

Metody vnitřních bodů pro řešení úlohy lineární elasticity s daným třením

J. Machalová, P. Ženčák, R. Kučera

Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
PřF UP Olomouc

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie
VŠB-TU Ostrava

Červen 2008

1. IPM a kvadratické programování s kvadratickými omezeními

1. IPM a kvadratické programování s kvadratickými omezeními
2. IPM v úloze lineární elasticity s daným třením

1. IPM a kvadratické programování s kvadratickými omezeními
2. IPM v úloze lineární elasticity s daným třením
3. Numerické testy iterační metody

Úloha

Nechť jsou $m_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, 3$ takové, že $m_2 = m_3$ a $\sum_{i=1}^3 m_i = m$. Označme $\mathcal{N}_i = \{1, 2, \dots, m_i\}$ pro $i \in \{1, 2\}$.

Hledáme řešení úlohy:

$$\text{minimalizovat } \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{b} \quad (1a)$$

$$\text{za podmíněk } x_{2i}^2 + x_{3i}^2 \leq g_i^2 \quad \text{pro } i \in \mathcal{N}_2 \quad (1b)$$

$$x_{1i} \geq l_i \quad \text{pro } i \in \mathcal{N}_1 \quad (1c)$$

kde vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ je tvaru

$$\mathbf{x} = \left(\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T, \mathbf{x}_3^T \right)^T$$

přičemž $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im_i})^T$ pro $i \in \{1, 2, 3\}$.

Lagrangeova funkce

Definujme funkci

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) &:= \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{x}^\top \mathbf{b} + \boldsymbol{\mu}^\top (\mathbf{x}_2 \odot \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 \odot \mathbf{x}_3 - \mathbf{g} \odot \mathbf{g}) \\ &\quad + \boldsymbol{\lambda}^\top (\mathbf{I} - \mathbf{x}_1) \end{aligned} \quad (2)$$

kde $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m_1})^\top$ a $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{m_2})^\top$ jsou nezáporné vektory Lagrangeových multiplikátorů a $\mathbf{l} = (l_1, l_2, \dots, l_{m_1})^\top$, $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_{m_2})^\top$.

Lagrangeova funkce

Definujme funkci

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) := \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{b} + \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{x}_2 \odot \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 \odot \mathbf{x}_3 - \mathbf{g} \odot \mathbf{g}) + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{I} - \mathbf{x}_1) \quad (2)$$

kde $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m_1})^T$ a $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{m_2})^T$ jsou nezáporné vektory Lagrangeových multiplikátorů a $\mathbf{I} = (I_1, I_2, \dots, I_{m_1})^T$, $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_{m_2})^T$. Symbol \odot značí Hadamardův součin, tj. je-li $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$, pak $\mathbf{w} = \mathbf{u} \odot \mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$ a $w_i = u_i v_i$ pro $i \in \{1, \dots, m\}$.

Lagrangeova funkce

Definujme funkci

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) := \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{b} + \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{x}_2 \odot \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 \odot \mathbf{x}_3 - \mathbf{g} \odot \mathbf{g}) + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{I} - \mathbf{x}_1) \quad (2)$$

kde $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m_1})^T$ a $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{m_2})^T$ jsou nezáporné vektory Lagrangeových multiplikátorů a $\mathbf{l} = (l_1, l_2, \dots, l_{m_1})^T$, $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_{m_2})^T$. Symbol \odot značí Hadamardův součin, tj. je-li $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$, pak $\mathbf{w} = \mathbf{u} \odot \mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$ a $w_i = u_i v_i$ pro $i \in \{1, \dots, m\}$.

Dále necht'

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{pmatrix}$$

kde $\mathbf{A}_{i,j} \in \mathbb{R}^{m_i \times m_j}$ a $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ pro $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

KKT podmínky

Jelikož se jedná o úlohu konvexního programování, tak nutnými a postačujícími podmínkami jsou KKT podmínky, které lze zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2 + \mathbf{A}_{13}\mathbf{x}_3 - \mathbf{b}_1 - \boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{0} \\
 \mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2 + \mathbf{A}_{23}\mathbf{x}_3 - \mathbf{b}_2 + 2\boldsymbol{\mu} \odot \mathbf{x}_2 &= \mathbf{0} \\
 \mathbf{A}_{31}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{32}\mathbf{x}_2 + \mathbf{A}_{33}\mathbf{x}_3 - \mathbf{b}_3 + 2\boldsymbol{\mu} \odot \mathbf{x}_3 &= \mathbf{0} \\
 \mathbf{l} - \mathbf{x}_1 &\leq \mathbf{0} \\
 \boldsymbol{\lambda} \odot (\mathbf{l} - \mathbf{x}_1) &= \mathbf{0} \\
 \mathbf{x}_2 \odot \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 \odot \mathbf{x}_3 - \mathbf{g} \odot \mathbf{g} &\leq \mathbf{0} \\
 \boldsymbol{\mu} \odot (\mathbf{x}_2 \odot \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 \odot \mathbf{x}_3 - \mathbf{g} \odot \mathbf{g}) &= \mathbf{0} \\
 \boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0} \quad \boldsymbol{\lambda} &\geq \mathbf{0}
 \end{aligned}$$

Označení matic

K podmínkám přípustnosti primární úlohy přidáme do KKT podmínek doplňkové proměnné označené

$$\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_{m_2})^T$$

$$\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_{m_1})^T$$

Označení matic

K podmínkám přípustnosti primární úlohy přidáme do KKT podmínek doplňkové proměnné označené

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= (d_1, d_2, \dots, d_{m_2})^T \\ \mathbf{s} &= (s_1, s_2, \dots, s_{m_1})^T \end{aligned}$$

Předtím ještě označme

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i &= (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^{m_i} \text{ pro } i = 1, 2 \\ \mathbf{\Lambda} &= \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m_1}) \\ \mathbf{M} &= \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{m_2}) \\ \mathbf{S} &= \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_{m_1}) \\ \mathbf{D} &= \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_{m_2}) \end{aligned}$$

Jiný přepis KKT podmínek

Upravená soustava KKT podmínek pak odpovídá řešení soustavy nelineárních rovnic

$$F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{d}) = \mathbf{0} \quad \text{za podmínek } \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}, \mathbf{d} \geq \mathbf{0} \quad (3)$$

Jiný přepis KKT podmínek

Upravená soustava KKT podmínek pak odpovídá řešení soustavy nelineárních rovnic

$$F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{d}) = \mathbf{0} \quad \text{za podmínek } \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}, \mathbf{d} \geq \mathbf{0} \quad (3)$$

kde

$$F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{d}) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2 + \mathbf{A}_{13}\mathbf{x}_3 - \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1 + (\mathbf{A}_{22} + 2\mathbf{M})\mathbf{x}_2 + \mathbf{A}_{23}\mathbf{x}_3 - \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{A}_{31}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{32}\mathbf{x}_2 + (\mathbf{A}_{33} + 2\mathbf{M})\mathbf{x}_3 - \mathbf{b}_3 \\ -\mathbf{x}_1 + \mathbf{s} + \mathbf{l} \\ \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{S}\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{x}_2 \odot \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 \odot \mathbf{x}_3 - \mathbf{g} \odot \mathbf{g} + \mathbf{d} \\ \mathbf{M}\mathbf{D}\mathbf{e}_2 \end{pmatrix}$$

Jiný přepis KKT podmínek

Upravená soustava KKT podmínek pak odpovídá řešení soustavy nelineárních rovnic

$$F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{d}) = \mathbf{0} \quad \text{za podmínek } \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}, \mathbf{d} \geq \mathbf{0} \quad (3)$$

kde

$$F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{d}) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2 + \mathbf{A}_{13}\mathbf{x}_3 - \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1 + (\mathbf{A}_{22} + 2\mathbf{M})\mathbf{x}_2 + \mathbf{A}_{23}\mathbf{x}_3 - \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{A}_{31}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{32}\mathbf{x}_2 + (\mathbf{A}_{33} + 2\mathbf{M})\mathbf{x}_3 - \mathbf{b}_3 \\ -\mathbf{x}_1 + \mathbf{s} + \mathbf{l} \\ \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{S}\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{x}_2 \odot \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 \odot \mathbf{x}_3 - \mathbf{g} \odot \mathbf{g} + \mathbf{d} \\ \mathbf{M}\mathbf{D}\mathbf{e}_2 \end{pmatrix}$$

Základem metod vnitřních bodů je řešení soustavy (3) upravenou Newtonovou metodou zachovávající podmínky nezápornosti.

