

# Numerické modelování proudění v říčních tocích

Marek Brandner, Jiří Egermaier, Hana Kopincová

Katedra matematiky, Fakulta aplikovaných věd, Západočeská univerzita v Plzni

12. května 2008

# Proč se zabýváme touto úlohou?

- ▶ Vývoj efektivních metod pro simulaci proudění v říčních korytech a pro simulaci povodní (FLOREON – Floods Recognition on the Net).
- ▶ Aplikace vytvořených algoritmů na řadu jiných problémů (bio)mechaniky
- ▶ Studium úloh pro PDR hyperbolického typu se zdrojovými členy nebo s PDR v nekonzervativním tvaru.
- ▶ Řád není všechno.

# Obsah

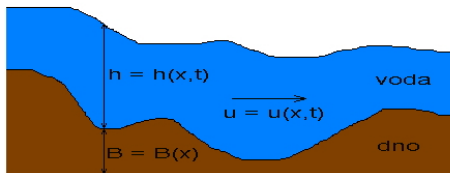
- ▶ Matematický model
- ▶ Rozšířené formulace
- ▶ Požadované vlastnosti schémat
- ▶ Metoda konečných objemů
- ▶ Problematika ustálených stavů
- ▶ Centrální schémata
- ▶ Jednostranná schémata
- ▶ Jednostranně-centrální schémata
- ▶ Experimenty

# Formulace problému – obecný případ

$$a_t + q_x = 0,$$

$$q_t + \left( \frac{q^2}{a} + gI_1 \right)_x = -gaB_x + gI_2,$$

$$I_1 = \int_0^{h(x,t)} [h(x,t) - \eta] \sigma(x, \eta) d\eta, \quad I_2 = \int_0^{h(x,t)} [h(x,t) - \eta] \frac{\partial \sigma}{\partial x} d\eta$$



# Formulace problému – koryto s obdélníkovým průřezem

- ▶ Proměnný průřez koryta (možnost získání dat, drsnost koryta)

$$\begin{aligned} a_t + q_x &= 0, \\ q_t + \left( \frac{q^2}{a} + \frac{qa^2}{2l} \right)_x &= \frac{ga^2}{2l^2} l_x - gab_x. \end{aligned}$$

- ▶ Konstantní průřez koryta (vazba na 2D případ)

$$\begin{aligned} h_t + (hu)_x &= 0, \\ (hu)_t + \left( hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right)_x &= -ghB_x. \end{aligned}$$

- ▶  $B_x = 0$  klasické Saint Venantovy rovnice

# Rozšířené formulace

- ▶ Homogenní, autonomní, konzervativní případ (standardní případ – Eulerovy rovnice, proudění v kanále s konstantním průřezem a rovným dnem)

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_t + [\mathbf{f}(\mathbf{q})]_x &= \mathbf{0}, \quad x \in R, \quad t \in (0, T), \\ \mathbf{q}(x, 0) &= \mathbf{q}_0(x), \quad x \in R,\end{aligned}$$

kde  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(x, t) : R \times \langle 0, T \rangle \rightarrow R^m$ ,  $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_0(x) : R \rightarrow R^m$ ,  
 $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{q}) : R^m \rightarrow R^m$ .

- ▶ Homogenní, neautonomní, konzervativní případ

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_t + [\mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{w}(x))]_x &= \mathbf{0}, \quad x \in R, \quad t \in (0, T), \\ \mathbf{q}(x, 0) &= \mathbf{q}_0(x), \quad x \in R,\end{aligned}$$

kde  $\mathbf{w} = \mathbf{w}(x) : R \rightarrow R^s$ .

# Rozšířené formulace

- ▶ Rozšířená, homogenní, autonomní, konzervativní formulace (přidáme  $\mathbf{w}_t = \mathbf{0}$ , bohatší struktura řešení)

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{q}}_t + [\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{q}})]_x &= \mathbf{0}, \quad x \in R, \quad t \in (0, T), \\ \tilde{\mathbf{q}}(x, 0) &= \tilde{\mathbf{q}}_0(x), \quad x \in R,\end{aligned}$$

kde  $\tilde{\mathbf{q}} = [\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{w}}]^T$ ,  $\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{q}}) = [\mathbf{f}(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{w}}), \mathbf{0}]^T$ ,  $\tilde{\mathbf{q}}_0(x) = [\mathbf{q}_0(x), \mathbf{w}(x)]^T$ .

# Rozšířené formulace

- ▶ Nehomogenní, neautonomní případ

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_t + [\mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{w}(x))]_x &= \mathbf{B}(\mathbf{q}, \mathbf{w}(x))\mathbf{w}_x, \quad x \in R, \quad t \in (0, T), \\ \mathbf{q}(x, 0) &= \mathbf{q}_0(x), \quad x \in R, \end{aligned}$$

kde  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{q}, \mathbf{w})$  maticová funkce typu  $m \times s$ .

- ▶ Rozšířená, homogenní, autonomní, kvazilineární formulace

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{q}}_t + \mathbf{C}(\tilde{\mathbf{q}})\tilde{\mathbf{q}}_x &= \mathbf{0}, \quad x \in R, \quad t \in (0, T), \\ \tilde{\mathbf{q}}(x, 0) &= \tilde{\mathbf{q}}_0(x), \quad x \in R, \end{aligned}$$

kde

$$\mathbf{C}(\tilde{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_q & \mathbf{f}_w - \mathbf{B}(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{w}}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

platí  $\mathbf{f}_x = \mathbf{f}_q \mathbf{q}_x + \mathbf{f}_w \mathbf{w}_x$ . Slabé řešení?



