SYMPLEKTISCHE GEOMETRIE UND GEOMETRISCHE QUANTISIERUNG

(Hong Van Le, Version von July 23, 2009.)

Vorkenntnisse. Die Begriffe Mannigfaltigkeit, Liesche Gruppe.

Literatur.

- V. I. Arnold, Mathematical methods of classical mechanics, Springer 1978.
- N. M. J. Woodhouse, Geometric quantization, Oxford Sciences Publications, 1991.

Inhaltliche Schwerpunkte

- Symplektischer Formalismus der klassischen Mechanik.
- Probleme und Methode der geometrischen Quantisierung.
- Methode der WKB-Approximation.

INHALT

Einleitung.

TEIL I. KLASSISCHE MECHANIK.

1. Hamiltonsche Gleichungen in der klassischen Mechanik.
2. Symplektische Vektorräume.
3. Symplektische Mannigfaltigkeiten. Poissonsche Klammer.
4. Symplektische Reduktion.
5. Hamilton-Jacobi-Methode.

TEIL II. GEOMETRISCHE QUANTISIERUNG.

6. Algebra von Meßgrößen und Zuständen in Quantenmechanik.
7. Schrödingergleichung und Heisenbergbild.
8. Methoden der Quantisierung.
9. WKB-Näherung.

EINLEITUNG

Wie Sie wissen, versuchen wir physikalische Gesetze in Differentialgleichungen auszudrücken. Natürlich möchten wir diese Differentialgleichungen lösen.

Die Differentialgleichungen, die wir in unserer Vorlesung lösen wollen, sind Hamiltonsche Gleichungen in der klassischen Mechanik und die Schrödingergleichung in der Quantenmechanik. Die zugrundliegende Geometrie Hamiltonscher Systeme ist die symplektische Geometrie. Die Schrödingergleichung ist eine partielle Differentialgleichung aber wir können sie auch durch einen symplektischen Formalismus untersuchen. Wie Sie wissen, ist die klassische Mechanik ein Limit der Quantenmechanik. Die geometrischen Methoden, die den Zusammenhang zwischen der klassischen Mechanik und der Quantenmechanik erläutern, heißen Methoden der geometrischen Quantisierung. Viele Ideen der geometrischen Quantisierung kommen aus dem Versuch, die Schrödingergleichung mit der symplektischen Methode von Hamilton-Jacobi in der klassischen Mechanik zu lösen. Diese Ideen liegen der WKB-Näherungsmethode (Wentzel, Kramer und Brillouin) zu Lösung der Schrödingergleichung zugrunde. Die WKB-Methode wird von Maslov weiterentwickelt und sie ist ein Hauptthema in meiner Vorlesung.

Aber lassen Sie mich zunächst die Hamiltonschen Gleichungen in der klassischen Mechanik einführen. Für Literaturhinweise möchte ich das Buch von V. I. Arnold (Mathematical methods of classical mechanics) und das Buch von N.M. J. Woodhouse (Geometric quantizazion) empfehlen. Ich möchte Ihnen auch das gemeinsame Seminar von MPI und Universtät über Geometrie und Physik empfehlen.

1. Hamiltonsche Gleichungen in der klassischen Mechanik.

In der klassischen Mechanik untersuchen wir die Bewegung von Systemen aus n materiellen Punkten im Euklidischen Raum. Die klassische Mechanik heißt auch Newtonsche Mechanik, da Newton erstmals die physikalischen Gesetze der Bewegungen axiomatisch formuliert hat[1]. In mathematischen Ausdrücken ist jede Bewegung eines Systems $q(t)$ genau durch die Anfangsposition $q(t)$ und den Anfangsimpuls $\dot{q}(t)$ bestimmt. (Dieses Prinzip heißt die Determiniertheit mechanischer Systeme.) Genauer beschreibt die Gleichung

$$(N) \qquad \ddot{q}(t) = F(q, \dot{q}, t)$$

die Bewegung des Systems.

Nach dem Galileischen Relativitätsprinzip [2] ist die Funktion F zeitunabhängig.[3] F heißt die Wirkung auf q. Die Form von F ist experimentell für jedes mechanische System bestimmt.

[1] Philosophiae naturalis principia mathematica, 1687.

[2] Dialog über die großen Weltsysteme (1632), Zwei neue Wissenschaften (1638)

[3] Der Relativitätprinzip sagt aus, dass die physikalischen Gesetze invariant unter der Zeit-Translation bleiben.

1.1. Beispiel. Eine Kugel bewegt sich unter der Wirkung von zwei Federn. (Bild A.1.3.3). Das Experiment zeigt, dass bei kleiner Auslenkung der Federn aus ihrem Ruhezustand die Bewegungsgleichung der Kugel lautet

$$\ddot{q} = -\alpha^2 \cdot q. \tag{1.1.a}$$

Wir definieren eine Potentialfunktion $V(q) = \alpha^2 \cdot \frac{q^2}{2}$. Dann kann (1.1.$a$) in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\ddot{q} = -\frac{\partial V(q)}{\partial q} \tag{1.1.b}$$

Wenn wir nun die eine Kugel durch zwei ersetzen, so zeigt sich, dass bei derselben Ausdehnung der Federn die Beschleunigung halb so groß ist. Es ist experimentell erwiesen, dass für zwei beliebige Körper das Verhältnis der Beschleunigungen $\ddot{q}_2/\ddot{q}_1$ bei gleicher Ausdehnung der Feder konstant ist. Die umgekehrte Größe nennt man Verhältnis der **Massen**:

$$\frac{\ddot{q}_2}{\ddot{q}_1} = \frac{m_1}{m_2}.$$

So kann man den Begriff der Masse einführen. Die Masse eines Teilchens spielt eine wichtige Rolle in seiner Dynamik.

1.2. Beispiel-Definition. Die Bewegung von n Teilchen von Massen $m_1, \ldots, m_n$ in einem **potentiellen Feld** mit einer potentiellen Energie V ist durch die folgenden Diffenrentialgleichung bestimmt

$$m_i \ddot{q}_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}, i = 1, \cdots, n.$$

Z.B. ist die Dynamik von Dreikörpern in der Himmelmechanik eine Bewegung im potentiellen Feld mit

$$V = -\frac{m_1 m_2}{||q_1 - q_2||} - \frac{m_2 m_3}{||q_2 - q_3||} - \frac{m_3 m_1}{||q_3 - q_1||}.$$

Im Fall eines Coulomb-Felds ist die potentielle Energie eines Teilchens ähnlich definiert

$$V = k \cdot m \cdot \frac{1}{r},$$

wobei k eine Konstante ist und r die Abstand vom Teilchen zum ausgewählten Ursprung des Raums $\mathbb{R}^3$ ist.

1.3. Übungsaufgabe. Lösen Sie die Gleichung (1.1.a). Was ist die Phasenkurve (d.h. die Kurve $(q(t), p(t) = \dot{q}(t))$ in der Phasenebene (q, p).

Die Gleichung (1.1. a) heißt 1-dimensionaler **harmonischer (linearer) Oszillator**. Harmonische Oszillatoren spiellen eine wichtige Rolle in der Untersuchung von Systemen in einem potentiellen Feld mit potentieller Energie $V(q)$ in der Umgebung von Äquilibriumpositionen $\{(q_0, p_0 = \dot{p_0}) \mid \frac{\partial V}{\partial q}(q_0) = 0, p_0 = 0\}$. Die Linearizierung der Gleichung dieses Systems in der Umgebung von (q_0, p_0) ist nämlich ein harmonischer Oszilator: $\ddot{q} = A \cdot q$, wobei $a_{ij} = \frac{\partial V}{\partial q_i \partial q_j}(q_0)$. (S. A. §22).

Die Bewegung eines Teilchens in einem potentiellen Feld ist ein Beispiel für **konservative Systeme**. Laut Definition heißt ein System konservativ, wenn eine potentielle Funktion $V(q)$ existiert mit der Eigenschaft, dass die Funktion F in der Newtonschen Gleichung (N) für das System gleich $-\frac{\partial V}{\partial q}$ ist.

$$(K) \qquad \ddot{q} = -\frac{\partial V}{\partial q}.$$

Der Name konservativ stammt aus dem Gesetz über die Erhaltung der Energie. Die **Gesamtenergie E** eines konservativen Systems ist gleich der Summe der **potentiellen Energie** $V(q)$ und der **kinetischen Energie** $T =< \dot{q}, \dot{q} > /2$.

1.4. Satz. *Die Gesamtenergie eines konservativen Systems bleibt erhalten, d.h. es ist*

$$\frac{dE}{dt} = 0.$$

Beweis. Es ist

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d < \dot{q}, \dot{q} >}{2dt} + \frac{dV}{dt} =< \dot{q}, \ddot{q} > + < \frac{\partial V}{\partial q}, \dot{q} >=< \ddot{q} + \frac{\partial V}{\partial q}, \dot{q} >= 0.$$

Wir können die Bewegung eines konservativen Systems durch das Hamiltonsche Prinzip der kleinsten Wirkung beschreiben.[4] Zuerst möchte ich ein Wirkungsfunktional Φ einführen. Wir betrachten den Raum $L(\mathbb{R}^3, q_0, q_1) := \{\gamma : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^3 \,|\gamma(t_0) = q_0, \gamma(t_1) = q_1\}$ der alle möglichen Trajektorien eines Systems von Zeit t_0 bis der Zeit t_1 im Euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$. Jetzt definieren wir ein Funktional Φ auf dem Raum $L(\mathbb{R}^3, q_0, q_1)$ folgendermaßen:

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))\, dt,$$

wobei L gleich der Differenz von kinetischer und potentieller Energie ist: $L = T - V$.

1.5. Satz . *Die Bewegung des mechanischen Systems (K) stimmt mit den Extremalen des Funktionals $\Phi(\gamma)$ überein.*

Hier sage ich, dass eine Kurve γ eine Extremal des Funktionals Φ ist, wenn für alle möglichen Variationen h_s mit $h_0 = 0$ gilt

$$\frac{d}{ds}_{|s=0} \Phi(\gamma + h_s) = 0.$$

[4] General Methods in Dynamics, 1834.

1.6. Lemma. *Damit die Kurve γ zu einer Extremalen des Funktionals Φ im Raum der Kurven wird, die durch die Punkte $q(t_0) = q_0$, $q(t_1) = q_1$ verlaufen, ist es notwendig und hinreichend, dass*

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \qquad (E-L)$$

Beweis. Es ist

$$0 = \frac{d}{ds}_{|s=0}(\Phi(\gamma + h_s))\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{ds}_{|s=0} L(\gamma(t) + h_s(t), \dot{\gamma}(t) + \dot{h}_s(t))$$

$$(1.7) \qquad = \int_{t_0}^{t_1} < \frac{\partial L}{\partial q}, \frac{d\,h_s}{ds}_{\ |s=0} > + < \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \frac{d\dot{h}_s}{ds}_{\ |s=0} > \ dt$$

Partielle Integration liefert nun

$$(1.8) \qquad \int_{t_0}^{t_1} < \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, \frac{d\dot{h}}{ds}_{|s=0}) > \ dt = -\int_{t_0}^{t_1} < \frac{d\,h_s}{ds}_{\ s=0}, \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} > \ dt + < \frac{d\,h}{ds}_{\ s=0}, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} > |_{t_0}^{t^1}.$$

Da $h_s(t_0) = h_s(t_1) = 0$ ist, erhalten wir aus (1.7) und (1.8)

$$(1.9) \qquad \frac{d}{ds}_{|s=0}\Phi(\gamma + h_s) = \int_{t_0}^{t_1} < \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \frac{d\,h_s}{ds}_{\ |s=0} > dt.$$

Da (1.9) für alle Variationen h_s gilt, erfüllt L die Euler-Langrange-Gleichung (E-L).□

Beweis des Satzes 1.5. Mit $V = V(q)$ und $T =< \dot{q}, \dot{q} > /2$ haben wir

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \dot{q}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q}$$

Deshalb wird die Euler-Lagrange-Gleichung folgendemaßen ausgedrückt:

$$\frac{d}{dt}\dot{q} = -\frac{\partial V}{\partial q}.$$

Diese Gleichung ist genau die Newton-Gleichung für die Bewegung der Materie im potentiellen Feld V. □

Jetzt kommen wir zu einer anderen äquivalenten Formulierung der Lagrangeschen Gleichung. Sie heißt **die Hamiltonsche Gleichung**. Dafür brauche ich die Legendresche Transformation.

Legendre-Transformation

Die Legendre-Transformation ist ein mathematisches Verfahren, welches auf einem Übergang von Funktionen eines linearen Raumes zu Funktionen in einem dualen Raum beruht.

Wir betrachten den linearen Raum $\mathbb{R}^n$ und die konvexen Funktionen f auf $\mathbb{R}^n$, d.h. Funktion f mit der Eigenschaft, dass die quadratische Form $(\frac{\partial^2 f}{\partial q^2} dq, dq)$ positiv definit ist. Insbesondere ist die Einschränkung von f auf jeder Geraden in $\mathbb{R}^n$ konvex (d.h. $f''(q) > 0$.)

Die Legendre-Transformation von f liefert eine neue Funktion $L[f]$ von n Variablen $p_1, \cdots p_n$, die folgendermaßen konstruiert wird.

Zuerst ordnen wir der Funktion $f(q)$ die Funktion $F(q,p)$ zweier Variablen zu:

$$f(q) \mapsto F(q,p) =< p, q > -f(q)$$

Dann ist die Funktion $L[f]$ durch die folgende Gleichung definiert

$$L[f](p) = \max_{q \in R^n} F(p,q) \tag{1.10}$$

Natürlich kann diese Definition einen Sinn haben, wenn die Funktion $F(p,q)$ der Variablen p ein Maximum erreicht. Das beweisen wir folgendermaßen.[5]

Schritt 1. Die Einschränkung von $F(p,q)$ auf jede Gerade durch zwei Punkte 0 und $x \in \mathbb{R}^n$ ist eine konkave Funktion. Deshalb hat diese Einschränkung einen eizigen maximalen Punkt.

Schritt 2. Da der projektive Raum $\mathbb{R}P^{n-1}$ aller Geraden in R^n kompakt ist, ist

$$\max_{q \in R^n} F(p,q) = \max_{l \in RP^n} \max(F(p,) \mid q \in l).$$

Wir nehmen an, dass q_1 und q_2 zwei maximale Punkte von $F(p,q)$ sind. Dann erreicht die Einschränkung von $F(x,p)$ auf die Gerade durch x_1 und x_2 zwei Maxima, was der Konkavität von $F(p,q)$ widerspricht.

1.11. Bemerkung. Wie berechnet man die Legendre-Transformation? Laut (1.10) ist die Legendre-transformierte Funktion $L[f](p)$ gleich $F(q,p)$, wobei q der kritische Punkt von F ist : $\frac{\partial F}{\partial q} = p - \frac{\partial f}{\partial q} = 0$.

Jetzt möchte ich zeigen, dass das System der Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen nach der Legendre-Transformation in ein symmetrisches System von $2n$ Gleichungen erster Ordnung übergeht. Wir nehmen an, dass die gegebene Lagrange-Funktion $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bezüglich des zweiten Arguments $\dot{q}$ konvex ist. Somit hat die Legendre-Transformierte von L das Argument $(q, p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}})$.

