ADAPTIVNÍ METODY SE STABILNÍMI SPLINOVÝMI-WAVELETOVÝMI KOSTRAMI

DANA ČERNÁ , VÁCLAV FINĚK
Technická Univerzita v Liberci

PANM'14
1.6.-6.6.2008, Dolní Maxov

OSNOVA

- Biortogonální waveletové báze a Gelfandovy kostry
- Adaptivní metody s Gelfandovými kostrami
- Konstrukce stabilní waveletové báze na intervalu
- Numerické výsledky

Waveletová báze

V separabilní Hilbertův prostor, $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$, $\|\cdot\|_V$
$\mathcal{J}$ množina indexů, $\lambda \in \mathcal{J}$ má tvar $\lambda = (j,k)$, $|\lambda| = j \in \mathbb{Z}$,

$\Psi := \{\psi_\lambda, \lambda \in \mathcal{J}\} \subset V$ se nazývá **waveletová báze** prostoru V, jestliže

1) Ψ je Rieszovou bází V, tj. $V = \mathrm{clos}_{\|.\|_V}\mathrm{span}\Psi$, a existují konstanty $c, C > 0$ takové, že pro všechna $\mathrm{b} := \{b_\lambda\}_{\lambda\in\mathcal{J}} \in l^2(\mathcal{J})$ platí

$$c\,\|\mathrm{b}\|_{l_2(\mathcal{J})} \leq \left\|\sum_{\lambda\in J} b_\lambda\psi_\lambda\right\|_V \leq C\,\|\mathrm{b}\|_{l_2(\mathcal{J})},$$

$\frac{\inf\ C}{\sup\ c}$ se nazývá podmíněnost Ψ.
2) Funkce jsou lokální ve smyslu $\text{průměr}\,(\Omega_\lambda) \leq C2^{-|\lambda|}$ pro všechna $\lambda \in \mathcal{J}$, kde Ω_λ je nosič funkce ψ_λ.

Vlastnosti waveletové báze

Ke každé waveletové bázi Ψ existuje biortogonální báze $\tilde{\Psi} = \left\{\tilde{\psi}_\lambda\right\}_{\lambda \in \mathcal{J}}$, tj. $\tilde{\Psi}$ je Rieszova báze V a $\left\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{i,l} \right\rangle_V = \delta_{i,j}\delta_{k,l}$.

Waveletová báze prostoru V je tvaru $\Psi = \Phi_{j_0} \cup \bigcup_{j \geq j_0} \Psi_j$.

$\phi_{j,k} \in \Phi_{j_0}$ se nazývají škálové funkce, $\psi_{j,k} \in \Psi_j$ se nazývají wavelety.

Předpokládejme, že $V \subset L^2(\Omega)$ a označme Π_r množinu všech polynomů až do stupně $r-1$ na Ω.

3) $\Pi_N \subset \mathrm{span}\Phi_{j_0}$, $\Pi_{\tilde{N}} \subset \mathrm{span}\tilde{\Phi}_{j_0}$

$\Pi_N \subset \mathrm{span}\Phi_{j_0} \quad \Rightarrow$

$$\left|\left\langle v, \tilde{\psi}_\lambda \right\rangle\right| \leq C 2^{-N|\lambda|} \left|v\right|_{H^N}(\Omega_\lambda), \quad \lambda \in \mathcal{J}_j, \quad v \in V \cap H^N(\Omega_\lambda).$$

Konstrukce waveletové báze

1. Waveletová báze na intervalu $\langle 0, 1\rangle$

2. Waveletová báze na $\langle 0, 1\rangle^n$ se vytvoří pomocí tenzorového součinu z waveletové báze na intervalu, označme ji $\bar{\Psi}$.

3. Waveletová báze na omezené oblasti
   - metodou fiktivních oblastí [Kunoth]
   - rozdělení na nepřekrývající se podoblasti $\Omega_i = p_i\left(\langle 0, 1\rangle^n\right)$, p_i spojité [Canuto, Tabaco, Urban, 1999], [Dahmen, Schneider, 1999]

Agregovaná Gelfandova kostra na omezené oblasti

- rozdělení na překrývající se podoblasti $\Omega_i = p_i\left(\langle 0, 1\rangle^n\right)$, p_i spojité, $\Psi := \cup_i \; p_i\left(\bar{\Psi}\right)$, [Stevenson, 2003], [Dahlke, Fornasier, Raasch, 2007].