# Rozšířené formulace

- ▶ Další rozšíření ( $\mathbf{f}_q \times$  rovnice, konstrukce algoritmu – numerické potřeby)

$$[\mathbf{f}(\mathbf{q})]_t + \mathbf{f}_q[\mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{w}(x))]_x - \mathbf{f}_q \mathbf{B}(\mathbf{q}, \mathbf{w}(x)) \mathbf{w}_x = \mathbf{0},$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{q}}_t + \hat{\mathbf{D}}(\hat{\mathbf{q}}) \hat{\mathbf{q}}_x &= \mathbf{0}, \quad x \in R, \quad t \in (0, T), \\ \hat{\mathbf{q}}(x, 0) &= \hat{\mathbf{q}}_0(x), \quad x \in R, \end{aligned}$$

kde  $\hat{\mathbf{q}} = [\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{w}}, \hat{\mathbf{f}}]^T$ ,

$$\hat{\mathbf{D}}(\hat{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_q & \mathbf{f}_w - \mathbf{B}(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{w}}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{f}_q \mathbf{B}(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{w}}) & \mathbf{f}_q \end{bmatrix},$$

kde  $\hat{\mathbf{q}}(x) = [\mathbf{q}_0(x), \mathbf{w}(x), \mathbf{f}(\mathbf{q}_0(x), \mathbf{w}(x))]^T$ .

# Rozšířené formulace – model proudění v říčním korytu)

$$\begin{aligned}
 a_t + q_x &= 0, \\
 q_t + \left( \frac{q^2}{a} + \frac{qa^2}{2l} \right)_x &= \frac{ga^2}{2l^2} l_x - gab_x, \\
 \mathbf{q} &= [a, q]^T, \quad \mathbf{w}(x) = [l(x), b(x)]^T, \\
 \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{w}) &= \left[ q, \frac{q^2}{a} + \frac{ga^2}{2l} \right]^T, \\
 \mathbf{B}(\mathbf{q}, \mathbf{w}(x)) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{ga^2}{2l^2} & -ga \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

# Rozšířené formulace – model proudění v říčním korytu)

$$\hat{\mathbf{D}}(\hat{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-q^2}{a^2} + \frac{ga}{l} & \frac{2q}{a} & \frac{-ga^2}{l^2} & ga & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-ga^2}{2l^2} & ga & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{-gqa}{l^2} & 2gq & \frac{-q^2}{a^2} + \frac{ga}{l} & \frac{2q}{a} & 0 \end{bmatrix},$$

kde  $\hat{\mathbf{q}} = [a, q, l, b, q, \frac{q^2}{a} + \frac{ga^2}{2l}]$ . Druhá a pátá rovnice mají stejnou neznámou. Pátou rovnici vyřadíme.

# Rozšířené formulace – model proudění v říčním korytu)

- ▶ Rozšířená formulace

$$\begin{aligned}\check{\mathbf{q}}_t + \check{\mathbf{D}}(\check{\mathbf{q}})\check{\mathbf{q}}_x &= \mathbf{0}, \quad x \in R, \quad t \in (0, T), \\ \check{\mathbf{q}}(x, 0) &= \check{\mathbf{q}}_0(x), \quad x \in R,\end{aligned}$$

kde

$$\check{\mathbf{D}}(\check{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-q^2}{a^2} + \frac{ga}{l} & \frac{2q}{a} & \frac{-ga^2}{l^2} & ga & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-q^2}{a^2} + \frac{ga}{l} & \frac{-gqa}{l^2} & 2gg & \frac{2q}{a} \end{bmatrix},$$

$$\check{\mathbf{q}} = [a, q, l, b, \frac{q^2}{a} + \frac{ga^2}{2l}]^T.$$

- ▶ Ustálený stav  $\mathbf{D}(\check{\mathbf{q}})\check{\mathbf{q}}_x = \mathbf{0}$ .

# Rozšířené formulace – model proudění v říčním korytu

Vlastní čísla a vlastní vektory (rychlost gravitačních vln  $\times$  rychlost zvuku):

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 2u, \quad \lambda_4 = u + \sqrt{\frac{ga}{l}}, \quad \lambda_5 = u - \sqrt{\frac{ga}{l}},$$

$$\mathbf{r}_1 = \left[-\frac{ga}{\lambda_4 \lambda_5}, 0, 0, -1, ga\right]^T,$$

$$\mathbf{r}_2 = \left[-\frac{ga^2}{l^2 \lambda_4 \lambda_5}, 0, 1, 0, \frac{ga^2}{2l^2}\right]^T,$$

$$\mathbf{r}_3 = [0, 0, 0, 0, 1]^T,$$

$$\mathbf{r}_4 = [1, \lambda_4, 0, 0, \lambda_4^2]^T,$$

$$\mathbf{r}_5 = [1, \lambda_5, 0, 0, \lambda_5^2]^T.$$

# Jaká schémata chceme?

**Konzistentní** – konzistence je míněna ve smyslu metody konečných objemů (nikoliv konzistence s rovnicí, ale konzistence s tokovou funkcí).

**Konzervativní** – pokud lze problém přepsat do konzervativního (divergentního) tvaru, požadujeme, aby i příslušné numerické schéma bylo v konzervativním tvaru.

**Udržení ustálených stavů** – požadujeme, aby diferenční schémata udržovala diskrétní analogie teoretických ustálených stavů (metody štěpení nevhodné).

**Pozitivní semidefinitnost schémat** – některé fyzikální veličiny (průřez, hloubka) jsou nezáporné; některé neznámé funkce v příslušné úloze jsou nezáporné; požadujeme, aby přibližné řešení zachovávalo tuto vlastnost.

