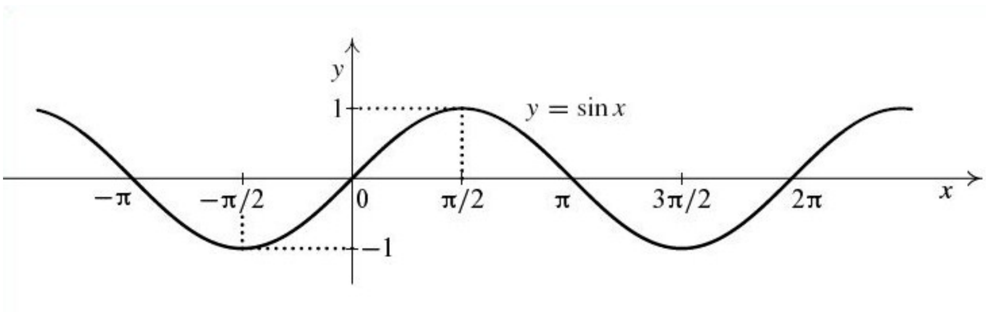
- Graf mocninné funkce $y = x^r$ pro různé hodnoty r:



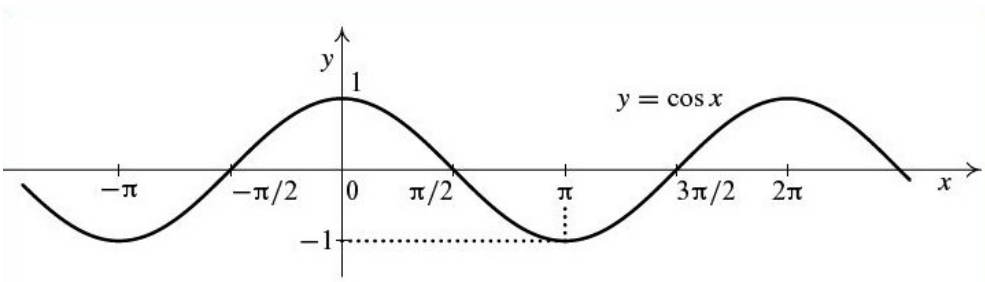
- Obrázek ilustrující definici goniometrických funkcí:



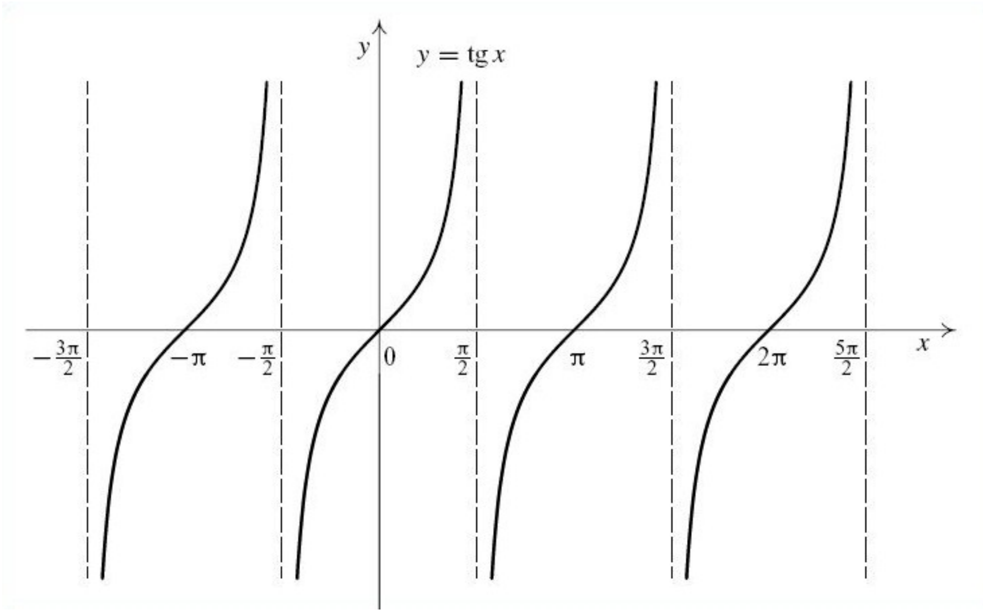
- Graf funkce $y = \sin x$:



