

Nelineární model okrajové úlohy 4.řádu: Numerická realizace

Ivona Svobodová

VŠB-TU Ostrava, katedra MDG

PANM, Dolní Maxov, 1.-6.června 2008

1 Formulace úlohy

1 Formulace úlohy

2 Diskretizace

- 1 Formulace úlohy
- 2 Diskretizace
- 3 Nehladká Newtonova metoda
 - Formulace úlohy pro nehladkou Newtonovu úlohu

- 1 Formulace úlohy
- 2 Diskretizace
- 3 Nehladká Newtonova metoda
 - Formulace úlohy pro nehladkou Newtonovu úlohu
- 4 Metoda postupných aproximací
 - Numerické výsledky

- 1 Formulace úlohy
- 2 Diskretizace
- 3 Nehladká Newtonova metoda
 - Formulace úlohy pro nehladkou Newtonovu úlohu
- 4 Metoda postupných aproximací
 - Numerické výsledky
- 5 Závěrečné shrnutí

- 1 Formulace úlohy
- 2 Diskretizace
- 3 Nehladká Newtonova metoda
 - Formulace úlohy pro nehladkou Newtonovu úlohu
- 4 Metoda postupných aproximací
 - Numerické výsledky
- 5 Závěrečné shrnutí

Spojité úloha

Hledáme funkci $u = u(r)$, která je řešením BVP

$$\mathcal{A}_4(u) + \psi(u) = \hat{f}$$

pro $r \in (a, b)$

Spojité úloha

Hledáme funkci $u = u(r)$, která je řešením BVP

$$\mathcal{A}_4(u) + \psi(u) = \hat{f}$$

pro $r \in (a, b)$

$$\mathcal{A}_4(u) := c_1(h, D) \frac{1}{r} \left([r u'']'' - \left[\frac{1}{r} u' \right]' \right)$$

Spojité úloha

Hledáme funkci $u = u(r)$, která je řešením BVP

$$\mathcal{A}_4(u) + \psi(u) = \hat{f}$$

pro $r \in (a, b)$ s obecně nestabilními okrajovými podmínkami Neumannova typu

$$\mathcal{M}_2(u(r)) = \hat{m}_r,$$

$$\mathcal{I}_3(u(r)) = \hat{g}_r.$$

pro $r \in \{a, b\}$

$$\mathcal{A}_4(u) := c_1(h, D) \frac{1}{r} \left([r u'']'' - \left[\frac{1}{r} u' \right]' \right)$$

Spojité úloha

Hledáme funkci $u = u(r)$, která je řešením BVP

$$\mathcal{A}_4(u) + \psi(u) = \hat{f}$$

pro $r \in (a, b)$ s obecně nestabilními okrajovými podmínkami Neumannova typu

$$\mathcal{M}_2(u(r)) = \hat{m}_r,$$

$$\mathcal{T}_3(u(r)) = \hat{g}_r.$$

pro $r \in \{a, b\}$

$$\mathcal{A}_4(u) := c_1(h, D) \frac{1}{r} \left([r u'']'' - \left[\frac{1}{r} u' \right]' \right)$$

$$\mathcal{M}_2(u(r)) := c_2(h, D) [r u'' + \sigma u'],$$

$$\mathcal{T}_3(u(r)) := c_2(h, D) \left[r u''' + u'' - \frac{1}{r} u' \right].$$

Spojité úloha

Hledáme funkci $u = u(r)$, která je řešením BVP

$$\mathcal{A}_4(u) + \psi(u) = \hat{f}$$

pro $r \in (a, b)$ s obecně nestabilními okrajovými podmínkami Neumannova typu

$$\mathcal{M}_2(u(r)) = \hat{m}_r,$$

$$\mathcal{T}_3(u(r)) = \hat{g}_r.$$

pro $r \in \{a, b\}$, kde $a, b \in \mathbb{R}^1$, $0 < a < b < +\infty$.

$$\mathcal{A}_4(u) := c_1(h, D) \frac{1}{r} \left([r u'']'' - \left[\frac{1}{r} u' \right]' \right)$$

$$\mathcal{M}_2(u(r)) := c_2(h, D) [r u'' + \sigma u'],$$

$$\mathcal{T}_3(u(r)) := c_2(h, D) \left[r u''' + u'' - \frac{1}{r} u' \right].$$

Operátor ψ

Operátor ψ popisuje elastické prostředí desky:

Operátor ψ

Operátor ψ popisuje elastické prostředí desky:

- lineární prostředí $\psi_L(u) = k_L u$,

Operátor ψ

Operátor ψ popisuje elastické prostředí desky:

- lineární prostředí $\psi_L(u) = k_L u$,
- nelineární prostředí $\psi_{NP}(u) = k_N u^+ - k_P u^-$,

