Stochastické reprezentace parciálních diferenciálních rovnic

Josef Štěpán

13. 1. 2009

Řešení semi-eliptické parciální diferenciální rovnice

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i} + \sum_{1 \le i,j \le n} a_{i,j}(x) \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_i \partial x_j}, \quad u(0,x) = f(x)$$

a Dirichletova problému

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} + \sum_{1 \le i,j \le n} a_{i,j}(x) \frac{\partial^2 v(x)}{\partial d_i \partial x_j} = 0, \quad x \in D,$$

$$\lim_{x \to y, x \in D} v(x) = g(y), \quad y \in \partial D,$$

kde

$$b(x) = (b_1(x), \ldots, b_n(x)) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad a(x) = (a_{i,j}(x)) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{M}_n^+,$$

mají (při jistých omezeních na koeficienty $b(x)$, $a(x)$, počáteční podmínku $f(x)$, okrajovou podmínku $\phi(y)$ a $D \subset \mathbb{R}^n$) reprezentace pomocí řešení $X_t = (X_t^1 \ldots, X_t^n)$ stochastické diferenciální rovnice

$$dX_t = b(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dB_t, \qquad X_0 = x \in \mathbb{R}^n,$$

kde $B_t = (B_t^1, \ldots, B_t^n)$ je n-dimensional Brownův pohyb a $\frac{1}{2}\sigma(x)\sigma^T(x) = a(x)$. Tato reprezentace má formu

$$u(t,x) = Ef(X_t^x) \quad \text{a} \quad v(x) = EX_{\tau_D}^x, \quad EX = \int_\Omega X(\omega)\,P(d\omega)$$

kde X_t^x je řešení stochastické diferenciální rovnice s počáteční podmínkou $X_0^x = x$ a $\tau_D = \inf\{t > 0 : X_t \notin D\}$.

V přednášce budou tyto výsledky precizovány a vysvětleny. Bude formulován problém vznikající při stochastickém modelování epidemie.