TIN 085 Vybrané kapitoly z výpočetní složitosti I **zima 2009/2010**

1. domácí úlohy

do 12. listopadu 2009

Úloha 1. Dokažte, že ke každé formuli φ velikosti m s proměnnými $x_1, \ldots, x_n$ a binarními spojkami AND a OR a unárním NOT existuje ekvivalentní formule ψ velikosti nejvýše m^5 a hloubky $5 \log m$.

Úloha 2. Pro libovolnou funkci $f_n : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ sestrojte booleovský obvod velikosti nejvýše $10 \cdot 2^n$ pomocí binárních spojek AND a OR a unárního NOT. (*Hint:* Podívejte se na funkci $f_n(0, x_2, \ldots, x_n)$ a $f_n(1, x_2, \ldots, x_n)$.)

Úloha 3. Ukažte algoritmicky rozhodnutelný (to jest rekurzivní) jazyk, který je v SIZE(n), ale není v P.

Úloha 4. Zkonstruujte obvod hloubky nejvýše deset ze spojek AND, OR a NOT neomezeného stupně, který sčítá binárně reprezentovaná přirozená čísla, to jest na vstupu $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ vydá $z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}$ takové, že $z_1, \ldots, z_{n+1}$ reprezentuje součet čísel reprezentovaných $x_1, \ldots, x_n$ a $y_1, \ldots, y_n$.

Úloha 5. Zkonstruujte obvod hloubky $O(\log n)$ z binárních AND a OR a unárního NOT, který se na vstupu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vyhodnotí na 1 tehdy a jen tehdy, když počet jedniček vstupu je ostře vetší než počet nul. (*Hint:* Vymyslete redukci, která pomocí obvodu konstantní hloubky sestávajícího z binárních AND a OR a unárního NOT převede součet tří čísel na součet dvou čísel.)