Jakobián funkce F

Označme $\mathbf{X}_i = \text{diag}(\mathbf{x}_i^T)$ pro $i \in \{1, 2, 3\}$, pak Jakobián funkce $F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{d})$ má tvar

$$\begin{aligned}
 J(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{d}) &= \\
 &= \begin{pmatrix}
 \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
 \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} + 2\mathbf{M} & \mathbf{A}_{23} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 2\mathbf{X}_2 & \mathbf{0} \\
 \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} + 2\mathbf{M} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 2\mathbf{X}_3 & \mathbf{0} \\
 -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
 \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S} & \boldsymbol{\Lambda} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
 \mathbf{0} & 2\mathbf{X}_2 & 2\mathbf{X}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\
 \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D} & \mathbf{M}
 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Řešení KKT Newtonovou metodou

Vektor přírůstků nové iterace $(\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \Delta \lambda, \Delta s, \Delta \mu, \Delta d)$ je tedy řešením soustavy lineárních rovnic

$$J(x_1, x_2, x_3, \lambda, s, \mu, d) \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta \lambda \\ \Delta s \\ \Delta \mu \\ \Delta d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_1 \\ -r_2 \\ -r_3 \\ x_1 - l - s \\ -\Lambda s e_1 \\ g \odot g - x_2 \odot x_2 - x_3 \odot x_3 - d \\ -M D e_2 \end{pmatrix}$$

Řešení KKT Newtonovou metodou

Vektor přírůstků nové iterace $(\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \Delta \lambda, \Delta s, \Delta \mu, \Delta d)$ je tedy řešením soustavy lineárních rovnic

$$J(x_1, x_2, x_3, \lambda, s, \mu, d) \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta \lambda \\ \Delta s \\ \Delta \mu \\ \Delta d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_1 \\ -r_2 \\ -r_3 \\ x_1 - l - s \\ -\Lambda s e_1 \\ g \odot g - x_2 \odot x_2 - x_3 \odot x_3 - d \\ -M D e_2 \end{pmatrix}$$

Plný krok ve vypočítaném směru není obvykle možný, neboť délka kroku $\delta \in (0, 1]$ je určena tak, aby platily podmínky nezápornosti. Bohužel je často délka kroku v této metodě velmi malá a zlepšení směrem k optimálnímu řešení je tak velmi pomalé.

Centrální cesta

Centrální cesta \mathcal{C} je množina bodů $(\mathbf{x}_1^\tau, \mathbf{x}_2^\tau, \mathbf{x}_3^\tau, \boldsymbol{\lambda}^\tau, \mathbf{s}^\tau, \boldsymbol{\mu}^\tau, \mathbf{d}^\tau)$ řešících pro každou hodnotu parametru $\tau = (\tau_l, \tau_k)^\top$, $\tau_l > 0, \tau_k > 0$ následující úlohu, která vznikne drobnou změnou KKT podmíněk:

Centrální cesta

Centrální cesta \mathcal{C} je množina bodů $(\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T, \mathbf{x}_3^T, \boldsymbol{\lambda}^T, \mathbf{s}^T, \boldsymbol{\mu}^T, \mathbf{d}^T)$ řešících pro každou hodnotu parametru $\tau = (\tau_l, \tau_k)^T$, $\tau_l > 0, \tau_k > 0$ následující úlohu, která vznikne drobnou změnou KKT podmínek:

Najít řešení nelineární soustavy

$$F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{d}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_l \mathbf{e}_1 \\ 0 \\ \tau_k \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \quad (4a)$$

za podmínek

$$\boldsymbol{\lambda} > \mathbf{0} \quad \mathbf{s} > \mathbf{0} \quad \boldsymbol{\mu} > \mathbf{0} \quad \mathbf{d} > \mathbf{0} \quad (4b)$$

Míry duality a centrující parametry

Dále zavedeme míru duality α v lineárních podmínkách a míru duality β v kvadratických podmínkách, které mají tvar:

$$\alpha = \frac{\lambda^T s}{m_1} \qquad \beta = \frac{\mu^T d}{m_2}$$

Míry duality a centrující parametry

Dále zavedeme míru duality α v lineárních podmínkách a míru duality β v kvadratických podmínkách, které mají tvar:

$$\alpha = \frac{\lambda^T s}{m_1} \qquad \beta = \frac{\mu^T d}{m_2}$$

S jejich pomocí a s pomocí centrujícího parametru σ_l pro lineární podmínky a centrujícího parametru σ_k pro kvadratické podmínky, přičemž volíme

$$\sigma_l \in [0, 1] \qquad \sigma_k \in [0, 1]$$

Míry duality a centrující parametry

Dále zavedeme míru duality α v lineárních podmínkách a míru duality β v kvadratických podmínkách, které mají tvar:

$$\alpha = \frac{\lambda^T s}{m_1} \qquad \beta = \frac{\mu^T d}{m_2}$$

S jejich pomocí a s pomocí centrujícího parametru σ_l pro lineární podmínky a centrujícího parametru σ_k pro kvadratické podmínky, přičemž volíme

$$\sigma_l \in [0, 1] \qquad \sigma_k \in [0, 1]$$

pak parametry centrující cesty píšeme jako

$$\tau_l = \sigma_l \alpha \qquad \tau_k = \sigma_k \beta$$

Princip metody sledování cesty

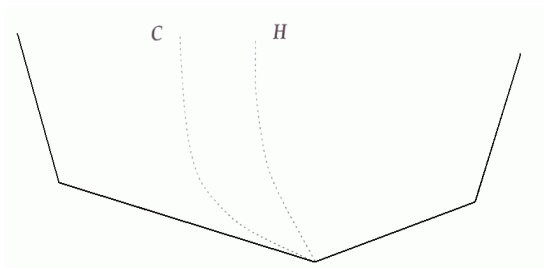
- Při hledání pouze v Newtonově směru rychle dojdeme k hranici oblasti (daleko od řešení) a krok v dalších iteracích je velmi malý.

Princip metody sledování cesty

- Při hledání pouze v Newtonově směru rychle dojdeme k hranici oblasti (daleko od řešení) a krok v dalších iteracích je velmi malý.
- V klasické bariérové metodě s logaritmickou bariérou se hledají přímo body na centrální cestě.

Princip metody sledování cesty

- Při hledání pouze v Newtonově směru rychle dojdeme k hranici oblasti (daleko od řešení) a krok v dalších iteracích je velmi malý.
- V klasické bariérové metodě s logaritmickou bariérou se hledají přímo body na centrální cestě.
- V metodě sledování cesty hledáme body, jejichž trajektorie H je „blízká“ centrální cestě, směr hledání je tedy kompromisem mezi Newtonovým směrem a tzv. centrujícím směrem.



