TIN 085 Vybrané kapitoly z výpočetní složitosti I **zima 2009/2010**

2. domácí úlohy

do 3. prosince 2009

Úloha 1. Ukažte, že každý obvod velikosti S sestávající z hradel AND, OR and NOT (libovolných vstupních stupňů) lze nahradit obvodem velikosti nejvýše $2S$ ze stejných spojek, který počítá stejnou funkci a používá hradla NOT pouze pro znegování jednotlivých bitů vstupu. (Obvod tedy neneguje výstup žádného z hradel AND a OR.)

Úloha 2. Funkce $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ je *monotóní*, pokud pro každé $x, y \in \{0,1\}^n$, $x_i \leq y_i$ pro všechna i implikuje $f(x) \leq f(y)$. Ukažte, že každou monotóní funkci lze počítat obvodem sestávajícím pouze z hradel AND a OR.

Úloha 3. Testování existence cesty mezi dvěma vrcholy v orientovaném grafu je dobře známý problém, který je úplný pro třídu problémů řešitelných v nedeterministickém logaritmickém prostoru (NLOG). V této úloze ukážeme, že NLOG$\subseteq$NC^2, tedy problémy z NLOG mají obvody polynomiální velikosti a hloubky $O(\log^2 n)$ sestávající z binárních hradel AND a OR a unárního NOT.

Nechť $CONN_n : \{0,1\}^{n\times n} \to \{0,1\}$ je funkce, která je jedna právě tehdy, když její vstup reprezentuje incidenční matici grafu s n vrcholy, ve kterém existuje cesta z vrcholu 1 do vrcholu n. Ukažte, že $CONN$ lze počítat NC^2 obvody. Odvoďte, že NLOG$\subseteq$NC^2. (*Hint:* Ukažte, že násobení dvou matic $A, B \in \{0,1\}^{n\times n}$ lze počítat NC^1 obvody.)

Úloha 4. Pro prvočíslo p, F_p je konečné těleso velikosti p. Ukažte, že každou funkci $F_p^n \to F_p$ lze *jednoznačně* reprezentovat pomocí *multilineárního* polynomu nad F_p s proměnnými $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Polynom $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je multilineární, pokud $p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{S\subseteq\{1,\ldots,n\}} a_s \prod_{i\in S} x_i$ pro nějaké koeficienty a_s z tělesa F_p. (*Hint:* Pro jednoznačnost použijte početní argument.)