Operátor ψ

Operátor ψ popisuje elastické prostředí desky:

- lineární prostředí $\psi_L(u) = k_L u$,
- nelineární prostředí $\psi_{NP}(u) = k_N u^+ - k_P u^-$,
- nelineární jednostranné prostředí $\psi_N(u) = k_N u^+$ nebo $\psi_P(u) = -k_P u^-$,

Operátor ψ

Operátor ψ popisuje elastické prostředí desky:

- lineární prostředí $\psi_L(u) = k_L u$,
- nelineární prostředí $\psi_{NP}(u) = k_N u^+ - k_P u^-$,
- nelineární jednostranné prostředí $\psi_N(u) = k_N u^+$ nebo $\psi_P(u) = -k_P u^-$,
- jednostrannou překážku $\psi_{NN}(u) = k_N (u - L)^+$ nebo $\psi_{PP}(u) = -k_P (u - L)^-$.

Operátor ψ

Operátor ψ popisuje elastické prostředí desky:

- lineární prostředí $\psi_L(u) = k_L u$,
- nelineární prostředí $\psi_{NP}(u) = k_N u^+ - k_P u^-$,
- nelineární jednostranné prostředí $\psi_N(u) = k_N u^+$ nebo $\psi_P(u) = -k_P u^-$,
- jednostrannou překážku $\psi_{NN}(u) = k_N (u - L)^+$ nebo $\psi_{PP}(u) = -k_P (u - L)^-$.

Slabá formulace

Jako prostor kinematicky přípustných posunutí V uvažujme celý prostor funkcí s konečnou energií, proto

Slabá formulace

Jako prostor kinematicky přípustných posunutí V uvažujme celý prostor funkcí s konečnou energií, proto

$$V = H^2\left((a, b); r, \frac{1}{r}, r\right), \text{ kde}$$

Slabá formulace

Jako prostor kinematicky přípustných posunutí V uvažujme celý prostor funkcí s konečnou energií, proto

$$V = H^2\left((a, b); r, \frac{1}{r}, r\right), \text{ kde}$$

$$H^2\left((a, b); r, \frac{1}{r}, r\right) := \left\{ v = v(r) \mid v, v'' \in L_r^2(a, b) \wedge v' \in L_{\frac{1}{r}}^2(a, b) \right\}.$$

Slabá formulace

Jako prostor kinematicky přípustných posunutí V uvažujme celý prostor funkcí s konečnou energií, proto

$$V = H^2((a, b); r, \frac{1}{r}, r), \text{ kde}$$

$$H^2((a, b); r, \frac{1}{r}, r) := \left\{ v = v(r) \mid v, v'' \in L_r^2(a, b) \wedge v' \in L_{\frac{1}{r}}^2(a, b) \right\}.$$

Hledáme řešení úlohy

? $u \in V$ tak, že

$$a_0(u, v) + (k_N u^+, v)_r = \mathcal{F}(v) \quad \forall v \in V$$

Slabá formulace

Jako prostor kinematicky přípustných posunutí V uvažujeme celý prostor funkcí s konečnou energií, proto

$$V = H^2((a, b); r, \frac{1}{r}, r), \text{ kde}$$

$$H^2((a, b); r, \frac{1}{r}, r) := \left\{ v = v(r) \mid v, v'' \in L_r^2(a, b) \wedge v' \in L_{\frac{1}{r}}^2(a, b) \right\}.$$

Hledáme řešení úlohy

? $u \in V$ tak, že

$$a_0(u, v) + (k_N u^+, v)_r = \mathcal{F}(v) \quad \forall v \in V$$

$$\text{pro } (k_N u^+, v)_r = \frac{c_2(h)}{2} \int_a^b k_N \left(\frac{1}{2}|u(r)| + \frac{1}{2}u(r) \right) v(r) r dr$$

Podmínky existence řešení

volba prostředí	podmínka řešitelnosti	
	nutnost	postačitelnost
$\psi(u) \equiv 0$		
$\psi_1(u) = k_1(r)u(r)$		
$\psi_N(u) = k_N(r)u^+(r)$		
$\psi_P(u) = -k_P(r)u^-(r)$		
$\psi_{NP}(u) = \psi_N(u) + \psi_P(u)$		

Podmínky existence řešení

volba prostředí	podmínka řešitelnosti	
	nutnost	postačitelnost
$\psi(u) \equiv 0$	$\mathcal{F}(1) = 0$	$\mathcal{F}(1) = 0$
$\psi_1(u) = k_1(r)u(r)$		
$\psi_N(u) = k_N(r)u^+(r)$		
$\psi_P(u) = -k_P(r)u^-(r)$		
$\psi_{NP}(u) = \psi_N(u) + \psi_P(u)$		