Adaptivní metoda s Gelfandovými kostrami

- $\mathcal{L} : V \to V'$ lineární, spojitě invertibilní
- $a(\cdot,\cdot) := \langle \mathcal{L}\cdot, \cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ symetrická, spojitá, V-eliptická

Úloha: Pro $f \in V'$ najdi $u \in V$ takové, že platí

$$a(v,u) = \langle v, f\rangle \qquad \forall v \in V.$$

Nechť Ψ je Gelfandova kostra, $D := diag\,(\omega_\lambda)_{\lambda\in\mathcal{J}}$,
$\omega_\lambda = \sqrt{a(\psi_\lambda,\psi_\lambda)}$.

Definujme
$$\begin{aligned}\mathbf{L} &:= \mathbf{D}^{-1} a(\Psi,\Psi)\,\mathbf{D}^{-1},\\ \mathbf{f} &:= \mathbf{D}^{-1}\langle \Psi, f\rangle,\\ u &= \mathbf{U}\mathbf{D}^{-1}\Psi.\end{aligned}$$

Potom $\mathcal{L}u = f \Leftrightarrow \mathbf{LU} = \mathbf{F}$.

Algoritmus pro řešení úlohy $\mathbf{LU} = \mathbf{F}$

Richardsonovy iterace

$\mathbf{U}^0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{U}^{n+1} := \mathbf{U}^n + \omega \mathbf{r}_n, \quad \mathbf{r}_n := (\mathbf{f} - \mathbf{L}\mathbf{U}^n)$,

kde ω splňuje $\rho := \|\mathbf{I} - \omega \mathbf{L}\| < 1$.

Potom platí $\|\mathbf{U} - \mathbf{U}_{n+1}\| \leq \rho \|\mathbf{U} - \mathbf{U}_n\|$.

Pro optimální $\hat{\omega} = \frac{2}{\lambda_{min}(\mathbf{L}) + \lambda_{max}(\mathbf{L})}$ je $\hat{\rho} = \frac{\lambda_{max}(\mathbf{L}) - \lambda_{min}(\mathbf{L})}{\lambda_{max}(\mathbf{L}) - \lambda_{min}(\mathbf{L})} = \frac{\kappa(\mathbf{L}) - 1}{\kappa(\mathbf{L}) + 1}$.

Metoda největšího spádu

$\mathbf{U}^0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{U}^{n+1} := \mathbf{U}^n + \frac{\langle \mathbf{r}_n, \mathbf{r}_n \rangle}{\langle \mathbf{L}\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_n \rangle} \mathbf{r}_n, \quad \rho = \frac{\kappa(\mathbf{L}) - 1}{\kappa(\mathbf{L}) + 1}$.

Tento algoritmus realizujeme přibližně

$\mathbf{r}_n \approx \mathbf{RHS}\,(\mathbf{f}, \epsilon) - \mathbf{APPROX}\,(\mathbf{L}, \mathbf{U}^n, \epsilon)\,,$

kde $\|\mathbf{RHS}\,(\mathbf{f}, \epsilon) - \mathbf{f}\| \leq \epsilon$ a $\|\mathbf{APPROX}\,(\mathbf{L}, \mathbf{V}, \epsilon) - \mathbf{LV}\| \leq \epsilon$.

Konvergence a optimalita:

- waveletová báze, Richardsonovy iterace [Cohen, Dahmen, DeVore, 2002]
- waveletová báze, metoda největšího spádu, [Dahmen, Urban, Vorloeper, 2002], [Canuto, Urban, 2003]
- Gelfandova kostra, Richardsonovy iterace [Stevenson, 2003]
- Gelfandova kostra, metoda největšího spádu [Dahlke, Fornasier, Raasch, Stevenson, Werner, 2007]

Konstrukce waveletové báze na intervalu

[Dahmen, Kunoth, Urban, 1999] - první konstrukce biortogonální splinové waveletové báze

Modifikace původní konstrukce: [Dahmen, Kunoth, Urban, 1999a], [Grivett-Taloccia, Tabacco, 2000], [Barsch, 2001], [Burstede, 2005]

[Primbs, 2006] významě lepší výsledky pro $N = 2$, $\tilde{N} = 2, 4$; $N = 3$, $\tilde{N} = 3, 5$

1. Konstrukce primární škálové báze

$t_k = 0 \quad \text{for} \quad k = -N+1, \ldots, 0,$
$t_k = \frac{k}{2^j} \quad \text{for} \quad k = 1, \ldots 2^j - 1,$
$t_k = 1 \quad \text{for} \quad k = 2^j, \ldots, 2^j + N - 1.$

$$B^j_{k,N} := \left(t^j_{k+N} - t^j_k\right) \left[t^j_k, \ldots, t^j_{k+N}\right]_t (t - \cdot)^{N-1}_+$$

$(x)_+ := \max\{0, x\}$
$[t_1, \ldots t_N]_t f$ je N-tá poměrná diference funkce f.

$$\phi_{j,k} = 2^{j/2} B^j_{k,N}, \quad \text{for} \quad k = -N+1, \ldots, 2^j + N - 1, \quad j \geq 0.$$

Vnitřní funkce odpovídají konstrukci v [Cohen, Daubechies, Feauveau, 1992].