Metoda sledování cesty

Označme

$$\mathcal{F}_N^0 = \{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{d}) \in \mathbb{R}^{2m+m_1} \mid \boldsymbol{\lambda} > \mathbf{0}, \mathbf{s} > \mathbf{0}, \boldsymbol{\mu} > \mathbf{0}, \mathbf{d} > \mathbf{0}\}$$

Metoda sledování cesty

Označme

$$\mathcal{F}_N^0 = \{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{d}) \in \mathbb{R}^{2m+m_1} \mid \boldsymbol{\lambda} > \mathbf{0}, \mathbf{s} > \mathbf{0}, \boldsymbol{\mu} > \mathbf{0}, \mathbf{d} > \mathbf{0}\}$$

Pak rovnici (4) řešíme modifikovanou Newtonovou metodou zachovávající omezení, tj. novou iteraci $(\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2, \bar{\mathbf{x}}_3, \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\mathbf{s}}, \bar{\boldsymbol{\mu}}, \bar{\mathbf{d}})$ počítáme podle vzorce

$$\begin{aligned}(\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2, \bar{\mathbf{x}}_3, \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\mathbf{s}}, \bar{\boldsymbol{\mu}}, \bar{\mathbf{d}}) &= (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{d}) + \\ &+ \delta(\Delta\mathbf{x}_1, \Delta\mathbf{x}_2, \Delta\mathbf{x}_3, \Delta\boldsymbol{\lambda}, \Delta\mathbf{s}, \Delta\boldsymbol{\mu}, \Delta\mathbf{d})\end{aligned}$$

Metoda sledování cesty

Označme

$$\mathcal{F}_N^0 = \{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{d}) \in \mathbb{R}^{2m+m_1} \mid \boldsymbol{\lambda} > \mathbf{0}, \mathbf{s} > \mathbf{0}, \boldsymbol{\mu} > \mathbf{0}, \mathbf{d} > \mathbf{0}\}$$

Pak rovnici (4) řešíme modifikovanou Newtonovou metodou zachovávající omezení, tj. novou iteraci $(\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2, \bar{\mathbf{x}}_3, \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\mathbf{s}}, \bar{\boldsymbol{\mu}}, \bar{\mathbf{d}})$ počítáme podle vzorce

$$\begin{aligned}(\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2, \bar{\mathbf{x}}_3, \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\mathbf{s}}, \bar{\boldsymbol{\mu}}, \bar{\mathbf{d}}) &= (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{d}) + \\ &+ \delta(\Delta\mathbf{x}_1, \Delta\mathbf{x}_2, \Delta\mathbf{x}_3, \Delta\boldsymbol{\lambda}, \Delta\mathbf{s}, \Delta\boldsymbol{\mu}, \Delta\mathbf{d})\end{aligned}$$

kde krok δ určíme tak, aby platilo $(\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2, \bar{\mathbf{x}}_3, \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\mathbf{s}}, \bar{\boldsymbol{\mu}}, \bar{\mathbf{d}}) \in \mathcal{F}_N^0$.

Soustava v metodě sledování cesty

Vektor přírůstků nové iterace $(\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \Delta \lambda, \Delta s, \Delta \mu, \Delta d)$ je tedy řešením soustavy lineárních rovnic

$$J(x_1, x_2, x_3, \lambda, s, \mu, d) \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta \lambda \\ \Delta s \\ \Delta \mu \\ \Delta d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_1 \\ -r_2 \\ -r_3 \\ x_1 - l - s \\ -\Lambda S e_1 + \sigma_l \alpha e_1 \\ \mathbf{g} \odot \mathbf{g} - x_2 \odot x_2 - x_3 \odot x_3 - \mathbf{d} \\ -M D e_2 + \sigma_k \beta e_2 \end{pmatrix}$$

Výpočet centrujících parametrů podle pravidla LOQO

Volbu centrujících parametrů provádíme podle pravidla užitého v softwaru LOQO, které velikost centrujícího parametru počítá na základě odchylky individuálních podmínek komplementarity od jejich průměru (tj. míry duality).

Výpočet centrujících parametrů podle pravidla LOQO

Volbu centrujících parametrů provádíme podle pravidla užitého v softwaru LOQO, které velikost centrujícího parametru počítá na základě odchylky individuálních podmínek komplementarity od jejich průměru (tj. míry duality).

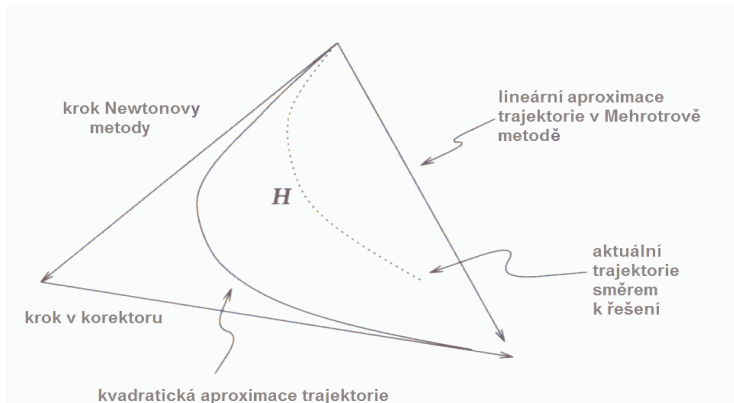
Počítáme tedy

$$\sigma_l = 0.1 \left(\min \left\{ 0.05 \frac{1 - \xi_l}{\xi_l}, 2 \right\} \right)^3 \quad \text{a} \quad \sigma_k = 0.1 \left(\min \left\{ 0.05 \frac{1 - \xi_k}{\xi_k}, 2 \right\} \right)^3$$

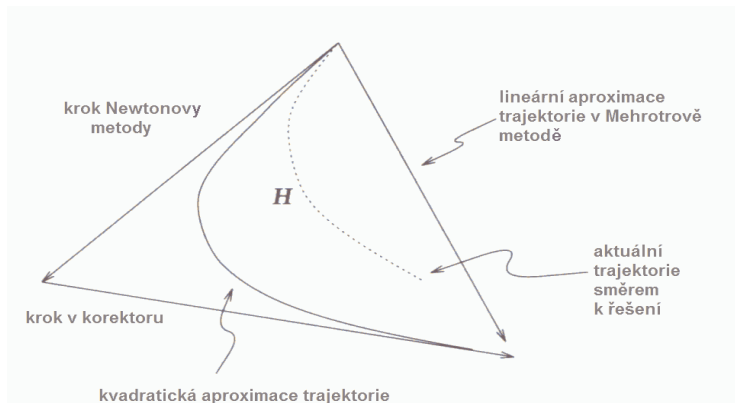
kde

$$\xi_l = \frac{\min_{i \in \mathcal{N}_1} \lambda_i s_i}{\alpha} \quad \text{a} \quad \xi_k = \frac{\min_{i \in \mathcal{N}_2} \mu_i d_i}{\beta}$$

Motivace Mehrotrovy metody

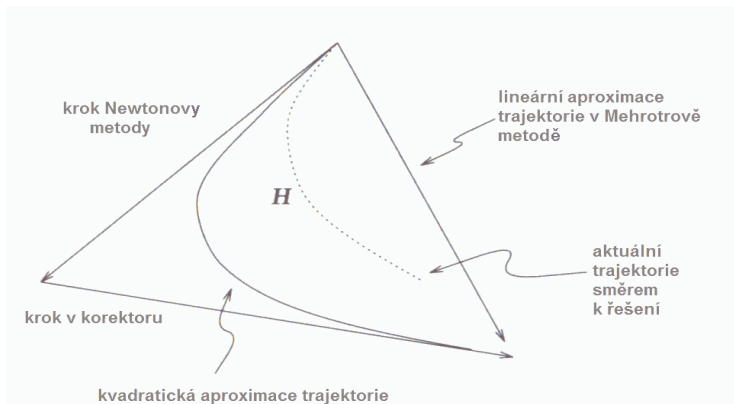


Motivace Mehrotrovy metody



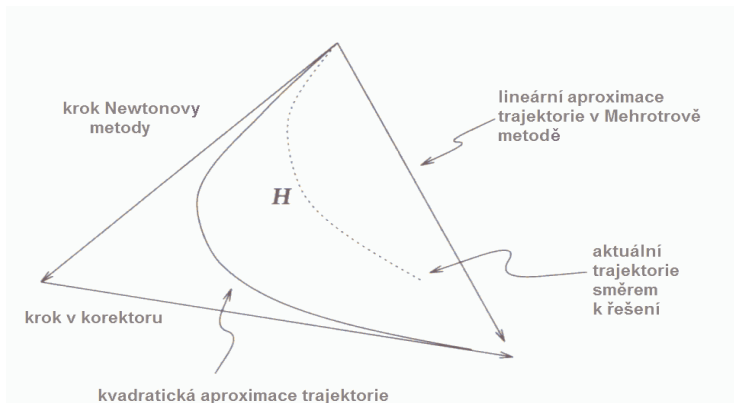
- Newtonův směr je lineární aproximace aktuální trajektorie

