Numerické modelování toku neutronů v šestihranné síti

Tomáš Berka,
Marek Brandner, Milan Hanuš, Roman Kužel, Aleš Matas

PANM 14, Dolní Maxov, 1. – 6. 6. 2008

Obsah

1. Matematický model
2. CMFD-nodální metody
3. Metoda s konformním zobrazením
4. Experimenty
5. Homogenizace
6. Budoucí cíle

Matematický model

- Dvougrupový neutronový difuzní model

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{j}^1(\mathbf{r}) + \Sigma_r^1(\mathbf{r})\phi^1(\mathbf{r}) &= \frac{1}{k_{\mathrm{eff}}}\left[\nu\Sigma_f^1(\mathbf{r})\phi^1(\mathbf{r}) + \nu\Sigma_f^2(\mathbf{r})\phi^2(\mathbf{r})\right], \\ \nabla \cdot \mathbf{j}^2(\mathbf{r}) + \Sigma_r^2(\mathbf{r})\phi^2(\mathbf{r}) &= \Sigma_s^{1\to 2}(\mathbf{r})\phi^1(\mathbf{r}). \end{aligned} \tag{1}$$

- Na hranici jaderného reaktoru uvažujeme *okrajové podmínky typu albedo*

$$\gamma^1\phi^1(\mathbf{r}) - \mathbf{j}^1(\mathbf{r})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{r}) = 0, \quad \gamma^2\phi^2(\mathbf{r}) - \mathbf{j}^2(\mathbf{r})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{r}) = 0. \tag{2}$$

- Připojujeme konstitutivní vztah: *Fickův zákon*

$$\mathbf{j}^g(\mathbf{r}) = -D^g(\mathbf{r})\nabla\phi^g(\mathbf{r}). \tag{3}$$

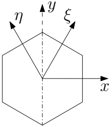
- Neznámé veličiny: ϕ^g, k_{eff} $\Rightarrow$ *úloha na vlastní čísla*.

FVM na hrubé síti (CMFD)

- Za kontrolní objemy (*nody*) volíme přímo palivové kazety.
- Zavedeme *průměrný zdrojový člen* a *příčný únikový člen*

$$\bar{\bar{s}}_i = \sum_{\substack{g'=1\\ g'\neq g}}^{2} \Sigma_{i,s}^{g'\to g}\bar{\bar{\phi}}_i^{g'} + \frac{\chi^g}{k_{\mathrm{eff}}}\sum_{g'=1}^{2}\nu\Sigma_{i,f}^{g'}\bar{\bar{\phi}}_i^{g'}, \quad \bar{l}_{i,\theta}^{g} = \frac{\bar{j}_{i,\theta+}^{g} - \bar{j}_{i,\theta-}^{g}}{h}. \tag{4}$$

- Pomocí FVM dostáváme soustavu diskrétních rovnic



$$\frac{2}{3}\sum_{\theta\in\{x,\xi,\eta\}} \bar{l}_{i,\theta} + \Sigma_{i,r}^{g}\bar{\bar{\phi}}_i^{g} = \bar{\bar{s}}_i \quad \text{nebo} \quad \mathbf{M}\bar{\bar{\mathbf{\Phi}}} = \frac{1}{k_{\mathrm{eff}}}\mathbf{S_f}\bar{\bar{\mathbf{\Phi}}}. \tag{5}$$

- Vhodnými metodami stanovíme $\bar{\bar{\mathbf{\Phi}}}$, k_{eff}.
- Problém: Síť je příliš hrubá $\Rightarrow$ velké diskretizační chyby.