# Jaká schémata chceme?

**Řád metody** – cílem je navrhnout schéma vyššího řádu (pro hladké případy); v řadě případů je problémem dosáhnout vyššího řádu než formálně druhého; přesto schémata vysokého řádu dávají v řadě případů zajímavé výsledky.

**Vysoké rozlišení** – požadujeme dále následující:

1. schémata jsou vyššího řádu v bodech, kde je řešení hladké;
2. schémata dobře aproximují řešení v okolí rázových vln a kontaktních nespojitostí;
3. schémata negenerují umělé oscilace;
4. k dosažení stejně přesného řešení je třeba méně diskretizačních bodů než u schématu prvního řádu.

# Jaká schémata chceme?

**Stabilita a konvergence** – otázkami stability a konvergence se nebudeme zde zabývat. Konvergence k jakému řešení? CFL podmínka. Upwind schémata.

**Kontext** – některá vstupní data jsou vypočtená. Data mohou být ovlivněna nějakými předpoklady.



# Metody s vysokým rozlišením

- ▶ schémata typu shock capturing, shock fitting
- ▶ diskrétní, semidiskrétní;
- ▶ centrální, jednostranné, jednostranně-centrální;
- ▶ slope limiters, flux limiters, TVD limiters;
- ▶ TVD, (W)ENO, Godunovova metoda (se zobecněnými Riemannovými řešiči), metody typu lattice Boltzmann;
- ▶ rozklad vlny, rozklad tokové vlny.

# Diskretizace

$$x_j = j\Delta x, j \in Z, \Delta x > 0,$$

$$t_n = n\Delta t, n \in N_0, \Delta t > 0,$$

$$x_{j+1/2} = x_j + \Delta x/2, t_{n+1/2} = t_n + \Delta t/2,$$

$$\mathbf{q}_j^n = \mathbf{q}(x_j, t_n), \mathbf{Q}_j^n = \mathbf{Q}(x_j, t_n) \approx \mathbf{q}_j^n,$$

$$\mathbf{q}_j(t) = \mathbf{q}(x_j, t), \mathbf{Q}_j(t) = \mathbf{Q}(x_j, t) \approx \mathbf{q}_j(t).$$

# Diskrétní metody – konzervativita, konzistence

$$\bar{\mathbf{q}}_j^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \mathbf{q}(x, t_n) dx$$

$$\bar{\mathbf{f}}_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}(\mathbf{q}(x_{j+1/2}, t)) dt,$$

$$\bar{\mathbf{q}}_j^{n+1} = \bar{\mathbf{q}}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{\mathbf{f}}_{j+1/2}^{n+1/2} - \bar{\mathbf{f}}_{j-1/2}^{n+1/2}),$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_j^n \approx \bar{\mathbf{q}}_j^n, \bar{\mathbf{F}}_{j+1/2}^{n+1/2} \approx \bar{\mathbf{f}}_{j+1/2}^{n+1/2},$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_j^{n+1} = \bar{\mathbf{Q}}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{\mathbf{F}}_{j+1/2}^{n+1/2} - \bar{\mathbf{F}}_{j-1/2}^{n+1/2}).$$

# Semidiskrétní metody – konzervativita, konzistence

$$\bar{\mathbf{Q}}_j = \bar{\mathbf{Q}}_j(t) \approx \bar{\mathbf{q}}_j = \bar{\mathbf{q}}_j(t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \mathbf{q}(x, t) dx,$$

$$\frac{d}{dt} \bar{\mathbf{q}}_j = -\frac{1}{\Delta x} [\mathbf{f}(\mathbf{q}(x_{j+1/2}, t)) - \mathbf{f}(\mathbf{q}(x_{j-1/2}, t))],$$

$$\frac{d}{dt} \bar{\mathbf{Q}}_j = -\frac{1}{\Delta x} [\mathbf{F}_{j+1/2} - \mathbf{F}_{j-1/2}].$$

# Ustálené stavy – klid v jezeře

## ▶ Klid v jezeře

$$q(x, t) = 0, \quad h(x, t) + b(x) = \text{konst.}$$

$$q(x, t) = 0, \quad \left( \frac{q^2}{a} + \frac{ga^2}{2l} \right)_x - \frac{ga^2}{2l^2} l_x + gab_x = 0$$

$$\Downarrow$$

$$ghl(h + b)_x = 0.$$

## ▶ Diskrétní verze klidu v jezeře

$$\bar{Q}_j = 0, \quad \bar{H}_j + \bar{B}_j = \text{konst.}$$

# Ustálené stavy – obecný případ (pro hladké řešení)

$$q_x = 0, \left( \frac{q^2}{a} + \frac{ga^2}{2l} \right)_x = \frac{ga^2}{2l^2} l_x - gab_x,$$

$$\Downarrow$$

$$\left( \frac{q^2}{a} + \frac{ga^2}{2l} \right)_x = \left( -u^2 + \frac{ga}{l} \right) a_x - \frac{ga^2}{2l^2} l_x$$

$$\Downarrow$$

$$\left( -u^2 + \frac{ga}{l} \right) a_x = \frac{ga^2}{l} l_x - gab_x,$$

Bernoulliho rovnice:  $\left( \frac{1}{2}u^2 + gb + \frac{ga}{l} \right)_x = 0.$

# Ustálené stavy – obecný případ (včetně klidu v jezeře)

- ▶  $Q_L = \bar{Q}_j, Q_R = \bar{Q}_{j+1}, \Delta L = L_R - L_L,$   
 $\Delta Q = Q_R - Q_L = A_R U_R - A_L U_L, \Delta B = B_R - B_L, \Delta \Phi = \Phi_R - \Phi_L$



$$\Delta \Phi = \left( \frac{Q_R^2}{A_R} - \frac{Q_L^2}{A_L} \right) + \frac{g}{2} \left( \frac{A_R^2}{L_R} - \frac{A_L^2}{L_L} \right)$$