Motivace Mehrotrovy metody



- Newtonův směr je lineární aproximace aktuální trajektorie
- chybu této lineární aproximace trajektorie použijeme ke korekci, která využije i kvadratickou informaci

Motivace Mehrotrovy metody



- Newtonův směr je lineární aproximace aktuální trajektorie
- chybu této lineární aproximace trajektorie použijeme ke korekci, která využije i kvadratickou informaci
- v každé iteraci musíme vypočítat řešení dvou soustav lineárních rovnic

Prediktor

Vektor $(\Delta x_1^{aff}, \Delta x_2^{aff}, \Delta x_3^{aff}, \Delta \lambda^{aff}, \Delta s^{aff}, \Delta \mu^{aff}, \Delta d^{aff})$ je řešením soustavy lineárních rovnic

$$J(x_1, x_2, x_3, \lambda, s, \mu, d) \begin{pmatrix} \Delta x_1^{aff} \\ \Delta x_2^{aff} \\ \Delta x_3^{aff} \\ \Delta \lambda^{aff} \\ \Delta s^{aff} \\ \Delta \mu^{aff} \\ \Delta d^{aff} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_1 \\ -r_2 \\ -r_3 \\ x_1 - l - s \\ -\Lambda Se_1 \\ \mathbf{g} \odot \mathbf{g} - x_2 \odot x_2 - x_3 \odot x_3 - \mathbf{d} \\ -MDe_2 \end{pmatrix}$$

Prediktor

Vektor $(\Delta x_1^{aff}, \Delta x_2^{aff}, \Delta x_3^{aff}, \Delta \lambda^{aff}, \Delta s^{aff}, \Delta \mu^{aff}, \Delta d^{aff})$ je řešením soustavy lineárních rovnic

$$J(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{d}) \begin{pmatrix} \Delta x_1^{aff} \\ \Delta x_2^{aff} \\ \Delta x_3^{aff} \\ \Delta \lambda^{aff} \\ \Delta s^{aff} \\ \Delta \mu^{aff} \\ \Delta d^{aff} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{r}_1 \\ -\mathbf{r}_2 \\ -\mathbf{r}_3 \\ \mathbf{x}_1 - \mathbf{l} - \mathbf{s} \\ -\boldsymbol{\Lambda} \mathbf{S} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{g} \odot \mathbf{g} - \mathbf{x}_2 \odot \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 \odot \mathbf{x}_3 - \mathbf{d} \\ -\mathbf{M} \mathbf{D} \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}$$

a krok δ^{aff} určíme tak, aby platilo

$$(\mathbf{x}_1^{aff}, \mathbf{x}_2^{aff}, \mathbf{x}_3^{aff}, \boldsymbol{\lambda}^{aff}, \mathbf{s}^{aff}, \boldsymbol{\mu}^{aff}, \mathbf{d}^{aff}) \in \mathcal{F}_N^0$$

Výpočet parametrů pro korektor

Vypočítáme, jak by vypadala míra duality, pokud bychom provedli krok ve směru vypočítaném v prediktoru:

$$\alpha_{aff} = \frac{\left(\lambda + \delta^{aff} \Delta\lambda^{aff}\right)^T \left(\mathbf{s} + \delta^{aff} \Delta\mathbf{s}^{aff}\right)}{m_1}$$

$$\beta_{aff} = \frac{\left(\mu + \delta^{aff} \Delta\mu^{aff}\right)^T \left(\mathbf{d} + \delta^{aff} \Delta\mathbf{d}^{aff}\right)}{m_2}$$

Výpočet parametrů pro korektor

Vypočítáme, jak by vypadala míra duality, pokud bychom provedli krok ve směru vypočítaném v prediktoru:

$$\alpha_{aff} = \frac{\left(\lambda + \delta^{aff} \Delta\lambda^{aff}\right)^T \left(\mathbf{s} + \delta^{aff} \Delta\mathbf{s}^{aff}\right)}{m_1}$$

$$\beta_{aff} = \frac{\left(\mu + \delta^{aff} \Delta\mu^{aff}\right)^T \left(\mathbf{d} + \delta^{aff} \Delta\mathbf{d}^{aff}\right)}{m_2}$$

Předpovězenou a současnou míru duality použijeme pro odhad centrujícího parametru:

$$\sigma_l = \left(\frac{\alpha_{aff}}{\alpha}\right)^3, \quad \sigma_k = \left(\frac{\beta_{aff}}{\beta}\right)^3$$

Korektor

Vektor přírůstků nové iterace $(\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \Delta \lambda, \Delta s, \Delta \mu, \Delta d)$ je řešením soustavy lineárních rovnic

$$J(x_1, x_2, x_3, \lambda, s, \mu, d) \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta \lambda \\ \Delta s \\ \Delta \mu \\ \Delta d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_1 \\ -r_2 \\ -r_3 \\ x_1 - l - s \\ -\Lambda S e_1 - \Delta \lambda^{aff} \odot \Delta s^{aff} + \sigma_l \alpha e_1 \\ g \odot g - x_2 \odot x_2 - x_3 \odot x_3 - d \\ -M D e_2 - \Delta \mu^{aff} \odot \Delta d^{aff} + \sigma_k \beta e_2 \end{pmatrix}$$

Korektor

Vektor přírůstků nové iterace $(\Delta \mathbf{x}_1, \Delta \mathbf{x}_2, \Delta \mathbf{x}_3, \Delta \boldsymbol{\lambda}, \Delta \mathbf{s}, \Delta \boldsymbol{\mu}, \Delta \mathbf{d})$ je řešením soustavy lineárních rovnic

$$J(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{d}) \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{x}_1 \\ \Delta \mathbf{x}_2 \\ \Delta \mathbf{x}_3 \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \\ \Delta \mathbf{s} \\ \Delta \boldsymbol{\mu} \\ \Delta \mathbf{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{r}_1 \\ -\mathbf{r}_2 \\ -\mathbf{r}_3 \\ \mathbf{x}_1 - \mathbf{l} - \mathbf{s} \\ -\boldsymbol{\Lambda} \mathbf{S} \mathbf{e}_1 - \Delta \boldsymbol{\lambda}^{aff} \odot \Delta \mathbf{s}^{aff} + \sigma_l \alpha \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{g} \odot \mathbf{g} - \mathbf{x}_2 \odot \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 \odot \mathbf{x}_3 - \mathbf{d} \\ -\mathbf{M} \mathbf{D} \mathbf{e}_2 - \Delta \boldsymbol{\mu}^{aff} \odot \Delta \mathbf{d}^{aff} + \sigma_k \beta \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}$$

a krok δ určíme tak, aby platilo $(\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2, \bar{\mathbf{x}}_3, \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\mathbf{s}}, \bar{\boldsymbol{\mu}}, \bar{\mathbf{d}}) \in \mathcal{F}_N^0$.