CMFD-nodální přístup

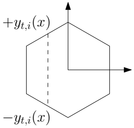
- První krok: CMFD – nepřesné.
- Druhý krok: zpřesnění hraničních proudů z CMFD pomocí *nodální metody*

$$ {}^{\mathrm{C}}\bar{j}_{i,\theta+} = -D^{g}_{i,\theta+}\frac{\bar{\bar{\phi}}^{g}_{i+\theta}-\bar{\bar{\phi}}^{g}_{i}}{h} + {}^{\mathrm{C}}D_{i,\theta+}\left(\bar{\bar{\phi}}^{g}_{i}+\bar{\bar{\phi}}^{g}_{i+\theta}\right). \qquad (6) $$

- Korekcí iterační matice CMFD dostáváme

$$ (\mathbf{M} + {}^{\mathrm{C}}\mathbf{D})\bar{\bar{\mathbf{\Phi}}} = \frac{1}{k_{\mathrm{eff}}}\mathbf{S}_{\mathbf{f}}\bar{\bar{\mathbf{\Phi}}}. \qquad (7) $$

- Nodální metoda je založena na *příčné integraci* neutronové difuzní rovnice



$$ \int_{-y_{t,i}(x)}^{+y_{t,i}(x)} (.)\,\mathrm{d}y, \quad \pm y_{t,i}(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}(h-|x|). $$

Semianalytické řešení

- Dostáváme 1D problém

$$-D_i^g \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \tilde{\phi}_i^g(x) + \Sigma_{i,r}^g \tilde{\phi}_i^g(x) = \tilde{s}_i^g(x) - l_i^g(x). \tag{8}$$

- Řešíme ODE 2. řádu s konstantními koeficienty $\Rightarrow$ tvar *homogenního řešení* známe.
- Pravou stranu aproximujeme *polynomem 2. stupně*.
- *Partikulární řešení* hledáme semianalyticky v prostoru polynomů stejného stupně jako jsme volili pravou stranu.
- *Celkové řešení* má tvar

$$\tilde{\phi}_i^g(x) = \underbrace{a_0 p_0(x) + a_1 p_1(x) + a_2 p_2(x)}_{\text{partikulární}} + \underbrace{a_3 \sinh(kx) + a_4 \cosh(kx)}_{\text{homogenní}}. \tag{9}$$

Semianalytické řešení (2)

- Neznámé koeficienty celkového řešení hledáme ve smyslu vážených reziduí s vahou $y_{t,i}$.
- Požadujeme splnění nulté, první a druhé momentové podmínky.
- Požadujeme zachování průměrného toku z CMFD.
- Využijeme spojitosti toku a proudu na rozhraní dvou nodů.
- Na hranici reaktoru aplikujeme okrajové podmínky.

Princip

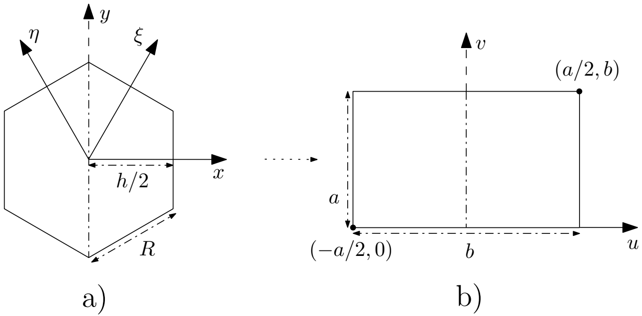
- Efektivní druh CMFD-nodální metody vyvinutý pro *geometrii šestiúhelníku*.
- Využívá *Schwarzovu-Christoffelovu transformaci* konformně zobrazující komplexní polorovinu na vnitřek polygonu.
- Transformací neutronové rovnice potlačíme problém s hroty profilové funkce šestiúhelníku.
- Po transformaci dostaneme pro jednu grupu 1D problém

$$-D\Delta\phi(u,v) + \Sigma_r g^2(u,v)\phi(u,v) = \frac{1}{k_{\mathrm{eff}}}\nu\Sigma_f g^2(u,v)\phi(u,v). \tag{10}$$

- V rovnici přibyla (transformací Laplaceova operátoru) *škálovací funkce*

$$g(u,v) = \left|\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}\right|. \qquad \begin{aligned} z &= x + \mathrm{i}y, \\ w &= u + \mathrm{i}v. \end{aligned}$$

Princip (2)



Obrázek: Šestiúhelník zobrazený na obdélník.

