TIN 085 Vybrané kapitoly z výpočetní složitosti I **zima 2009/2010**

4. domácí úlohy

do zkoušky

Úloha 1. Nechť $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ je libovolná Booleovská funkce a C je obvod, který počítá f a sestává z nejmenšího možného počtu binárních hradel AND a OR a negací. (Hradla počítající jiné funkce tento obvod neobsahuje.) Ukažte, že žádné z hradel AND v obvodu nelze nahradit hradlem OR ani naopak, aby přitom zůstala zachována funkce počítaná obvodem C. V tomto smyslu je obvod C rigidní.

Úloha 2. Nechť $n = 2m + 1$ a MAJ_n je funkce, která je jedna na vstupu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ právě tehdy, když $x_1+x_2\cdots+x_n \geq m+1$. Použijte metodu Krapčenka a ukažte, že formule sestávající z binárních hradel AND, OR a negací počítající MAJ_n má alespoň $\Omega(n^2)$ hradel. (*Hint:* Podívejte se na kombinatorický obdélník $A \times B$, kde $A = \{x \in \{0,1\}^n,\ ||x|| = m+1\}$ a $B = \{y \in \{0,1\}^n,\ ||y|| = m\}$.)

Úloha 3. Ukažte, že Krapčenkova metoda nemůže dokázat silnější dolní odhad než kvadratický. (*Hint:* Každý vektor z $\{0,1\}^n$ má přesně n sousedů v Hammingovské vzdálenosti 1.)