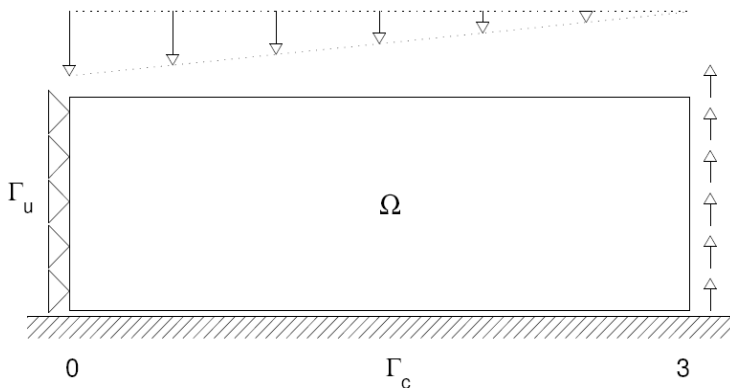
Úloha lineární elasticity s daným třením

Je dáno elastické těleso: $\Omega \in \mathbb{R}^3$, $\delta\Omega = \bar{\Gamma}_u \cup \bar{\Gamma}_p \cup \bar{\Gamma}_c$ kde

na Γ_u je předepsáno nulové posunutí,

na Γ_p je dáno plošné zatížení,

na Γ_c je jednostranná podpora s počáteční vzdáleností $d \in L^\infty(\Gamma_c)$



Diskretizace úlohy

Úlohou je najít $\mathbf{u} \in \mathcal{K}$ takové, že

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}) = \min_{\mathbf{v} \in \mathcal{K}} \mathcal{J}(\mathbf{v})$$

kde

$$\mathcal{J}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v} - \mathbf{v}^T \mathbf{f} + \mathbf{g}^T \|\mathbf{T} \mathbf{v}\|_{\text{vect}}$$

a

$$\mathcal{K} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{N} \mathbf{v} \leq \mathbf{d}\}$$

Symbol $\|\mathbf{T} \mathbf{v}\|_{\text{vect}}$ je definován jako

$$\|\mathbf{T} \mathbf{v}\|_{\text{vect}} := (\|(\mathbf{T} \mathbf{v})_1\|_{\mathbb{R}^2}, \|(\mathbf{T} \mathbf{v})_2\|_{\mathbb{R}^2}, \dots, \|(\mathbf{T} \mathbf{v})_{m_2}\|_{\mathbb{R}^2})^T \in \mathbb{R}^{m_2}$$

Duální úloha

Duální úloha vede na minimalizaci funkcionálu

$$D(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{b}$$

na množině

$$\left\{ \mathbf{x} = (\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T, \mathbf{x}_3^T)^T \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{x}_1 \geq \mathbf{0}, \|(x_{2_i}, x_{3_i})\|^2 \leq g_i, i = 1, \dots, m_2 \right\}$$

kde

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{B}^T, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{N} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{d} \\ \mathbf{T}_1 \mathbf{K}^{-1} \\ \mathbf{T}_2 \mathbf{K}^{-1} \end{pmatrix}$$

Řešení duální úlohy

Předchozí postup vychází z článků





Haslinger J, Dostál Z., Kučera R.: *An algorithm for the numerical realization of 3D contact problems with Coulomb frictions*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 164-165, 2004, pp. 387-408



Kučera R.: *Convergence rate of an optimal algorithm for minimizing quadratic functions with separable convex constraints*, 2007

Řešení duální úlohy

Předchozí postup vychází z článků

-  Haslinger J, Dostál Z., Kučera R.: *An algorithm for the numerical realization of 3D contact problems with Coulomb frictions*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 164-165, 2004, pp. 387-408
-  Kučera R.: *Convergence rate of an optimal algorithm for minimizing quadratic functions with separable convex constraints*, 2007

V článcích je také uveden algoritmus nazvaný QPC pro řešení problému, založený na

- metodě aktivní množiny
- projekci gradientu
- metodě konjugovaných gradientů

IPM s přímým výpočtem matice \mathbf{A}

V IPM potřebujeme znát matici \mathbf{A} , danou vzorcem $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{B}^T$.

Výpočet matice $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{B}^T$ můžeme provést užitím Choleského rozkladu matice \mathbf{K} , tj. užitím $\mathbf{A} = \mathbf{B}(\mathbf{L}\mathbf{L}^T)^{-1}\mathbf{B}^T$ podle schématu:

IPM s přímým výpočtem matice \mathbf{A}

V IPM potřebujeme znát matici \mathbf{A} , danou vzorcem $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{B}^T$.

Výpočet matice $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{B}^T$ můžeme provést užitím Choleského rozkladu matice \mathbf{K} , tj. užitím $\mathbf{A} = \mathbf{B}(\mathbf{L}\mathbf{L}^T)^{-1}\mathbf{B}^T$ podle schématu:

Najdeme řešení \mathbf{m} soustav rovnic s dolní trojúhelníkovou maticí

$$\mathbf{L}\mathbf{Y} = \mathbf{B}^T$$

IPM s přímým výpočtem matice A

V IPM potřebujeme znát matici A , danou vzorcem $A = BK^{-1}B^T$.

Výpočet matice $A = BK^{-1}B^T$ můžeme provést užitím Choleského rozkladu matice K , tj. užitím $A = B(LL^T)^{-1}B^T$ podle schématu:

Najdeme řešení m soustav rovnic s dolní trojúhelníkovou maticí

$$LY = B^T$$

Najdeme řešení m soustav rovnic s horní trojúhelníkovou maticí

$$L^TZ = Y$$

IPM s přímým výpočtem matice A

V IPM potřebujeme znát matici \mathbf{A} , danou vzorcem $\mathbf{A} = \mathbf{BK}^{-1}\mathbf{B}^T$.

Výpočet matice $\mathbf{A} = \mathbf{BK}^{-1}\mathbf{B}^T$ můžeme provést užitím Choleského rozkladu matice \mathbf{K} , tj. užitím $\mathbf{A} = \mathbf{B}(\mathbf{LL}^T)^{-1}\mathbf{B}^T$ podle schématu:

Najdeme řešení m soustav rovnic s dolní trojúhelníkovou maticí

$$\mathbf{LY} = \mathbf{B}^T$$

Najdeme řešení m soustav rovnic s horní trojúhelníkovou maticí

$$\mathbf{L}^T\mathbf{Z} = \mathbf{Y}$$

Nakonec vypočítáme

$$\mathbf{A} = \mathbf{BZ}$$

Použitelnost IPM s přímým výpočtem matice A

n	m	QPC		LOQO			Mehrotra		
		Čas	Av	Čas	Čas A	%	Čas	Čas A	%
162	54	0.29	203	0.07	0.03	45	0.12	0.03	26
900	180	2.08	311	0.68	0.34	50	1.07	0.34	31
2646	378	12.91	347	5.85	3.46	59	7.00	3.26	47
5832	648	53.4	384	27.1	18.1	67	27.0	15.8	59
10890	990	126.2	408	79.7	58.5	73	90.0	60.5	67
18252	1404	361.9	493	246.2	192.5	78	274.0	184	67
28350	1890	809.4	478	620.5	493.0	79	677.6	493.5	73

Použitelnost IPM s přímým výpočtem matice A

n	m	QPC		LOQO			Mehrotra		
		Čas	Av	Čas	Čas A	%	Čas	Čas A	%
162	54	0.29	203	0.07	0.03	45	0.12	0.03	26
900	180	2.08	311	0.68	0.34	50	1.07	0.34	31
2646	378	12.91	347	5.85	3.46	59	7.00	3.26	47
5832	648	53.4	384	27.1	18.1	67	27.0	15.8	59
10890	990	126.2	408	79.7	58.5	73	90.0	60.5	67
18252	1404	361.9	493	246.2	192.5	78	274.0	184	67
28350	1890	809.4	478	620.5	493.0	79	677.6	493.5	73