2. Konstrukce duální škálové báze

Duální škálová báze $\tilde{\Phi}$ musí být biortogonální k Φ a její polynomiální přesnost bude $\tilde{N}$.

$\tilde{\phi}$ duální škálová funkce z [Cohen, Daubechies, Feauveau, 1992], jejíž nosič je $\left[-N+1, N+\tilde{N}-1\right]$.
$\tilde{N} \geq N$ a $\tilde{N}+N$ je sudé.

Vnitřní funkce:

$$\theta_{j,k} = 2^{j/2}\tilde{\phi}\left(2^j \cdot -l\right)|_{[0,1]}, \quad k = \tilde{N}-1, \ldots, 2^j - \tilde{N}+1,$$

Okrajové funkce 1.typu:

$$\theta_{j,k} = \sum_{l=-N-\tilde{N}+2}^{\tilde{N}-2} \left\langle p_{k+N-1}^{\tilde{N}-1}, \phi\left(\cdot - l\right)\right\rangle 2^{j/2}\tilde{\phi}\left(2^j \cdot -l\right)|_{[0,1]},$$
$k = -N+1, \ldots, -N+\tilde{N},$

$\left\{p_0^{\tilde{N}-1}, \dots, p_{\tilde{N}-1}^{\tilde{N}-1}\right\}$ je báze $\Pi_{\tilde{N}}$, $p_k^{\tilde{N}-1}$ jsou Bernsteinovy polynomy:
$p_k^{\tilde{N}-1}(x) := b^{-\tilde{N}+1}\binom{\tilde{N}-1}{k} x^k (b-x)^{\tilde{N}-1-k}$, $k = 0, \dots, \tilde{N}-1$

Okrajové funkce 2.typu:

$\theta_{j,k} = \sum_{l=\tilde{N}-1-2k}^{N+\tilde{N}-1} h_l \tilde{\phi}(2\cdot - 2k - l)$, $\quad k = -N + \tilde{N} + 1, \dots \tilde{N} - 2,$

Okrajové funkce na pravém okraji:
$\theta_{j,k} = \theta_{j,2^j-N+1-k}(1-\cdot)$, $\quad k = 2^j - \tilde{N} + N, \dots, 2^j + N - 1.$

Biortogonalizace:

$\tilde{\Phi} := \mathbf{C}_j^{-T}\Theta$, $\mathbf{C}_j = \left(\langle \phi_{j,k}, \theta_{j,l}\rangle\right)_{k,l=-N+1}^{2^j+N-1}$

3. Konstrukce waveletových bází

- metodou stabilního doplnění

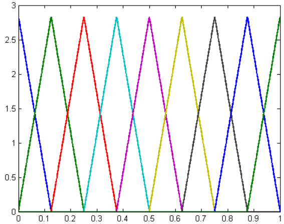
4. Zlepšení podmíněnosti škálových a waveletových bází

$$\phi_{j,k}^N = \frac{\phi_{j,k}}{\sqrt{\langle \phi_{j,k}, \phi_{j,k} \rangle}}, \quad \tilde{\phi}_{j,k}^N = \tilde{\phi}_{j,k} \sqrt{\langle \phi_{j,k}, \phi_{j,k} \rangle}, \; k \in J_j, \quad j \geq j_0$$

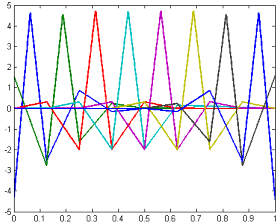
$$\psi_{j,k}^N = \frac{\psi_{j,k}}{\sqrt{\langle \psi_{j,k}, \psi_{j,k} \rangle}}, \quad \tilde{\psi}_{j,k}^N = \tilde{\psi}_{j,k} \sqrt{\langle \psi_{j,k}, \psi_{j,k} \rangle}, \; k \in I_j, \quad j \geq j_0$$