Podmínky existence řešení

volba prostředí	podmínka řešitelnosti	
	nutnost	postačitelnost
$\psi(u) \equiv 0$	$\mathcal{F}(1) = 0$	$\mathcal{F}(1) = 0$
$\psi_1(u) = k_1(r)u(r)$	-	-
$\psi_N(u) = k_N(r)u^+(r)$		
$\psi_P(u) = -k_P(r)u^-(r)$		
$\psi_{NP}(u) = \psi_N(u) + \psi_P(u)$		

Podmínky existence řešení

volba prostředí	podmínka řešitelnosti	
	nutnost	postačitelnost
$\psi(u) \equiv 0$	$\mathcal{F}(1) = 0$	$\mathcal{F}(1) = 0$
$\psi_1(u) = k_1(r)u(r)$	-	-
$\psi_N(u) = k_N(r)u^+(r)$	$\mathcal{F}(1) \geq 0$	$\mathcal{F}(1) > 0$
$\psi_P(u) = -k_P(r)u^-(r)$		
$\psi_{NP}(u) = \psi_N(u) + \psi_P(u)$		

Podmínky existence řešení

volba prostředí	podmínka řešitelnosti	
	nutnost	postačitelnost
$\psi(u) \equiv 0$	$\mathcal{F}(1) = 0$	$\mathcal{F}(1) = 0$
$\psi_1(u) = k_1(r)u(r)$	-	-
$\psi_N(u) = k_N(r)u^+(r)$	$\mathcal{F}(1) \geq 0$	$\mathcal{F}(1) > 0$
$\psi_P(u) = -k_P(r)u^-(r)$	$\mathcal{F}(1) \leq 0$	$\mathcal{F}(1) < 0$
$\psi_{NP}(u) = \psi_N(u) + \psi_P(u)$		

Podmínky existence řešení

volba prostředí	podmínka řešitelnosti	
	nutnost	postačitelnost
$\psi(u) \equiv 0$	$\mathcal{F}(1) = 0$	$\mathcal{F}(1) = 0$
$\psi_1(u) = k_1(r)u(r)$	-	-
$\psi_N(u) = k_N(r)u^+(r)$	$\mathcal{F}(1) \geq 0$	$\mathcal{F}(1) > 0$
$\psi_P(u) = -k_P(r)u^-(r)$	$\mathcal{F}(1) \leq 0$	$\mathcal{F}(1) < 0$
$\psi_{NP}(u) = \psi_N(u) + \psi_P(u)$	-	-

- 1 Formulace úlohy
- 2 Diskretizace**
- 3 Nehladká Newtonova metoda
 - Formulace úlohy pro nehladkou Newtonovu úlohu
- 4 Metoda postupných aproximací
 - Numerické výsledky
- 5 Závěrečné shrnutí

Diskretizace slabě formulované úlohy

Ekvidistantní triangulace oblasti (a, b) na N částí

Pro parametr $h = \frac{b-a}{N}$ označíme uzly triangulace

$$0 < a = r_1 < r_2 < \dots < r_N < r_{N+1} = b < \infty .$$

Diskretizace slabě formulované úlohy

Ekvidistantní triangulace oblasti (a, b) na N částí

Pro parametr $h = \frac{b-a}{N}$ označíme uzly triangulace

$$0 < a = r_1 < r_2 < \dots < r_N < r_{N+1} = b < \infty .$$

Aproximace prostoru funkcí

Definujeme prostor V_h

$$V_h := \{ v_h = v_h(r) : v_h \in C^1(a, b) \wedge v_h|_{\langle r_i, r_{i+1} \rangle} \in P_3 \forall i = 1, \dots, N(h) \} ,$$

kdy $\dim V_h = 2N(h) + 2$.

Diskretizace slabě formulované úlohy

Ekvidistantní triangulace oblasti (a, b) na N částí

Pro parametr $h = \frac{b-a}{N}$ označíme uzly triangulace

$$0 < a = r_1 < r_2 < \dots < r_N < r_{N+1} = b < \infty .$$

Aproximace prostoru funkcí

Definujeme prostor V_h

$$V_h := \{ v_h = v_h(r) : v_h \in C^1(a, b) \wedge v_h|_{\langle r_i, r_{i+1} \rangle} \in P_3 \quad \forall i = 1, \dots, N(h) \} ,$$

kdy $\dim V_h = 2N(h) + 2$. Tedy $v_h \mapsto \vec{v} \in \mathbb{R}^{2N+2}$ tak, že $v_h(r) = (\vec{v}, \vec{\varphi}(r))_r$.