CMFD-nodální přístup

- Příčnou integrací transformované rovnice dostáváme

$$-D\frac{\mathrm{d}^2\tilde{\phi}(u)}{\mathrm{d}u^2} + \Sigma_r \tilde{g^2}(u)\tilde{\phi}(u) = \frac{1}{k_{\mathrm{eff}}}\nu\Sigma_f \tilde{g^2}(u)\tilde{\phi}(u) - l_v(u), \tag{11}$$

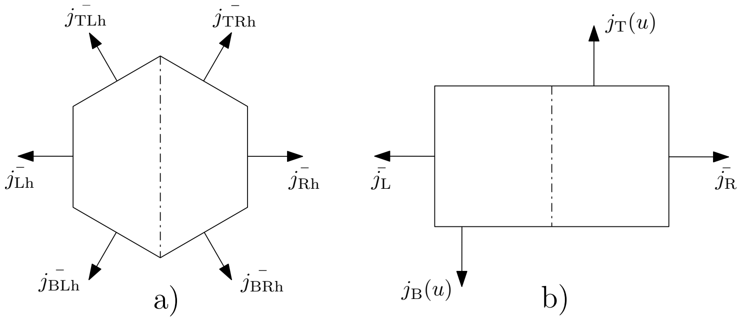
- Zavádíme průměry

$$\tilde{\phi}(u) = \frac{1}{b}\int_0^b \phi(u,v)\,\mathrm{d}v, \quad \tilde{g^2}(u) = \frac{\frac{1}{b}\int_0^b g^2(u,v)\phi(u,v)\,\mathrm{d}v}{\tilde{\phi}(u)}. \tag{12}$$

- $\tilde{g^2}(u)$ aproximujeme následujícím způsobem

$$\tilde{g^2}(u) \approx \frac{1}{b}\int_0^b g^2(u,v)\,\mathrm{d}v. \tag{13}$$

Transformované veličiny



Obrázek: Proudy na šestiúhelníku a na obdélníku.

Transformované veličiny (2)

- Příčný únikový člen na obdélníku

$$l_v(u) = \frac{1}{b}\left(j_{\mathrm{T}}(u) - j_{\mathrm{B}}(u)\right). \tag{14}$$

- Proudy obsahují první derivaci, po transformaci

$$j_{\mathrm{T}}(u) = j_{\mathrm{Th}}(x)g(u,b) = j_{\mathrm{Th}}(x)g(u,0), \tag{15}$$

$$j_{\mathrm{B}}(u) = j_{\mathrm{Bh}}(x)g(u,0). \tag{16}$$

- Průměrné veličiny se transformují

$$\bar{j}_{\mathrm{L}} = \frac{R}{b}\bar{j}_{\mathrm{Lh}}, \quad \bar{j}_{\mathrm{R}} = \frac{R}{b}\bar{j}_{\mathrm{Rh}}, \tag{17}$$

$$\tilde{\tilde{\phi}} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2}\frac{1}{ab}\tilde{\tilde{\phi}}_{\mathrm{h}}. \tag{18}$$

Příčný únikový člen

- Uvažujeme dva typy aproximace příčného únikového členu na obdélníku
  - *Konstantní na půl-nodech*

$$l_{v\mathrm{L}}(u) = \frac{1}{b} g(u,0)(j^-_{\mathrm{TLh}} - j^-_{\mathrm{BLh}}), \tag{19}$$

$$l_{v\mathrm{R}}(u) = \frac{1}{b} g(u,0)(j^-_{\mathrm{TRh}} - j^-_{\mathrm{BRh}}). \tag{20}$$

  - *Lineární na hraničních půl-nodech* a *konstantní na vnitřních půl-nodech*

Semianalytické řešení

- *Celkové řešení* má tvar

$$\tilde{\phi}(u) = \underbrace{a_0 p_0(u) + a_1 p_1(u) + a_2 p_2(u)}_{\text{partikulární}} + \underbrace{a_3 \sinh(ku) + a_4 \cosh(ku)}_{\text{homogenní}} . \tag{21}$$

- Průměrné proudy na hranici ve směru u dostaneme z

$$\bar{j}_{\mathrm{L}} = \tilde{j}(u = -a/2) = -D \left.\frac{\mathrm{d}\tilde{\phi}(u)}{\mathrm{d}u}\right|_{u=-a/2} , \tag{22}$$

