Poznámky k ekonomickému ukazateli IRR

(Remarks on the economic criterion – the Internal Rate of Return)

Carmen Simerská

IRR ... vnitřní míra výnosnosti, vnitřní výnosové procento,
výnos do splatnosti...

Od 1. 1. 2002 zákonem 321/2001 Sb. povinnost uvádět číslo *RPSN.*
Citace: ***Roční procentní sazba nákladů*** na spotřebitelský úvěr se vypočítá podle následujícího vzorce

$$\sum_{k=1}^{k=m} \frac{A_k}{(1+i)^{t_k}} = \sum_{k'=1}^{k'=m'} \frac{A'_{k'}}{(1+i)^{t_{k'}}} \tag{1}$$

Význam písmen a symbolů:
k je pořadové číslo půjčky téže osoby, k' je číslo splátky
A_k je výše půjčky číslo k, $A'_{k'}$ je výše splátky číslo k'
$\sum$ značí celkový souhrn, m je číslo poslední půjčky, m' je číslo poslední splátky
t_k je interval, vyjádřený v počtu roků a ve zlomcích roku, ode dne půjčky č. 1 do dnů následných půjček č. 2 až m, $t_{k'}$ je interval, vyjádřený v počtu roků a ve zlomcích roku, ode dne půjčky č. 1 do dnů splátek nebo úhrad poplatků č. 1 až m'
$\boxed{i}$ je hledaná roční procentní sazba nákladů na spotřebitelský úvěr, kterou je možno vypočítat (buď algebraicky nebo numericky opakovanými aproximacemi na počítači), jestliže jsou hodnoty ostatních veličin rovnice známy buď ze smlouvy nebo odjinud.

... Pro délku roku se používá 365 dnů, 365,25 dne nebo (v přestupných letech) 366 dnů, 52 týdnů nebo 12 měsíců stejné délky. Pro průměrnou délku tohoto měsíce se předpokládá 30,41666 dnů (tj. 365/12).

Peněžní toky $C_{t_j} \in \mathbb{Q}$, $j = 0, \dots, J$, ... pohyby peněz (příjmy, splátky, poplatky) v čas. okamžicích (ve dnech)

$$0 \le t_0 < t_1 < \cdots < t_J\,, \quad \text{kde } t_j \text{ v letech (v násobcích } \tfrac{1}{365}\text{-tiny)}$$

investičních projektů nebo finančních transakcí.

C_{t_j}...vztah k ***referenčnímu datu*** (souč. čas. pozice nebo $t_0 = 0$)

$C_{t_j} > 0$ ... příjem, $C_{t_j} < 0$ ...výdaj. Zápis: $\mathbf{C} = (C_{t_0}, \dots, C_{t_J})$.

Projekt je J-tice peněžních toků $\mathbf{C}$, pro kterou $C_{t_0} \neq 0$, $C_{t_J} \neq 0$ a kde vektor $\mathbf{C}$ obsahuje alespoň jednu kladnou a alespoň jednu zápornou složku.

Pravidelný projekt je projekt $\mathbf{B} = (B_0, \dots, B_n)$ v pravidelných obdobích (ročně, pololetně,...,denně) s frekvencí m krát ročně, $\{t_j\}_0^n = \{\frac{j}{m}\}_0^n$.

<u>Platí:</u> Každý projekt $\mathbf{C}$ lze zapsat jako pravidelný projekt $\mathbf{B}$.

($\mathbf{C} \to \mathbf{B}$ pravidelný projekt denní, ve dnech, kdy toky neexistují: $B_k = 0$)

Jednoduchý projekt je pravidelný projekt $\mathbf{B}$, kde :
$B_0 < 0$ (resp. $B_0 > 0$) a $B_k > 0$ (resp. $B_k < 0$) pro $\forall\, k = 1, \ldots, n$.

Ekonomické ukazatele projektu: navýšení, současná hodnota, IRR.

Navýšení (absolutní): $Suma = \sum_{j=0}^{J} C_{t_j}$.

Současná hodnota PV (present value) projektu $\mathbf{C}$ je součet všech diskontovaných peněžních toků k referenčnímu datu:

$$PV(i) = PV(\mathbf{C}, i) = \sum_{j=0}^{J} \frac{C_{t_j}}{(1+i)^{t_j}}\,,$$

kde i je daná úroková míra za úročené období.
$\nu = \frac{1}{1+i}$ je tzv. **diskontní faktor** složeného úročení.

Pro projekt $\mathbf{B}$: $PV(\mathbf{B}, i) = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{(1+i)^k}$, k referenčnímu datu $t_0 = 0$.