Diskretizace slabě formulované úlohy

Ekvidistantní triangulace oblasti (a, b) na N částí

Pro parametr $h = \frac{b-a}{N}$ označíme uzly triangulace

$$0 < a = r_1 < r_2 < \dots < r_N < r_{N+1} = b < \infty .$$

Aproximace prostoru funkcí

Definujeme prostor V_h

$$V_h := \{ v_h = v_h(r) : v_h \in C^1(a, b) \wedge v_h|_{\langle r_i, r_{i+1} \rangle} \in P_3 \quad \forall i = 1, \dots, N(h) \} ,$$

kdy $\dim V_h = 2N(h) + 2$. Tedy $v_h \mapsto \vec{v} \in \mathbb{R}^{2N+2}$ tak, že $v_h(r) = (\vec{v}, \vec{\varphi}(r))_r$.

Formulace diskrétní úlohy

? $\vec{u} \in \mathbb{R}^{2N+2}$ tak, že

$$K\vec{u} + (k_N(\sum \varphi_i u_i)^+, \vec{\varphi})_r = (\vec{f}, \vec{\varphi})_r .$$

pro $\vec{f} \in \mathbb{R}^{2N+2}$.

- 1 Formulace úlohy
- 2 Diskretizace
- 3 Nehladká Newtonova metoda**
 - Formulace úlohy pro nehladkou Newtonovu úlohu
- 4 Metoda postupných aproximací
 - Numerické výsledky
- 5 Závěrečné shrnutí

Vyhlazovací funkce

Definice

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory. Funkce $F : X \mapsto Y$ je vyhladitelnou funkcí v bodě $x \in X$, jestliže $\exists F^0 : X \mapsto \text{Lin}\{X, Y\}$ stejnoměrně omezená taková, že

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|F(x+h) - F(x) - F^0(x+h)h\|}{\|h\|} = 0.$$

Funkce F^0 se nazývá vyhlazovací funkcí.

Vyhlazovací funkce

Definice

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory. Funkce $F : X \mapsto Y$ je vyhladitelnou funkcí v bodě $x \in X$, jestliže $\exists F^0 : X \mapsto \text{Lin}\{X, Y\}$ stejnoměrně omezená taková, že

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|F(x+h) - F(x) - F^0(x+h)h\|}{\|h\|} = 0.$$

Funkce F^0 se nazývá vyhlazovací funkcí.

Příklad

Nechť $F : L^q(\Omega) \mapsto L^p(\Omega)$ tak, že $u \xrightarrow{F} \max\{0, u\}$. Potom

Vyhlazovací funkce

Definice

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory. Funkce $F : X \mapsto Y$ je vyhladitelnou funkcí v bodě $x \in X$, jestliže $\exists F^0 : X \mapsto \text{Lin}\{X, Y\}$ stejnoměrně omezená taková, že

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|F(x+h) - F(x) - F^0(x+h)h\|}{\|h\|} = 0.$$

Funkce F^0 se nazývá vyhlazovací funkcí.

Příklad

Nechť $F : L^q(\Omega) \mapsto L^p(\Omega)$ tak, že $u \xrightarrow{F} \max\{0, u\}$. Potom

$$F^0(u) = \begin{cases} 0 & \text{na množině } \{r \in \Omega : u(r) < 0 \text{ s.v.}\}, \\ 1 & \text{na množině } \{r \in \Omega : u(r) > 0 \text{ s.v.}\}, \\ \sigma \in \mathbb{R}^1 & \text{jinak} \end{cases}$$

je vyhlazovací funkcí funkce u , jestliže $p < q$. (Hintermüller to, Kunish - 2003) 

Konvergence

Věta (X.Chen, Z.Nashed, L.Qi - 2000)

Nechť F je vyhladitelnou funkcí na otevřené podmnožině $O \subset X$ s vyhlazovací funkcí $F^0 : O \mapsto \text{Lin}\{X, Y\}$ a necht' $u^* \in O$ řeší nelineární rovnici $F(u) = 0$.

Jestliže F^0 je nesingulární na O a $\left\{ \|F^0(u)^{-1}\| : u \in X \right\}$ je omezená $M \in \mathbb{R}_0^+$ a jestliže $\|u^0 - u^*\|$ je dostatečně malé,

Konvergence

Věta (X.Chen, Z.Nashed, L.Qi - 2000)

Nechť F je vyhladitelnou funkcí na otevřené podmnožině $O \subset X$ s vyhlazovací funkcí $F^0 : O \mapsto \text{Lin}\{X, Y\}$ a necht' $u^* \in O$ řeší nelineární rovnici $F(u) = 0$.

Jestliže F^0 je nesingulární na O a $\{\|F^0(u)^{-1}\| : u \in X\}$ je omezená $M \in \mathbb{R}_0^+$ a jestliže $\|u^0 - u^*\|$ je dostatečně malé, potom newtonovské iterace

$$u^{k+1} = u^k - F^0(u^k)^{-1}F(u^k)$$

konvergují tak, že $\frac{\|u^{k+1} - u^*\|}{\|u^k - u^*\|} \rightarrow 0$ pro $k \rightarrow \infty$.