- ▶  $Q_L = Q_R \Rightarrow \Delta \Phi = \left( -|U_L U_R| + g \frac{\bar{A} \bar{L}}{L_L L_R} \right) \Delta A - \frac{g}{2} \frac{\bar{A}^2}{L_L L_R} \Delta L,$  kde  
 $\bar{L} = (L_L + L_R)/2, \bar{A} = (A_L + A_R)/2, \bar{A}^2 = (A_L^2 + A_R^2)/2$



$$\frac{1}{2} U_L^2 + g B_L + \frac{g A_L}{L_L} = \frac{1}{2} U_R^2 + g B_R + \frac{g A_R}{L_R}.$$

⇓

$$\left( -\bar{U}^2 + g \frac{\bar{A}}{\bar{L}} L_L L_R \right) \Delta A = -\bar{A} g \Delta B + \frac{g \bar{A}^2}{L_L L_R} \Delta L$$

# Centrální schémata

Laxovo-Friedrichsovo schéma (lze implementovat po složkách, konvergence k entropickému řešení):

$$\bar{Q}_j^{n+1} = \frac{1}{2}(\bar{Q}_{j-1}^n + \bar{Q}_{j+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}[\mathbf{f}(\bar{Q}_{j+1}^n) - \mathbf{f}(\bar{Q}_{j-1}^n)]$$

Toková funkce pro konzervativní schéma:

$$\mathbf{F}_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2}[\mathbf{f}(\bar{Q}_j^n) + \mathbf{f}(\bar{Q}_{j+1}^n)] - \frac{\Delta x}{2\Delta t}(\bar{Q}_{j+1}^n - \bar{Q}_j^n)$$



# Centrální schémata – konstantní obdélníkové koryto

$$h_t + q_x = 0,$$

$$q_t + \left( \frac{q^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \right)_x = -ghb_x.$$

Dále zavedeme substituci  $y = h + b$ . Pak lze psát

$$y_t + q_x = 0,$$

$$q_t + \left( \frac{q^2}{y-b} + \frac{1}{2}g(y-b)^2 \right)_x = -g(y-b)b_x.$$

Klid v jezeře  $y(x, t) = \text{konst.}$ ,  $q(x, t) = 0$ .

# Centrální schémata

$$F_{j+1/2}^{n,1} = \frac{1}{2}(\bar{Q}_j^n + \bar{Q}_{j+1}^n) - \frac{\Delta x}{2\Delta t}(\bar{Y}_{j+1}^n - \bar{Y}_j^n),$$

$$F_{j+1/2}^{n,2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{(\bar{Q}_j^n)^2}{\bar{Y}_j^n - \bar{B}_j} + \frac{(\bar{Q}_{j+1}^n)^2}{\bar{Y}_{j+1}^n - \bar{B}_{j+1}} + \frac{1}{2}g(\bar{Y}_j^n - \bar{B}_j) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}g(\bar{Y}_{j+1}^n - \bar{B}_{j+1}) \right] - \frac{\Delta x}{2\Delta t}(\bar{Q}_{j+1}^n - \bar{Q}_j^n),$$

$$S_j^{1,n} = 0,$$

$$S_j^{n,2} = -\frac{g}{4\Delta x}(\bar{B}_{j+1} - \bar{B}_j) \\ (\bar{Y}_{j+1}^n - \bar{B}_{j+1} + \bar{Y}_j^n - \bar{B}_j + \bar{Y}_{j-1}^n - \bar{B}_{j-1}).$$

Lze udržet pouze speciální ustálené stavy (neznámé konstantní v čase i prostoru). Metoda však není obecně vhodná.

# Jednostranná schémata – skalární případ

$$\begin{aligned} q_t + aq_x &= 0, \quad x \in R, \quad t \in (0, T), \quad a \in R, \\ q(x, 0) &= q_0(x), \quad x \in R \end{aligned}$$

Řešení:  $q(x, t) = q_0(x - at)$ . Užítí algoritmů RSA (REA). Rekonstrukce řešení v čase  $t$  z hodnot  $\bar{Q}_j(t)$ :  $\hat{Q}_j(x, t)$  pro  $x \in (x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$ . Tuto rekonstrukci považujeme za počáteční podmínku. Řešení sady Riemannových problémů (v našem případě využití tvaru řešení).

$$Q_{j+1/2}^+ = \hat{Q}_{j+1}(x_{j+1/2}^+, t), \quad Q_{j+1/2}^- = \hat{Q}_j(x_{j+1/2}^-, t),$$

$$F_{j+1/2} = \frac{1}{2}a(Q_{j+1/2}^- + Q_{j+1/2}^+) - \frac{1}{2}|a|(Q_{j+1/2}^+ - Q_{j+1/2}^-).$$

Toto konzervativní schéma lze přepsat do tzv. fluktuačního tvaru.