Co plyne z tabulky

Použitelnost IPM s přímým výpočtem matice A

n	m	QPC		LOQO			Mehrotra		
		Čas	Av	Čas	Čas A	%	Čas	Čas A	%
162	54	0.29	203	0.07	0.03	45	0.12	0.03	26
900	180	2.08	311	0.68	0.34	50	1.07	0.34	31
2646	378	12.91	347	5.85	3.46	59	7.00	3.26	47
5832	648	53.4	384	27.1	18.1	67	27.0	15.8	59
10890	990	126.2	408	79.7	58.5	73	90.0	60.5	67
18252	1404	361.9	493	246.2	192.5	78	274.0	184	67
28350	1890	809.4	478	620.5	493.0	79	677.6	493.5	73

Co plyne z tabulky

- IPM jsou ve všech případech rychlejší než QPC, ale výpočet matice **A** v IPM vyžaduje řešit m soustav lineárních rovnic s maticí **K**, kdežto QPC jich pro větší úlohy vyžaduje mnohem méně

Použitelnost IPM s přímým výpočtem matice A

n	m	QPC		LOQO			Mehrotra		
		Čas	Av	Čas	Čas A	%	Čas	Čas A	%
162	54	0.29	203	0.07	0.03	45	0.12	0.03	26
900	180	2.08	311	0.68	0.34	50	1.07	0.34	31
2646	378	12.91	347	5.85	3.46	59	7.00	3.26	47
5832	648	53.4	384	27.1	18.1	67	27.0	15.8	59
10890	990	126.2	408	79.7	58.5	73	90.0	60.5	67
18252	1404	361.9	493	246.2	192.5	78	274.0	184	67
28350	1890	809.4	478	620.5	493.0	79	677.6	493.5	73

Co plyne z tabulky

- IPM jsou ve všech případech rychlejší než QPC, ale výpočet matice A v IPM vyžaduje řešit m soustav lineárních rovnic s maticí K , kdežto QPC jich pro větší úlohy vyžaduje mnohem méně
- z podílu času potřebného pro výpočet A na celkovém času je zřejmé, že IPM nejsou tak dobře škálovatelné jako QPC

IPM bez přímého výpočtu matice A

V IPM řešíme soustavu s Jakobiho maticí $J(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{d})$. Pokud vyeliminujeme $\Delta \mathbf{s}$ a $\Delta \mathbf{d}$ dostaneme soustavu s tzv. **rozšířenou maticí**

$$R = \left(\begin{array}{ccc|cc} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} + 2\mathbf{M} & \mathbf{A}_{23} & \mathbf{0} & 2\mathbf{X}_2 \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} + 2\mathbf{M} & \mathbf{0} & 2\mathbf{X}_3 \\ \hline -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2\mathbf{X}_2 & 2\mathbf{X}_3 & \mathbf{0} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{array} \right)$$

IPM bez přímého výpočtu matice A

V IPM řešíme soustavu s Jakobiho maticí $J(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{d})$. Pokud vyliminojeme $\Delta \mathbf{s}$ a $\Delta \mathbf{d}$ dostaneme soustavu s tzv. **rozšířenou maticí**

$$R = \left(\begin{array}{ccc|cc} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} + 2\mathbf{M} & \mathbf{A}_{23} & \mathbf{0} & 2\mathbf{X}_2 \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} + 2\mathbf{M} & \mathbf{0} & 2\mathbf{X}_3 \\ \hline -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2\mathbf{X}_2 & 2\mathbf{X}_3 & \mathbf{0} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{array} \right)$$

Tuto matici blokově píšeme následovně

$$R = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_R & \mathbf{B}_R \\ \mathbf{B}_R^T & \mathbf{D}_R \end{pmatrix}$$

IPM bez přímého výpočtu matice A

V IPM řešíme soustavu s Jakobiho maticí $J(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{d})$. Pokud vyliminojeme $\Delta \mathbf{s}$ a $\Delta \mathbf{d}$ dostaneme soustavu s tzv. **rozšířenou maticí**

$$R = \left(\begin{array}{ccc|cc} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} + 2\mathbf{M} & \mathbf{A}_{23} & \mathbf{0} & 2\mathbf{X}_2 \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} + 2\mathbf{M} & \mathbf{0} & 2\mathbf{X}_3 \\ \hline -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2\mathbf{X}_2 & 2\mathbf{X}_3 & \mathbf{0} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{array} \right)$$

Tuto matici blokově píšeme následovně

$$R = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_R & \mathbf{B}_R \\ \mathbf{B}_R^T & \mathbf{D}_R \end{pmatrix}$$

Řešením soustavy pak vypočítáme $\Delta \mathbf{x}_1, \Delta \mathbf{x}_2, \Delta \mathbf{x}_3, \Delta \boldsymbol{\lambda}, \Delta \boldsymbol{\mu}$, zbylé přírůstky $\Delta \mathbf{s}$ a $\Delta \mathbf{d}$ pak dopočítáme z eliminovaných rovnic.

Použití iteračních metod pro soustavy lineárních rovnic

Při řešení soustavy s maticí \mathbf{R} použitím iteračních metod, je třeba pouze vypočítat násobení matice \mathbf{R} vektorem \mathbf{y} .

Použití iteračních metod pro soustavy lineárních rovnic

Při řešení soustavy s maticí \mathbf{R} použitím iteračních metod, je třeba pouze vypočítat násobení matice \mathbf{R} vektorem \mathbf{y} . Toto násobení se realizuje po částech:

- 1 přímo vypočítáme součin matice $\bar{\mathbf{R}}$ (vznikne z matice \mathbf{R} odečtením matice \mathbf{A} od bloku \mathbf{A}_R) s vektorem \mathbf{y}

Použití iteračních metod pro soustavy lineárních rovnic

Při řešení soustavy s maticí \mathbf{R} použitím iteračních metod, je třeba pouze vypočítat násobení matice \mathbf{R} vektorem \mathbf{y} . Toto násobení se realizuje po částech:

- 1 přímo vypočítáme součin matice $\bar{\mathbf{R}}$ (vznikne z matice \mathbf{R} odečtením matice \mathbf{A} od bloku \mathbf{A}_R) s vektorem \mathbf{y}
- 2 součin matice \mathbf{A} s příslušnou částí (ozn. \mathbf{y}_1) vektoru \mathbf{y} vypočítáme užitím vztahu $\mathbf{A}\mathbf{y}_1 = \mathbf{B}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{y}_1$, kde se místo násobení maticí \mathbf{K}^{-1} řeší soustava lineárních rovnic s maticí \mathbf{K} pomocí její Choleského faktorizace

Použití iteračních metod pro soustavy lineárních rovnic

Při řešení soustavy s maticí \mathbf{R} použitím iteračních metod, je třeba pouze vypočítat násobení matice \mathbf{R} vektorem \mathbf{y} . Toto násobení se realizuje po částech:

- 1 přímo vypočítáme součin matice $\bar{\mathbf{R}}$ (vznikne z matice \mathbf{R} odečtením matice \mathbf{A} od bloku \mathbf{A}_R) s vektorem \mathbf{y}
- 2 součin matice \mathbf{A} s příslušnou částí (ozn. \mathbf{y}_1) vektoru \mathbf{y} vypočítáme užitím vztahu $\mathbf{A}\mathbf{y}_1 = \mathbf{B}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{y}_1$, kde se místo násobení maticí \mathbf{K}^{-1} řeší soustava lineárních rovnic s maticí \mathbf{K} pomocí její Choleského faktorizace
- 3 oba výsledky „sečteme“