Ekvivalentní formulace slabé úlohy

Nechť $\Lambda := V^+$, což je množina všech kladných částí funkcí z V , potom lze původní slabou úlohu formulovat ekvivalentně jako

Ekvivalentní formulace slabé úlohy

Nechť $\Lambda := V^+$, což je množina všech kladných částí funkcí z V , potom lze původní slabou úlohu formulovat ekvivalentně jako

$$\begin{aligned} &? (u, \lambda) \in V \times \Lambda \quad \text{tak, že} \\ &\begin{cases} a_0(u, v) + (k_N \lambda, v)_r = \mathcal{F}(v) & \forall v \in V \\ \lambda = u^+ . \end{cases} \end{aligned}$$

Diskretizace ekvivalentní formulace

Pro diskretizační parametr h mějme prostory V_h a Λ_h tak, že $V_h \rightarrow V$ a $\Lambda_h \rightarrow \Lambda$ pro $h \rightarrow 0+$. Řešení diskrétní úlohy hledáme ve tvaru

Diskretizace ekvivalentní formulace

Pro diskretizační parametr h mějme prostory V_h a Λ_h tak, že $V_h \rightarrow V$ a $\Lambda_h \rightarrow \Lambda$ pro $h \rightarrow 0+$. Řešení diskrétní úlohy hledáme ve tvaru

$$\begin{aligned}
 &? (u_h, \lambda_h) \in V_h \times \Lambda_h \quad \text{tak, že} \\
 &\begin{cases} a_0(u_h, v_h) + (k_N \lambda_h, v_h)_r = \mathcal{F}(v_h) & \forall v_h \in V_h \\ \lambda_h = (\sum u_i \varphi_i)^+ . \end{cases}
 \end{aligned}$$

Diskretizace ekvivalentní formulace

Pro diskretizační parametr h mějme prostory V_h a Λ_h tak, že $V_h \rightarrow V$ a $\Lambda_h \rightarrow \Lambda$ pro $h \rightarrow 0+$. Řešení diskrétní úlohy hledáme ve tvaru

$$\begin{aligned} &? (u_h, \lambda_h) \in V_h \times \Lambda_h \quad \text{tak, že} \\ &\begin{cases} a_0(u_h, v_h) + (k_N \lambda_h, v_h)_r = \mathcal{F}(v_h) & \forall v_h \in V_h \\ \lambda_h = (\sum u_i \varphi_i)^+ . \end{cases} \end{aligned}$$

Jak definovat rovnost $\lambda_h = (\sum u_i \varphi_i)^+$?

- 1 Formulace úlohy
- 2 Diskretizace
- 3 Nehladká Newtonova metoda
 - Formulace úlohy pro nehladkou Newtonovu úlohu
- 4 Metoda postupných aproximací**
 - Numerické výsledky
- 5 Závěrečné shrnutí

Jiná ekvivalentní formulace slabé úlohy

Jednoduchou úpravou - odečtením součinu se zápornou částí - přeformulujeme původní úlohu na

Jiná ekvivalentní formulace slabé úlohy

Jednoduchou úpravou - odečtením součinu se zápornou částí -
přeformulujeme původní úlohu na

? $u \in V$ tak, že

$$a_0(u, v) + (k_N u, v)_r = \mathcal{F}(v) - (k_N u^-, v)_r \quad \forall v \in V$$

Jiná ekvivalentní formulace slabé úlohy

Jednoduchou úpravou - odečtením součinu se zápornou částí - přeformulujeme původní úlohu na

? $u \in V$ tak, že

$$a_0(u, v) + (k_N u, v)_r = \mathcal{F}(v) - (k_N u^-, v)_r \quad \forall v \in V$$

Diskretizace metodou postupných aproximací

Pro počáteční odhad \vec{u}_0 se v n -té iteraci řeší úloha

Jiná ekvivalentní formulace slabé úlohy

Jednoduchou úpravou - odečtením součinu se zápornou částí - přeformulujeme původní úlohu na

? $u \in V$ tak, že

$$a_0(u, v) + (k_N u, v)_r = \mathcal{F}(v) - (k_N u^-, v)_r \quad \forall v \in V$$

Diskretizace metodou postupných aproximací

Pro počáteční odhad \vec{u}_0 se v n -té iteraci řeší úloha

? $\vec{u}_n \in \mathbb{R}^{2N+2}$ tak, že

$$(K + k_N M)\vec{u}_n = \vec{f} - (k_N (u_{n-1})^-, \vec{\varphi})_r$$

Jednotlivé kroky algoritmu

- sestavení matice $K_N = K + k_N M$ (úprava vzhledem k okrajovým podmínkám) a vektoru pravých stran \vec{f}