# Jednostranná schémata – skalární případ

$$\frac{d\bar{Q}_j}{dt} = \frac{-1}{\Delta x} (a^- \Delta Q_{j+1/2} + a \Delta Q_j + a^+ \Delta Q_{j-1/2}),$$

kde

$$\begin{aligned} a \Delta Q_j &= a(Q_{j+1/2}^- - Q_{j-1/2}^+), \\ a^- \Delta Q_{j+1/2} &= a^-(Q_{j+1/2}^+ - Q_{j+1/2}^-), \\ a^+ \Delta Q_{j-1/2} &= a^+(Q_{j-1/2}^+ - Q_{j-1/2}^-), \end{aligned}$$

kde  $a^+ = \max\{a, 0\}$ ,  $a^- = \min\{a, 0\}$ . Pro po částech konstantní rekonstrukci  $Q_{j+1/2}^+ = \bar{Q}_{j+1}$ ,  $Q_{j+1/2}^- = \bar{Q}_j$  dostáváme pro  $a > 0$

$$\frac{d}{dt} \bar{Q}_j = -\frac{a}{\Delta x} (\bar{Q}_j - \bar{Q}_{j-1}),$$

pro  $a < 0$

$$\frac{d}{dt} \bar{Q}_j = -\frac{a}{\Delta x} (\bar{Q}_{j+1} - \bar{Q}_j)$$

# Jednostranná schémata – soustava lineárních rovnic, konzervativní tvar

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_t + \mathbf{A}\mathbf{q}_x &= \mathbf{0}, \quad x \in R, \quad t \in (0, T), \\ \mathbf{q}(x, 0) &= \mathbf{q}_0(x), \quad x \in R,\end{aligned}$$

$\mathbf{A}$  reálná matice řádu  $m$ . Předpokládáme, že matice  $\mathbf{A}$  má navzájem různá reálná vlastní čísla a je diagonalizovatelná, tj. existuje regulární matice  $\mathbf{R}$  taková, že platí  $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{R}$ , kde  $\mathbf{\Lambda}$  je diagonální matice.

$$\gamma_t + \mathbf{\Lambda}\gamma_x = \mathbf{0},$$

kde  $\gamma(x, t) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{q}(x, t)$ .

$$\mathbf{F}_{j+1/2} = \frac{1}{2}\mathbf{A}(\mathbf{Q}_{j+1/2}^- + \mathbf{Q}_{j+1/2}^+) - \frac{1}{2}|\mathbf{A}|(\mathbf{Q}_{j+1/2}^+ - \mathbf{Q}_{j-1/2}^-)$$

# Jednostranná schémata – soustava lineárních rovnic, fluktuační tvar

$$\frac{d\bar{\mathbf{Q}}_j}{dt} = \frac{-1}{\Delta x} (\mathbf{A}^- \Delta \mathbf{Q}_{j+1/2} + \mathbf{A} \Delta \mathbf{Q}_j + \mathbf{A}^+ \Delta \mathbf{Q}_{j-1/2}),$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \Delta \mathbf{Q}_j &= \mathbf{A} (\mathbf{Q}_{j+1/2}^- - \mathbf{Q}_{j-1/2}^+), \\ \mathbf{A}^- \Delta \mathbf{Q}_{j+1/2} &= \sum_{p=1}^m \lambda^{-,p} \Delta \gamma_{j+1/2}^p \mathbf{r}^p, \\ \mathbf{A}^+ \Delta \mathbf{Q}_{j-1/2} &= \sum_{p=1}^m \lambda^{+,p} \Delta \gamma_{j-1/2}^p \mathbf{r}^p, \\ \Delta \mathbf{Q}_{j+1/2} &= \sum_{p=1}^m \Delta \gamma_{j+1/2}^p \mathbf{r}^p, \\ \Delta \mathbf{Q}_j &= \mathbf{Q}_{j+1/2}^- - \mathbf{Q}_{j-1/2}^+, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^+ &= \mathbf{R} \mathbf{\Lambda}^+ \mathbf{R}^{-1}, \quad \mathbf{A}^- = \mathbf{R} \mathbf{\Lambda}^- \mathbf{R}^{-1}, \quad \mathbf{\Lambda}^+ = \text{diag}(\max\{\lambda^p, 0\}), \\ \mathbf{\Lambda}^- &= \text{diag}(\min\{\lambda^p, 0\}), \quad |\mathbf{\Lambda}| = \text{diag}(|\lambda^p|), \quad \Delta \gamma_{j+1/2} = \mathbf{R}_{j+1/2}^{-1} \Delta \mathbf{Q}_{j+1/2}. \end{aligned}$$

# Jednostranná schémata – soustava nelineárních rovnic, fluktuační tvar, konzervativní tvar

$$\frac{d\bar{Q}_j}{dt} = \frac{-1}{\Delta x} [\mathbf{A}^-(\Delta \mathbf{Q}_{j+1/2}) + \mathbf{A}(\Delta \mathbf{Q}_j) + \mathbf{A}^+(\Delta \mathbf{Q}_{j-1/2})],$$

$$\mathbf{A}(\Delta \mathbf{Q}_j) = \mathbf{f}(\mathbf{Q}_{j+1/2}^-) - \mathbf{f}(\mathbf{Q}_{j-1/2}^+),$$

$$\mathbf{A}^-(\Delta \mathbf{Q}_{j+1/2}) = \mathbf{F}_{j+1/2}^- - \mathbf{f}(\mathbf{Q}_{j+1/2}^-),$$

$$\mathbf{A}^+(\Delta \mathbf{Q}_{j-1/2}) = \mathbf{f}(\mathbf{Q}_{j-1/2}^+) - \mathbf{F}_{j-1/2}^+.$$

Podmínka konzervativity:

$$\mathbf{f}(\mathbf{Q}_{j+1/2}^+) - \mathbf{f}(\mathbf{Q}_{j+1/2}^-) = \mathbf{A}^+(\Delta \mathbf{Q}_{j+1/2}) + \mathbf{A}^-(\Delta \mathbf{Q}_{j+1/2}) \Rightarrow$$

$$\mathbf{F}_{j+1/2}^- = \mathbf{F}_{j+1/2}^+.$$

# Jednostranná schémata – Roeův řešič, po částech konstantní rekonstrukce

$$\frac{d\bar{Q}_j}{dt} = -\frac{1}{\Delta x} [\mathbf{A}^-(\Delta \mathbf{Q}_{j+1/2}) + \mathbf{A}^+(\Delta \mathbf{Q}_{j-1/2})]$$

