**PANM 14, Dolní Maxov, 1. – 6. června 2008**

# Modelování rezonančních vlastností kulového tlumiče

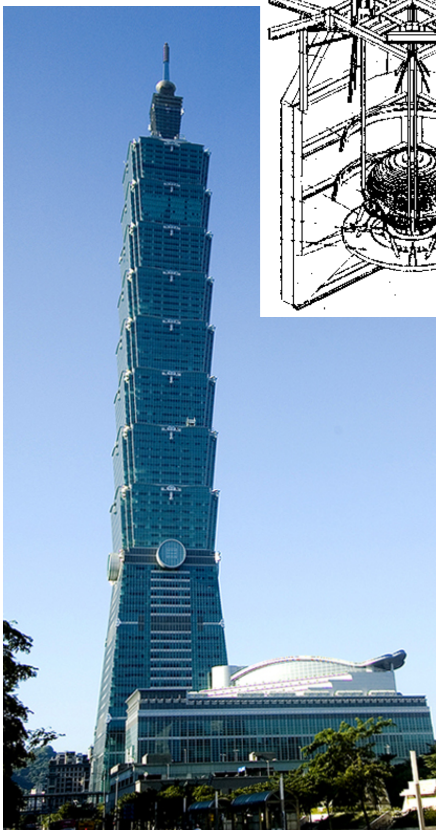
**Jiří Náprstek, Cyril Fischer**

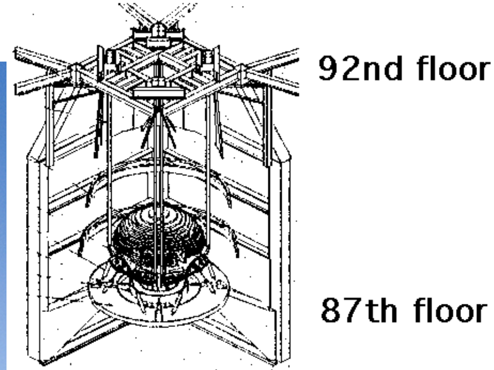
**Institute of Theoretical and Applied Mechanics, v.v.i.**
**Academy of Sciences of the Czech Republic,**
**190 00 Praha 9, Prosecká 76**

# OSNOVA

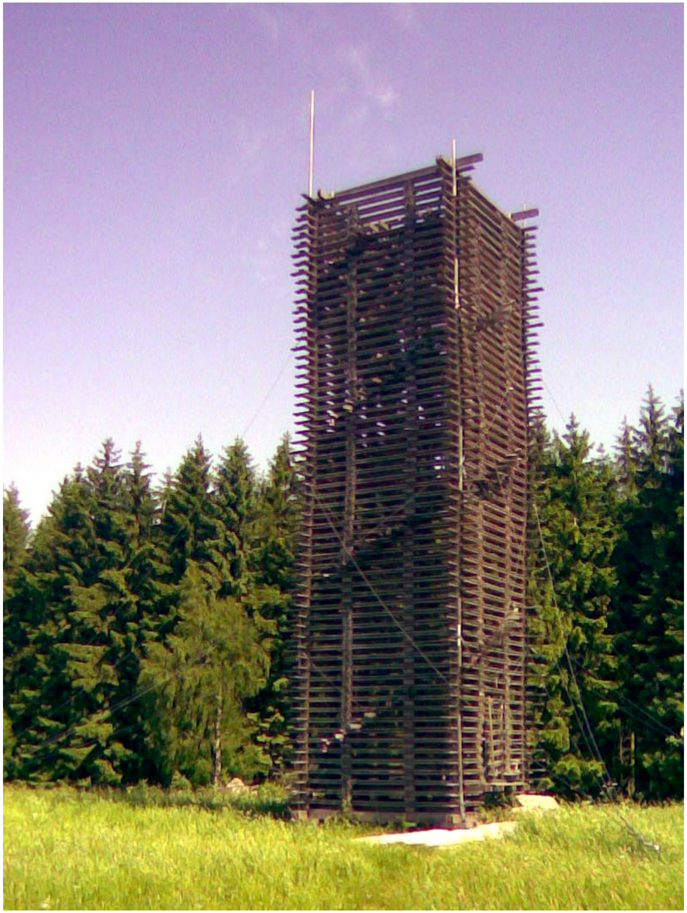
# 1. ÚVOD — MOTIVACE

Motivační obrázek: Taipei 101, Taiwan. Současný nejvyšší mrakodrap (508 m) užívá jako tlumič kmitů kyvadlo, které váží 700 000kg

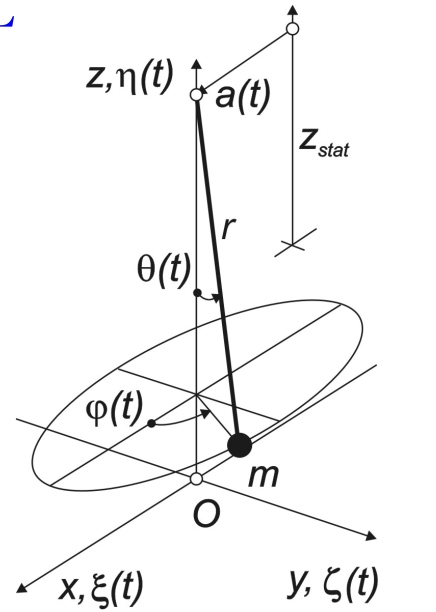





Existují však i konstrukce, které tlumič nemají a kde by docela hodil – a nemusíme chodit daleko



# 2. MATEMATICKÝ MODEL




## 2.1. Sférická a Cartézská verze základní diferenciální soustavy

Semi-triviální řešení a jeho porucha se nedá formulovat v proměnných $\theta(t), \varphi(t)$.