Jednotlivé kroky algoritmu

- sestavení matice $K_N = K + k_N M$ (úprava vzhledem k okrajovým podmínkám) a vektoru pravých stran \vec{f}
- počáteční volba \vec{u}_0 ($\vec{u}_0 = \vec{o}$)

Jednotlivé kroky algoritmu

- sestavení matice $K_N = K + k_N M$ (úprava vzhledem k okrajovým podmínkám) a vektoru pravých stran \vec{f}
- počáteční volba \vec{u}_0 ($\vec{u}_0 = \vec{o}$)
- v n -té iteraci:

Jednotlivé kroky algoritmu

- sestavení matice $K_N = K + k_N M$ (úprava vzhledem k okrajovým podmínkám) a vektoru pravých stran \vec{f}
- počáteční volba \vec{u}_0 ($\vec{u}_0 = \vec{o}$)
- v n -té iteraci:
 - úprava vektoru pravých stran $\vec{f}_n = \vec{f} - (k_N(u_{n-1})^-, \vec{\varphi})_r$
(výpočet integrálu Legendre-Gaussovou kvadraturní formulí)

Jednotlivé kroky algoritmu

- sestavení matice $K_N = K + k_N M$ (úprava vzhledem k okrajovým podmínkám) a vektoru pravých stran \vec{f}
- počáteční volba \vec{u}_0 ($\vec{u}_0 = \vec{o}$)
- v n -té iteraci:
 - úprava vektoru pravých stran $\vec{f}_n = \vec{f} - (k_N(u_{n-1})^-, \vec{\varphi})_r$ (výpočet integrálu Legendre-Gaussovou kvadraturní formulí) a úprava vzhledem k okrajovým podmínkám

Jednotlivé kroky algoritmu

- sestavení matice $K_N = K + k_N M$ (úprava vzhledem k okrajovým podmínkám) a vektoru pravých stran \vec{f}
- počáteční volba \vec{u}_0 ($\vec{u}_0 = \vec{o}$)
- v n -té iteraci:
 - úprava vektoru pravých stran $\vec{f}_n = \vec{f} - (k_N(\mathbf{u}_{n-1})^-, \vec{\varphi})_r$ (výpočet integrálu Legendre-Gaussovou kvadraturní formulí) a úprava vzhledem k okrajovým podmínkám
 - řešení soustavy $K_N \vec{u}_n = \vec{f}_n$ (Choleského rozkladem)

Jednotlivé kroky algoritmu

- sestavení matice $K_N = K + k_N M$ (úprava vzhledem k okrajovým podmínkám) a vektoru pravých stran \vec{f}
- počáteční volba \vec{u}_0 ($\vec{u}_0 = \vec{o}$)
- v n -té iteraci:
 - úprava vektoru pravých stran $\vec{f}_n = \vec{f} - (k_N(u_{n-1})^-, \vec{\varphi})_r$ (výpočet integrálu Legendre-Gaussovou kvadraturní formulí) a úprava vzhledem k okrajovým podmínkám
 - řešení soustavy $K_N \vec{u}_n = \vec{f}_n$ (Choleského rozkladem)
 - test: $\frac{\|\vec{u}_n - \vec{u}_{n-1}\|}{\|\vec{u}_n\|} \leq tol$

Úloha bez nadloží

.....Mezikruhova tenka rotacne-symetricka deska

Rozmery desky

tloustka $h = 1.000e-002$ metru

vnitřni polomer $a = 1.000e+000$ metru

vnější polomer $b = 5.000e+000$ metru

Ciselné charakteristiky materialu

Younguv modul $E = 2.140e+011$ N/m²

Poissonovo číslo $\sigma = 2.900e-001$

Zatizeni ve smeru osy z

$$f(x) = 0+0*x$$

kontrola postacujici podminky

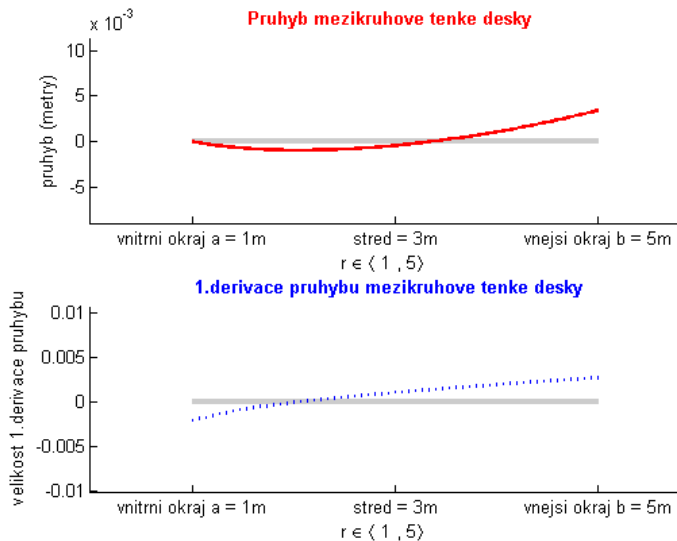
$$\text{existence reseni } (f,1)+Tu(b)-Tu(a) = 0$$

Jsou predepsany stabilni okrajove podminky. Existence reseni je zajistena.