Linearizace (pokud mezi  $\bar{Q}_j$ ,  $\bar{Q}_{j+1}$  rázová vlna, zachová linearizace rychlost jejího šíření):  $\mathbf{f}(\bar{Q}_{j+1}) - \mathbf{f}(\bar{Q}_j) = \mathbf{A}_{j+1/2}(\bar{Q}_{j+1} - \bar{Q}_j)$ ,

$$\mathbf{F}_{j+1/2} = \frac{1}{2} [\mathbf{f}(\bar{Q}_j) + \mathbf{f}(\bar{Q}_{j+1})] - \frac{1}{2} |\mathbf{A}_{j+1/2}| (\bar{Q}_{j+1} - \bar{Q}_j),$$

$$\mathbf{A}^-(\Delta \mathbf{Q}_{j+1/2}) = \sum_{p=1}^m \lambda_{j+1/2}^{-,p} \mathbf{r}_{j+1/2}^p \Delta \gamma_{j+1/2}^p$$

$$\mathbf{A}^+(\Delta \mathbf{Q}_{j+1/2}) = \sum_{p=1}^m \lambda_{j+1/2}^{+,p} \mathbf{r}_{j+1/2}^p \Delta \gamma_{j+1/2}^p,$$

$\mathbf{r}_{j+1/2}^p$  jsou vl. vektory  $\mathbf{A}_{j+1/2}$ ,  $\lambda_{j+1/2}^p$  vl. čísla a

$$\Delta \gamma_{j+1/2} = \mathbf{R}_{j+1/2}^{-1} \Delta \mathbf{Q}_{j+1/2}$$



# Jednostranná schémata – Harten, Lax, Leer

Nezávisle na rozměru soustavy rozklad na dvě vlny:

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{Q}}_{j+1}) - \mathbf{f}(\bar{\mathbf{Q}}_j) = s_{j+1/2}^2(\bar{\mathbf{Q}}_{j+1} - \bar{\mathbf{Q}}_{j+1/2}) + s_{j+1/2}^1(\bar{\mathbf{Q}}_{j+1/2} - \bar{\mathbf{Q}}_j),$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_{j+1/2} = \frac{\mathbf{f}(\bar{\mathbf{Q}}_{j+1}) - \mathbf{f}(\bar{\mathbf{Q}}_j) - s_{j+1/2}^2\bar{\mathbf{Q}}_{j+1} + s_{j+1/2}^1\bar{\mathbf{Q}}_j}{s_{j+1/2}^1 - s_{j+1/2}^2},$$

$$s_{j+1/2}^1 = \min_p \{ \min \{ \lambda_j^p, \lambda_{j+1/2}^p \} \},$$

$$s_{j+1/2}^2 = \max_p \{ \max \{ \lambda_j^p, \lambda_{j+1/2}^p \} \},$$

kde  $\lambda_j^p$  jsou vlastní čísla matice  $\mathbf{A}_j = \mathbf{f}'(\bar{\mathbf{Q}}_j)$ .

# Jednostranná schémata

- ▶ Kvazilineární případ

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{q}_x = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{A}^-(\Delta\mathbf{Q}_{j+1/2}) = \sum_{p=1}^m \lambda_j^{p,-} \mathbf{r}_j^p \Delta\gamma_{j+1/2}^p,$$

$$\mathbf{A}^+(\Delta\mathbf{Q}_{j+1/2}) = \sum_{p=1}^m \lambda_j^{p,+} \mathbf{r}_j^p \Delta\gamma_{j+1/2}^p,$$

kde  $\lambda_j^p$  jsou vlastní čísla matice  $\mathbf{A}(\bar{\mathbf{Q}}_j)$ ,  $\mathbf{r}_j^p$  jsou vlastní vektory této matice a

$$\Delta\gamma_{j+1/2} = \mathbf{R}_j^{-1} \Delta\mathbf{Q}_{j+1/2}.$$

- ▶ Obecnější rozklad (rozklad tokové funkce – f-vlny)

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{Q}}_{j+1}) - \mathbf{f}(\bar{\mathbf{Q}}_j) = \sum_{p=1}^k \mathbf{z}_{j+1/2}^p,$$

kde  $\mathbf{z}_{j+1/2}^p = s_{j+1/2}^p \boldsymbol{\omega}_{j+1/2}^p$ .

# Jednostranná schémata – rozklad pro rozšířenou formulaci

Rozklad pro rozšířenou kvazilineární formulaci (soustava pěti rovnic):

$$s_1 = 0, \quad s_2 = 0, \quad s_3 = s_4 + s_5,$$

$$s_4 = \min_p \{ \min \{ \lambda_L^p, \lambda_{LR}^p \} \}, \quad s_5 = \max_p \{ \max \{ \lambda_R^p, \lambda_{LR}^p \} \},$$

$$\mathbf{r}_1 \approx \left[ \frac{g\bar{A}}{\widehat{s_4 s_5}}, 0, 0, -1, \frac{g\bar{A}\widehat{s_4 s_5}}{\widehat{s_4 s_5}} \right]^T,$$

$$\mathbf{r}_2 \approx \left[ \frac{g\bar{A}^2}{L_L L_R \widehat{s_4 s_5}}, 0, 1, 0, \frac{g\bar{A}^2 \widehat{s_4 s_5}}{L_L L_R \widehat{s_4 s_5}} - \frac{g\bar{A}^2}{2L_L L_R} \right]^T,$$

$$\mathbf{r}_3 \approx [0, 0, 0, 0, 1]^T,$$

$$\mathbf{r}_4 \approx [1, s_4, 0, 0, s_4^2]^T,$$

$$\mathbf{r}_5 \approx [1, s_5, 0, 0, s_5^2]^T,$$

kde  $\widehat{s_4 s_5} = -\bar{U}^2 + \frac{g\bar{A}\bar{L}}{L_L L_R}$ ,  $\widehat{s_4 s_5} = -|U_L U_R| + \frac{g\bar{A}\bar{L}}{L_L L_R}$ ,  $\lambda_L^p$  a  $\lambda_R^p$  jsou vlastní čísla Jacobiho matic pro hodnoty zleva a zprava a  $\lambda_{LR}^p$  jsou vlastní čísla Roeovy matice.