1.12. Satz. *Es sei $H(p,q) = \max_{\dot{q}} p\dot{q} - L(q,\dot{q})$ die Legendre-Transformierte bezüglich der Lagrange-Funktion, die wir als eine Funktion von $\dot{q}$ auffassen. Dann ist das System der*

[5] mit dieselbem Argument kann man zeigen, dass die Abbildung $q \mapsto \nabla f(q)$ injektiv ist.

Lagrangeschen Gleichungen äquivalent zum System der 2n Gleichungen erster Ordnung, den Hamiltonschen Gleichungen

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q},$$
$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}.$$

Beweis. Das totale Differential der Hamiltonfunktion

$$dH = \frac{\partial H}{\partial p} dp + \frac{\partial H}{\partial q} dq$$

ist laut der Bemerkung 1.11 gleich dem totalen Differential von $p\dot{q} - L(q, \dot{q})$ für $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$

$$dH = \dot{q} dp - \frac{\partial L}{\partial q} dq$$

Beide Ausdrücke müssen übereinstimmen. Deshalb gilt

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q}.$$

Unter Verwendung der Lagrangeschen Gleichung $\dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q}$ erhalten wir die Hamiltonschen Gleichungen. □

1.13. Übungsaufgabe. Zeigen Sie, dass die Bewegung von n- Massenpunkten mit Massen m_i in einem potentiellen Feld mit Extremalen Wirkungsfunktionals Φ mit $L = \sum m_i \cdot q_i^2 - V(q)$ übereinstimmt. Zeigen Sie, dass Legendre-Transformation der Lagrange-Funktion $L(q, \dot{q}) = \sum m_i \cdot q_i^2 - V(q)$ gleich der Hamiltonfunktion $H = \sum \frac{p_i^2}{2m_i} + V(q)$ ist.

2. Symplektische Vektorräume.

Den Hamiltonschen Gleichungen liegt die symplektische Geometrie zugrunde. Wir beginnen das Studium der symplektischen Geometrie mit der Betrachtung der linearen symplektischen Struktur auf einem reellen 2n-dimensionalen Vektorraum V^{2n}.

Es sei ω eine anti-symmetrische Bilinearform auf dem reellen Vektorraum V^m. Das heißt: $\omega(x, y) = -\omega(y, x)$.

2.1. Lemma. *V hat eine Basis $v_1, \ldots, v_m$, so dass für ein $k \geq 0$ gilt: $\omega(v_{2i-1}, v_{2i}) = 1$, $falls\ 1 \leq i \leq k$ und $\omega(v_i, v_j) = 0$, für alle anderen $i < j$. Somit kann ω als Ausdruck in der dualen Basis $\{v_1^*, \ldots, v_m^*\}$ geschrieben werden*:

$$\omega = v_1^* \wedge v_2^* + \cdots + v_{2k-1}^* \wedge v_{2k}^*$$

Beweis. Wir wenden die Induktionsmethode an. Wenn $\omega \neq 0$, wählen wir 2 Vektoren v_1, v_2 so dass $\omega(v_1, v_2) = 1$. Es sei $V_1 \subset V^m$ der Unterraum von V, der von $\{v_1, v_2\}$ aufgespannt wird. Dann hat sein orthogonales Komplement $V_1^\perp = \{v \in V^m | \ \omega(v, v_i) = 0, i = 1, 2\}$ die Dimension $m - 2$: $\dim V_1^\perp = \dim V^m - 2$. Durch Induktion können wir $v_3, \ldots, v_m$ in $V_1^\perp$ finden.

2.2. Definition (i). Die obengenannte Zahl $2k$ heißt **Rang** von ω, und die Basis $(v_1, \ldots, v_m)$ heißt **Standardbasis**.
(ii) Die Form ω wird nicht-degeneriert genannt, wenn ihr Rang gleich der Dimension von V ist: $2k = m$. In diesem Fall werden das Paar (V, ω) **symplektischer Vektorraum** und $\{v_1, \ldots, v_{2n}\}$ **symplektische Basis** genannt.

Jede bilineare Form ω auf V ist ein Element in $V^* \otimes V^*$. Mit der Identifkation $V^* \otimes V^* = End(V, V^*)$ ordnen wir der Form ω eine lineare Abbildung $\Phi_\omega : V \to V^*$ zu . Ausdrücklich ist

$$\Phi_\omega(v)(v') = \omega(v, v').$$

2.3. **Satz** . *Die folgenden Bedingungen sind gleichwertig.*
(i) Die Form ω ist nicht-degeneriert.
(ii) Die Abbildung Φ_ω ist ein Isomorphismus.
(iii) Die Form $\omega^{[\frac{m+1}{2}]}$ verschwindet nicht(wobei $[\frac{m+1}{2}]$ der ganzzahlige Anteil von $\frac{m+1}{2}$ ist).

Beweis. Aus der Existenz einer Standardbasis (im Lemma 2.1) berechnen wir, dass $\Phi_\omega(v_{2i-1}) = v_{2i}^*$, $\Phi_\omega(v_{2i}) = -v_{2i-1}^*$, falls $i \leq k$ und $\Phi_\omega(v_i) = 0$, falls $i \geq 2k$.
Nun sehen wir, dass die Bedingungen (ii) und (iii) gleichwertig mit der Bedingung (i) : k = n sind. $\square$

Eine lineare Transformation $\psi : (V_1, \omega_1) \to (V_2, \omega_2)$ mit $\psi^* \omega_2 = \omega_1$ wird **Symplektomorphismus** genannt. Aus (2.1) folgt, daß zwei symplektische Vektorräume genau dann isomorph sind, wenn sie dieselbe Dimension haben. Die Gruppe aller linearen symplektischen Transformationen in V wird durch $Sp(V)$ bezeichnet. In der Untersuchung der linearen symplektischen Gruppe $Sp(V)$ ist es hilfreich, den Begriff einer zu ω passenden komplexen Struktur J einzuführen. Wir erinnern uns daran, dass ein linearer Endomorphismus J von V **eine komplexe Struktur** heißt , wenn $J^2 = -Id$. Eine komplexe Struktur J wird **passend zu** ω genannt, wenn

$$\omega(Jx, Jy) = \omega(x, y)$$

und

$$\omega(x, Jx) > 0.$$

2.4. Satz. *Jeder symplektische Vektorraum (V, ω) besitzt eine zu ω passende komplexe Struktur.*

Beweis. Es sei $g_0 =<,>$ eine symmetrische positiv-definite Bilinieare Form auf V. Dann existiert ein Operator $K : V \to V$ derart, dass

$$\omega(x,y) =< Kx, y > .$$

K ist g_0-anti-symmetrisch, weil $g_0(Kv,w) = \omega(v,w) = -\omega(w,v) = -g_0(Kw,v)$. Dann ist $R = \sqrt{K.K^t}$ ein positiv bestimmter symmetrischer Operator. Da R und K kommutativ sind, können wir leicht überprüfen, dass $J = K \cdot R^{-1}$ eine komplexe Struktur ist. Jetzt behaupten wir, dass J passend zu ω ist. Tatsächlich haben wir

$$\omega(Jx, Jy) =< KJx, Jy >=< JKx, Jy >=< Kx, y >= \omega(x,y)$$
$$\omega(x, Jy) =< Kx, Jx >=< JRx, Jx >=< Rx, x >> 0.$$

□

2.5. Es sei g eine Metrik auf einem symplektischen Vektorraum V, die durch eine passende komplexe Struktur J bestimmt wird

$$g(x,y) = \omega(x, Jy).$$

Dann ist die folgende komplexe Form auf dem komplexen Vektorraum (V, J)

$$<,>_H = g(.,.) + i\omega(.,.)$$

eine Hermitesche Form. Wir sehen, dass jede lineare Transformation T auf V, die zwei von drei Strukturen ω, g, J erhält, alle drei Strukturen erhält. Also erhält T die Hermitesche Form. Dieser Fakt bedeutet, dass der Schnitt zweier beliebiger Automorphismengruppen von $Sp(V)$,O(V),$Gl(V,J)$ gleich $U(V)$ ist.

Wie sieht die Lie-Algebra $sp(V)$ der Gruppe $Sp(V)$ aus? Eine lineare Transformation A gehört der Algebra $sp(V)$ genau dann an, wenn für alle t die lineare Transformation e^{tA} in der Gruppe $Sp(V)$ liegt. Daher folgt, dass

$$\frac{d}{dt}_{t=0}\omega(e^{tA}v, e^{tA}w) = \omega(Av,w) + \omega(v, Aw) = 0. \tag{2.6}$$

Aber $\omega(Av,w) = g(JAv,w)$ und $\omega(v,Aw) = -g(v,JAw)$. Also gehört A der Algebra $Sp(V)$ genau dann an, wenn JA selbst-adjungiert ist. Insbesondere ist die Dimension von $Sp(V^{2k})$ gleich $k(2k+1)$.

Jetzt möchte ich selektive Unterräume symplektischer Vektorräume betrachten. Es sei V_1 ein Unterraum in einem symplektischen Vektorraum V. Wir erinnern uns, daß das ω-orthogonale Komplement $V_1^\perp$ von $V_1 \subset V$ die Menge

$$V_1^\perp = \{v \in V |\, \omega(v, v') = 0, \forall v' \in V_1\}$$

ist.

2.7. Definition. Wir sagen:
- V_1 ist **symplektisch**, wenn die Einschränkung $\omega_{|V_1}$ nicht-degeneriert ist.
- V_1 ist **isotrop**, wenn $\omega_{|V_1} = 0$ ist ($\iff V_1 \subset V_1^\perp$).

- V_1 ist **koisotrop**, wenn $V_1 \supset V_1^{\perp}$ enthält.
- Ein Unterraum L ist **Lagrangesch**, wenn $L = L^{\perp}$ ist.

Der Name Lagrange in der symplektischen Geometrie wurde von Maslov in seiner Habilitationsschrift (1964) vorgeschlagen.

2.8. Ich möchte ein Beispiel für Lagrangesche Untermannigfaltigkeiten zeigen. Es sei Q ein n-dimensionaler Vektorraum und Q^* sei sein dualer Vektorraum. Wir definieren auf dem Raum $Q \oplus Q^*$ eine symplektische Form ω folgendermaßen

$$\omega((q_1, q_1^*), (q_2, q_2^*)) = q_1^*(q_2) - q_2^*(q_1).$$

Dann sind Q und Q^* Lagrangesche Unterräume in dem symplektischen Vektorraum $(Q \oplus Q^*, \omega)$.

2.9. Lemma. *Jeder isotrope Unterraum ist in einem Lagrangeschen Unterraum enthalten. Alle Lagrangeschen Unterräume L haben die halbe Dimension von V und jede Basis von L kann zu einer symplektischen Basis von (V, ω) ausgedehnt werden.*

Beweis. Es sei V_1 ein isotroper Unterraum, das heißt: $V_1 \subset V_1^{\perp}$. Im Fall, dass $V_1^{\perp} \setminus \{V_1\}$ ein nicht-triviales Element v enthält, ist der Raum $\{V_1 + v\}$ isotrop. Es folgt, dass die Lagrangeschen Unterräume exakt die maximal isotropen Unterräume sind, was die erste Aussage beweist. Die zweite Aussage folgt unmittelbar aus der Anmerkung, dass die Dimension von $V_1^{\perp}$ plus die Dimension von V_1 gleich $2n$ ist, da Φ_ω nicht degeneriert ist und $V_1 \perp$ der Annulator von $\Phi_\omega(V_1)$ ist. Die dritte Aussage kann mit Hilfe der Induktionsmethode wie in Lemma 1.1 bewiesen werden.

2.10. Übungsaufgabe. Zeigen Sie die folgenden Behauptungen.

(i) Wenn V_1 ein isotroper, koisotroper oder symplektischer Unterraum von (V, ω) ist, kann jede Standardbasis für (V_1, ω) zu einer symplektischen Basis für (V, ω) ausgedehnt werden.

(ii) Jeder Unterraum V_1 der Kodimension 1 in einem symplektischen Vektorraum ist koisotrop.

(iii) Eine lineare Transformation T in einem symplektischen Vektorraum (V, ω) ist ein Symplektomorphismus genau dann, wenn die Graphik $\Gamma(T)$ von T: $\Gamma(T) = \{(x, T(x)), |x \in V\}$, ein Lagrangescher Unterraum in dem symplektischen Vektorraum $(P \oplus P, \Omega)$ ist, wobei $\Omega = \omega \oplus (-\omega)$ ist. (*Hinweis.* Berechnen Sie die Einschränkung $\Omega(v + T(v), w + T(w)) = \omega(v, w) - \omega(Tv, Tw)$.)

Jetzt möchte ich erläutern, warum die symplektische Geometrie in $\mathbb{R}^{2n}$ besonders geeignet für die Untersuchung Hamiltonscher Gleichungen in $\mathbb{R}^{2n}$ ist. Wir erinnern uns daran, dass eine Hamiltonsche Gleichung die folgende Form hat

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}.$$

wobei $H = H(q,p,t)$ eine zeitabhängige Funktion auf $\mathbb{R}^{2n}$ ist.

(In der ersten Vorlesung haben wir gesehen, dass die mit der Bewegung eines Systems aus n-Elementen im Eukideschen Raum $\mathbb{R}^3$ assoziierte Hamiltonfunktion zeitunabhägig ist. Bei der Untersuchung eines Teils I von einem mechanischen System $I + II$ müssen wir auch den Einfluß von II auf I berücksichtigen. In vielen Fallen können wir diesen Einfluß durch eine Zeitvariation der Hamiltonfunktion für die Bewegung des Teils I ersetzen. Also sagen wir, dass die allgemeine Hamiltonfunktion zeitabhängig ist.)

Ich wiederhole, dass $\mathbb{R}^{2n}$ die kanonische symplektische Form $\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$ besitzt.

2.11. Satz. *a). Die Hamiltonsche Gleichung kann in der folgenden Gestalt geschrieben werden*

$$\frac{d(q,p)}{dt} = \Phi_\omega^{-1}(dH(p,q,t)). \tag{2.11.a}$$

b). Die Einsparameterfamilie der Diffeomeorphismen von $\mathbb{R}^{2n}$, erzeugt von einer Hamiltonschen Gleichung, erhält die symplektische Form ω.
c) Wenn H zeitunabhängig ist, liegen die Intergalflüsse der Hamiltonschen Gleichung auf Niveaumengen $H^{-1}(Konstant)$.

*Beweis.*a) Zur ersten Behauptung kommen wir durch eine direkte Berechnung. (Bitte überprüfen Sie!). Das Vektorfeld $\Phi_\omega^{-1}(dH)$ wird der **symplektische Gradient von** Hgenannt und wir schreiben ihn als $sgrad\, H$ um.

b) Wir bezeichnen die Einsparameterfamilie der von der Hamiltonschen Gleichung (2.11.a) erzeugten Diffeomorphismen mit g_t. Das bedeutet

$$g_t : (p(0), q(0)) \mapsto (p(t), q(t)),$$

wobei $(p(t), q(t))$ die Lösung der Hamiltonschen Gleichung ist. Die Familie $\{g_t\}$ [6] heißt ein Hamiltonscher Fluß . Dann ist die zweite Behauptung äquivalent zur folgenden Gleichung

$$\frac{d}{dt}(g_t^*(\omega)) = 0 \text{ für alle } t. \tag{2.11.b}$$

Die linke Seite von (2.11.b) ist gleich $g_t^*(L_{sgrad\, H}\omega)$. Jetzt erhalten wir (2.11.b) aus der Berechnung der Lie-Ableitung

$$L_{sgrad\, H}\omega = sgrad\, H \rfloor d\omega + d(sgrad\, H \rfloor \omega) \tag{2.12}$$

[6] diese Familie ist eine Gruppe genau dann, wenn H zeitunabhängig ist.

