TIN 085 Vybrané kapitoly z výpočetní složitosti I **zima 2009/2010**

3. domácí úlohy

do 7. ledna 2010

Úloha 1. Cílem tohoto cvičení je sestrojit polynomiálně velkou monotóní formuli pro $\mathrm{MAJ}_n(x_1, \ldots, x_n)$ tedy funkci, která se vyhodnotí na jedničku právě tehdy, když vetšina jejích vstupních bitů je jednička.

a) Nalezněte monotóní formuli pro $\mathrm{MAJ}_3(x_1, x_2, x_3)$, tedy formuli sestávající pouze z binárních spojek AND a OR.

b) Nechť C je obvod (nebo formule) se vstupy $r_1, \ldots, r_m$ takový, že pro náhodně zvolený vstup z $\{0,1\}^m$, obvod je jedna s pravděpodobností $\frac{1}{2}+p$, kde p je reálné číslo mezi 0 a 1/2. Označme jako q pravděpodobnost, že obvod dá nulu. Ukažte, že pokud $p \leq 1/4$, pak pravděpodobnost, že $\mathrm{MAJ}_3(C_1, C_2, C_3)$ dá jedničku na náhodném vstupu, je alespoň $\frac{1}{2} + \frac{5}{4}p$. Zde $\mathrm{MAJ}_3(C_1, C_2, C_3)$ je obvod počítající MAJ_3 tří kopií obvodu C s nezávislými vstupy.

c) Pokračování z předchozího bodu. Ukažte, že pokud $p > 1/4$, pak pravděpodobnost, že $\mathrm{MAJ}_3(C_1, C_2, C_3)$ dá nulu na náhodném vstupu, je nejvýše $\frac{3}{4}q$.

d) Ukažte, že existuje konstanta c taková, že úplný ternárí strom hloubky $c \log n$ sestávající ze spojek MAJ_3, kde každý list bere svou hodnotu z některého vhodně zvoleného vstupního bitu $x_1, \ldots, x_n$, počítá $\mathrm{MAJ}_n(x_1, \ldots, x_n)$. (*Hint:* Ukažte, že pokud si zafixujeme nějaký vstup $x_1, \ldots, x_n$ a jednotlivé vstupní bity přiřadíme listům náhodně, pak pravděpodobnost, že tento strom se vyhodnotí na hodnotu jinou než $\mathrm{MAJ}_n(x_1, \ldots, x_n)$ je menší než 2^{-n}.)

Úloha 2. Ukažte, že pro každou booleovskou funkci $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ existuje obvod hloubky nejvýše pět sestávající pouze z hradel MOD-2 a MOD-3 neomezeného stupně. MOD-p na vstupu $x_1, \ldots, x_n \in \{0,1\}$ je jedna, právě když $\sum_{i=1}^n x_i$ není dělitelné p. Jak velké obvody jsou potřeba? Dokažte. (*Hint:* Ukažte, že každou funkci $f : \{-1,1\}^n \to \{0,1\}$ lze reprezentovat polynomem v proměnných $x_1, \ldots, x_n$ nad konečným tříprvkovým tělesem GF_3. Pro $x_1, \ldots, x_n \in \{-1,1\}$ ukažte souvislost mezi počítáním $x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$ a počítáním MOD-2.)

Úloha 4. Ukažte, že každá funkce je počitatelná branching programem konstantní šířky a exponenciální velikosti.