# Jednostranná schémata – konstrukce

$$\begin{bmatrix} \Delta A \\ \Delta Q \\ \Delta L \\ \Delta B \\ \Delta \Phi \end{bmatrix} = \sum_{p=1}^5 \alpha_p \mathbf{r}^p.$$

## Vlastnosti rozkladu

- ▶ máme k dispozici 5 lineárně nezávislých vektorů;
- ▶ vektory jsou zvoleny tak, že lze dokázat konzistenci a zajistit stabilitu;
- ▶ rozklad je volen tak, že schéma je ve speciálních případech konzervativní;
- ▶ za jistých dodatečných předpokladů lze zajistit pozitivní semidefinitnost schématu (pozor: narozdíl od standardního HLL rozkladu máme dva mezistavy).

# Jednostranná schémata – konstrukce

$$\frac{d\bar{\mathbf{Q}}_j}{dt} = -\frac{1}{\Delta x} [\mathbf{A}^-(\Delta \mathbf{Q}_{j+1/2}) + \mathbf{A}^+(\Delta \mathbf{Q}_{j-1/2})],$$

$$\mathbf{A}^-(\Delta \mathbf{Q}_{j+1/2}) = \sum_{\substack{p=1 \\ s_{j+1/2}^{p,n} < 0}}^m \alpha_{j+1/2}^p \mathbf{r}_{j+1/2}^p$$

$$\mathbf{A}^+(\Delta \mathbf{Q}_{j+1/2}) = \sum_{\substack{p=1 \\ s_{j+1/2}^{p,n} > 0}}^m \alpha_{j+1/2}^p \mathbf{r}_{j+1/2}^p.$$

# Jednostranně-centrální schémata

$$\frac{d}{dt} \bar{Q}_j = -\frac{1}{2\Delta x} [\mathbf{f}(\bar{Q}_{j+1}) - \mathbf{f}(\bar{Q}_{j-1})] + \frac{1}{2\Delta x} [\hat{a}_{j+1/2}(\bar{Q}_{j+1} - \bar{Q}_j) - \hat{a}_{j-1/2}(\bar{Q}_j - \bar{Q}_{j-1})],$$

kde

$$\hat{a}_{j+1/2} = \max_p \{ \max \{ \lambda_j^p, \lambda_{j+1}^p \} \}.$$

$$\mathbf{F}_{j+1/2} = \frac{1}{2} [\mathbf{f}(\bar{Q}_j) + \mathbf{f}(\bar{Q}_{j+1})] - \frac{1}{2} |\hat{a}_{j+1/2}| (\bar{Q}_{j+1} - \bar{Q}_j)$$

$$\mathbf{A}^+(\Delta \mathbf{Q}_{j+1/2}) = \frac{1}{2} [\mathbf{f}(\bar{Q}_{j+1}) - \mathbf{f}(\bar{Q}_j)] + \hat{a}_{j+1/2} (\bar{Q}_{j+1} - \bar{Q}_j)$$

$$\mathbf{A}^-(\Delta \mathbf{Q}_{j+1/2}) = \frac{1}{2} [\mathbf{f}(\bar{Q}_{j+1}) - \mathbf{f}(\bar{Q}_j)] - \hat{a}_{j+1/2} (\bar{Q}_{j+1} - \bar{Q}_j)$$

# Jednostranně-centrální schémata

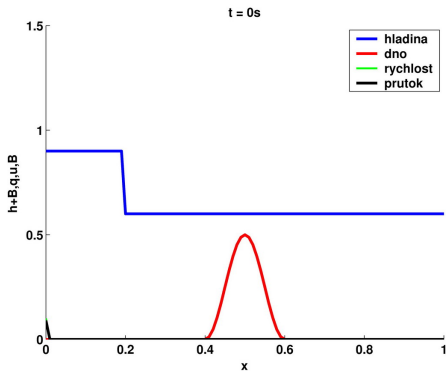
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{Q}}_j &= -\frac{1}{\Delta x} (\mathbf{F}_{j+1/2} - \mathbf{F}_{j-1/2}) + \mathbf{S}_j, \\ F_{j+1/2}^1 &= \frac{1}{2} (\bar{Q}_j + \bar{Q}_{j+1}) - \frac{1}{2} \hat{a}_{j+1/2} (\bar{Y}_{j+1} - \bar{Y}_j), \\ F_{j+1/2}^2 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\bar{Q}_j^2}{\bar{Y}_j - \bar{B}_j} + \frac{\bar{Q}_{j+1}^2}{\bar{Y}_{j+1} - \bar{B}_{j+1}} + \frac{g}{2} (\bar{Y}_{j+1} + \bar{Y}_j - \bar{B}_{j+1} - \bar{B}_j)^2 \right] - \\ &\quad - \frac{1}{2} \hat{a}_{j+1/2} (\bar{Q}_{j+1} - \bar{Q}_j) \\ S_j^1 &= 0 \\ S_j^2 &= \frac{-g}{4\Delta x} (\bar{B}_{j+1} - \bar{B}_{j-1}) \\ &\quad (\bar{Y}_{j+1} + \bar{Y}_j - \bar{B}_{j+1} - \bar{B}_j + \bar{Y}_j + \bar{Y}_{j-1} - \bar{B}_j - \bar{B}_{j-1}) \end{aligned}$$