Soustavu je třeba popsat přibližně v souřadnicích $x, y, z$ s jednou vedlejší geometrickou podmínkou

Složky pohybu $\xi(t), \zeta(t)$ odpovídají souřadnicím $x, y$.

$$\underbrace{\begin{array}{r} r\ddot{\theta} + (g - r\dot{\varphi}^2\cos\theta)\sin\theta \\ r(\dot{\varphi}\sin^2\theta)^{\cdot} \end{array}}_{\text{konzervativní část}} \begin{array}{c} = \\ = \end{array} \underbrace{\begin{array}{l} -\ddot{a}\cos\theta\cos\varphi - 2r\omega_b\dot{\theta} \\ \ddot{a}\sin\theta\sin\varphi - 2r\omega_b\dot{\varphi}\sin\theta \end{array}}_{\text{absorbce a disipace energie}}$$

**Kinetická energie:**

$$T = \frac{m}{2}\left[\dot{\xi}^2 + \dot{\zeta}^2 + \frac{1}{4r^2}\left(\xi^2+\zeta^2\right)^{\bullet\,2}\left(1 + \frac{\xi^2+\zeta^2}{2r^2}\right)^2 + 2\dot{u}\dot{\xi} + \dot{u}^2\right];$$

kde: $\quad (\ldots)^{\bullet} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ldots)$ .

**Potenciální energie:**

$$1 - \cos\theta \approx \frac{1}{2}\theta^2 - \frac{1}{24}\theta^4 \quad \Rightarrow \quad V = mg\left[\frac{1}{2r}(\xi^2+\zeta^2) + \frac{1}{8r^3}(\xi^2+\zeta^2)^2\right]$$

**Přibližná Lagrangeova soustava ve složkách $\xi, \zeta$ — v Cartézské soustavě:**

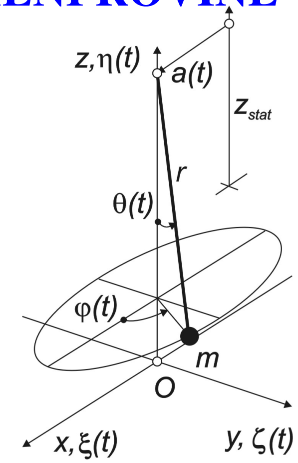
$O(\varepsilon^6);\ \varepsilon^2 = (\xi^2 + \zeta^2)/r^2$:

$$\begin{aligned}
\ddot{\xi} + \frac{1}{2r^2}\xi(\xi^2+\zeta^2)^{\cdot\cdot} + 2\omega_b\dot{\xi} + \frac{g}{r}\left(\xi + \frac{1}{2r^2}\xi(\xi^2+\zeta^2)\right) &= -\ddot{a} \\
\ddot{\zeta} + \frac{1}{2r^2}\zeta(\xi^2+\zeta^2)^{\cdot\cdot} + 2\omega_b\dot{\zeta} + \frac{g}{r}\left(\zeta + \frac{1}{2r^2}\zeta(\xi^2+\zeta^2)\right) &= 0
\end{aligned}$$

$\omega_b$ - relativní měřítko viskozního útlumu.

# 3. SEMI-TRIVIÁLNÍ ŘEŠENÍ VE VERTIKÁLNÍ ROVINĚ

## 3.1. Semi-triviální řešení




**Předpokládáme**

- harmonické buzení (pravá strana): $a(t) = a_0 \sin \omega t$
- pohyb ve vertikální rovině: $\zeta_0 = 0$
- obecný tvar řešení: $\xi_0 = \xi_c \cos \omega t + \xi_s \sin \omega t$

Koeficienty $\xi_c, \xi_s$ jsou obecně funkce času:
(a) **Stacionární řešení:** $\xi_c$, $\xi_s$ konvergují ke konstantám;
(b) **Obecný případ:** řešení je nestacionární, amplitudy mohou sledovat periodické i neperiodické křivky.

Soustava se redukuje na rovnici

$$\ddot{\xi}(1 + \frac{\xi^2}{r^2}) + \frac{1}{r^2}\xi\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}\omega_b\dot{\xi} + \omega_0^2\xi(1 + \frac{1}{2r^2}\xi^2) - a_0\omega^2 \sin \omega t = 0$$

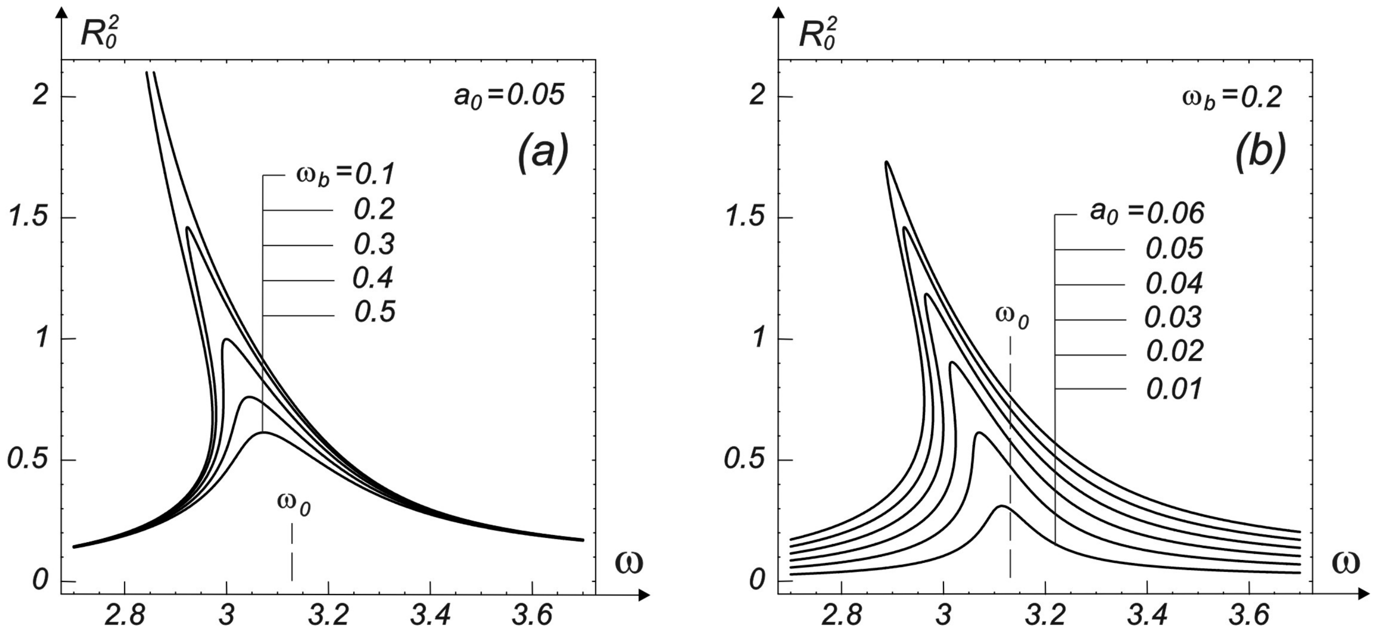
**Stacionární stav** (metoda harmonické rovnováhy):