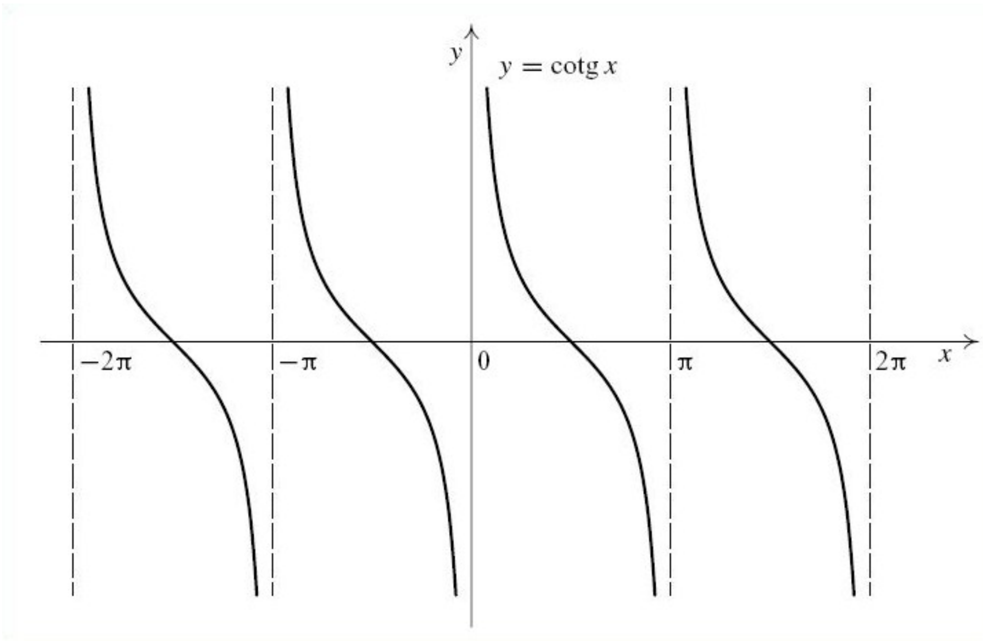
- Graf funkce $y = \cos x$:



- Graf funkce $y = \operatorname{tg} x$:



- Graf funkce $y = \operatorname{cotg} x$:



- Dokažte: Jestliže $a, b \in (0, \infty)$, $a \neq 1 \neq b$, potom $\log_a x = \log_b x / \log_b a$ pro každé $x \in (0, \infty)$.
  Důkaz: Je-li $y = \log_a x$, potom $x = a^y$. Proto $\log_b x = \log_b a^y = y \log_b a$. Odtud plyne tvrzení.

- Určete $D(f)$ funkce $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} \frac{x-3}{x+3}$. Jaký je definiční obor zdánlivě stejné funkce $g(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x-3) - \log_{\frac{1}{3}}(x+3)$ (víme totiž, že pro „přípustná“ x_1, x_2 platí $\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$).
  Řešení: Potřebujeme $\frac{x-3}{x+3} > 0$, a proto $D(f) = (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$. Dále zřejmě platí $D(g) = (3, \infty)$.
  Promyslete si skutečný vztah mezi f a g.

- Nakreslete graf funkce $f(x) = |2\sin 2x|$.
  Návod: Použijte transformace grafu funkce a postupně sestrojte $\sin x, \sin 2x, 2\sin 2x, f(x)$.

- Dokažte, že $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$ pro každé $x \in \langle -1, 1\rangle$, víte-li, že $\cos(\pi/2 - x) = \sin x$.
  Důkaz: Označme $y = \arcsin x$. Potom $y \in \langle -\pi/2, \pi/2\rangle$ a $\sin y = x$. Ze vztahů mezi goniometrickými funkcemi plyne $\cos(\pi/2 - y) = \sin y = x$, přičemž $\pi/2 - y \in \langle 0, \pi\rangle$ a $\pi/2 - y = \arccos x$. Odtud $\arcsin x + \arccos x = y + \pi/2 - y = \pi/2$.

- Určete $D(f)$ funkce
  $$f(x) = \sqrt{\ln \frac{5x - x^2}{4}} + \arcsin \frac{3}{x}.$$
  Řešení: Musí platit
  $$\ln \frac{5x - x^2}{4} \geq 0 \quad \wedge \quad -1 \leq \frac{3}{x} \leq 1,$$
  tj.
  $$\frac{5x - x^2}{4} \geq 1 \quad \wedge \quad \frac{3}{x} \geq -1 \quad \wedge \quad \frac{3}{x} \leq 1.$$
  Odtud již snadno dostáváme $D(f) = \langle 3, 4\rangle$.