Da ω eine konstante Form ist, ist $d\omega = 0$. Ferner haben wir $sgrad\, H \rfloor \omega = dH$. Folglich ist die linke Seite von (2.12) gleich Null. Die Gleichung (2.11.b) folgt unmittelbar.[7]

c) Wir müssen beweisen, dass die Hamiltonfunktion $H(p, q)$ auf der Intergalkurve $(p(t), q(t)$ konstant bleibt. Mit anderen Worten

$$\frac{d}{dt} H(p(t), q(t)) = 0. \tag{2.11.c}$$

Die linke Seite von (2.8.c) ist gleich

$$dH(\dot{p}, \dot{q}) = dH(sgrad\, H) = \omega(sgrad\, H, sgrad\, H) = 0.$$

$\square$

Die Moral dieses Satzes besteht in folgendem.

2.12.a) Die Hamiltonsche Gleichung ist invariant unter Symplektomorphismen von $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$, d.h. Diffeomorphismen von $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$. In der klassischen Mechanik werden Symplektomrphismen **kanonische Transformationen** genannt. Diese Bemerkung liegt der Jacobi-Hamilton-Method der Lösung Hamiltonscher Gleichung zugrunde. Ihrerseits liegt die Jacob-Hamilton-Methode der WKB-Method in der geometrischen Quantization zugrunde. Diese Methoden werden wir später untersuchen.

2.12.b) Hamiltonsche Gleichungen von zeitunabhängigen Hamiltonfunktionen auf $\mathbb{R}^{2n}$ können auf Gleichungen von (2n-1) Parametern reduziert werden. Später werden wir sehen, dass Hamiltonsche Gleichung einer zeitunabhängigen Hamiltonfunktion auf $\mathbb{R}^{2n}$ tatsächlich auf eine Gleichung von $(2n - 2)$ Parametern reduziert werden können.

2.12.c) Symplektomorphismen, die von einer Hamiltonschen Gleichung erzeugt sind, heißen **Hamiltonsche Symplektomorphismen.** Hamiltonsche Symplektomorphismen formen eine Untergruppe $Sym_{Ham}(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ der Gruppe $Sym(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$. (Überprüfen Sie! Zeigen Sie die folgende Identität:

$$[sgrad\, H, sgrad\, F] = sgrad\omega(sgrad\, H, sgrad\, F).$$

Vergleichen Sie diese Identität mit dem Satz 3.16.

Somit bildet der Unterraum $Vek_{Ham}(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ aus den Hamiltonschen Vektorfeldern $sgrad\, H$ eine Liealgebra aus.)

Der Homomorphismus

$$C^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \omega) \to Vek(\mathbb{R}^{2n}) : \; H \mapsto sgrad\, H$$

hat einen Kern aus konstanten Funktionen. Daraus folgt, dass die Algebra $Vek_{Ham}(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ zum Quotientraum $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})/\mathbb{R}$ isomorph ist. Insbesondere hat die Gruppe $Sym(\mathbb{R}^{2n}, \omega) \supset Sym_{Ham}(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ infinite Dimension.

[7] Unser Beweis beruht auf der Beziehung zwischen Transformtions g_t und Transformations $\frac{d}{dt} g_t = g_t^*(L_{sgrad\, H})$. Arnold gibt einen direkten Beweis des Satzes 2.11.b durch Anwedung der Stocks-Formel (§38).

2.13. Übungsaufgabe.a) Zeigen Sie, dass $Sp(V) \subset Sym_{Ham}(\mathbb{R}^{2n})$.

b) Zeigen Sie, dass die Algebra $sym(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ der Symplektomorphismengruppe $Sym(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ aus den Hamiltonschen Vektorfeldern besteht. (*Hinweis*. Nutzen Sie den Fakt, dass jede geschlossene 1-Form auf $\mathbb{R}^{2n}$ das Differential einer Funktion H auf $\mathbb{R}^{2n}$ ist.)

3. Symplektische Mannigfaltigkeiten. Poisson-Klammer.

Wenn wir den Beweis des Satzes (2.8.b)genauer anschauen, sehen wir, dass der Schlüsselpunkt darin liegt, dass $d\omega = 0$ und ω eine nicht-degenerierte 2-Form ist. Diese Fakt motiviert unsere Definition von symplektischen Mannigfaltigkeiten.

3.1. Definition. Eine Mannigfaltigkeit M^{2n} heißt eine **symplektische Mannigfaltigkeit**, wenn eine differentiale 2-Form auf M^{2n} existiert mit der Eigenschaft, dass $d\omega = 0$ und ω^n nicht-degeneriert ist.

3.2.1. Beispiel. Der Raum $\mathbb{R}^{2n}$ mit seiner kanonischen symplektischen Form $\omega_0 = dx^i \wedge dy^i$.

3.2.2. Beispiel. Jede 2-dimensionale Mannigfaltigkeit M^2 mit ihrer Inhaltsform ω.

3.2.3. Beispiel. Das Kotangentialbündel T^*M^n. Ein Punkt auf T^*M ist bestimmt durch ein lineares Funktional $p \in T^*_qM$ auf den Tangentialraum T_qM in einem Punkt $q \in M$. So sind $\{q^i, p^i = \partial/\partial q^i\}$ lokale Koordinaten auf T^*M^n. Die kanonische symplektische Form Ω_{can} auf T^*M wird definiert durch $\Omega_{can} = \sum dp^i \wedge dq^i$. Es gilt $\Omega_{can} = d(p^i dq^i)$, wobei $p^i dq^i$ Liouville-1-Form α_M heißt. Um uns zu überzeugen, dass die Liouville-1-Form und Ω_{can} nicht von den lokalen Koordinaten abhängen, zeigt man, dass $\alpha_M(p)(\xi) = p(\pi_*\xi)$. Dabei ist $\pi : T^*M^n \to M^n$ die kanonische Projektion.

Der Raum T^*M heißt auch der Phasenraum des Konfigurationsraums M in der klassischen Mechanik. Konfigurationsräume $M^m \subset \mathbb{R}^n$ entstehen in der klassischen Mechanik bei der Untersuchung mechanischer Systeme unter holonomischem Zwang. Z. B. ist der Konfigurationsraum eines (mathematischen) Pendels eine Sphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Ein mechanisches System aus einem rigidem Körper hat auch einen holonomischen Zwang, da der Abstand zwischen Punkten des Körpers invariant unter der Zeitevolution ist. Der Konfigurationraum eines rigiden Körpers in $\mathbb{R}^3$ ist also $\mathbb{R}^3 \times SO(3) \subset \mathbb{R}^3 \times (\mathbb{R}^3)^3$: die Lage des rigiden Körpers unterscheidet sich durch die Lage seines Schwerpunktes O und die Rotation des Körpers um O. Die Bewegung eines potentiellen Massepunktes im Konfigurationsraum M ist nach dem Hamilton-Prinzip der kleinsten Wirkung ein Extremal der Einschränkung des Wirkungsfunktionals Φ_L mit $L = T - V$ auf M .[8] In der ersten Vorlesung haben wir gesehen, dass die Extremalen des Wirkungsfunktionals Φ_L mit $L = \frac{1}{2}\sum m_i|\dot{q}_i|^2 - V(q)$

[8]Das Momentum $\int_M m(x)\vec{x}$ eines rigiden Körpers ist gleich dem Momentum seines Schwerpunktes mit der Masse $\int_M m(x)$.

mit der Lösungen der Hamiltonschen Gleichung mit $H = \sum \frac{p_i^2}{2m_i} + V(q)$ übereinstimmen. Dabei ist H die Legendre-transformierte Funktion von L mit $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$. Die Legendre-Transfomation kann auch für die Funktion $L = \frac{m_i}{2}|\dot{q}_i|^2 - V(q)$ auf M^m ausgeführt werden, da diese Transformation sich nur auf die Koordinaten $\dot{q}_i$ bezieht. So sehen wir, dass unsere Hamiltonfunktion eine Funktion auf dem Kotangentialraum T^*M ist. Nach der Legendre-Transformation geht die Euler-Lagrange-Gleichung in die Hamiltonsche Gleichung über.

Der folgende Satz von Darboux beschreibt die lokale Struktur symplektischer Mannigfaltigkeiten.

3.3. Satz von Darboux. *Es sei (M^{2n}, ω) eine Mannigfaltigkeit mit einer symplektischen Form ω. Dann existieren für jeden Punkt $x_0 \in M^{2n}$ eine Umgebung $U(x_0) \subset M^{2n}$ und eine Abbildung $\phi : U(x_0) \to \mathbb{R}^{2n}$, so dass $\phi^* \omega_0 = \omega$.*

Beweis. Zuerst wählen wir lokale Koordinaten (x^i, y^i) in $U_1 \ni x_0$, so dass $\omega(x_0) = \sum_i dx^i \wedge dy^i$. Die kanonische Form $\sum_i dx^i \wedge dy^i$ auf U_1 wird ebenfalls mit ω_0 bezeichnet.

Es sei $\omega_t = (1-t)\omega_0 + t\omega$. Dann ist $\omega_t(x_0) = \omega(x_0)$. Wir benutzen Mosers Argument, um zu zeigen, dass auf einer kleinen Umgebung $U(x_0) \subset U_1$ eine Familie von Diffeomorphismen $\varphi_t : U(x_0) \to U(x_0)$ existiert mit der Eigenschaft, dass

$$\varphi_0 = Id,\ \varphi_t(x_0) = x_0,\ \varphi_t^*(\omega_t) = \omega_0. \tag{3.4}$$

Dann führt die Abbildung $(\varphi_1)^{-1}$ die Form ω_0 in die Form $\omega_1 = \omega$ über.

Um die Abbildungen φ_t zu finden, genügt es, die infinitesimale Version von (3.4) für das Vektorfeld $X_t(\varphi_t(y)) = \frac{\partial \varphi_t}{\partial t}(y)$ zu lösen. Aus (3.4) folgt

$$X_t(0) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t}(\varphi_t^* \omega_t) = 0. \tag{3.5}$$

Wir haben

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_t^* \omega_t) = \varphi_t^*(\mathcal{L}_{X_t}\omega_t + \frac{\partial}{\partial t}\omega_t).$$

Deshalb ist (3.5) äquivalent zur folgenden Gleichung:

$$X_t(x_0) = 0, \qquad \mathcal{L}_{X_t}\omega_t - (\omega_0 - \omega) = 0. \tag{3.6}$$

Poincarés Lemma sagt aus[9], dass auf einer zusammenziehbaren Umgebung U_1 eine 1-Form α existiert, so dass $\omega_0 - \omega = d\alpha$ und $\alpha(x_0) = 0$. Daraus erhalten wir

$$(3.6) \overset{\text{(Cartans Formel)}}{\Longrightarrow} (i_{X_t} \circ d + d \circ i_{X_t})\omega_t - d\alpha = 0$$

$$= d(i_{X_t}\omega_t - \alpha) = 0. \tag{3.7}$$

[9] Wir nutzen das Argument mit Intergration längs eines Kegels. Dieses Argument funktioniert auch für unendlich dimensionale Raum.

Neben x_0 in $U(x_0) \subset U_1$ sind alle Formen ω_t, $t = [0,1]$, nicht degeneriert[10]. Deshalb hat die Gleichung $0 = (i_{X_t}\omega_t - \alpha) = \Phi_{\omega_t}(X_t) - \alpha$ auf $U(x_0)$ eine eindeutige Lösung für X_t mit der Anfangsbedingung $X_t(x_0) = 0$. $\square$

Die Äquivalenzklasse symplektischer Mannigfaltigkeiten wird durch **Symplektomorphismen** definiert.

Ein Diffeomorphismus $f : (M_1, \omega_1) \to (M_2, \omega_2)$ wird **Symplektomorphismus** genannt, wenn $f^*(\omega_2) = \omega_1$.

Die wichtigsten Symplektomorphismen sind Hamilton-Symplektomorphismen. Jede Hamilton-Gleichung auf (M, ω), wie auf $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ dank dem Satz von Darboux, erzeugt eine Einparameterfamilie von Symplektomorphismen von (M, ω), s. Satz 2.11. Wir bezeichnen durch $Sym_{Ham}(M)$ die Untergruppe der Hamilton-Symplektomorphismen. Die Lie-Algebra $Vec_{Ham}(M, \omega)$ der Gruppe $Sym_{Ham}(M, \omega)$ besteht aus Hamiltonschen Vektorfeldern $sgrad\, H$.

3.7.1. Übung. Beweisen Sie dass, die Diffeomorphismengruppe $Diff(M^{2n})$ einer kompakten symplektischen Mannigfatigkeit $(M^{2n}\omega)$ transitiv auf der Menge aller symplektischen Formen ω' wirkt, die homotop zu ω sind (der Satz von Moser).

3.7.12. Bemerkungen. i) Der Satz von Darboux ist eine lokale Version des Satzes von Moser. Infinitesimal sind diese Sätze trivial, da der Raum aller exakten/homotopen symplektischen Formen so gross, wie die Raum aller 1-Formen auf M^{2n} sind. Auf anderen Seiten ist die Dimension der Diffeomorphismengruppe gleich der Dimension des Raumes aller 1-Formen auf M^{2n}. Mann kann diese Sätze durch die Flussmethode von Moser oder durch den Implizitenfunktionsatz von Nash und Moser beweisen (s. Hamilton, The inverse Function Theorem von Nash and Moser, BAMS, v.7, (1982), 65-222). Es scheint mir, dass die Flussmethode mehr elegant und in weniger Fällen anwendbar ist.

ii) Wie groß ist die Untergruppe $Sym_{Ham}(M, \omega)$? Wir haben die folgende Exaktsequenz der Liealgebras

$$0 \to \mathbb{R} \to C^\infty(M) \to Vec_{sym}(M, \omega) \to H^1(M, \mathbb{R}) \to 0,$$

wobei $Vec_{Ham}(M, \omega) = C^\infty(M)/\mathbb{R} = \ker(Vec_{sym}(M, \omega) \to H^1(M, \mathbb{R})$.

In der Untersuchung symplektischer Mannigfaltigkeiten (M, ω) ist es hilfreich, den Begriff zu ω passender fast-komplexer Struktur J einzuführen. Der Beweis des Satzes 2.4 funktioniert auch für allgemeine symplektische Mannigfaltigkeiten (M, ω). Wir kommen zum Schluß , dass jede symplektische Mannigfaltigkeit eine passende fast-komplexe Struktur besitzt. Weiterhin behaupten wir, dass passende zu ω fast-komplexe Strukturen einzig bis auf Homotopie existieren.