$$\begin{aligned}
\xi_c \left( (\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{1}{2r^2} \left( \frac{3}{4}\omega_0^2 - \omega^2 \right) (\xi_c^2 + \xi_s^2) \right) + \frac{1}{2}\omega\omega_b \cdot \xi_s &= 0 \\
\xi_s \left( (\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{1}{2r^2} \left( \frac{3}{4}\omega_0^2 - \omega^2 \right) (\xi_c^2 + \xi_s^2) \right) - \frac{1}{2}\omega\omega_b \cdot \xi_c &= a_0 \cdot \omega^2
\end{aligned}$$

**Rovnice pro amplitudu $R_0^2 = \xi_c^2 + \xi_s^2$:**

$$R_0^2 \left[\omega^2\omega_b^2 + 4\left((\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{1}{2r^2}\left(\frac{3}{4}\omega_0^2 - \omega^2\right)R_0^2\right)^2\right] - 4\omega^4 a_0^2 \;=\; 0\;,$$

— tzv. **rezonanční křivka**




Rezonanční křivky jakožto semi-triviální řešení;
(a) pevná amplituda buzení, proměnný útlum; (b) pevný útlum, proměnná amplituda buzení.

## 3.2. Analýza stability

**Rozšíříme semitriviální řešení o lineární poruchu v obou souřadnicích:**

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0 + u \qquad (u = u(t)) \ , \quad (a) \\ \zeta &= 0 + v \qquad (v = v(t)) \ . \quad (b) \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} u(t) &= u_c \cos \omega t + u_s \sin \omega t \ , \\ v(t) &= v_c \cos \omega t + v_s \sin \omega t \ . \end{aligned}$$

”Linneární” a ”malá” porucha ... zachovají se první mocniny $u, v$ a jejich derivací.

Harmonická rovnováha; dvě lineární algebraické soustavy pro $u_c, u_s$ and $v_c, v_s$:

$$\begin{aligned} \left[(\omega_0^2 - \omega^2) + \tfrac{1}{2r^2}\left(\tfrac{3}{4}\omega_0^2 - \omega^2\right)(3\xi_c^2 + \xi_s^2)\right] u_c + \left[\tfrac{1}{2}\omega\omega_b + \tfrac{1}{r^2}\left(\tfrac{3}{4}\omega_0^2 - \omega^2\right)\xi_c\xi_s\right] u_s &= 0 \ , \\ \left[\tfrac{1}{r^2}\left(\tfrac{3}{4}\omega_0^2 - \omega^2\right)\xi_c\xi_s - \tfrac{1}{2}\omega\omega_b\right] u_c + \left[(\omega_0^2 - \omega^2) + \tfrac{1}{2r^2}\left(\tfrac{3}{4}\omega_0^2 - \omega^2\right)(\xi_c^2 + 3\xi_s^2)\right] u_s &= 0 \ , \end{aligned}$$

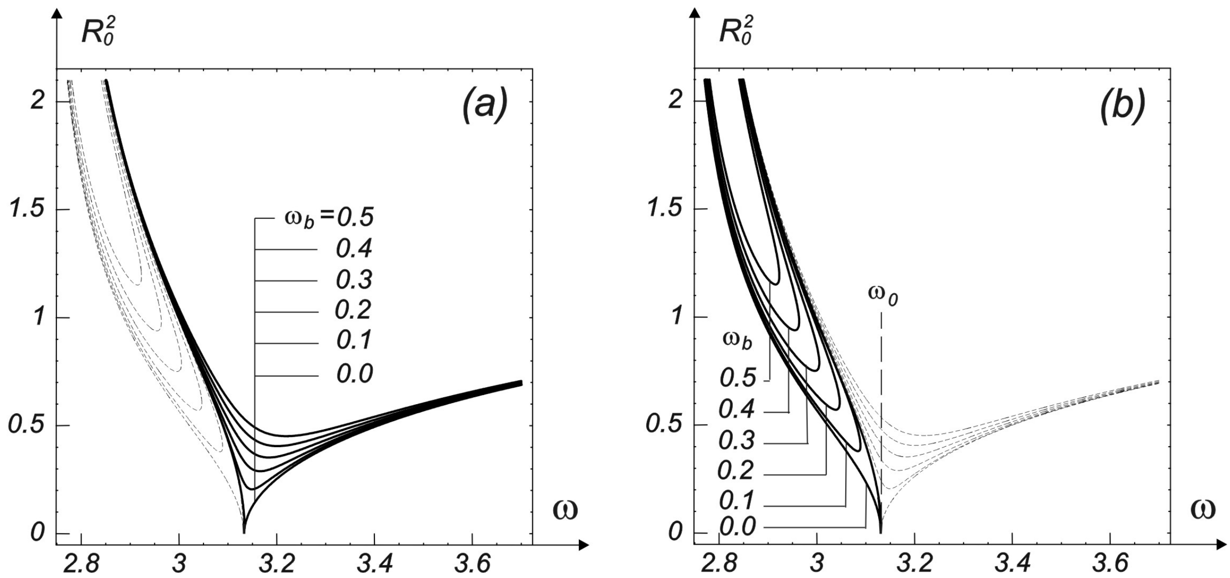
$$\begin{aligned} \left[(\omega_0^2 - \omega^2) + \tfrac{1}{2r^2}\left(\tfrac{3}{4}\omega_0^2 - \omega^2\right)\xi_c^2 + \tfrac{1}{2r^2}\left(\tfrac{1}{4}\omega_0^2 + \omega^2\right)\xi_s^2\right] v_c + \left[\tfrac{1}{r^2}\left(\tfrac{1}{4}\omega_0^2 - \omega^2\right)\xi_c\xi_s + \tfrac{1}{2}\omega\omega_b\right] v_s &= 0 \ , \\ \left[\tfrac{1}{r^2}\left(\tfrac{1}{4}\omega_0^2 - \omega^2\right)\xi_c\xi_s - \tfrac{1}{2}\omega\omega_b\right] v_c + \left[(\omega_0^2 - \omega^2) + \tfrac{1}{2r^2}\left(\tfrac{3}{4}\omega_0^2 - \omega^2\right)\xi_s^2 + \tfrac{1}{2r^2}\left(\tfrac{1}{4}\omega_0^2 + \omega^2\right)\xi_c^2\right] v_s &= 0 \ . \end{aligned}$$