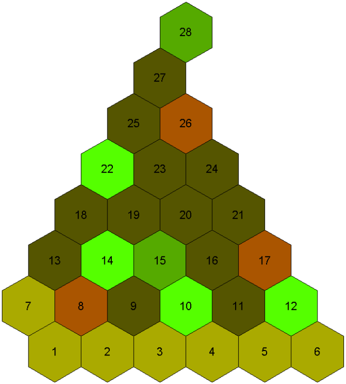
$$\bar{j}_{\mathrm{R}} = \tilde{j}(u = +a/2) = -D \left.\frac{\mathrm{d}\tilde{\phi}(u)}{\mathrm{d}u}\right|_{u=+a/2} . \tag{23}$$

- Transformací na šestiúhelník dostaneme

$$\bar{j}_{\mathrm{Lh}} = \frac{b}{R}\bar{j}_{\mathrm{L}}, \quad \bar{j}_{\mathrm{Rh}} = \frac{b}{R}\bar{j}_{\mathrm{R}} . \tag{24}$$

- Novými hodnotami proudů zpřesníme iterační matici CMFD.

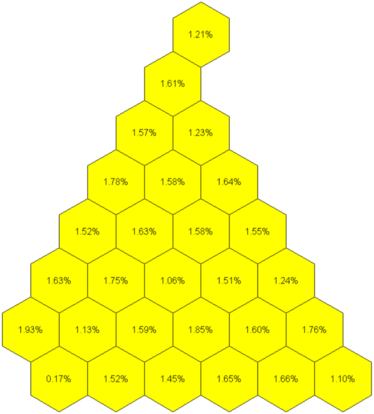
Úvod



Obrázek: Konfigurace jádra.

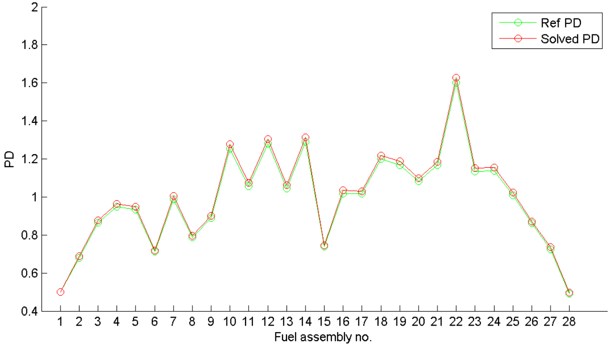
- Různé materiálové vlastnosti kazet.
- Šestinová symetrie jádra.
- Srovnáme řešení z *metody s konf. zobr.* (solver Romana Kužela) s řešením *FVM na jemné síti* (solver Milana Hanuše).

Albedo $\gamma = 0.125$ (mapa)

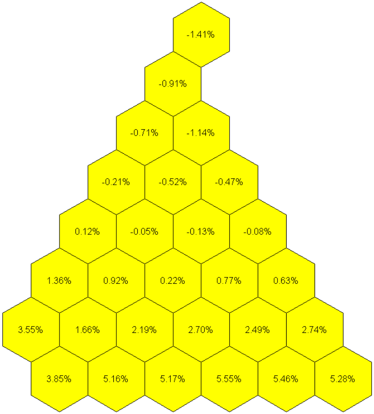


- $k_{\text{eff}} = 1.01447$
- chyba $k_{\text{eff}} = -7.89$ pcm
- avg. chyba PD $= 1.48\%$
- max. chyba PD $= 1.93\%$ (kazeta č. 7)

Albedo $\gamma = 0.125$ (graf)

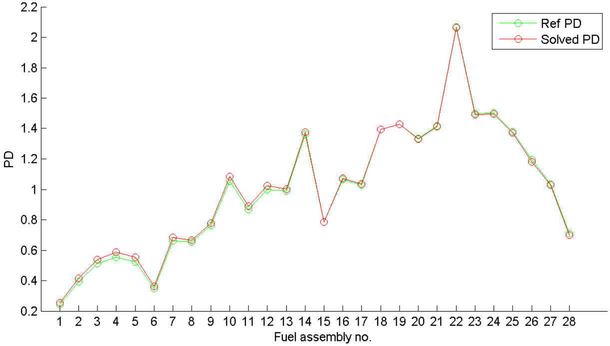


Albedo $\gamma = 0.5$ (mapa)