Použití iteračních metod pro soustavy lineárních rovnic

Při řešení soustavy s maticí \mathbf{R} použitím iteračních metod, je třeba pouze vypočítat násobení matice \mathbf{R} vektorem \mathbf{y} . Toto násobení se realizuje po částech:

- 1 přímo vypočítáme součin matice $\bar{\mathbf{R}}$ (vznikne z matice \mathbf{R} odečtením matice \mathbf{A} od bloku \mathbf{A}_R) s vektorem \mathbf{y}
- 2 součin matice \mathbf{A} s příslušnou částí (ozn. \mathbf{y}_1) vektoru \mathbf{y} vypočítáme užitím vztahu $\mathbf{A}\mathbf{y}_1 = \mathbf{B}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{y}_1$, kde se místo násobení maticí \mathbf{K}^{-1} řeší soustava lineárních rovnic s maticí \mathbf{K} pomocí její Choleského faktorizace
- 3 oba výsledky „sečteme“

Použití iteračních metod pro soustavy lineárních rovnic

Při řešení soustavy s maticí \mathbf{R} použitím iteračních metod, je třeba pouze vypočítat násobení matice \mathbf{R} vektorem \mathbf{y} . Toto násobení se realizuje po částech:

- 1 přímo vypočítáme součin matice $\bar{\mathbf{R}}$ (vznikne z matice \mathbf{R} odečtením matice \mathbf{A} od bloku \mathbf{A}_R) s vektorem \mathbf{y}
- 2 součin matice \mathbf{A} s příslušnou částí (ozn. \mathbf{y}_1) vektoru \mathbf{y} vypočítáme užitím vztahu $\mathbf{A}\mathbf{y}_1 = \mathbf{B}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{y}_1$, kde se místo násobení maticí \mathbf{K}^{-1} řeší soustava lineárních rovnic s maticí \mathbf{K} pomocí její Choleského faktorizace
- 3 oba výsledky „sečteme“

Iterační metody bez předpodmínění fungují pro matice produkované IPM velmi špatně a pomalu, proto je nutné použít dobré a zároveň výpočetně jednoduché a rychlé předpodmínění. V našem případě budeme k předpodmínění používat matici $\tilde{\mathbf{R}} \approx \mathbf{R}^{-1}$.

Co platí pro \mathbf{R}^{-1}

Pokud vyjdeme z blokového zápisu

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_R & \mathbf{B}_R \\ \mathbf{B}_R^T & \mathbf{D}_R \end{pmatrix}$$

tak můžeme matici \mathbf{R}^{-1} užitím Schurova komplementu podmatice \mathbf{A}_R vyjádřit následovně

$$\mathbf{R}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_R^{-1} - \mathbf{A}_R^{-1}\mathbf{B}_R\mathbf{F} & -\mathbf{A}_R^{-1}\mathbf{B}_R\mathbf{H}^{-1} \\ \mathbf{F} & \mathbf{H}^{-1} \end{pmatrix}$$

kde $\mathbf{H} = \mathbf{D}_R - \mathbf{B}_R^T\mathbf{A}_R^{-1}\mathbf{B}_R$ a $\mathbf{F} = -\mathbf{H}^{-1}\mathbf{B}_R^T\mathbf{A}_R^{-1}$.

Co platí pro \mathbf{R}^{-1}

Pokud vyjdeme z blokového zápisu

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_R & \mathbf{B}_R \\ \mathbf{B}_R^T & \mathbf{D}_R \end{pmatrix}$$

tak můžeme matici \mathbf{R}^{-1} užitím Schurova komplementu podmatice \mathbf{A}_R vyjádřit následovně

$$\mathbf{R}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_R^{-1} - \mathbf{A}_R^{-1}\mathbf{B}_R\mathbf{F} & -\mathbf{A}_R^{-1}\mathbf{B}_R\mathbf{H}^{-1} \\ \mathbf{F} & \mathbf{H}^{-1} \end{pmatrix}$$

kde $\mathbf{H} = \mathbf{D}_R - \mathbf{B}_R^T\mathbf{A}_R^{-1}\mathbf{B}_R$ a $\mathbf{F} = -\mathbf{H}^{-1}\mathbf{B}_R^T\mathbf{A}_R^{-1}$.

Při výpočtu IPM nemáme přímo k dispozici matici \mathbf{A} a tím ani matici \mathbf{A}_R . Proto budeme počítat pouze s jejich aproximacemi (resp. s aproximacemi jejich inverzí).

Postup provádění předpodmínění

- 1 Na počátku výpočtu vypočítáme matici $\tilde{\mathbf{A}} \approx \mathbf{A}^{-1}$

Postup provádění předpodmínění

- 1 Na počátku výpočtu vypočítáme matici $\tilde{\mathbf{A}} \approx \mathbf{A}^{-1}$
- 2 V každé iteraci IPM (tj. ve vnější iteraci) vypočítáme aproximaci $\tilde{\mathbf{A}}_R$ matice \mathbf{A}_R^{-1} řešením soustavy

$$\left(\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{A}} (\mathbf{A}_R - \mathbf{A}) \right) \tilde{\mathbf{A}}_R = \tilde{\mathbf{A}} \quad (5)$$

vzniklé užitím vztahu pro rozdíl dvou inverzních matic.

Postup provádění předpodmínění

- 1 Na počátku výpočtu vypočítáme matici $\tilde{\mathbf{A}} \approx \mathbf{A}^{-1}$
- 2 V každé iteraci IPM (tj. ve vnější iteraci) vypočítáme aproximaci $\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{R}}$ matice $\mathbf{A}_{\mathbf{R}}^{-1}$ řešením soustavy

$$\left(\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{A}} (\mathbf{A}_{\mathbf{R}} - \mathbf{A}) \right) \tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{R}} = \tilde{\mathbf{A}} \quad (5)$$

vzniklé užitím vztahu pro rozdíl dvou inverzních matic.

- 3 V každé iteraci IPM vypočítáme také matici $\mathbf{H} = \mathbf{D}_{\mathbf{R}} - \mathbf{B}_{\mathbf{R}}^T \tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{R}} \mathbf{B}_{\mathbf{R}}$

Postup provádění předpodmínění

- 1 Na počátku výpočtu vypočítáme matici $\tilde{\mathbf{A}} \approx \mathbf{A}^{-1}$
- 2 V každé iteraci IPM (tj. ve vnější iteraci) vypočítáme aproximaci $\tilde{\mathbf{A}}_R$ matice \mathbf{A}_R^{-1} řešením soustavy

$$\left(\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{A}} (\mathbf{A}_R - \mathbf{A}) \right) \tilde{\mathbf{A}}_R = \tilde{\mathbf{A}} \quad (5)$$

vzniklé užitím vztahu pro rozdíl dvou inverzních matic.

- 3 V každé iteraci IPM vypočítáme také matici $\mathbf{H} = \mathbf{D}_R - \mathbf{B}_R^T \tilde{\mathbf{A}}_R \mathbf{B}_R$
- 4 V každé iteraci iterační metody pro řešení soustav lineárních rovnic (tj. vnitřní iterace) provádíme předpodmínění maticí $\tilde{\mathbf{R}}$ danou předpisem

$$\tilde{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_R - \tilde{\mathbf{A}}_R \mathbf{B}_R \mathbf{F} & -\tilde{\mathbf{A}}_R \mathbf{B}_R \mathbf{H}^{-1} \\ \mathbf{F} & \mathbf{H}^{-1} \end{pmatrix} \quad (6)$$

kde $\mathbf{F} = -\mathbf{H}^{-1} \mathbf{B}_R^T \tilde{\mathbf{A}}_R$.

Co platí pro matici **A**

Pro matici **B** platí

$$\mathbf{BP} = (\mathbf{B}_1, \mathbf{0})$$

kde matice \mathbf{B}_1 je obecně čtvercová matice s plnou hodnotí (v našem případě dokonce diagonální) a \mathbf{P} je permutační matice.