[10] ein beschränktes Gebiet ist präkompakt

3.8 Satz. *Die Menge aller zu ω passenden fast-komplexen Strukturen ist zusammenziehbar.*

Beweis. Es gibt eine 1-1-Korrespondenz zwischen der Menge aller zu ω passenden fast-komplexen Strukturen und der Menge aller zu ω passenden Metriken : $g < x, y >= \omega(x, Jy)$. Die Konstruktion im Satz 2.4 zeigt uns, dass die Abbildung A von der Menge aller Riemmanschen Metriken auf M auf die Menge aller zu ω passenden Metriken ein Einziehen ist. Nun folgt unsere Behauptung aus dem Fakt, dass die Menge aller Riemannschen Metriken auf M zusammenziebar ist. □

Spezielle Untermannigfaltigkeiten.

Eine Untermannigfaltigkeit N von (M^{2n}, ω) heißt **symplektisch**, (bzw. **isotrop, koisotrop, Lagrangesch**), wenn für alle $x \in N$ der Tangentialunterraum T_xN des Tangentialraums (T_xM, ω) symplektisch (bzw. isotrop, koisotrop, Lagrangesch) ist.

3.9. Beispiel. Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann ist TM zu T^*M isomorph. Also besitzt TM die induzierte symplektische Form $\Phi_g(\Omega)$. Für jede Untermannigfaltigkeit $N \subset M$ ist die Untermannigfaltigkeit $TN \subset TM$ eine symplektische Untermannigfaltigkeit.

3.10. Beispiel.(i). Der Null-Schnitt $X \to T^*X$ und jede Faser des Kotangentialbündels (T^*X, Ω_{can}) sind Lagrangesch, weil die Liouville-1-Form α_X auf diesen Untermannigfaltigkeiten verschwindet.

(ii) Es sei f ein Diffeomorphismus von M. Aus Satz 1.11 (iii) folgt, dass der Graph $\{(x, f(x)\}$ ein Lagrangescher Unterraum von $(M \times M, \omega \oplus -\omega)$ ist dann und nur dann, wenn f ein Symplektomorphismus ist.

3.11 Übungsaufgabe. Die folgende Konstruktion verallgemeinert Beispiel 3.10.(i). Es sei $\Gamma_\sigma = \sigma(X) = \{(x, \sigma(x))\} \xhookrightarrow{i} T^*X$ der Graph einer 1-Form $\sigma : X \to T^*X$. Zeigen Sie, dass Γ_σ Lagrangesch ist genau dann, wenn die 1-Form σ geschlossen ist. (*Hinweis.* Wir berechnen die induzierte Form $\sigma^*\alpha_X$ auf X:

$$< \sigma^*\alpha_X(x), \partial q >=< \alpha_X(x, \sigma(x)), \sigma_*\partial q >=< \sigma(x), \pi_*\sigma_*\partial q >=< \sigma(x), \partial q > .$$

Somit ist $\sigma^*(\Omega_{can})\,(= d(\sigma^*\alpha_X))\, = 0$ genau dann, wenn $d\,\sigma = 0$.)

Langrangesche Untermannigfaltigkeiten sind die wichtigsten Gegenstände in der symplektischen Geometrie, da sie den Begriff des Symplektomorphismus verallgemeinert. Lagrangesche Untermannigfaltigkeiten in (TM, Ω) verallgemeinern den Begriff der geschlossenen 1-Form auf M.

3.12. Satz von Kostant-Weinstein (über Lagrangesche Umgebung). *Es seien L eine Lagrangesche Untermannigfaltigkeit von (M, ω) und f die natürliche Identifikation von L*

mit dem Null-Schnitt von T^*L. Dann kann f zu einer Abbildung F fortsetzbar werden, die eine Umgebung $U(L)$ in T^*L abbildet, so dass $F^*(\Omega_{can}) = \omega$.

Beweis. Zuerst möchten wir den Begriff symplektischer Bündel einführen. Ein symplektisches Bündel ist ein Vekotorbündel mit faser-weise linearer symplektischer Form ω_q. Zwei symplektische Vektorbündel (E_1, ω_1) und (E_2, ω_2) sind isomorph, wenn ein Isomorphismus $f : E_1 \to E_2$ der Vektorbündel existiert mit der Eigenschaft, dass $f^*(\omega_2) = \omega_1$. Z.B. ist das Tangentialbündel einer symplektischen Mannigfaltigkeit ein symplektisches Bündel. Jeder Symplektomorphismus $(M, \omega_M) \to (N, \omega_N)$ induziert einen Isomorphismus der symplektischen Bündel TM und TN. Ein anderes Beispiel für symplektische Vektorbündel ist die Summe $V \oplus V^*$ eines Vektorbündels V und seines dualen Vektorbündels V^*. Die kanonische symplektische Form β_{can} auf $V \oplus V^*$ wird genauso wie im 2.8 definiert.

Schritt 1. Wir beweisen, dass das symplektische Vektorbündel $(TM_{|L}, \omega)$ zum symplektischen Vektorbündel $(T(T^*L)_{|L}, \Omega_{can})$ isomorph ist. Es sei J eine zu ω passende fast-komplexe Struktur. Als Vektorbündel ist $TM_{|L}$ isomorph zu $TL \oplus J(TL) = TL \oplus T^*L$. Wir können $J(TL)$ mit T^*L folgendermaßen identifizieren: $\tilde{f}_\omega(v)(w) = \omega(v, w)$ für $v \in J(TL)_{|L}$ und $w \in TL_{|L}$. Durch eine direkte Berechnung sehen wir, dass die symplektischen Verktorbündel $(TM_{|L}, \omega)$ und $(TL \oplus T^*L, \beta_{can})$ isomorph sind. Dasselbe Argument für $M = T^*L$ ergibt, dass die symplektischen Verktorbündel $(T(T^*L)_{|L}, \Omega_{can})$ und $(TL \oplus T^*L, \beta_{can})$ isomorph sind.

Schritt 2. Es seien g_1 und g_2 Riemmansche Metriken auf M und T^*L. auf M. Durch die Exponentialabbildung exp_1 identifizieren wir $\hat{U_1}(L) \subset TM_{|L}$ mit einer Umgebung $U_1(L) \subset M$. Analogerweise bezeichnen wir mit exp_2 die Exponentialabbildung von$T(T^*L)_{|L}$ in T^*L. Wir setzen $\tilde{F} = exp_2 \cdot \tilde{f} \cdot exp_1^{-1}$, wobei $\tilde{f}$ der Isomorphismus von $TM_{|L}$ auf $T^(T^*L)_{|L}$ ist.

$$\begin{array}{ccc} TM_L \supset \hat{U}_1(L) & \xrightarrow{\tilde{f}} & T(T^*L)_{|L} \\ \uparrow exp_1^{-1} & & \downarrow exp_2 \\ U_1(L) & \xrightarrow{\tilde{F}} & U_2(L) \end{array}$$

Wir berücksichtigen, dass für $i = 1, 2$ und $x \in L$ das Differential $dexp_i(x, 0) = Id$ ist. So erhalten wir, dass $\tilde{F}^*(\Omega_{can})(x) = \omega(x)$ für alle $x \in L$. Wir wollen einen Diffeomorphismus $\varphi : U_1(L) \supset U(L) \to U_1(L)$ finden, so dass $\varphi_{|L} = Id$ und $\varphi^*(\tilde{F^*}(\Omega_{can})) = \omega$. Dann ist $F = \tilde{F} \cdot \varphi$ die gesuchte Abbildung.

Schritt 3. Wir wenden Mosers Argument an, um φ zu finden. Wir setzen $\omega_t = (1 - t)\omega + t\tilde{F}^*(\Omega_{can})$. Dann ist $\omega_t(x) = \omega(x)$ für alle $x \in L$. Wir wollen eine Familie von Diffeomorphismen φ_t finden, so dass $(\varphi_t)_{|L} = Id$ und $\varphi_t^*(\omega_t) = \omega$. Dazu müssen wir die infinitesimale Version der Gleichung $\frac{d}{dt}(\varphi_t^* \omega_t) = 0$ für das Vektorfeld $X_t(\varphi_t(x)) = (d/dt)\varphi_t(x)$ lösen:

$$\varphi_t^*[(\mathcal{L}_{X_t}\omega_t - \omega + F^*(\Omega_{can})] = 0, \qquad X_t(x) = 0 \text{ für alle } x \in L. \tag{3.13}$$

Weil $\omega - F^*(\Omega_{can})$ auf L verschwindet, können wir Poincarés Lemma anwenden, das besagt, dass auf einer Umgebung $U_3(L) \subset U_1(L)$ gilt: $\omega - F^*(\Omega_{can}) = d\alpha$, wobei $\alpha_{|L} = 0$. Damit ist die Gleichung (3.13) auf $U_3(L)$ zur folgenden äquivalent

$$(3.14) \qquad L_{X_t}\omega_t - d\alpha = d(i_{X_t}\omega_t - \alpha) = 0, \qquad X_t(x) = 0 \text{ für alle } x \in L.$$

Die Gleichung (3.14) hat eine eindeutige Lösung für X_t auf einer Umgebung $U(L) \subset U_3(L)$, wo alle ω_t, $t \in [0,1]$, nicht-degeneriert sind. □

Übungsaufgabe 3.15. (i) Es seien (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit und f ein Hamiltonscher Diffeomorphismus auf (M, ω), der C^1-nah zu Identität ist. Beweisen Sie, dass die Anzahl der Fixpunkte von f genau soviel wie die Anzahl der kritischen Punkte einer Funktion auf M ist.

(ii) (Mosers Stabilität für symplektische Strukturen auf geschlossenen Mannigfaltigkeiten). Es sei M eine geschlossene Mannigfaltigkeit. Wir nehmen an, dass ω_t, $0 \le t \le 1$, eine Familie kohomologer symplektischer Formen auf M ist. Dann existiert eine Isotopie $\{g_t\}$ von M, so dass $g_t^*(w_t) = \omega_0$.

<u>Poissonsche Klammer.</u>

Wir haben gesehen, dass jede nicht degeneriert bilinear Form ω auf V einen Isomorphismus $\Phi_\omega : V \to V^*$ definiert. So induziert jede nicht degeneriert 2-Form ω auf M einen 2-Vektorfeld (Tensor) $\underline{\omega}$ auf M

$$\underline{\omega}(\theta_1, \theta_2) = \omega(\Phi_\omega - 1(\theta_1), \Phi_\omega - 1(\theta_2)).$$

Da der Raum $C^\infty(M)$ in den Raum aller 1-Forms auf M abgebildet wird, induziert $\underline{\omega}$ eine Bilineare Form $\{,\}_\omega$ auf $C^\infty(M)$. Es gilt

$$\{f, g\} = \omega(\Phi_\omega^{-1}(df), \Phi_\omega^{-1}(dg)) = df(\Phi_\omega^{-1}(dg)).$$

Wir sehen, dass die Form $\{,\}_\omega$ die Leibniz-Regel erfüllt

$$\{f, g.h\}_\omega = (< sgrad\, f, d(g.h) >= \{f, g\}_\omega.h + g.\{f, h\}_\omega. \qquad (L)$$

Satz 3.16. *(i) Der Raum $C^\infty(M)$ der unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf M ist eine Liesche Algebra unter der Klammer $\{,\}_\omega$ genau dann, wenn $d\omega = 0$ ist.*
(ii) Wir nehmen an, dass $d\omega = 0$. Die Abbildung $P : h \mapsto X_h$ von der Lieschen Algebra $(C^\infty(M), \{,\}_\omega)$ nach der Lieschen Algebra $(V(M), [,])$ der Vektorfelder ist ein Homomorphismus.

Beweis. (i) Wir nehmen an, dass $d\omega = 0$ ist. Weil $\Phi_\omega(df) = sgrad\, f$ Hamiltonsch ist, erhalten wir

$$\begin{gathered} sgrad\, f\{g, h\} = sgrad\, f[\omega(\Phi_\omega^{-1}dg, \Phi_\omega^{-1}dh)] \\ = \omega(\Phi_\omega^{-1}d(sgrad\, f(g)), \Phi_\omega^{-1}dh) + \omega(\Phi_\omega^{-1}dg, \Phi_\omega^{-1}d(sgrad\, f(h))) \\ = \{sgrad\, fg, h\} + \{g, sgrad\, fh\}. \end{gathered}$$

Daraus folgt

$$\{f,\{g,h\}\} = \{\{f,g\},h\} + \{g,\{f,h\}\}. \tag{3.17}$$

Jetzt nehmen wir an, dass die Klammer $\{,\}_\omega$ die Jacobi-Identität erfüllt. Wir werden zeigen, dass (3.16.ii) gilt. Um $sgrad\,\{f,g\} = [sgrad\,f, sgrad\,_g]$ zu beweisen, genügt es zu zeigen, dass gilt

$$sgrad\,\{f,g\}h = [sgrad\,_f, sgrad\,g]h \qquad \text{für alle } h \in C^\infty(M).$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist $\{\{f,g\},h\}$. Ihre rechte Seite lautet folgendermaßen:

$$[sgrad\,f sgrad\,g - sgrad\,g sgrad\,f]h = sgrad\,f\{g,h\} - sgrad\,g\{f,h\} = \{f,\{g,h\}\} - \{g,\{f,h\}\}.$$

Nun folgt Teil (ii) unmittelbar aus der Jacobi-Identität.

Endlich werden wir zeigen, dass die Geschlossenheit von ω aus der Jacobi-Identität folgt. Für alle $V_i \in T_xM$ existieren Funktionen f_i mit der Eigenschaft, dass $sgrad\,f_i = V_i(x)$. Nun berechnen wir

$$3d\omega(V_1,V_2,V_3) = V_1(\omega(V_2,V_3)) + V_2(\omega(V_3,V_1)) + \omega([V_1,V_2],V_3) - \omega([V_2,V_3],V_1) - \omega([V_3,V_1],V_2)$$
$$= -\{f_1,\{f_2,f_3\}\} - \{f_2,\{f_3,f_1\}\} - \{f_3,\{f_1,f_2\}\} - \{\{f_1,f_2\},f_3\}\} - \{\{f_2,f_3\},f_1\} - \{\{f_3,f_1\},f_2\} = 0.$$

$\square$

So haben wir gesehen, dass die Form $\underline{\omega}$ eine Poisson-Struktur auf $C^\infty(M)$ definiert. Eine Poisson-Struktur ist eine Lie-Algebra-Stuktur mit der Leibniz-Regel. Unter dem Gesichtspunkt des dualen Raums $C^\infty(M)$ können wir ganz einfach die Hamiltonsche-Dynamik auf M beschreiben. Die Hamiltonsche Dynamik $g_t : x(0) \mapsto x(t)$ definiert nämlich die Dynamik g_t^* auf $C^\infty(M)$: $f \mapsto f_t : f_t(x(0)) = f(x(t))$. Wir berechnen unmittelbar

$$\frac{d}{dt} f_t = sgrad\,H(f) = \{H,f\}.$$

Daraus folgt, dass f ein Integral der Hamilton-Gleichung von H genau dann ist, wenn H und f kommutativ sind.