**hranice stability :**

pro amplitudy $R_u^2 = u_c^2 + u_s^2$, $R_v^2 = v_c^2 + v_s^2$

$$\zeta: \quad R_v^2 \frac{1}{2r^2}\left(\frac{3}{4}\omega_0^2 - \omega^2\right)\left(3R_v^2 \frac{1}{2r^2}\left(\frac{3}{4}\omega_0^2 - \omega^2\right) + 4(\omega_0^2 - \omega^2)\right) + (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{1}{4}\omega^2\omega_b^2 = 0$$

$$\xi: \quad R_u^2 \left(\frac{\omega_0^2}{2r^2}(\omega_0^2 - \omega^2) + R_u^2 \frac{1}{4r^4}\left(\frac{3}{4}\omega_0^2 - \omega^2\right)\left(\frac{1}{4}\omega_0^2 + \omega^2\right)\right) + (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{1}{4}\omega^2\omega_b^2 = 0$$




Hranice stability semi-triviálního řešení:

(a) kolmo k rovině $(xz)$ - hranice stability $\zeta$; (b) v rovině $(xz)$ - hranice stability $\xi$.

video

# 4. POST-KRITICKÁ ODEZVA V REZONANČNÍ OBLASTI

## 4.1. Simulace - numerický výpočet

- Fourierova transformace numerického řešení ukazuje, že řešení obsahuje pouze frekvenci odpovídající frekvenci buzení $\omega$ v celé rezonanční oblasti.

- Podle obrázku (e) je možné očekávat stacionární řešení i v rezonanční oblasti.

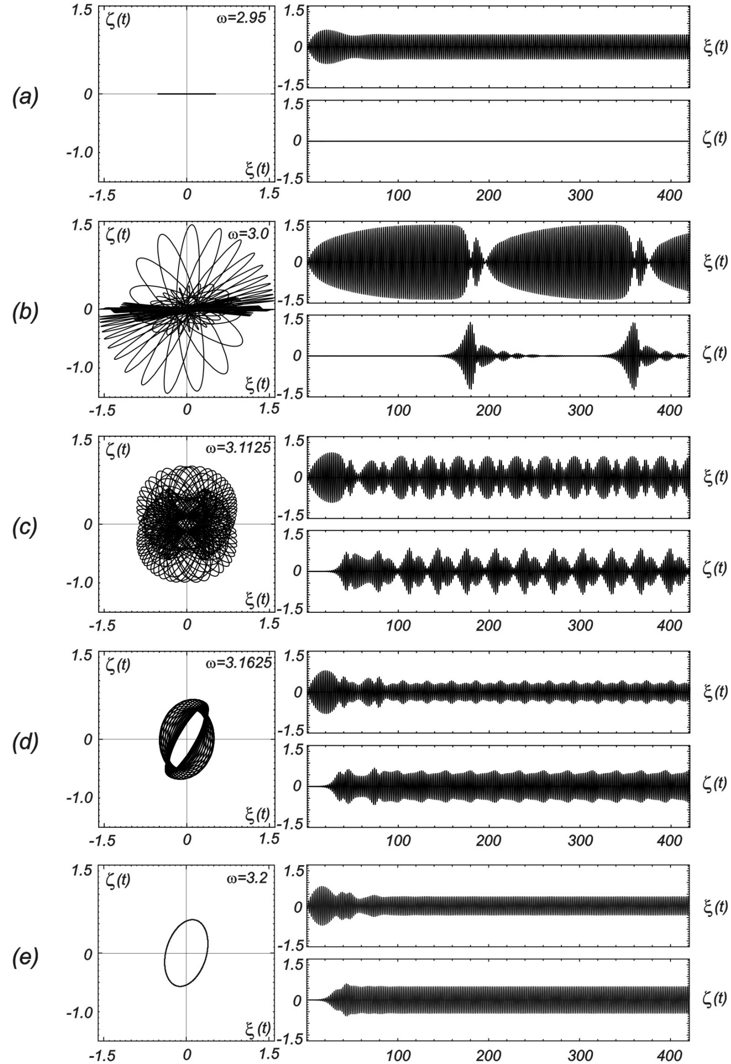
**Uvažujme obecnější tvar řešení:**

$$\xi(t) = a_c(t)\cos\omega t + a_s(t)\sin\omega t$$
$$\zeta(t) = b_c(t)\cos\omega t + b_s(t)\sin\omega t$$

pro 4 neznámé $a_c, a_s, b_c, b_s$ namísto 2 $\xi, \zeta$ můžeme definovat 2 další podmínky:

$$\dot{\xi}(t) = -a_c\omega\sin\omega t + a_s\omega\cos\omega t$$
$$\dot{\zeta}(t) = -b_c\omega\sin\omega t + b_s\omega\cos\omega t$$

kde $a_c = a_c(t), a_s = a_s(t), b_c = b_c(t), b_s = b_s(t)$.