$N = 2,\ \tilde{N} = 4$

Primární škálová báze

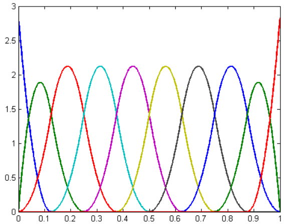


Primární waveletová báze

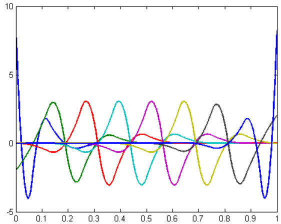


$N = 3,\ \tilde{N} = 3$

Primární škálová báze



Primární waveletová báze



Podmíněnost waveletových bází

			primární			duální		
N	$\tilde{N}$	j	[DKU]	[Primbs]	[CF]	[DKU]	[Primbs]	[CF]
2	2	5	3.61	1.91	1.91	3.85	1.92	1.99
2	4	5	3.70	1.97	1.99	3.97	2.02	1.99
2	6	5	3.30	1.99	1.99	4.33	2.94	2.25
2	8	5	2.73	2.33	2.22	4.82	3.13	3.80
3	3	5	16.33	4.02	3.98	18.75	4.32	3.95
3	5	5	15.17	4.21	3.97	16.44	5.00	3.96
3	7	5	16.81	4.16	3.97	22.90	7.02	3.96
3	9	5	-	5.94	3.99	-	11.90	4.06
4	6	6	69.58	9.73	7.98	71.77	78.96	10.60
4	8	6	68.91	14.54	7.97	89.23	151.40	8.55
4	10	6	73.21	-	7.97	120.30	-	8.04

Čísla podmíněnosti matice tuhosti pro 2D Helmholtzovu rovnici

$$\mathbf{L}_{j_0,s} = \left(\left\langle \psi'_{j,k}, \psi'_{l,m} \right\rangle + \langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle \right)_{j_0 \leq j, l \leq j_0+s; k \in J_j; m \in J_l}$$

M je počet bázových funkcí

[DKU]=[Dahmen, Kunoth, Urban, 1999]
[B]=[Burstedde, 2005]

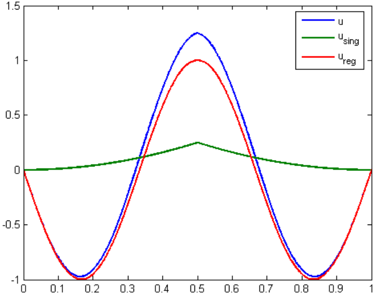
j_0	s	M	$\kappa\left(\mathbf{L}_{j_0,s}\right)[DKU]$	$\kappa\left(\mathbf{L}_{j_0,s}\right)[B]$	$\kappa\left(\mathbf{L}_{j_0,s}\right)$
3	1	289	627.1	107.6	2.8
3	2	1089	652.2	142.3	6.5
3	3	4225	683.0	182.0	9.5
3	4	16641	703.4	216.3	13.0

Numerický příklad

$$-u'' = f \quad \text{na} \quad \Omega := (0,1),\ u(0) = u(1) = 0$$

$$f(v) = 4v\left(\tfrac{1}{2}\right) + \int_0^1 \left(-9\pi^2 sin(3\pi x) - 4\right) v(x)\, dx$$

$$\Rightarrow u(x) = -sin(3\pi x) + 2x^2 \qquad x \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right)$$
$$= -sin(3\pi x) + 2(1-x)^2 \qquad x \in \left[\tfrac{1}{2}, 1\right)$$



$u \in H^s(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ pro $s < \frac{3}{2}$

$u \in B_\tau^{s+1}(L^\tau(\Omega))$ pro všechna $s > 0$, $\tau = \left(s + \frac{1}{2}\right)^{-1}$

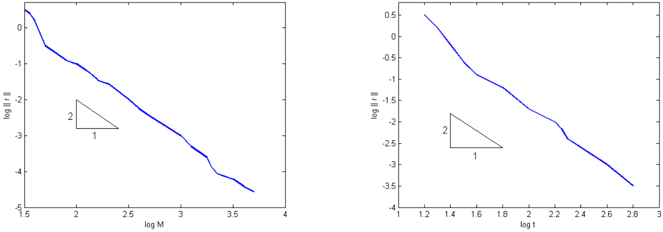
$\Rightarrow \|\mathbf{U} - \mathbf{U}_n\|_{l^2(\mathcal{J})} \leq C\,(\text{supp } \mathbf{U}_n)^{-s}$ pro $s < N - 1$

Agregovaná Gelfandova kostra

$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_1 := (0, 0.7)$, $\Omega_2 := (0.3, 1)$

$\Psi = \Psi_1 \cup \Psi_2$, kde Ψ_1 waveletová báze na Ω_1, Ψ_2 waveletová báze na Ω_2

$N = 3, \ \tilde{N} = 3$



$N = 4, \ \tilde{N} = 6$