4. Symplektische Reduktion.

Wie können wir neue Integrale einer Hamiltonschen Gleichung mit einer zeitunäbhängigen Hamiltonfunktion H finden? Das Theorem von Noether besagt, dass jede Einparameterfamilie der Symmetrien von H ein Integral von H erzeugt. Dieses Theorem entspricht unserer Intuition, dass Symmetrien den Freiheitgrad eines mechanischen Systems reduzieren.

4.1. Hamiltonsche Gruppen-Operations. Wir betrachen eine Gruppe G, die auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit (M,ω) operiert. Wir sagen, dass die Operation $O : G \to Diff(M)$ symplektisch ist, wenn $O(G) \subset Symp(M,\omega)$ ist. Die Operation O heißt **fast Hamiltonsch**[11], wenn die Algebra $O_*(LG)$ der Algebra $Vekt_{Ham}(M,\omega)$ angehört. Die Operation O wird

[11] nach der Definition ist der Operation der Gruppe Sym_{Ham} fast-Hamiltonsch!

Hamiltonsch genannt, wenn der Homorphismus O_* zu einem Homomorphismus $\mathcal{H}_O$: $LG \to (C^\infty(M,\omega), \{,\})$ gelifted werden kann. Wegen der Fußnote 11 werde ich (wie viele anderen) die Hamilton-Wirkung **Poisson-Wirkung** nennen.

4.2. Beispiel. Es sei r_t eine Rotation der Sphäre $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 | \sum(x^i)^2 = 1\}$ um die Achse x^3 um den Winkel $2\pi t$. Da r_t die Standardmetrik auf S^2 erhält, lässt sie die Flächeninhaltsform ω invariant. Deshalb ist das Vektorfeld $X = (d/dt)_{|t=0} r_t$ symplektisch. Ich behaupte weiterhin, dass diese symplektische Operation vom Kreis $S^1 : t \mapsto r_t$ Hamiltonsch ist. Ich muß eine Funktion H auf S^2 finden mit der Eigenschaft, dass $sgrad\, H(x) = \frac{d}{dt} r_t(x)$. Es seien (ϕ, θ) die sphärischen Koordinaten von x. Wir setzen $H(\phi,\theta) = \sin\theta$. Dann ist $sgrad\, H = J\nabla H = J(\cos\theta\vec{\theta}) = \frac{d}{dt} r_t(\phi,\theta)$.

4.3. Übungsaufgabe. (i) Es sei $X = \partial/\partial\theta$ das Vektorfeld auf dem Torus T^2 mit den Koordinaten (θ,ψ) und seiner symplektischen Form $\omega = d\theta \wedge d\psi$. Ist X symplektisch? Ist X Hamiltonsch? (ii) Zeigen Sie, dass die Gruppe $Diff(M)$ Hamiltonsch auf (T^*M, Ω_{kan}) operiert. (*Hinweis*. Wir bezeichnen das von $X \in Vekt(M)$ induzierte Vektorfeld auf T^*M mit $\tilde{X}$. Dann ist $\tilde{X}(\theta) = 0$ und $\mathcal{H}_O(X) = (\theta, \tilde{X})$, wobei θ die Louville-1-Form auf T^*M ist.)

4.3.1. Bemerkung. Das Beispiel 4.2 betrifft die Wirkung des Kreises S^1, für den eine fast-Hamiltonsche Wirkung immer Poissonsch ist. Gibt es auch fast Hamiltonsche Wirkung, die aber keine Poissonsche Wirkung ist? Wir bezeichnen mit $sgrad\, h_X$ das Bild von $X \in LG$ in $Vekt_{Ham}(M,\omega)$.

Es sei $h : O_*(LG) \to C^\infty(M,\omega)$ eine lineare (aber nicht unbedingt Liealgebraische) Abhebung. Aus der Jacobi-Identität

$$sgrad\, h_{[X,Y]} = [sgrad\, h_X, sgrad\, h_Y]$$

erhalten wir sogleich dass

$$c(X,Y) = h_{[X,Y]} - \{h_X, h_Y\}$$

ein Kozyklus ist, da $dc(X,Y,Z) = (-1)c([Y,Z],X) - c([X,Y],Z) + c([X,Z],Y) = 0$.

Falls c ein Korand ist, d.h. $c(X,Y) = f([X,Y])$, können wir die Abhebung h modifizieren:

$$h'_X = h_X + f(X),$$

damit h' ein Liealgebraischer Homomorphismus ist. In diesem Fall ist die fast Hamiltonsche Wirkung Poissonsche Wirkung.

Falls c kein Korand ist, dasselbe Argument ergibt sich, dass es keine Anhebung gibt. In diesem Fall [12] benutzen wir eine zentrale Erweiterung $l\tilde{G} := (X,a),\ X \in LG, a \in \mathbb{R}$ vonLG mit c:

$$[(X,a),(X,b)] = ([X,Y], c(X,Y)).$$

[12] Kirillov, Reprensentation Theory and Noncommutative Hamonic Analysis I, p.124

Wir setzen

$$h_{(X,a)} = h_X + a.$$

Dann ist die Wirkung von $\tilde{G}$ auf M Poissonsch.

Satz von Noether. *Wir nehmen an, dass die Operation von Gruppe G auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit (M, ω) Hamiltonsch ist. Es sei H eine Hamiltonfunktion auf (M, ω), die invariant unter der Operation von G ist. Dann kommutiert jede Funktion $f \in \mathcal{H}_O(LG)$ mit der Funktion $H : \{f, H\} = 0$.*

Beweis. Es sei $f = \mathcal{H}_O(v)$, wobei $v \in LG$. Dann haben wir

$$\{f, H\} = sgrad\, \mathcal{H}_O(v)(H) = O_* v(H) = 0.$$

$\square$

4.4. Beispiel. Wir betrachten die Bewegung eines Planets (z.B. der Erde) um die Sonne. Wir können diese Bewegung als die Bewegung eines Massepunktes in einem potentiellen (sonnengravitationellen) Feld untersuchen:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial V(|r|)}{\partial \vec{r}} \tag{4.5}$$

Wir haben gesehen, dass die Gleichung (4.5) äquivalent zu einer Hamiltonschen Gleichung in $\mathbb{R}^6$ mit $H = |p|^2/2 + V(|r|)$ ist, wobei $p = \dot{\vec{r}}$ ist. [13] Offensichtlich ist Funktion H invariant unter der Rotation um den Ursprung $O \in \mathbb{R}^3$. Wir haben auch gesehen, dass diese Rotation Hamiltonsch auf $(\mathbb{R}^6, \omega_0)$ operiert. Ich behaupte, dass die Hamiltonsche Funktion der Rotation r_t^3 um die Asche x_3 in $\mathbb{R}^3$ gleich der dritten Koordinate $< e_3, [\vec{r}, \dot{\vec{r}}] >$ des angularen Moments ist. Wir berechnen

$$sgrad\, H = J \circ \nabla(x_1 p_2 - x_2 p_1) = J \circ (x_1 \partial p_2 + p_2 \partial x_1 - x_2 \partial p_1 - p_1 \partial x_2) = \frac{d\, r_t(x,p)}{dt}.$$

So kommen wir zum Kepler's Gesetz , dass das angulare Moment der Bewegung des Planet invariant bleibt. Daraus folgt, dass der Orbit des Planets immer eben bleibt.

Jetzt möchte ich zeigen, dass jede Hamiltonsche Operation von S^1 auf (M^{2n}, ω), die ein neues Integral f für die Hamiltonsche Gleichung $\dot{x} = sgrad\, H$ erzeugt, den Freiheitgrad der Hamiltonschen Gleichung auf $(2n-2)$ reduziert.

Für jede Hamiltonsche Operation einer Gruppe G auf (M, ω) definieren wir die Moment-Abbildung $\mu : M \to (LG)^*$ folgendermaßen

$$< \mu(x), v > = < x, \mathcal{H}_O(v) > (\Longleftrightarrow x \stackrel{\mu}{\mapsto} (X \mapsto h_X(m)). \tag{4.6}$$

In dieser Formel ist μ zu $\mathcal{H}_O$ adjungiert.

---

[13] Diese Identifizierung ist möglich dank der natürlichen Eklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^3$.

4.7. Lemma *Wir nehmen an, dass S^1 mit der Moment-Abbildung μ auf einer regulären Niveaumenge $\mu^{-1}(\lambda)$ lokal frei operiert. Dann besitzt die Quotientenmannigfaltigkeit $B(\lambda) = \mu^{-1}(\lambda)/S^1$ eine symplektische Form $\hat{\omega}_\lambda$ derart, dass ihre Zurückziehung gleich der Einschränkung $\omega_{|\mu^{-1}(\lambda)}$ ist. Jede Hamiltonsche Gleichung von einer Hamiltonfunktion f, die invariant under der Operation von S^1 bleibt, kann auf eine Hamiltonsche Gleichung auf $B(\Lambda)$ reduziert werden.*

Beweis. Offensichtlich ist $\Sigma = \mu^{-1}(\lambda)$ koisotrop und $sgrad\,\mu \in \ker \omega_{|\Sigma}$. Die Bedingung, dass S^1 lokal frei operiert, bedeutet, dass $sgrad\,\mu \neq 0$ ist. Wir bezeichnen die Projektion $\Sigma \to B(\lambda)$ mit π. Man definiert $\hat{\omega}_\lambda$ folgendermaßen: $\hat{\omega}_\lambda(\pi x)(\pi_* v, \pi_* w) = \bar{\omega}_x(v, w)$. Weil $g^*(\omega) = \omega$ für alle $g \in S^1$ ist, ist $\hat{\omega}_\lambda$ auf $B(\lambda)$ wohldefiniert. Es ist sogleich zu sehen, dass $d\pi^*(\hat{\omega}_\lambda) = d\omega_\Sigma = 0$ ist. Da π surjektiv ist, ist $\hat{\omega}_\lambda$ geschlossen. Da f invariant unter der Wirkung von S^1 ist, ist die Projektion $\pi_*(sgrad\, f) = sgrad_{\hat{\omega}} \hat{f}$, wobei $\hat{f}(\pi x) = f(x)$. □

Die symplektische Mannigfaltigkeit $(B(\lambda), \hat{\omega}_\lambda)$ wird **symplektischer Quotient** genannt (auch symplektische Reduktion) und mit $M//S^1$ bezeichnet.

4.8. Beispiel. Wir betrachten die Bewegung eines harmonischen Oszillators in $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ mit $H = \sum(|p_i|^2 + |q_i|^2)$. Die Niveaumenge $H^{-1}(1) = S^{2n-1}$. Wir sehen, dass H die Moment-Abbildung einer S^1-Operation auf $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ ist: $O(\theta)(z_i) = (z_i.e^\theta)$. Die symplektische Quotient $\mathbb{R}^{2n}//S^1$ ist gleich $S^{2n-1}/S^1 = \mathbb{C}P^{n-1}$. Wenn $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ mit H in Involution sind, z.B wenn f komplex-homogen in Koordinaten z_i ist, reduziert die Hamiltonsche Gleichung $\frac{d(q,p)}{dt} = sgrad\, f$ auf eine Hamiltonsche Gleichung auf $\mathbb{C}P^n$.

4.9. Übungsaufgabe. (i) Lösen Sie die Hamiltonsche Gleichung für die Bewegung eines Planeten im Feld der Sonnengravitation $V(r)$ mit Hilfe der symplektischen Reduktion. (*Hinweis*. Wir nehmen an, dass das Angularmomentum $M = (\mu, 0, 0)$, (d.h. $x_1 = p_1 = 0$ (s. Beispiel 4.4)). In den Polarkoordinaten ($x_2 = r\cos\phi, x_3 = r\sin\phi$ haben wir: $p_2 = p_r \cos\phi - \frac{p_\phi}{r}\sin\phi$, $p_3 = p_r \sin\phi + \frac{p_\phi}{r}\cos\phi$. Das erste angulare Moment $x_2 p_3 - x_3 p_2 = \mu$ ist gleich p_ϕ. Die reduzierte Hamiltonfunktion $H = \frac{p^2 + p_3^2}{2}$ auf dem reduzierten Raum $(r, p_r) = \partial_\phi = \mu = const/(S^1(\phi))$ ist

$$H(r, p_r) = \frac{p_r}{2m} + \frac{p_\phi}{2mr^2} + V(|r|) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{\mu^2}{2mr^2} + V(r).$$

Die Evolution von ϕ wird von der Gleichung beschrieben

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi}_{|\partial_\phi = \mu} = \frac{\mu}{mr^2}$$

beschrieben.

(ii) Lösen Sie die Hamiltonsche Gleichung für die Bewegung eines Pendels unter der Erdgravitation mit Hilfe der symplektischen Reduktion.

4.10. Bemerkung. Wir können den Begriff der symplektischen Reduktion auch für eine Hamiltonsche Operation einer kompakten Gruppe G einführen. Dabei betrachten wir die Quotient-Mannigfaltigkeit $\mu^{-1}(0 \in (LG)^*)/G$, da 0 der einzige Punkt in LG, der invariant unter der adjungierten Operation von G auf $(LG)^*$ ist.

5. Hamilton-Jacobi-Methode

Jetzt möchte ich eine Hamiltonsche Operation der nicht-kompakten Gruppe $\mathbb{R}^n \to Sym_{Ham}(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ betrachten. Wir haben in der Übungsaufgabe 4.3.(ii) gesehen, dass die lineare Transformation $\mathbb{R}^n \ni v \mapsto T : (p, q) \xrightarrow{T} (p + v, q)$ Hamiltonsch ist. Ein Funktion $H(p, q)$ ist invariant unter dieser Operation genau dann, wenn $H(p, q) = H(q)$ ist. In diesem Fall weiß ich, dass ich die Hamiltonsche Gleichung explizit lösen kann:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = 0 \Longrightarrow q(t) = q(0),$$

$$\dot{p} = \frac{\partial H}{\partial q}_{|q=q_0} \Longrightarrow p(t) = \int \frac{\partial H}{\partial q}_{|q=q_0}.$$

So fragen wir uns, wenn wir eine Hamiltonfunktion $H(p, q)$ betrachte, ob eine symplektische Transformation T_S auf $\mathbb{R}^{2n}$ existiert derart, dass $H(T_S(p, q))$ nur von Variablen q_i abhängt. Die Suche nach solschen symplektischen Tranformationen liegt der Hamilton-Jacobi-Theorie zugrunde.

5.1. Hamilton-Jacobi-Theorie in $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.

Wir nehmen an, dass die Transformation $(p, q) \mapsto (p'(p, q), q'(p, q))$ symplektisch ist. Dann ist die 1-Form $pdq - p'dq'$ geschlossen. Folglich existiert eine Funktion $S(p, q)$ mit der Eigenschaft, dass

$$pdq - p'dq' = dS(p, q). \tag{5.1.1}$$

Weiterhin setzen wir voraus, dass wir die Funktionen (p'_i, q_i) in einer Umgebung U von (p_0, q_0) als unabhängige Koordinaten betrachten können. Mit anderen Worten ist

$$det \frac{\partial q', q)}{\partial(p, q)} = det \frac{\partial q'}{\partial p} \neq 0. \tag{5.1.2}$$

Wir sagen, dass die symplektische Transformation $(p, q) \mapsto (p', q')$ **frei** ist, wenn sie die Gleichung (5.1.2) erfüllt. In diesem Fall kann die Funktion $S(p, q)$ als eine Funktion $S_1(q', q)$ geschrieben werden und die Funktion S_1 heißt **erzeugende Funktion** der symplektischen Transformation. Aus (5.1.1) folgt, dass

$$\frac{\partial S_1}{\partial q} = p, \qquad \frac{\partial S_1}{\partial q'} = -p'. \tag{5.1.3}$$

5.1.4. Satz. *Es sei $S_1(q', q)$ eine Funktion auf einer Umgebung eines Punktes $(q'_0, q_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Wenn*

$$\det \frac{\partial^2 S_1}{\partial q' \partial q}_{q'_0, q_0} \neq 0,$$

ist S_1 eine erzeugende Funktion einer freien symplektischen Transformation.