.....
 Upravy vzhledem k okrajovym podminkam.

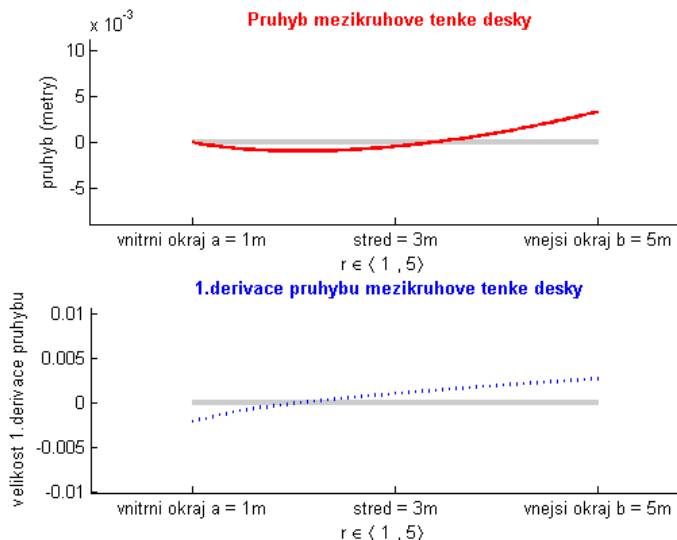
---> pokles podpor	v $r=a$ o velikosti	$u(a) = 0.000e+000$ metru
---> moment	pro $r=a$ ve tvaru	$M(u(a)) = -5.500e+003$
---> pricna sila	pro $r=b$ ve tvaru	$T(u(b)) = 0$
---> moment	pro $r=b$ ve tvaru	$M(u(b)) = 9.000e+003$

Úloha bez podloží či nadloží



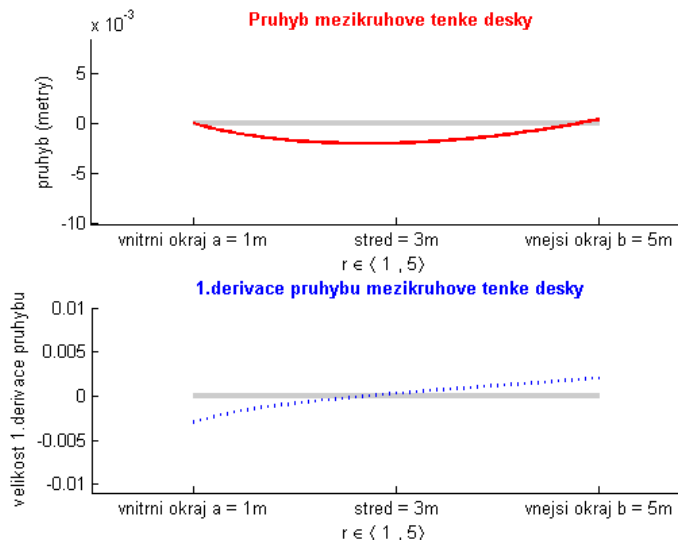
Úloha včetně nadloží s koeficientem odporu $k_n = 10^3$