# Jednostranně-centrální schémata

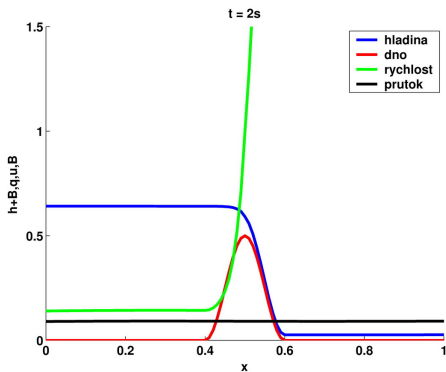
- ▶ Schémata opět udržují opět pouze speciální ustálené stavy (klid v jezeře).
- ▶ Jsou však pro tyto ustálené stavy použitelná.
- ▶ Lze zkonstruovat jednostranně-centrální schémata s vysokým rozlišením.



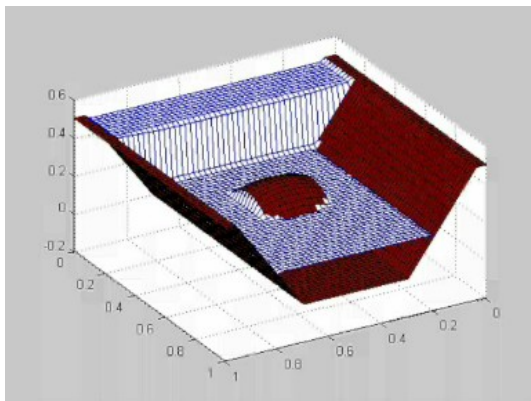
# Numerické experimenty – jednostranné schéma 1D



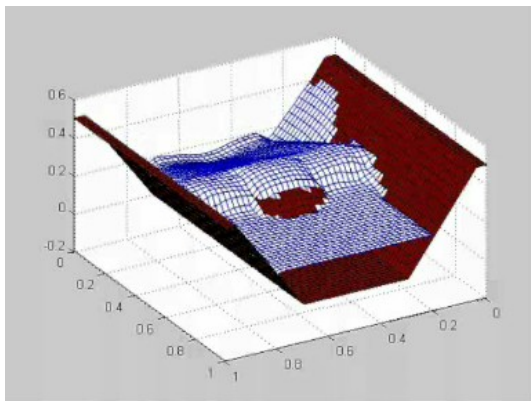
# Numerické experimenty – jednostranné schéma 1D



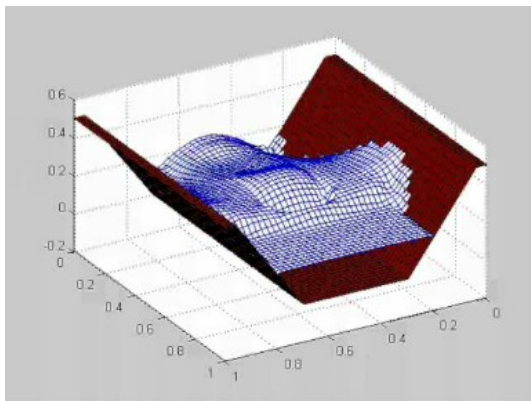
# Numerické experimenty – jednostranně-centrální schéma 2D



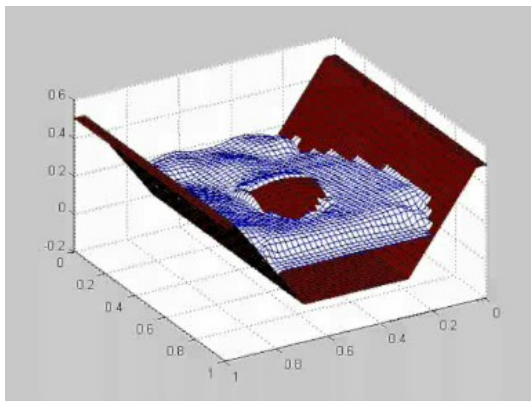
# Numerické experimenty – jednostranně-centrální schéma 2D



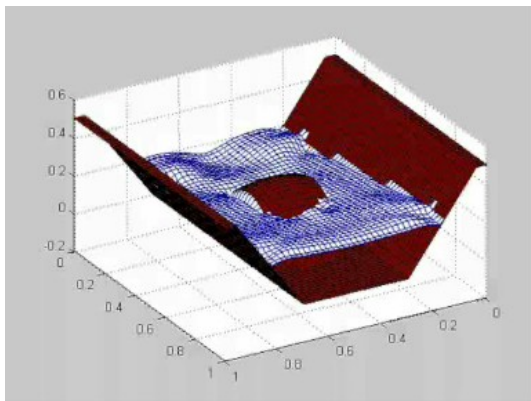
# Numerické experimenty – jednostranně-centrální schéma 2D



# Numerické experimenty – jednostranně-centrální schéma 2D



# Numerické experimenty – jednostranně-centrální schéma 2D



# Otevřené otázky

- ▶ Problematika pozitivní semidefinitnosti pro speciální typy koryt;
- ▶ řešič pro obecný tvar koryta;
- ▶ problematika sítí říčních toků (včetně možnosti zpětných vln);
- ▶ vazba 1D modelů (říční toky) a 2D modelů (rozlivy);
- ▶ ustálené stavy a pozitivní semidefinitnost v modelech s drsností koryta.