Beweis. Wir betrachten die (funktionale) Gleichung für die Koordinaten q'

$$\frac{\partial S_1(q', q)}{\partial q} = p. \tag{5.1.5}$$

Nach dem Implizitefunktiontheorem kann diese Gleichung in einer Umgebung des Punktes

$$(q_0, p_0 = \frac{\partial^2 S_1(q', q)}{\partial q}_{|(q'_0, q_0)})$$

gelöst werden (mit $q'_0 = q'(p_0, q_0)$). Jetzt setzen wir

$$p'_1(q', q) = -\frac{\partial S_1(q', q)}{\partial q'}, \tag{5.1.6}$$

$$p'(p, q) = p'_1(q'(p, q), q). \tag{5.1.7}$$

Aus (5.1.5), (5.1.6), (5.1.7) erhalten wir

$$pdq - p'dq' = \frac{\partial S_1(q', q)}{\partial q} dq - \frac{\partial S_1(q', q)}{\partial q'} dq' = dS_1(q', q) = dS.$$

Daraus folgt, dass die Transformation $(p, q) \mapsto p'(p, q), q'(p, q)$ kanonisch ist. Diese Transformation ist frei, da $\det(\partial q'/\partial p) = \det(\partial^2 S_1(q', q)/\partial q' \partial q)^{-1} \neq 0$. $\square$

Die Moral dieses Satzes besteht in folgendem. In allgemeinen wird eine Transformation $(p, q) \mapsto (p', q')$ durch 2n Funktionen p', q' von 2n Veränderlichen bestimmt. Die kanonische Transformation wird dagegen nur durch eine Funktion von 2n Veränderlichen bestimmt.

5.2. Geometrie erzeugender Funktionen

Wir haben gesehen, dass der Graph einer symplektischen Transformation $f : (M, \omega) \to (M', \omega)$ eine Lagrangesche Untermannigfaltigkeit $\Lambda_f \subset (M \times M', \omega \oplus (-\omega))$ ist. Wenn $M = (T^* N, \Omega_{kan})$ ist (z.B. $N = R^n$), können wir $M \times M$ mit $T^*(N \times N')$ identifizieren. Lokal wird die Lagrangsche Untermannigfaltigkeit $\Lambda_f = (q, q', p, p') \subset T^*(N \times N), \Omega_{kan} \oplus -\Omega_{kan})$ durch eine Funktion $S(q, q') \in C^\infty(N \times N')$ erzeugt, s. auch (5.1.3). Das gilt auch, wenn eine Lagrangesche Untermannigfaltigkeit ein Schnitt von $T^*(N \times N)$ ist. Dies ist gleichwertig mit der Bedingung einer freien symplektischen Transformation.Wir bemerken, dass die Identität-Transformation der Lagrangeschen Untermanigfaltigkeit $(q = q', p = p')$ entspricht einer Lagerangeschen Untermannigfaltigkeit, die kein Schnitt von $T^*(N \times N)$ ist.):

$$p_a = \frac{\partial S}{\partial q_a}, p_a' = -\frac{\partial S}{\partial q_a'}.$$

Die Bedingung, dass die Funktion H nach der symplektischen Transformation f in eine Funktion K übergeht, die nur von Verändlichen q_i' abhängt, ist

$$H(p = \frac{\partial S(q, q')}{\partial q}, q) = const(q'). \qquad (5.2.1).$$

(Wir gehen aus der folgenden Bedingung

$$K(p', q') = H((p, q)(\pi_{\Lambda_S}(p', q')))\text{mit } p' = \frac{\partial S}{\partial q'}.$$

Da T ein Diffeomorphismus ist, ist diese Bedingung gleichwertig mit (5.2.1). *Abb.*) Die Gleichung (5.2.1) bedeutet, dass die Funktion H auf jeder Lagrangeschen Untermannigfaltigkeit $(p = \frac{\partial S}{\partial q}, q) \subset (T^* N, \Omega_{kan})$ für alle Parameter q' konstant ist.

Übung 5.2.2. Es sei Λ eine zusammenhängende Lagrangesche Untermannigfaltigkeit in (M, ω). Zeigen Sie, dass eine Funktion $h \in C^\infty(M)$ auf Λ konstant genau dann ist, wenn $sgrad\, h \in T_* \Lambda$.

Die Gleichung (5.2.1) heißt **die Hamilton-Jacobi-Gleichung für erzeugende Funktion** S. In diesen neuen Koordinaten (p', q') ist die Hamiltonsche Gleichung gleichwertig mit folgendem

$$\dot{q'} = \frac{\partial K}{\partial p'}, \qquad \dot{p'} = -\frac{\partial K}{\partial q'}.$$

So erhalten wir die Lösung

$$q'(t) = q'(0), \qquad p'(t) = p'(0) - t \cdot \frac{\partial K}{\partial q'}_{q'=q'_0}.$$

5.3. Methode der Integration der Hamilton-Jacobi-Gleichung

Wie integrieren wir (d.h. explizit lösen) die Hamilton-Jacobi-Gleichung? Die einzige Methode zur Lösung von (5.2.1) ist die **Methode der Trennung von Veränderlichen**. Die Idee besteht in folgendem. Wir nehmen an, dass die H-J-Gleichung (5.2.1) die folgende Gestalt hat

$$h(f_1(\frac{\partial S}{\partial q_1}, q_1), \cdots, f_n(\frac{\partial S}{\partial q_n}, q_n), K) = 0, \tag{5.3.1}$$

wobei $f_i(p_i, q_i)$ Funktionen von 2 Veränderlichen sind. In diesem Fall suchen wir nach einer Lösung S der Gestalt

$$S = S_1(q_1, c_1) + S_2(q_2, c_2) + \cdots + S_n(q_n, c_n). \tag{5.3.2}$$

Die Funktion S_i muß die folgende Gleichung erfüllen

$$f_i(\frac{\partial S_i}{\partial q_i}, q_i) = c_i. \tag{5.3.3}$$

Offensichtlich können wir die Gleichung (5.3.3) explizit lösen.

Beispiel 5.3.4 (A. §47, C). Wir betrachen das Problem der Bewegung eines materiellen Punktes im Gravitationsfeld zweier Massenpunkten mit gleicher Masse und von Abstand $2c$. Die potentielle Funktion ist

$$V = -\frac{k}{r_1} - \frac{k}{r_2} \tag{5.3.5}$$

und die kinetische Funktion ist

$$T = |\dot{\vec{r}}|^2. \tag{5.3.6}$$

Wir betrachten nur ebene Bewegungen des materiellen Punktes $x \in \mathbb{R}^2$. In einem neuen elliptischen Koordinatensystem ist

$$q_1 = r_1 + r_2, \qquad q_2 = r_1 - r_2.$$

Da die Geraden $r_1 + r_2 = konst$ und $r_1 - r_2 = konst$ zueinander orthogonal sind, können wir die Euklidische Metrik $dx^2 + dy^2$ folgendermaßen schreiben

$$ds^2 = a_1^2 dq_1^2 + a_2^2 dq_2^2.$$

Entsprechend haben wir

$$T = \sum a_i^2 \frac{\dot{q}_i^2}{2},$$

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q_i} = a_i^2 q_i^2,$$

(5.3.7) $$H = T + V = \sum \frac{p_i^2}{2a_i^2} - \frac{k}{r_1} - \frac{k}{r_2}.$$

Durch eine direkte Berechnung (s. A. S. 262) erhalten wir

$$V = -\frac{4kq_1}{q_1^2 - q_2^2}.$$

(5.3.8) $$\frac{1}{a_1^2} = \frac{q_1^2 - 4c_2^2}{(q_1^2 - q_2^2)/4}, \ \frac{1}{a_2^2} = \frac{4c^2 - q_2^2}{(q_1^2 - q_2^2)/4}.$$

Aus (5.3.7) und (5.3.8) folgt, dass die H-J-Gleichung äquivalent zur folgenden Gleichung

(5.3.9) $$(\frac{\partial S}{\partial q_1})^2(q_1^2 - 4c^2) + (\frac{\partial S}{\partial q_2})^2(4c^2 - \mu^2) = K(q_1^2 - q_2^2) + 4kq_1$$

ist. Durch die Trennung von Veränderlichen q_1 und q_2 erhalten wir aus (5.3.9)

$$S = S_1(q_1, c_1) + S_2(q_2, c_2),$$

wobei

$$(\frac{\partial S_1}{\partial q_1})^2(q_1^2 - 4c^2) - 4kq_1 - Kq_1^2 = c_1,$$

$$(\frac{\partial S_2}{\partial q_2})^2(4c^2 - q_2^2) + Kq_2^2 = -c_1.$$

So erhalten wir die Lösung

$$S(q_1, q_2, c_1, c_2) = \int \sqrt{\frac{c_1 + c_2q_1^2 + 4kq_1}{q_1^2 - 4c^2}}dq_1 + \int \sqrt{\frac{-c_1 - c_2q_2^2}{4c^2 - q_2^2}}dq_2.$$

5.4. Polarisierungen und Integrierbare Systeme.

Wir haben gesehen, dass wir jeder symplektischen Transformation $T : (T^*N, \Omega_{kan}) \to (T^*N', \Omega_{kan})$ eine Lagrangesche Untermannigfaltigkeit $I \circ \Lambda_T \subset (T^*(N \times N'), \Omega_{kan})$ zuordnen können. Diese Korrespondenz ist Eins-zu-Eins. Die Idee der Hamilton-Jacobi-Methode besteht darin, dass die Suche nach der Lagrangeschen Untermannigfaltigkeit $I \circ \Lambda_T$ durch die Suche nach einer Funktion $S(q, q') \in C^\infty(N \times N')$ ersetzt wird. Damit hängt die Funktion $h(p, q) = h(T^{-1}(p', q'))$ nur von q' ab : $h(p, q) = K(q')$. Wir haben gesehen, dass die Hamilton-Jacobi-Gleichung (5.2.1) eine (q')-Parameterfamilie Langerangescher Untermannigfaltigkeiten $T^{-1}((q') = konst) = \{\Lambda_S(p = \frac{\partial S(q,q')}{\partial q}, q)\}$ in T^*N definiert, auf deren die Hamiltonfunktion H konstant ist. So kommen wir zum Begriff **reeller Polarisierungen** einer symplektischen Mannigfaltigkeit. Eine reelle Polarisierung einer symplektischen Mannigfaltigkeit (M, ω) ist eine Blatterung lokal Langrangescher Untermannigfaltigkeiten. Jedes Blatt einer reellen Polarisierung ist flach im folgenden Sinn. Für jedes Blatt B einer reellen Polarisierung RP können wir einen flachen Zusammenhang ∇ definieren:

$$V(B) \times V(B) \to V(B) : (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

$$(5.4.1) \qquad (\nabla_X Y)\rfloor\omega = \mathcal{L}_X(Y\rfloor\omega) = X\rfloor d(Y\rfloor\omega).$$

Hier ist Y ein Vektorfeld auf M, derene Einschränkung auf B gleich Y ist. (Diese Fortsetzung ist möglich, da $B \in RP$ ist).

5.4.2. Behauptung. *Die Definition (5.4.1) ist wohlbestimmt. Weiterhin ist der Zusammenhang ∇ flach und torsion-frei.*

Beweis. Es sei $X' \in V(B)$. Dann haben wir

$$\omega(\nabla_X Y, X') = X'\rfloor\mathcal{L}_X(Y\rfloor\omega) = \mathcal{L}_X((Y\rfloor\omega), X') - \omega(Y, [X, X']) = 0.$$

Dies zeigt, dass $\nabla_X Y \in V(B)$ ist. Um zu zeigen, dass ∇ ein Zusammenhang ist, müssen wir die Leibniz-Regel überprüfen

$$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y.$$

Diese Identität folgt direkt aus (5.4.1). Die Behauptung, dass ∇ torsion-frei ist:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

folgt aus der Berechnung

$$(\nabla_X Y - \nabla_Y X)\rfloor\omega = X\rfloor d(Y\rfloor\omega) - Y\rfloor d(X\rfloor\omega)$$

$$= X\rfloor\mathcal{L}_Y\omega - Y\rfloor d(X\rfloor\omega) = \mathcal{L}_Y(X\rfloor\omega) - [Y, X]\rfloor\omega - Y\rfloor d(X\rfloor\omega) = [X, Y]\rfloor\omega.$$

Endlich folgt die Behauptung, dass ∇ flach ist:

$$\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z = \nabla_{[X,Y]}Z$$

aus der Berechnung

$$(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z)\rfloor\omega = \mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X)(Z\rfloor\omega)$$

$$= \mathcal{L}_{[X,Y]}(Z\rfloor\omega) = (\nabla_{[X,Y]}Z)\rfloor\omega.$$

5.4.3. Übungsaufgabe. Zeigen Sie, dass wenn $f \in C^\infty_B(M)$ eine Funktion ist, die konstant auf $B = P_p$ ist, das Vektorfeld $sgrad\, f \in V(B)$ kovariant konstant auf B ist: $\nabla_X sgrad\, f = 0 \forall X \in V(B)$.