**Diferenciální soustava pro amplitudy** $a_c = a_c(t), a_s = a_s(t), b_c = b_c(t), b_s = b_s(t)$**:**

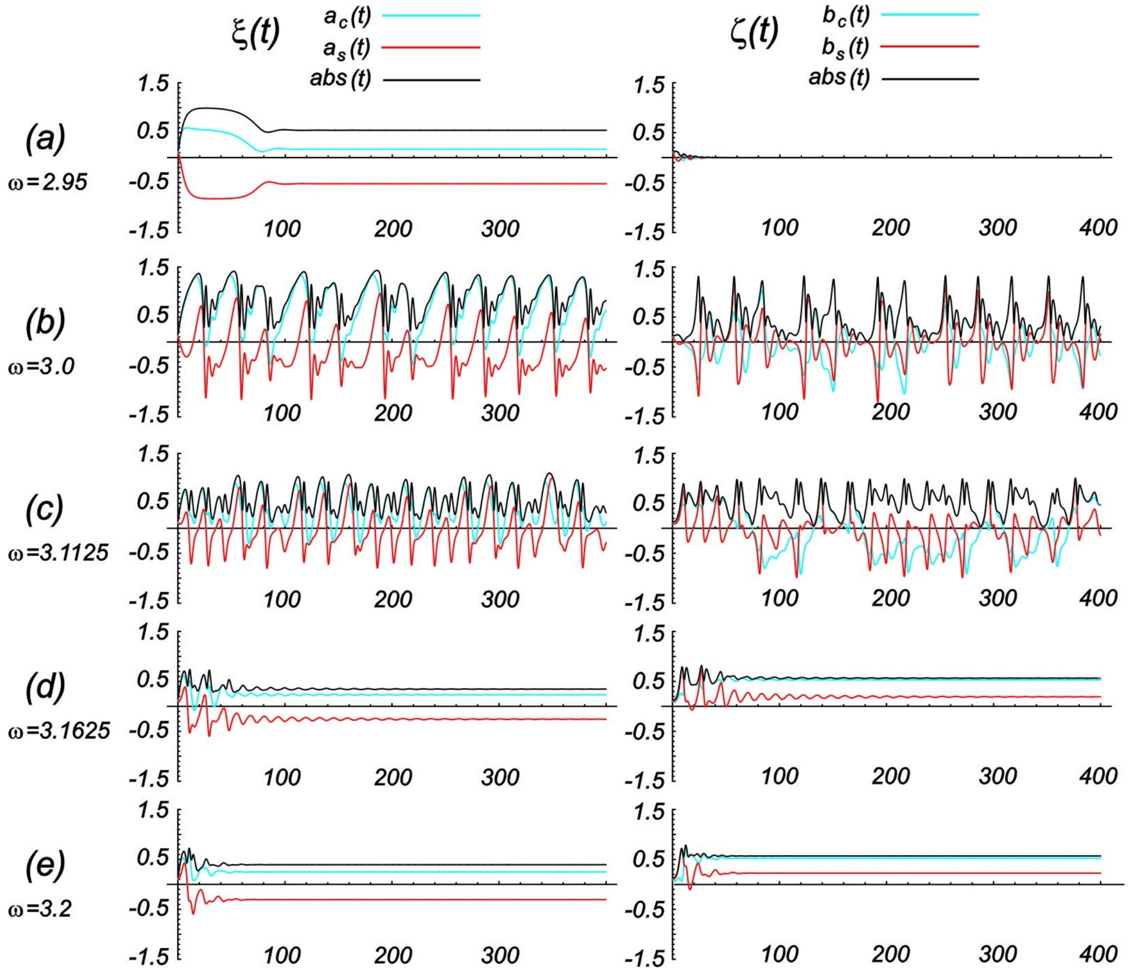
$$\omega \begin{bmatrix} -2a_c a_s, & 4r^2 + 3a_c^2 + a_s^2, & -a_s b_c - a_c b_s, & 3a_c b_c + a_s b_s \\ -4r^2 - a_c^2 - 3a_s^2, & 2a_c a_s, & -a_c b_c - 3a_s b_s, & a_s b_c + a_c b_s \\ -a_s b_c - a_c b_s, & 3a_c b_c + a_s b_s, & -2b_c b_s, & 4r^2 + 3b_c^2 + b_s^2 \\ -a_c b_c - 3a_s b_s, & a_s b_c + a_c b_s, & -4r^2 - b_c^2 - 3b_s^2, & 2b_c b_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{a}_c \\ \dot{a}_s \\ \dot{b}_c \\ \dot{b}_s \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_c \left(8\Omega_2 r^2 + \left(a_c^2 + a_s^2 + b_c^2\right)\Omega_1 + b_s^2\Omega_3\right) + 2a_s\left(2\beta\omega r^2 + b_c b_s \Omega_4\right) \\ 8\omega^2 a_0 r^2 + a_s \left(8\Omega_2 r^2 + \left(a_c^2 + a_s^2 + b_s^2\right)\Omega_1 + b_c^2\Omega_3\right) - 2a_c\left(2\beta\omega r^2 - b_c b_s \Omega_4\right) \\ b_c \left(8\Omega_2 r^2 + \left(a_c^2 + b_c^2 + b_s^2\right)\Omega_1 + a_s^2\Omega_3\right) + 2b_s\left(2\beta\omega r^2 + a_c a_s \Omega_4\right) \\ b_s \left(8\Omega_2 r^2 + \left(a_s^2 + b_c^2 + b_s^2\right)\Omega_1 + a_c^2\Omega_3\right) - 2b_c\left(2\beta\omega r^2 - a_c a_s \Omega_4\right) \end{bmatrix},$$

označení:

$$\Omega_1 = 3\omega_0^2 - 4\omega^2\ ,\ \Omega_2 = \omega_0^2 - \omega^2\ ,\ \Omega_3 = \omega_0^2 + 4\omega^2\ ,\ \Omega_4 = \omega_0^2 - 4\omega^2\ .$$

budeme řešit numericky




**Numerický výpočet amplitud v rezonanční oblasti**

## 4.2. Stacionární řešení v rezonanční oblasti - limitní cykly

$$\lim_{t\to\infty} a_c, a_s, b_c, b_s \;=\; \text{const.} \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} \dot{a}_c, \dot{a}_s, \dot{b}_c, \dot{b}_s \;=\; 0$$

tzn. pravá strana výše uvedené soustavy musí být nulová:

$$\begin{array}{lclclcl}
a_c \cdot (8\Omega_2 r^2 + R_A^2\Omega_1) & + & 2b_s S_A^2\Omega_4 & + & 4a_s\omega_b\omega r^2 & = & 0 \\
a_s \cdot (8\Omega_2 r^2 + R_A^2\Omega_1) & - & 2b_c S_A^2\Omega_4 & - & 4a_c\omega_b\omega r^2 & = & -8\omega^2 a_0 r^2 \\
b_c \cdot (8\Omega_2 r^2 + R_A^2\Omega_1) & - & 2a_s S_A^2\Omega_4 & + & 4b_s\omega_b\omega r^2 & = & 0 \\
b_s \cdot (8\Omega_2 r^2 + R_A^2\Omega_1) & + & 2a_c S_A^2\Omega_4 & - & 4b_c\omega_b\omega r^2 & = & 0
\end{array}$$

$$R_A^2 = a_c^2 + a_s^2 + b_c^2 + b_s^2 \;>\; 0\;; \qquad S_A^2 = a_s b_c - a_c b_s$$