Co platí pro matici \mathbf{A}

Pro matici \mathbf{B} platí

$$\mathbf{B}\mathbf{P} = (\mathbf{B}_1, \mathbf{0})$$

kde matice \mathbf{B}_1 je obecně čtvercová matice s plnou hodnotí (v našem případě dokonce diagonální) a \mathbf{P} je permutační matice.

Matici $\mathbf{P}^T\mathbf{K}\mathbf{P}$ pak rozdělíme na bloky označené takto

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{pmatrix}$$

Co platí pro matici \mathbf{A}

Pro matici \mathbf{B} platí

$$\mathbf{B}\mathbf{P} = (\mathbf{B}_1, \mathbf{0})$$

kde matice \mathbf{B}_1 je obecně čtvercová matice s plnou hodnotí (v našem případě dokonce diagonální) a \mathbf{P} je permutační matice.

Matici $\mathbf{P}^T\mathbf{K}\mathbf{P}$ pak rozdělíme na bloky označené takto

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{pmatrix}$$

Užitím Schurova komplementu podmatice \mathbf{K}_{22} dostáváme ze vztahu $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{B}^T$ vyjádření

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}_1 (\mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21})^{-1} \mathbf{B}_1^T$$

Výpočet $\tilde{\mathbf{A}} \approx \mathbf{A}^{-1}$

Z předchozího pro matici \mathbf{A}^{-1} platí

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}_1^{-1} (\mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21}) \mathbf{B}_1^{-T} \quad (7)$$

Výpočet $\tilde{\mathbf{A}} \approx \mathbf{A}^{-1}$

Z předchozího pro matici \mathbf{A}^{-1} platí

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}_1^{-1} (\mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21}) \mathbf{B}_1^{-T} \quad (7)$$

Pro výpočet $\tilde{\mathbf{A}} \approx \mathbf{A}^{-1}$ pak použijeme jeden ze vzorců

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{B}_1^{-1} (\mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12} (\text{diag } \mathbf{K}_{22})^{-1} \mathbf{K}_{21}) \mathbf{B}_1^{-T} \quad (8a)$$

Výpočet $\tilde{\mathbf{A}} \approx \mathbf{A}^{-1}$

Z předchozího pro matici \mathbf{A}^{-1} platí

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}_1^{-1} (\mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21}) \mathbf{B}_1^{-T} \quad (7)$$

Pro výpočet $\tilde{\mathbf{A}} \approx \mathbf{A}^{-1}$ pak použijeme jeden ze vzorců

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{B}_1^{-1} (\mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12} (\text{diag } \mathbf{K}_{22})^{-1} \mathbf{K}_{21}) \mathbf{B}_1^{-T} \quad (8a)$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{B}_1^{-1} (\mathbf{K}_{11} - \bar{\mathbf{K}}_{12} (\mathbf{U}_{11} - \bar{\mathbf{U}}_{12} \bar{\mathbf{V}}^{-1} \bar{\mathbf{U}}_{21})^{-1} \bar{\mathbf{K}}_{21}) \mathbf{B}_1^{-T} \quad (8b)$$

kde platí $\bar{\mathbf{V}} = \mathbf{V}_{11} - \mathbf{V}_{12} (\text{diag } \mathbf{V}_{22})^{-1} \mathbf{V}_{21}$

a kde \mathbf{P}_1 resp. \mathbf{P}_2 je permutační matice taková

$$\text{že } \mathbf{K}_{12} \mathbf{P}_1 = (\bar{\mathbf{K}}_{12}, \mathbf{0}) \text{ a } \mathbf{P}_1^T \mathbf{K}_{22} \mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{11} & \mathbf{U}_{12} \\ \mathbf{U}_{21} & \mathbf{U}_{22} \end{pmatrix}$$

$$\text{resp. } \mathbf{U}_{12} \mathbf{P}_2 = (\bar{\mathbf{U}}_{12}, \mathbf{0}) \text{ a } \mathbf{P}_2^T \mathbf{U}_{22} \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} \\ \mathbf{V}_{21} & \mathbf{V}_{22} \end{pmatrix}$$

Nastavení v numerických testech

Pro numerické testy byly použity úlohy o rozměrech

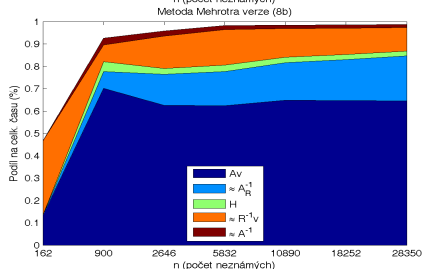
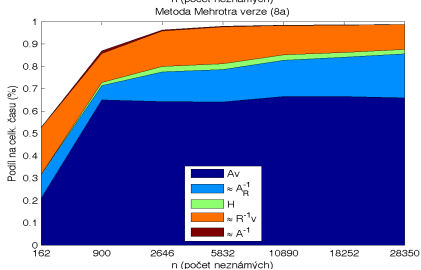
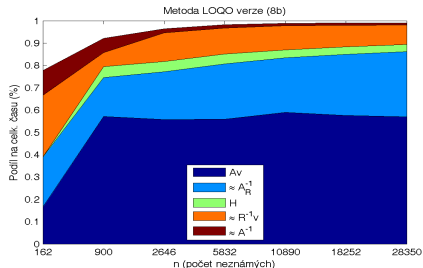
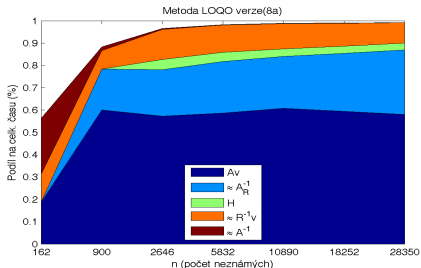
n	162	900	2646	5832	10890	18252	28350
m	54	180	378	648	990	1404	1890

Tolerance pro vnější řešič je nastavena 10^{-14} pro velikosti residuí KKT a 10^{-17} pro podmínky komplementarity.

Jako vnitřní řešič byla použita metoda předpodmíněných konjugovaných gradientů.

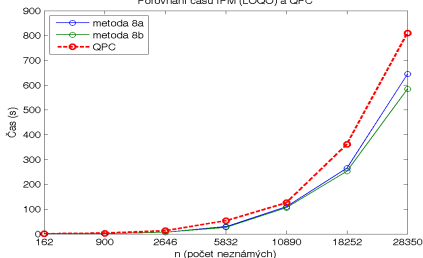
Všechny testy byly provedeny na počítači s procesorem P4, 2.8 GHz a s 1GB paměti.

Podíl částí výpočtů na celkovém čase

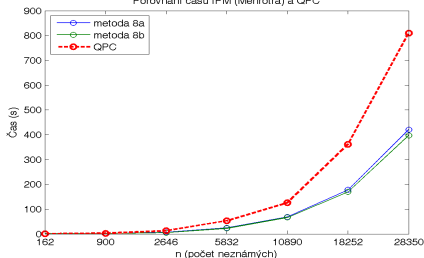


Srovnání IPM s iteračním řešičem a QPC

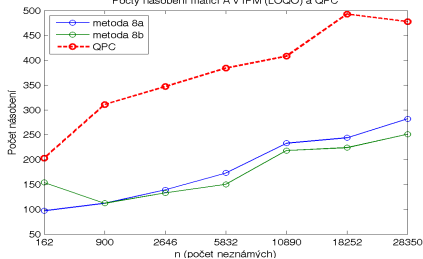
Porovnání časů IPM (LOQO) a QPC



Porovnání časů IPM (Mehrotra) a QPC



Počty násobení matic A v IPM (LOQO) a QPC



Počty násobení matic A v IPM (Mehrotra) a QPC