Jetzt können wir sehen, dass eine reelle Polarisierung RP in einer symplektischen Mannigfaltigkeit (M, ω) lokal durch die Gleichung $\{q = konstant\}$ in den kanonischen Koordinaten (p, q) bestimmt wird. Genauer haben wir

Satz 5.4.4. *Es sei RP eine reelle Polarisierung einer symplektischen Mannigfaltigkeit (M, ω) mit einfach-zusammenhängenden Blättern, die geodätisch komplet sind. Es sei Λ eine Lagrangesche Untermannigfaltigkeit in M mit der Eigenschaft, dass Λ jedes Blatt von RP genau in einem Punkt transversal schneidet. Dann existiert ein Symplektomorphismus $S : (M, \omega) \to (T^*\Lambda, \Omega_{kan})$ mit der Eigenschaft, dass $S(RP)$ die vertikale Blatterung $\{q = konst\}$ und Λ der Null-Schnitt von $T^*\Lambda$ ist.*

Beweis. Es sei $q \in \Lambda$ und P_q das Blatt von RP, das den Punkt q enthält. Unter unserer Bedingung und nach der Behauptung 5.4.2 ist P_q zum Vektorraum T_qP_q mit dem kanonischen flachen Zusammenhang isomorph. Jetzt definieren wir S folgendermaßen

$$S(x) = S_{\pi_x}(x) \in T^*_{\pi_x}Q,$$

wobei $S_q : P_q \xrightarrow{I_q} T_qP_q \xrightarrow{I_\omega} T^*P_q$ ist, und wie vorher

$$I_\omega(v)w = \omega(v, w).$$

Offensichtlich ist S ein Diffeomorphismus, der jedes Blatt P_q auf T^*P_q abbildet. Da $T_*\Lambda_q$ und T_qB_q Lagerangesche Untermannigfaltigkeiten sind, können wir sofort sehen, dass $S^*(\Omega_{kan})(q) = \omega(q)$ füer alle $q \in \Lambda$. Wir werden zeigen, dass $S^*(\Omega_{kan}) = \omega$ auf jedem Blatt P_q gilt. Aus der Übungsaufgabe 5.4.3 folgt, dass die Geodätische $sgrad\, f$ das Blatt $B = P_p$ ausschöpft, wenn f in $C^\infty_B(M)$ verläuft. Da S den affinen Zusammenhang erhält, müssen die Geodätischen $sgrad\, f$ und $sgrad'\, f$ übereinstimmen. Da $sgrad\, f \in Vekt_{Ham}(M, \omega) \cap Vekt_{Ham}(M, \omega')$ ist, sind die symplektischen Formen ω und $\omega' = S^*(\Omega_{kan})$ längs $sgrad\, f$: $\mathcal{L}_{sgrad\, f}\omega = 0$ konstant. Deshalb stimmen ω und ω' auf B überein. □

Systeme, die durch die Hamilton-Jacobi-Methode gelöst werden, gehören zur Klasse der integrierbaren Systeme. Ein Hamiltonsches System heißt **komplett integrierbar**, wenn es n Integrale in Involution besitzt, die fastüberall auf M^{2n} funktional unabhängig sind (d.h. $df_i(x)$ bilden einen Vektorraum von Dimension n für fast alle $x \in M$).

5.4.5. Satz von Louiville-Arnold. *Es seien F_i, $i = 1, n$, Intergrale eines Hamiltonschen Systems mit Hamiltonfunktion H auf M, die in Involution sind: $\{F_i, F_j\} = 0$. Wir bezeichen die Niveaumenge der Abbildung $F : M \to \mathbb{R}^n : x \mapsto \{f_i(x)\}$ mit $F^{-1}(f)$. Wir nehmen an, dass $dF_1 \wedge \cdots \wedge df_n \neq 0$ in jedem Punkt $x \in F^{-1}(f)$ ist. Dann ist $H(x) = H(F)$ in einer Umgebung von $F^{-1}(f)$, die eine glatte Untermannigfaltigkeit von M ist. Weiterhin besitzt $F^{-1}(f)$ eine affine Struktur, in der ist die integralen Kurven $\dot{x} = sgrad\, H$ Geodätischen.*

Beweis. Da H auf jeder Niveaumenge $F^{-1}(f)$ konstant ist, kann sie als $H(F(x))$ ausgedrückt werden. Das Implizitfunktionstheorem besagt, dass $F^{-1}(f)$ eine glatte Untermannigfaltigkeit ist, wenn dF surjektiv ist. Der Satz 5.4.2 besagt, dass $F^{-1}(f)$ eine affine Struktur besitzt, die kann wie im Satz 5.4.4 mit einem Gebiet in $T_*F^{-1}(f)$ lokal indentifiziert werden. Dabei wird das Vektorfeld $sgrad\, H$ mit dem konstanten Kovektor d_fH identifiziert. □

5.4.6. Bemerkung. In der Übungsaufgabe 4.9 haben wir auch ein Beispiel für integrierbare Hamiltonsche Systeme, die nicht durch der Hamilton-Jacobi-Methode gelöst werden. Im diesen Beispiel entstehen die Integrale des Systems durch Hamiltonsche Operation einer Lie-Gruppe. Es gibt auch andere Mechanismen (z. B. Lax-Darstellung oder bi-Hamiltonsche Systeme) integrierbarer Systeme, die nicht durch Hamiltonsche Operation einer Lie-Gruppe entstehen, da die Niveaumenge $F^{-1}(f)$ auch singuär sein kann.

6. Algebra von Messgrössen und Zuständen in der Quantenmechanik.

Wie Sie wissen, gelten die Gesetze der Newtonschen Mechanik nicht mehr, wenn wir die Bewegungen der Teilchen in der Mikrowelt beschreiben. Deshalb benötigen wir in der Quantenmechanik neue Begriffe und einen neuen Formalismus, mit dem wir den Welle-Teichen-Dualismus in der Mikrowelle ausdrücken können. Da andererseits alle Welt aus Atome, Photone, Elektrone, u.s.w. besteht, muß die Quantenmechanik auch die Welt in der klassischen Mechanik erklären. Im diesen Sinn sagen wir, dass die klassische Mechanik ein Limit der Quantenmechanik ist.

Aus dem Standpunkt der Mathematik ist es logisch, einen Formalismus der Quantenmechanik zu finden, der vom einen Formalimus der klassischen Mechanik erweitert wird und der den Welle-Teichen-Dualismus beschreibt, z. B. die Unschärferelation von Heisenberg.

Was sind die Hauptbegriffe in der klassischen Mechanik? Die Hauptbegriffe in der klassischen Mechanik sind **Meßgröße** und **Zustand**. Die Aufgabe einer physikalischen Theorie besteht im Vorhersagen der Ergebnisse von Experimenten. Physikalische Experimente sind immer die Messung bestimmter Charakteristiken des Systems oder bestimmter Meßgrößen unter Bedingungen, die den Zustand des Systems feststellen. Deshalb müssen die Begriffe "Meßgröße" und "Zustand" in jeder physikalischen Theorie vorhanden sein.

In der klassischen Mechanik sind Meßgrößen Funktionen auf dem Phasenraum T^*M. Wie Sie wissen, führt die Poisson-Klammer die Struktur einer Poissonschen Algebra in den Raum $\mathcal{M}$ der Meßgrößen ein. Wir errinern uns daran, dass eine Poissonsche Algebra ist ein Lie-Algebra mit einer Multiplikation, die die Leibniz-Regel erfüllt:

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}.$$

In der klassischen Mechanik wird der Zustand eines Systems (d.h. auch die vollständige Beschreibung seiner Vorgeschichte) auch durch die Position (q, p) auf dem Phasenraum T^*M des Systems bestimmt. Der Mittelwert einer Meßegröße f im Zustand $\omega := (p_0, q_0)$ ist genau der Wert $f(q_0, p_0)$. Das ist der Determiniertheitsprinzip der klassischen Mechanik.

Da wir in der Quantenmechanik statt des Determinismus nur über eine Wahrscheinlichkeitsverteilung von Meßgrößen sprechen können, müssen wir den Begriff des Zustands in der klassischen Mechanik erweitern. In der statistischen Mechanik wird ein Begriff des Zustands betrachtet, der der Wahrscheinlichkeitsverteilung von Meßgrößen entspricht. In dieser Theorie ordnet ein Zustand ω jeder Meßgöße $f \in C^\infty(T^*M)$ eine **Wahrscheinlichkeitsverteilung** von Werte von f zu, d.h. ein Maß auf der Geraden $\mathbb{R}$. Es sei B eine Borelsche Menge auf $\mathbb{R}$. Dann kann die Definition eines Zustands ω folgendermaßen ausgedrückt werden

$$(Z) \qquad (f, B) \xrightarrow{\omega} \omega_f(B).$$

Wir definieren die **Verteilungsfunktion** $\omega_f(\lambda)$ einer Meßgröße f im Zustand ω als:

$$(V) \qquad \omega_f(\lambda) = \omega_f((-\infty, \lambda]).$$

Der **Mittelwert** (die mathematische Erwartung) einer Meßgröße f wird durch die folgende Formel bestimmt

$$< f|\omega >= \int_{\mathbb{R}} \lambda \, d\omega_f(\lambda).$$

Es ist leicht zu überprüfen, dass der Mittelwert ein lineares Funktional auf der Algebra von Meßgrö ßen ist. Aus der Funktionalanalysis wissen wir, dass die allgemeine Form eines linearen Funktionals auf dem Raum der Funktionen

$$< f|\omega >= \int_{T*M} f(q,p) d\mu_\omega(q,p) \tag{6.1}$$

ist, wobei $d\mu_\omega(q,p)$ - eine Differentialmasse auf dem Phasenraum ist. Wir können die Gleichung (6.1) auch folgendermaßen schreiben

$$< f|\omega >= \int_{T^*M} f(q,p)\rho_\omega(q,p) \, dq \, dp.$$

Die Normalisierungbedingung ist

$$\int_{T*M} \rho_\omega(q,p) \, dq \, dp = 1.$$

6.2. Bemerkung. Wir haben die Relation : Z=Zustand (= Wahrscheinlichkeitsverteilung) $\longrightarrow$ V = Verteilungfunktion $\longrightarrow$ M= Mittelwert definiert. Jetzt zeigen wir, dass diese Relation eine äquivalente Relation ist. Da die Masse einer Borelschen Menge auf $\mathbb{R}$ durch die Massen der Mengen $(-\infty, \lambda], \lambda \in \mathbb{R}$, berechnet werden kann, wird jeder Zustand ω eindeutig durch seine Verteilungsfunktion $\omega_f(\lambda)$ bestimmt. Ferner können wir auch die Verteilungsfunktion $\omega_f(\lambda)$ durch die Mitelwerte bestimmter Meßgrößen berechnen. Es sei $\theta(x)$ die Funktion

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Dann haben wir

$$\omega_f(\lambda) =< \theta(\lambda - f)|\omega > . \tag{6.2.2}$$

So behaupten wir, dass der Zustand ω durch die Mittelwerte von Meßgrößen $(\lambda - f)$ bestimmt werden kann.

6.3. Der Zustand ω in der klassischen Mechanik, bei dem der Mittelwert einer Meßgröße f gleich $f(p_0, q_0)$ ist, heißt ein **reiner Zustand**. In Ausdrücken der Verteilungsdichte können wir schreiben

$$\rho_\omega = \delta(q - q_0)\delta(p - p_0)$$

wobei δ - die delta-Funktion von Dirac ist.

In der Quantenmechanik bezeichnen wir wie vorher die Menge von Meßgrößen mit $\mathcal{M}$. Der Begriff der Wahrscheinlichkeitsverteilung von Meßgrößen in der statistischen Mechanik ist auch in der Quantenmechanik vorhanden. Deshalb ist es vernünftig, die Definition des Zustands in der klassischen-statistischen Mechanik auch für die Quantenmechanik zu bewahren. Jetzt wollen wir die mathematische Struktur der Menge $\mathcal{M}$ von Meßgrößen in der Quantenmechanik studieren. Für Experimentatoren bedeutet die Relation $b = f(a)$, dass es genügt, a zu wissen, um die Meßgröße b zu messen. Insbesondere können wir die Multiplikation von einer Meßgrößen mit einer reelen Zahl λ bestimmen. Dann möchten wir die physikalischen Bedeutungen der Summe von zwei Meßgrößen a und b sowie des Produkts $a.b$ interpretieren. Hier entstehen prinzipielle Schwierigkeiten, zwei verschiedene Meßgrößzur selben Zeit zu messen. Das ist genau die Unschärferelation von Heisenberg. Jetzt müssen wir eine andere Einstellung zu diesem Problem wählen. Wir nehmen nämlich an, dass wir über so viel Zustande verfügen, daß wir alle Meßgrößen unterscheiden können und umgekert, dass die Menge von Meßgrößen so groß ist, daß wir verschiedene Zustände unterscheiden können. Genauer bedeutet diese Annahme, dass aus der Gleichung

$$< a|\omega >=< b|\omega >$$

für alle ω folgt, dass die Meßgrößen a und b übereinstimmen. Genauso folgt aus der Gleichung

$$< a|\omega_1 >=< a|\omega_2 >$$

für alle a, dass die Zustände ω_1 und ω_2 übereinstimmen. Die erste Annahme gibt uns die Möglichkeit, die Summe zweier Meßgrößen a und b zu definieren. Laut dieser Definition ist die Summe $a + b$ eine Meßegröße der Art, dass für jeden Zustand ω gilt

$$< a + b|\omega >=< a|\omega > + < b|\omega > . \tag{6.4}$$

In der Wahrscheinlichkeitstheorie bezeichnet die Gleichung (6.4) den Satz über die Mittelwertsumme, falls a und b eine gemeisame Verteilungsfunktion besitzen. Die Menge $\mathcal{M}$ von Meßgrößen, die mit der Multiplikation mit einer reellen Zahl λ und mit der Addition ausgestattet ist, hat eine Struktur des reelen Vektorraums. Wir können leider keine Definition des Produkts $a.b$ von zwei Meßgrößen finden: die folgende Gleichung gilt nicht

$$< a.b|\omega >=< a|\omega > . < b|\omega > .$$

Trotzdem, unter der Annahme, dass die Quadratische Funktion a^2 jeder Meßgröße a existiert, können wir eine (bilinieare) kommutative aber nicht assoziative Multiplikation $\circ$ auf M definieren:

$$a \circ b = \frac{(a + b)^2}{2} - \frac{(a - b)}{2}. \tag{6.5}$$

6.6. Letztlich erinnern wir uns daran, dass die Algebra von Meßgrößen in der klassischen Mechanik eine Struktur der Poissonschen Algebra. Wie Sie wissen, läßt die Dynamik in der klassischen Mechanik sich durch die Poisson-Klammer beschreiben :

$$\frac{df_t}{dt} = \{H, f_t\}. \tag{6.7}$$

Wir haben uns davon überzeugt, dass die Dynamik in der Quantenmechanik auch durch eine Poisson-Struktur auf dem Raum $\mathcal{M}$ beschrieben wird. Zusammenfassend sagen wir, dass der Vektorraum $\mathcal{M}$ zwei zusätzliche Strukturen besitzen soll: eine Lie-Struktur und eine verträgliche Multiplikation. Wie können wir diese Algebra der Meßgrößen in der Quantenmechanik realisieren?

Wegen der Unschärferelation von Heisenberg können wir diese Algebra als den Raum der Funktionen auf dem Phasenraum nicht realisieren. Ein gutes Beispiel für eine solche Poissonsche Algebra ist die Algebra der Operatoren in einem Hilbertraum (von endlicher Dimension oder von unendlicher Dimension). Der Lie-Operator $\{A, B\}$ von zwei Operatoren A und B ist ihr Kommutator

$$\{A, B\} := [A, B] = AB - BA. \tag{6.8.1}$$

Die Multiplikation $\circ$ wird wie in (6.4) definiert:

$$A \circ B = \frac{1}{2}(AB + BA). \tag{6.8.2}$$

Wir können überprüfen, dass die Leibniz-Regel für diese Multiplikation sich erfüllt

$$[A, B \circ C] = [A, B] \circ C + B \circ [A, C].$$

Die physikalische Intepretation dieser mathematischen Theorie der Quantenmechanik fordert, dass die Eigenwerte des Operators A reelle Zahlen sind. Also muß A ein selbst-adjungierter Operator sein. Aber der Kommutator zweier selbst-adjungierten Operatoren unterscheidet sich von selbst-adjungierten Operatoren durch eine imaginäre Zahl (i/h). Also sehen wir, dass die Algebra der selbst-adjungierten Operatoren in einem Hilbertraum mit dem Lie-Operator

$$\{A, B\}_h := \frac{i}{h}[A, B] \tag{6.8.h}$$

eine Lie-Algebra ist. Dieser Lie-Opertor ist auch veträrglich mit der Multiplikation $\circ$ in (6.8.2). Physikalische Experimente zeigen, dass die Konstant h mit der Planck-Konstante übereinstimmt. Mit dieser Identifizierung möchten wir auch eine vernünftige Definition des Begriffs Zustand in der Quantenmachanik finden. Mit dieser Realisierung können wir analytische (sowie nicht analytische) Funktionen von Meßgrößen definieren: $f(A) = \sum a_n A^n$ (s. 6.19.a, b).