$R_A^2$ ... "(zobecněná) amplituda", $S_A^2$ ... "(zobecněná) fáze"

$$\begin{array}{rcl}
R_A^2 \cdot [(8\Omega_2 r^2 + R_A^2\Omega_1)^2 + 4S_A^4\Omega_4^2 + 16\omega_b^2\omega^2 r^4] - & & \\
-8S_A^4(8\Omega_2 r^2 + R_A^2\Omega_1)\Omega_4 & = & 64\omega^4 a_o^2 r^4 \\
S_A^2 \cdot [2R_A^2(8\Omega_2 r^2 + R_A^2\Omega_1)\omega_4 - & & \\
-(8\Omega_2 r^2 + R_A^2\Omega_1)^2 - 16\omega_b^2\omega^2 r^4 - 4S_A^4\Omega_4^2] & = & 0
\end{array}$$

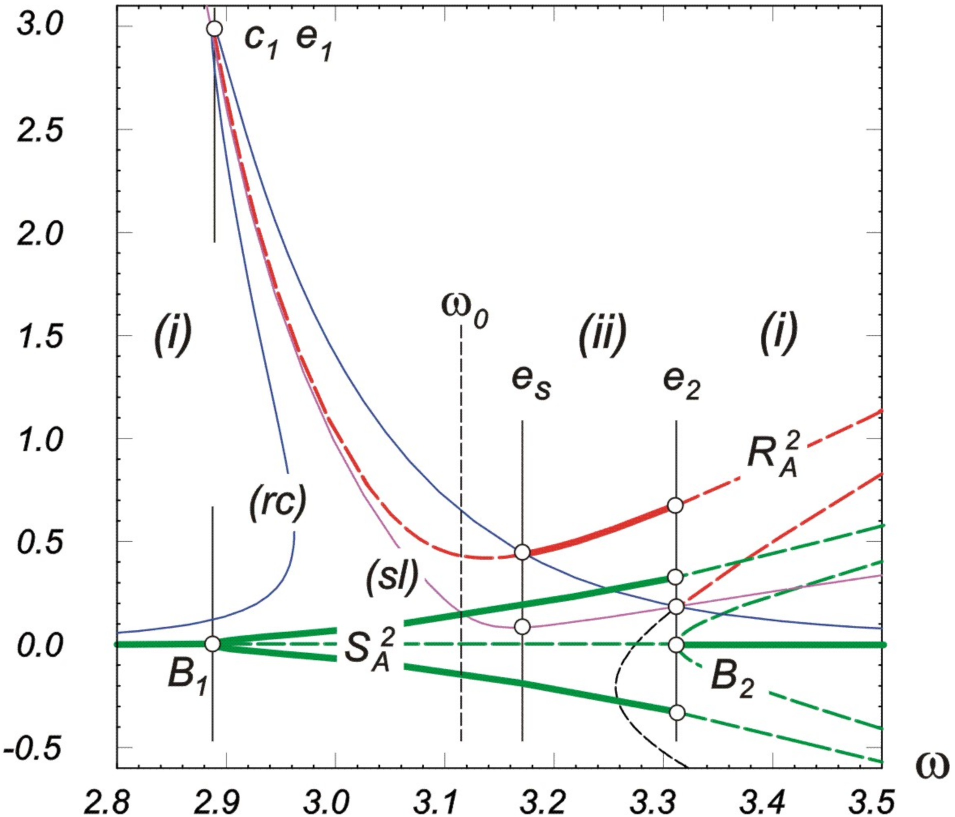
**(i)** $S_A^2 = 0$

buď jsou vektory $[a_c, a_s], [b_c, b_s]$ kolineární $\Rightarrow \quad \xi(t)/\zeta(t) = const$

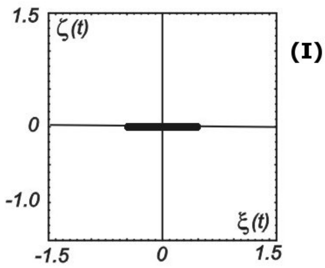
anebo $\zeta = 0$

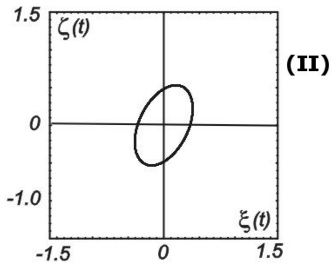
**(ii)** $S_A^2 \neq 0$

$$(8\Omega_2 r^2 + R_A^2\Omega_1)[(R_A^2\omega_o^2 + 4\Omega_2 r^2)^2 + 4\omega_b^2\omega^2 r^4] = 8\Omega_4\omega^4 a_o^2 r^4$$