- $k_{\text{eff}} = 1.00694$
- chyba $k_{\text{eff}} = -45.35$ pcm
- avg. chyba PD $= 1.98\%$
- max. chyba PD $= 5.55\%$ (kazeta č. 4)

Albedo $\gamma = 0.5$ (graf)



Princip

- Nedílná součást nodálních metod pro určení po nodech konstantních koeficientů neutronového difuzního modelu.
- Vycházíme z integrální formulace

$$\sum_{k=1}^{6} \int_{\Gamma_{i,k}} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}_{i,k} \,\mathrm{d}S + \int_{\mathcal{V}_i} \Sigma_r(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) \,\mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{1}{k_{\mathrm{eff}}} \nu \int_{\mathcal{V}_i} \Sigma_f(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) \,\mathrm{d}\mathbf{r}. \tag{25}$$

- Koeficienty určíme z požadavku zachování veličin

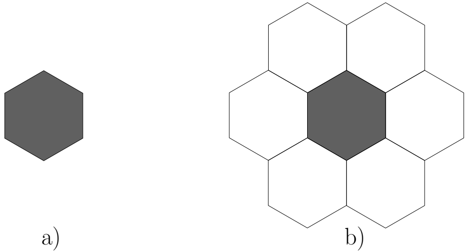
$$\int_{\mathcal{V}_i} \hat{\Sigma}^i_{(.)} \hat{\phi}(x,y) \,\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\mathcal{V}_i} \Sigma_{(.)}(x,y)\phi(x,y) \,\mathrm{d}\mathbf{r} \quad \Rightarrow \hat{\Sigma}^i_{(.)} = \frac{\int_{\mathcal{V}_i} \Sigma_{(.)}(x,y)\phi(x,y) \,\mathrm{d}\mathbf{r}}{\int_{\mathcal{V}_i} \hat{\phi}(x,y) \,\mathrm{d}\mathbf{r}},$$

$$\int_{\Gamma_{i,k}} \hat{\mathbf{j}}(x,y) \cdot \mathbf{n}_{i,k} \,\mathrm{d}S = \int_{\Gamma_{i,k}} \mathbf{j}(x,y) \cdot \mathbf{n}_{i,k} \,\mathrm{d}S \quad \Rightarrow \hat{D}^i = \frac{\int_{\Gamma_{i,k}} \mathbf{j}(x,y) \cdot \mathbf{n}_{i,k} \,\mathrm{d}S}{-\int_{\Gamma_{i,k}} \nabla\hat{\phi}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}_{i,k} \,\mathrm{d}S}.$$

- Dále požadujeme zachování kritického čísla reaktoru $k_{\mathrm{eff}} \Rightarrow$ za předchozích předpokladů dostaneme přímo z bilančního vztahu.

Princip (2)

- *Problém:* Neznáme heterogenní řešení $\phi(x, y)$.
- Aproximujeme $\phi(x, y)$ řešením *1-nodálních problémů* s nulovým proudem na hranici pro typové kazety.
- Pro větší přesnost můžeme také uvažovat *7-nodální problémy* pro celý reaktor (nemusíme uvažovat konst. BC).



Obrázek: a) 1-nodální problém, b) 7-nodální problém.

Algorimus

1. Stanovíme homogenizované parametry z 1-nodálních problémů pro typové kazety nebo 7-nodálních problémů pro celý reaktor.
2. Stanovíme homogenní řešení problému pro celý reaktor.
3. Stanovíme homogenizované parametry z 1-nodálních problémů nebo 7-nodálních problémů pro celý reaktor. Pro tyto problémy použijeme novou okrajovou podmínku danou hraničními proudy stanovenými v kroku 2 nebo 4.
4. Stanovíme homogenní řešení problému pro celý reaktor.
5. Ověříme, jestli je homogenní řešení dokonvergované. Pokud ne, pokračujeme krokem 3.