($PV > 0$ ... dobré)

Projekt z pohledu dlužníka/věřitele $\leftrightarrow$ 2 projekty $\mathbf{C_1} = -\mathbf{C_2}$
$PV(i)$, ($Suma = PV(0)$)... pro dlužníka/věřitele až na znaménko,
IRR ($RPSN$) pro dlužníka/věřitele totožný pojem. $\downarrow$

Vnitřní výnosové procento IRR projektu $\mathbf{B}$ úročeného m krát ročně je roční míra $IRR = i^* \cdot m$, kde $i^* \in (-1, \infty)$ řeší rovnici $PV(\mathbf{B}, i) = 0$, $\mathbf{B}$ s ročním úrokovým obdobím, tj.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{(1+i^*)^k} = 0\,.$$

(Tedy IRR je roční míra výnosnosti, při níž se diskontované příjmy rovnají diskontovaným výdajům.)

Ekonomické pravidlo IRR:

Je-li $i^* > i$ a zároveň PV je klesající funkcí míry zisku, pak investuj!
Je-li $i^* < i$ a zároveň PV je rostoucí funkcí míry zisku, pak investuj!
i ... obvyklá úroková míra podobných projektů.

Úmluva: BÚO dále projekty **B**, $m = 1$, $B_0 < 0$, tj. první tok investiční (**C** $\rightarrow$ **B**, vyšetřovat $IRR = i^*$ pro **B**).

Definice IRR přeformulovaná pro toto **B** $\uparrow$:

Je to takové i^*, že ...

Def. 1 ... $i^* \in (-1, \infty)$ *je kořenem fce* $PV(i) = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{(1+i)^k}$.

Def. 2 ... $i^* = \frac{1}{\nu^*} - 1$, *kde* $\nu^* \in (0, \infty)$ *je kořenem* $g(\nu) = \sum_{k=0}^{n} B_k \nu^k$.

Def. 3 ... $i^* = x^* - 1$, *kde* $x^* \in (0, \infty)$ *je kořenem* $h(x) = \sum_{k=0}^{n} B_k x^{n-k}$.

Platí: Definice $\uparrow$ jsou ekvivalentní.

Problém nalezení kořenů polynomu g nebo h (vyššího stupně):

- Lokalizace kořenů (kritéria)
- Algoritmy pro výpočet IRR (Newtonova, Bairstowova metoda, tabulkové kalkulátory)
- Interpretace výsledků pro ekonomické využití (více/vícenásobné IRR)

HISTORIE ukazatele IRR

- J.M.Keyness, *The general theory of employment, interest and money*, 1935, (*The marginal efficiency of capital MEC =IRR*)
- J.H.Lorie, L.J.Savage, *Three Problems in Capital Rationing*, Journal of Business, 1955;
  D.Teichroew, A.A.Robichek, M.Montalbano, *An analysis of criteria...*, Management Science, 1965 (projekty jednoduché/nejednoduché)
  IRR má smysl, pokud je jediné $\longrightarrow$ kriteria
- Pravidla pro lokalizaci kořenů:
  - Jestliže $PV(0) > 0$ a $B_0 < 0 \Rightarrow \exists\, IRR$ v $(0, \infty)$.
  - **Descartesovo pravidlo**
    - **Věta 1** *(Descartes) Počet kladných kořenů (včetně násobnosti) polynomu p je buď roven počtu znaménkových změn v posloupnosti jeho koeficientů nebo je o sudý počet menší.*
      Descartsova věta $\Rightarrow$ Jednoduchý projekt má právě jedno IRR.

– **Jeanovo pravidlo** $\leftarrow$ Budan-Fourier

* **Věta 2** *(Budan-Fourier)*
  Buď $\alpha < \beta$ *a nechť* $g(\alpha)\,g(\beta) \neq 0$. *Pak počet kořenů (včetně násobnosti) polynomu* g *v* $<\alpha, \beta>$ *je roven číslu* $\sigma(\alpha) - \sigma(\beta)$, *kde* $\sigma(x)$ *je počet znaménkových změn v posloupnosti* $g(\nu), g'(\nu), \ldots, g^{(n)}(\nu)$, *nebo je o sudý počet menší.*
  W. H. Jean, On Multiple rates of return, Journal of Finance, 1968

– **Kaplanovo pravidlo** $\leftarrow$ Sturm

* **Věta 3** *(Sturm) Buď* $\alpha < \beta$ *a nechť* $g(\alpha)\,g(\beta) \neq 0$. *Pak počet navzájem různých kořenů polynomu* g *ležících v* $<\alpha, \beta>$ *je roven číslu* $\sigma(\alpha) - \sigma(\beta)$, *kde* $\sigma(x)$ *je počet znaménkových změn v posloupnosti* $g(x), g'(x), g_3(x), \ldots, g_m(x)$ *vzniklé Euklidovým algoritmem.*
  S. Kaplan, A note on ..., Journal of industrial Engineering, 1965