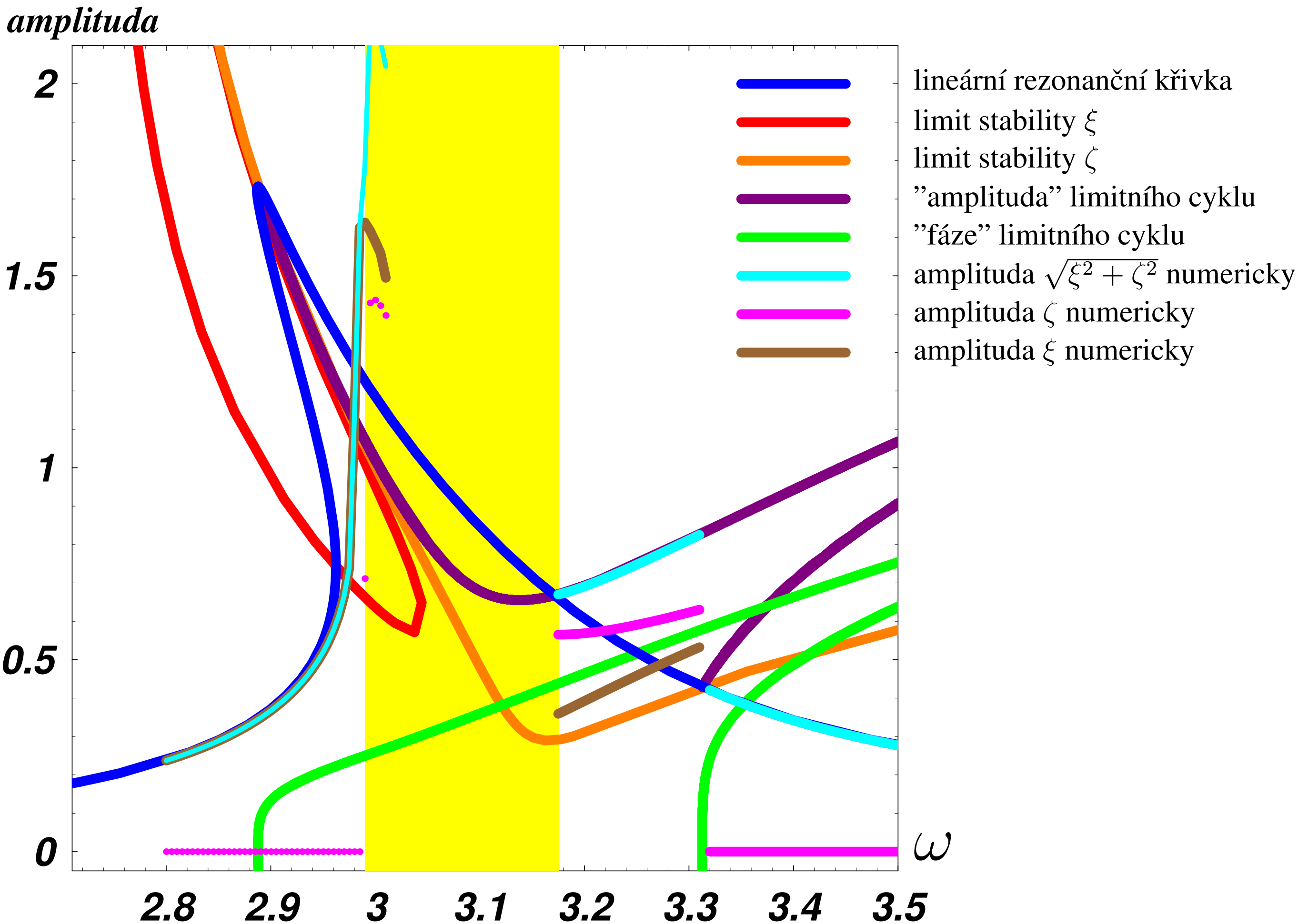

Tvar příslušných limitních cyklů



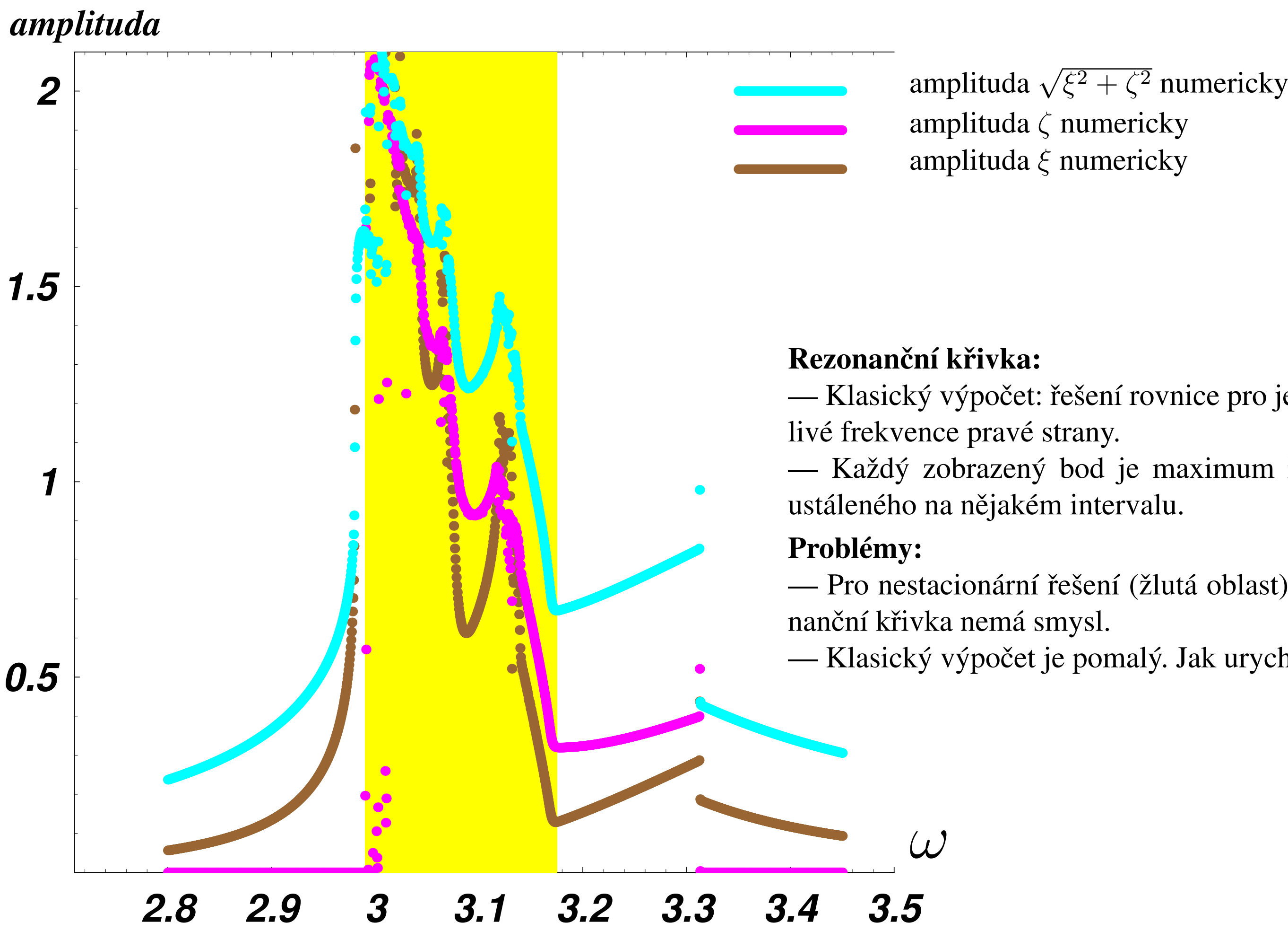




| | | |
|---|---|---|
| $R_A^2, S_A^2$ | - | amplituda a fázový posuv; |
| | | spojitá čára - stabilní, čárkovaná čára - nestabilní; |
| $(rc), (sl)$ | - | rezonanční křivka, $\zeta$ hranice stability; |
| $B_1, B_2$ | - | bifurkační body; $B_1 \equiv c_1, e_1, \quad B_2 \equiv e_2$; |
| $e_s$ | - | minimum hranice stability $\zeta$, průsečík $(rc)$ a $R_A^2$. |

## 4.3. Shrnutí


amplituda
2
1.5
1
0.5
0
2.8
2.9
3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
$\omega$
lineární rezonanční křivka
limit stability $\xi$
limit stability $\zeta$
"amplituda" limitního cyklu
"fáze" limitního cyklu
amplituda $\sqrt{\xi^2 + \zeta^2}$ numericky
amplituda $\zeta$ numericky
amplituda $\xi$ numericky

## 5. Numerické počítání ”rezonančních” křivek




**Rezonanční křivka:**

— Klasický výpočet: řešení rovnice pro jednotlivé frekvence pravé strany.

— Každý zobrazený bod je maximum řešení ustáleného na nějakém intervalu.

**Problémy:**

— Pro nestacionární řešení (žlutá oblast) rezonanční křivka nemá smysl.