Flux Weighted Constants (FWC)

- Uvažujeme dvě aproximace

$$\int_{\mathcal{V}_i} \hat{\phi}(x,y)\,\mathrm{d}\mathbf{r} \approx \int_{\mathcal{V}_i} \phi(x,y)\,\mathrm{d}\mathbf{r}, \tag{26}$$

$$\frac{1}{\hat{D}^i} \approx \frac{\int_{\mathcal{V}_i} \frac{1}{D(x,y)}\phi(x,y)\,\mathrm{d}\mathbf{r}}{\int_{\mathcal{V}_i} \phi(x,y)\,\mathrm{d}\mathbf{r}}. \tag{27}$$

- *Problém:* Z fyzikálních úvah plyne, že nelze určit konstantní $\hat{D}^i$ tak, abychom zachovali spojitost toků na hranicích $\Gamma_{i,k}$.

General Equivalence Theory (GET)

- Odstraníme problém FWC zavedením nových homogenizačních parametrů $\longrightarrow$ *faktorů nespojitosti*

$$f_i^{x+} = \frac{\int_{\Gamma_{i,x+}} \phi(x,y)\,\mathrm{d}S}{\int_{\Gamma_{i,x+}} \hat{\phi}(x,y)\,\mathrm{d}S}, \quad f_i^{x-} = \frac{\int_{\Gamma_{i,x-}} \phi(x,y)\,\mathrm{d}S}{\int_{\Gamma_{i,x-}} \hat{\phi}(x,y)\,\mathrm{d}S}. \tag{28}$$

- Uvědomíme si

$$\int_{\Gamma_{i,k}} \hat{\phi}(x,y)\,\mathrm{d}S = \int_{\mathcal{V}_i} \hat{\phi}(x,y)\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\mathcal{V}_i} \phi(x,y)\,\mathrm{d}\mathbf{r}. \tag{29}$$

- Nyní můžeme psát

$$f_i^{x+} = \frac{\int_{\Gamma_{i,x+}} \phi(x,y)\,\mathrm{d}S}{\int_{\Gamma_{i,x+}} \hat{\phi}(x,y)\,\mathrm{d}S} = \frac{\int_{\Gamma_{i,x+}} \phi(x,y)\,\mathrm{d}S}{\int_{\mathcal{V}_i} \phi(x,y)\,\mathrm{d}\mathbf{r}}. \tag{30}$$

- Podmínku spojitosti toku nahradíme *podmínkou nespojitosti*

$$f_i^{x+} \int_{\Gamma_{i,x+}} \hat{\phi}(x,y)\,\mathrm{d}S = f_{i+1}^{x-} \int_{\Gamma_{i+1,x-}} \hat{\phi}(x,y)\,\mathrm{d}S. \tag{31}$$

Budoucí cíle

- Rekonstrukce průběhu $\hat{\phi}$ uvnitř kazety.
- Zahrnutí náklonů vyhoření v 2-nodálních problémech.
- Metoda s konformním zobrazením ve 3D.
- Moderní metody homogenizace.
- Posouzení jiných numerických metod (multigrid, domain decomposition).

Zdroje

Y. A. Chao and Y. A. Shatilla.
Conformal Mapping and Hexagonal Nodal Methods – II: Implementation in the ANC-H Code.
Nucl. Sci. Eng., 121: 210–225, 1995.

K. S. Smith.
Spatial Homogenization Methods for Light Water Reactor Analysis.
PhD Thesis, Nuclear Engineering, Massachusetts Institute of Technology, 1980.

M. R. Wagner.
Three-Dimensional Nodal Diffusion and Transport Theory Methods for Hexagonal-z Geometry.
Nuc. Sci. Eng., 103: 377–391, 1989.

V. G. Zimin, D. M. Baturin
Polynomial nodal method for solving neutron diffusion equations in hexagonal-z geometry.
Annals of Nuclear Energy, 29: 303–335, 2002.

Výzkum byl podporován projektem 1M0545 a výzkumným záměrem

MSM4977751301.