Ke konvergenci došlo ve 2. iteraci

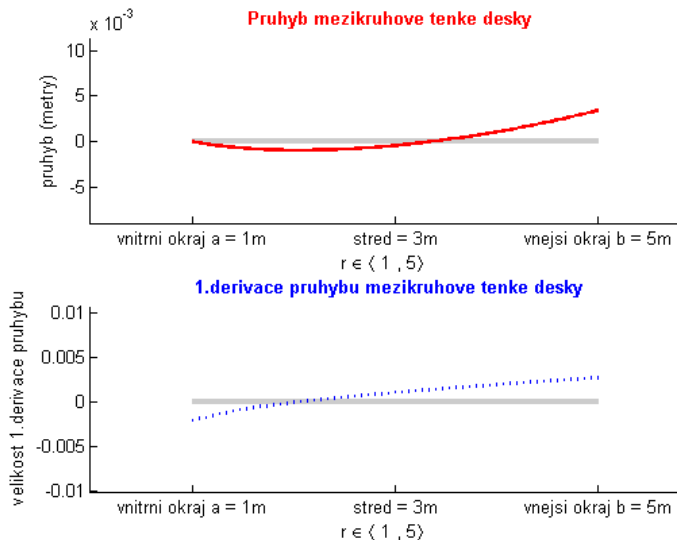


Úloha včetně nadloží s koeficientem odporu $k_n = 10^7$

Ke konvergenci došlo ve 103. iteraci

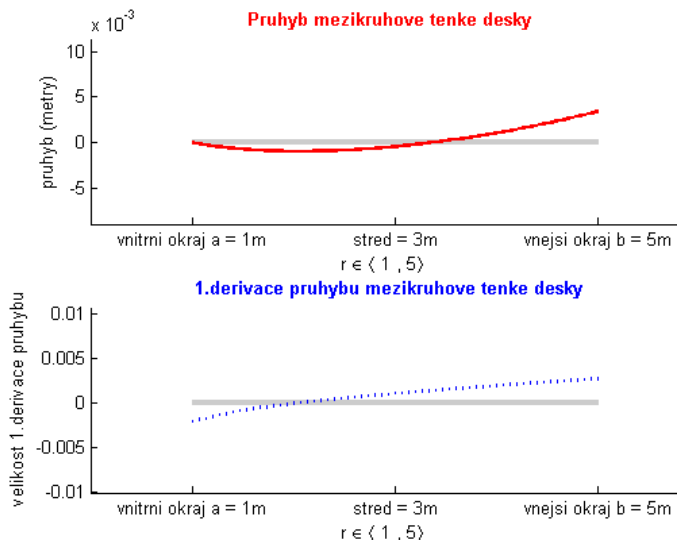


Úloha bez podloží či nadloží



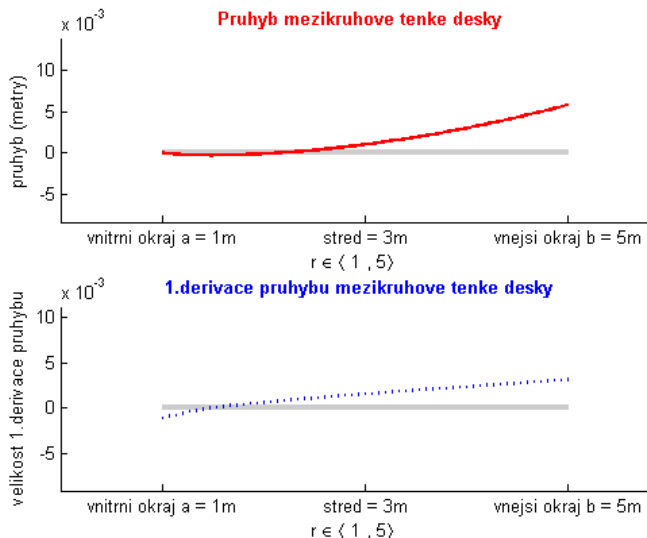
Úloha včetně podloží s koeficientem odporu $k_p = 10^3$

Ke konvergenci došlo ve 3. iteraci



Úloha včetně podloží s koeficientem odporu $k_p = 10^7$

Ke konvergenci došlo ve 633. iteraci



- 1 Formulace úlohy
- 2 Diskretizace
- 3 Nehladká Newtonova metoda
 - Formulace úlohy pro nehladkou Newtonovu úlohu
- 4 Metoda postupných aproximací
 - Numerické výsledky
- 5 Závěrečné shrnutí

Byla studována úloha s nehladkým potenciálem, který obsahoval kladnou, resp. zápornou část funkce z $H^2((a, b); r, \frac{1}{r}, r)$.

Byla studována úloha s nehladkým potenciálem, který obsahoval kladnou, resp. zápornou část funkce z $H^2((a, b); r, \frac{1}{r}, r)$.

- Úkolem bylo nalézt vhodný způsob diskretizace a následně sestavit výpočetní program.

Byla studována úloha s nehladkým potenciálem, který obsahoval kladnou, resp. zápornou část funkce z $H^2((a, b); r, \frac{1}{r}, r)$.

- Úkolem bylo nalézt vhodný způsob diskretizace a následně sestavit výpočetní program.
- Nehladká Newtonova metoda nebyla sledována zjednodušující. Problematika absolutní hodnoty nebyla vyřešena.

Byla studována úloha s nehladkým potenciálem, který obsahoval kladnou, resp. zápornou část funkce z $H^2((a, b); r, \frac{1}{r}, r)$.

- Úkolem bylo nalézt vhodný způsob diskretizace a následně sestavit výpočetní program.
- Nehladká Newtonova metoda nebyla sledována zjednodušující. Problematika absolutní hodnoty nebyla vyřešena.
- Byl vytvořen návrh algoritmu postupných aproximací a byly shrnuty výsledky numerických výpočtů pomocí zvolené metody.