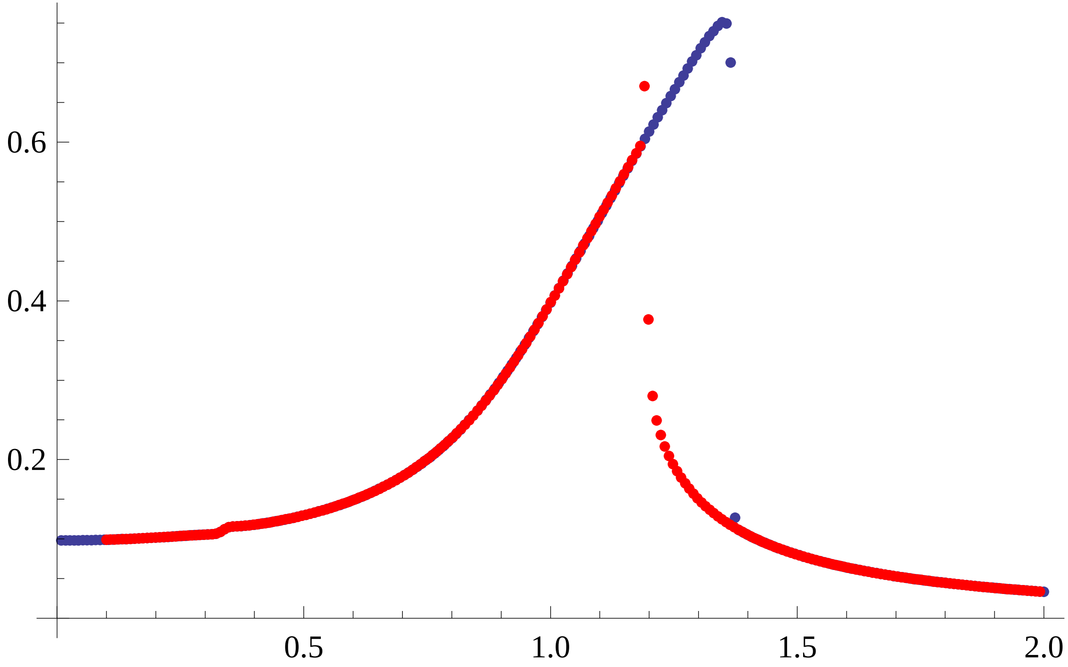
— Klasický výpočet je pomalý. Jak urychlit?

## Rezonanční křivka Duffingovy rovnice

Příklad hezké numericky spočtené rezonanční křivky — Duffingova rovnice

$$\gamma''[t] + 0.1\gamma'[t] + 2\gamma[t]^3 + \gamma[t] = 0.1 \sin \omega t$$

pro $\omega \in (0, 2)$.



# 6. ZÁVĚR

**1.** Efektivita kyvadla jako dynamického tlumiče kmitání je silně závislá na existenci semi-triviálního řešení. Z toho důvodu se zkoumala stabilita pohybu kyvadla ve svislé rovině $xz$.

**2.** Existují dva typy ztráty stability pohybu vzhledem ke svislé rovině: $\zeta$ stabilita - pohyb kolmo k rovině $(xz)$; $\xi$ stabilita - pohyb v rovině $(xz)$.

**3.** Při projížďění rezonanční oblastí se potkáme s ledasčím: řešení má charakter semi-triviální, deterministický stacionární i nestacionární, kvazi-periodický, chaotický.

**4.** Projížďíme-li rezonanční oblasti, narazíme na dva typy limitních cyklů (stacionární řešení).

**5.** Poměr amplitudy buzení a faktoru útlumu by neměl přesáhnout jistou hranici, aby se zabránilo vzniku prostorového pohybu a tím se zajistila dokonalá funkce tlumiče.