– **pravidla: C.Nostrom** 1972, **C.de Faro** 1978 $\leftarrow$ Vincentova věta pro jednoznačnost IRR v $<0, \infty)$, **E.M.Bezza** 1981 **,...**

– **Soperovo pravidlo**

* **Věta 4** *Jestliže je i^* IRR projektu $\mathbf{B} = (B_0, ..., B_n)$ a platí*

$$\sum_{k=0}^{i} B_k (1+i^*)^{i-k} < 0\,, \qquad \forall\, i = 0, ..., n-1\,,$$

potom i^* je jediným IRR projektu v intervalu $(-1, \infty)$.

C. S. Soper, *The MEC: A further note,* Economic Journal, 1959

S. Gronchi, 1986: podmínky lze rozšířit na splnění n nerovností

$$\sum_{k=0}^{i} B_k (1+i^*)^{i-k} \leq 0, \quad \forall i = 0, ..., n-1\,. \qquad (S-G)$$

Nejsou to podmínky nutné (PROT=protipříklad : $\exists\,!$ IRR):

	B_0	B_1	B_2	B_3	$IRR[\%]$
PROT	-100	270	-270	170	70

nejsou splněny $(S-G)$ podmínky: $B_0(1+0,7) + B_1 = 100 > 0$

$(S-G)$ podmínky jsou ekonomicky smysluplné:

Platí (Gronchi 1986): *i^* je IRR projektu* $\mathbf{B} \Leftrightarrow$ *projekt* $\mathbf{B}$ *lze jednoznačně rozdělit na uspořádané dvojice jednoperiodických operací* $\mathbf{A} = \{(a^i_{i-1}, a^i_i), i = 1, ..., n\}$ *takových, že*

- $a^i_i = -(1+i^*)a^i_{i-1}, \quad i = 1, ..., n$
- $a^1_0 = B_0$
- $a^i_i + a^{i+1}_i = B_i, \quad i = 1, ..., n-1$
- $a^n_n = B_n$.

Navíc $a^{i+1}_i = \sum_{k=0}^{i} B_k(1+i^*)^{i-k}, \quad i = 0, ..., n-1 \quad (S-G)$ *součty.*

Tedy, $IRR = i^*$ je úroková míra, kterou lze stále konstantně aplikovat na určité po sobě jdoucí operace, na které můžeme projekt $\mathbf{B}$ rozložit.

Jsou to pouze operace

$(a^i_{i-1} > 0, a^i_i < 0)$ ... finanční nebo

$(a^i_{i-1} < 0, a^i_i > 0)$ ... investiční nebo

$(a^i_{i-1} = 0, a^i_i = 0)$ ... prázdné.

$(S-G)$ podmínky $\Leftrightarrow$ všechny operace jsou investiční nebo prázdné.

Interpretace výsledků:

$(S-G)$ podmínky $\Rightarrow \{i < i^* \Rightarrow PV(i) > 0\}$ a $\{i > i^* \Rightarrow PV(i) < 0\}$

Nutno rozhodovat také podle hodnoty $PV(i)$.

U příkladů GRP1, GRP2 jsou splněny $(S-G)$ podmínky.
Pro $i < 0,1$ bychom měli preferovat GRP1,
ale pro $i > 0,1$ bychom měli preferovat GRP2.

	B_0	B_1	B_2	B_3	$IRR[\%]$
GRP1	-100	20	0	144	20
GRP2	-100	-80	230	12	20

více kořenů (IRR)??
vícenásobné kořeny (IRR)??

Jak vypočítat $RPSN$ u spotřebitelského úvěru:

Spotřebitelský úvěr
$\longrightarrow$ seřadíme A_k a $A'_{k'}$ (příjmy, výdaje v rovnici (1)) podle času
$\longrightarrow$ projekt **C**, určíme m (většinou $m = 12$),
$\longrightarrow$ pravidelný projekt **B** úročený m krát ročně
$\longrightarrow$ **B** s ročním úročením $\longrightarrow$ i^*

$$RPSN = (1 + i^*)^m - 1$$

Finanční funkce v EXCELu:

PV...ČISTÁ.SOUČHODNOTA ,
IRR u pravidelných projektů...MÍRA.VÝNOSNOSTI (IRR),
RPSN u nepravidelných projektů...XIRR .