Jetzt kommen wir zur nächsten Frage der Realisierung des Begriffes des Zustandes in der Quantenmechanik. Wir haben gesehen, dass die Bestimmung eines Zustands äquivalent zur Bestimmung des Mittelwertes aller Meßgrößen ist (die zweite Annahme in der Quantenmechanik). In mathematischen Ausdrücken ist die Bestimmung des Mittelwertes aller Meßgrößen äquivalent zur Bestimmung eines Funktionals $< \omega|A >$ auf der Algebra der Meßgrößen mit den Eigenschaften

$$< \lambda A + B|\omega >= \lambda < A|\omega > + < B|\omega > \tag{6.9.1}$$

$$< A^2|\omega >\geq 0 \tag{6.9.2}$$

$$< c.Id|\omega >= c \tag{6.9.3}$$

$$\overline{< A|\omega >} =< A|\omega > \tag{6.9.4}$$

Die Eigenschaft (6.9.1) ist die Linearität des Funktionals. Die zweite Eigenschaft interpretiert den Fakt, dass das Quadrat einer Meßgröße einen positiven Mittelwert hat. Die physikalische Bedeutung des Operators $c.Id$ ist eine konstante Meßgröße c, deshalb ist die Eigenschaft (6.9.3) auch klar. Endlich sagt die Eigenschaft (6.9.4) aus, dass der Mittelwert immer eine reelle Zahl ist. Aus der Funktionalanalysis wissen wir, dass die allgemeine Form eines Funktionals ω auf der Algebra $\mathcal{E}$ der selbst-adjungierten Operatoren mit den Eigenschaften (6.9.1)-(6.9.4)

(6.10) $$< A|\omega >= Tr\, MA$$

ist, wobei M ein Operator auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist, der die folgenden Bedingungen erfüllt:

(6.10.1) $$M^* = M$$

(6.10.2) $$< M\xi, \xi >\geq 0$$

(6.10.3). $$Tr\, M = 1$$

6.11. Übung. Zeigen Sie, dass die Gleichung (6.10) ein Funktional definiert, das die Eigenschaften (6.9.1)-(6.9.4) erfüllt.

Der Operator M heißt Dichtematrix in der Quantenmechanik.

6.12. Jetzt möchte ich ein Beispiel für Dichtematrizen zeigen. Es sei ϕ ein Vektor im Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit der Norm von 1. Wir bezeichnen durch P_ϕ den orthogonalen Projektor auf dem Vektorraum $\mathbb{C} \cdot \phi$. Wir behaupten, dass P_ϕ eine Dichtematrix ist. Zuerst sehen wir dass P_ϕ ein selbst-adjungierter Opertor ist

$$< P_\phi\xi, \eta >=< \xi, \phi > \cdot < \phi, \eta >= \overline{< \eta, \phi >} \cdot \overline{<} \phi, \xi >= \overline{< P_\phi\eta, \xi >} =< \xi, P_\phi\eta > .$$

Die Positivität und Normalisierung folgen aus den folgenden Gleichungen

$$< P_\phi\xi, \xi >=< \xi, \phi > \cdot < \phi, \xi >\geq 0$$
$$TrP_\phi =< \phi, \phi >= 1.$$

Wie gut ist unser mathematisches Modell der Quantenmechanik? Jetzt möchte ich die Unschärferelation von Heisenberg aus diesem Modell ableiten. Wir erinnern uns daran, dass die Unschärfe ein Maß für die Abweichung der Meßwerte vom Mittwert ist. Die mittlere quadratische Abweichung einer Meßgröße A im Zustand ω wird durch die folgende Gleichung definiert

$$\Delta^2_\omega A =< (A - A_m)^2|\omega >=< A^2|\omega > - < A|\omega >^2$$

wobei $A_m =< A|\omega >$.

Die Unschäferelation behauptet, dass für jeden Zustand ω gilt (s. z.B. F. S. 53)

(6.13) $$\Delta_\omega A\Delta_\omega B \geq \frac{h}{2} < \{A, B\}_h|\omega >$$

Wir beweisen die Unschäferelation in drei Schritten

SCHRITT 1. Beweis der Unschärferelation für reine Zustände $\omega = P_\phi$.

SCHRITT 2. Aus der Funktionalanalysis wissen wir, dass jeder Zustand gleich einer Summe von reinen Zuständen ist.

SCHRITT 3. Beweis der folgenden Ungleichung für einen gemischten Zustand $\omega = a\omega_1 + (1-\alpha)\omega_2$

$$\Delta_\omega f \Delta_\omega g \geq \alpha \Delta_{\omega_1} f \Delta_{\omega_1} g + (1-\alpha)\Delta_{\omega_2} f \Delta_{\omega_2} g. \tag{6.14}$$

Dann werden wir die Unschärferelation für den Zustand ω aus (6.14) und Schritt 1 ableiten.

SCHRITT 1. Wir beginnen mit der folgenden offensichtlichen Ungleichung für Vektor ϕ mit $|\phi| = 1$ und für $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$< (A + i\alpha B)\phi, (A + i\alpha B)\phi) \geq 0. \tag{6.15}$$

Die linke Seit von (6.15) ist gleich

$$< A^2\phi, \phi > +\alpha^2(B^2\phi, \phi > -i\alpha < (AB - BA)\phi, \phi > .$$

Andererseits gilt für den reinen Zustand $\omega = P_\phi$

$$< A|\omega > = < A\phi|\phi > \tag{6.16}$$

Unter Berücksichtigung der Definition der Lie-Quantenklammer erhalten wir aus (6.15) und (6.16)

$$< A^2|\omega > +\alpha^2 < B^2|\omega > -\alpha \cdot h < \{A, B\}_h|\omega > \geq 0 \tag{6.17}$$

Da (6.17) für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt, erhalten wir die folgende Ungleichung

$$< A^2|\omega >< B^2|\omega > \geq \frac{h^2}{4} < \{A, B\}_h|\omega >^2 \tag{6.18}$$

Die Unschärferelation (6.13) folgt unmittelbar aus (6.18) , wenn wir A und B in (6.18) durch $(A - A_m.Id)$ und $(B - B_m.Id)$ ersetzen. Dabei bemerken wir, dass $\{A, B\}_h = \{(A - A_m.Id), (B - B_m.Id)\}_h$.

Den Schritt 3 möchte ich Ihnen als Hausaufgabe geben. Dabei möchte ich darauf hinweisen, dass die Ungleichung (6.14) aus dem Quadrat der folgenden Ungleichung abgeleitet werden kann

$$\Delta^2_\omega f \geq \alpha \Delta^2_{\omega_1} f + (1-\alpha)\Delta^2_{\omega_2} f.$$

Zuletzt möchte ich die physikalische Bedeutung der Eigenwerte und Eigenvektoren der Meßgröße A erläutern. Es seien $\{a_n\}$ die Eigenwerte des Operators A

$$A\phi_i = a_i\phi_i,$$

wobei ϕ_i der entsprechende Eigenvektor von A ist. Wenn H endliche Dimension hat, schreiben wir

(6.19.a)
$$P_A(\lambda) = \sum_{a_i \le \lambda} P_{\phi_i},$$

wobei P_ϕ der Projektor auf den Eigenvektor ϕ_i ist. Wenn H unendliche Dimension hat, bezeichnet $P_A(\lambda)$ die spektrale Funktion von A, d.h. $P_A(\lambda)$ sind Projektoren in H mit den folgenden Eigenschaften

$$\lambda < \mu \Longrightarrow P_A(\lambda)P_A(\mu) = P_A(\lambda)$$
$$\lim_{\mu \to \lambda + 0} P_A(\mu) = P_A(\lambda)$$
$$P_A(-\infty) := \lim_{\lambda \to -\infty} P_A(\lambda) = 0,\ P_A(\infty) = Id$$
$$P_A(\lambda)B = BP_A(\lambda),\ \text{wenn } [A,B] = 0, \text{und } B \text{ beschränkt ist} .$$

Die spektrale Resolution von A ist ähnlich wie in endlicher Dimension

(6.19.b)
$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dP_A(\lambda)$$

6.20. Behauptung . a) Die Verteilungsfunktion $\omega_A(\lambda)$ für den Zustand $\omega = M$ ist gleich $Tr\, MP_A(\lambda)$.
b) Die Menge der Eigenwerte einer Meßgröße A stimmt mit der Menge möglicher Ergebnisse der Messung von A überein.
c) Der Eigenvektor ϕ_i von A entspricht dem reinem Zustand P_{ϕ_i}, wo die Meßgröße A den Meßwert a_i sicher nimmt.

Wir erinnern uns daran, dass die Bestimmung der Mittelwerte äquivalent zur Bestimmung der Verteilungsfunktion $\omega_A(\lambda)$ ist:

(6.20.1)
$$\omega_A(\lambda) :=< \theta(\lambda.Id - A)|\omega > .$$

Die Funktion $\theta(x)(= Ch([0,\infty))$ ist nicht analytisch, aber wir können die Funktion $\theta(A)$ für selbst-adjungierte Operatoren definieren. Wenn H endliche Dimension hat, schreiben wir

$$\theta(A)\phi = \sum \theta(a_i)P_{\phi_i}(\phi),$$

im allgemeinen Fall (6.19.b) haben wir

(6.21)
$$f(A)\phi = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)dP_A(\lambda)\phi.$$

Beweis von 6.20. a) Nach (6.20.1) ist es hinreichend zu zeigen, dass

(6.22)
$$P_A(\lambda) = \theta(\lambda.Id - A)$$

Laut (6.21) ist RS von (6.22) gleich

(6.23)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta(\lambda - \alpha)dP_A(\alpha) = \int_{-\infty}^{\lambda} dP_A(\alpha).$$

Offensichlich ist RS von (6.23) gleich LS von (6.22). □

b) Die Wahrscheinlichkeit, den Wert λ der Messung von A zu erhalten, ist gleich $d\omega_A(\lambda)$. Aus (6.20.a) folgt es, dass es im endlich-dimensionalen Fall gilt

$$\omega_A(\lambda) =< P_A(\lambda)|\omega >= trMP_A(\lambda) = trM \sum_{a_i \leq \lambda} P_{\phi_i} = \sum_{a_i \leq \lambda} (M\phi_i, \phi_i) \tag{6.24}$$

Daraus folgt, dass die Wahrscheinlichkeit $\omega_A(a)$, den Wert a der Meßgröße A zu erhalten, gleich 0 ist, wenn a nicht Eigenwert von A ist. Diese Wahscheinlichkeit ist gleich $(M\phi_i, \phi_i)$ wenn $a = a_i$.

Im unendlich-dimensionalen Fall ist $\omega_A(\lambda)$ nicht unbedingt sprunghaft. Die Menge möglicher Ergebnisse der Messung von A stimmt mit der Menge des Wachstums von $\omega_A(\lambda)$ überein. Diese Menge kann diskret oder stetig sein.

c) Im reinen Zustand $\omega = P_{\phi_i}$, wo ϕ_i ein Eigenvektor von A ist, haben wir

$$d\omega_A(a_i) =< P_\phi \phi, \phi >= 1.$$

□

Aus (6. 20.b+c) folgt, dass unser Hilbertraum unendliche Dimension haben muß.

7. Heisenbergbild und Schrödingergleichung.

Jetzt möchte ich Fragen der Dynamik in der Quantenmechanik diskutieren. Unser Ansatzpunkt liegt eingentlich am Anfang der Formulierung der Algebra von Meßgrößen und Zuständen. Wir haben nämlich die Poisson-Struktur in den Raum $\mathcal{M}$ von Meßgrößen eingeführt unter der Annahme, dass die Dynamik in der Quantenmechanik durch die Poisson-Struktur ausgedrückt werden kann. Wir erinnern uns daran, dass das Hamiltonbild der Dynamik in der klassischen Mechanik folgendermaßen beschrieben wird:

$$\frac{df(t)}{dt} = \{H, f(t)\}. \tag{$H-P$}$$

Dabei ist f_t - die Evolution der Funktion f unter der Dynamik auf dem Phasenraum T^M, die durch die Hamiltonfunktion $H \in C^\infty(T^*M)$ bestimmt wird. Bei diesem Bild von Hamilton-Poisson nehmen wir an, dass der Phasenraum unverändert in der Dynamik ist. Mit anderen Worten ist der Zustand $\omega = (p_0, q_0)$ zeitunabhängig.

Die Analogie des Hamiltonbildes in der Quantenmechanik heißt das Heisenbergbild. In diesem Bild ist Zustand $\omega = M$ zeitunabhängig

$$\frac{dM}{dt} = 0 \tag{7.1.a}$$

(7.1.b) $$\frac{dA(t)}{dt} = \{H, A(t)\}_h,$$

wobei H - der (zeitunabhängige) Operator der Gesamtenergie ist. Der Operator H wird auch **Schrödinger-Operator** genannt. Er ist eine Analogie der Hamiltonfunktion in der klassischen Mechanik.

Wie in der klassischen Mechanik liefert die Gleichung (7.1.b) mit einer Anfangsbedingung

(7.2) $$A(t)_{t=0} = A$$

eine 1-Parameterfamilie der Autmorphismen der Poissonschen Algebra $\mathcal{M}$ von Meßgrößen.

7.3. Satz. Die Gleichung (7.1.b) mit der Anfangsbedingung (7.2) hat eine einzige Lösung

$$A(t) = e^{\frac{i}{h}Ht} \cdot A \cdot e^{-\frac{i}{h}Ht} = Ad(exp\,\frac{i}{h}Ht)A.$$

Beweis. Die Behauptung folgt aus dem Fakt, dass $iH \in u(H)$ ist. Hier finden Sie eine andere direkte Berechnung. Wir berechnen für $A(t)$ in (7.3)

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{i}{h}(HA(t) - A(t)H) = \frac{i}{h}[H, A(t)] = \{H, A(t)\}_h,$$

was zeigt, dass $A(t)$ eine Lösung von (7.1.b) ist. Da (7.1.b) eine gewöhnliche Differentialgleichung ist, hat sie eine einzige Lösung mit der Anfangsbedingung (7.2). □

Der Operator $U(t) = e{-}\frac{i}{h}Ht$ heißt Evolutionsoperator. Da H selbst-adjungiert ist, ist $U(t)$ ein unitarischer Operator:

(7.4) $$U^*(t) = e^{\frac{i}{h}Ht} = U^{-1}(t).$$

Wie in der klassischen Mechanik kann die Dynamik in der Quantenmechanik durch die Evolution in der Algebra von Zuständen beschrieben werden. Dieses Bild heißt Schrödingerbild. Natürlich nehmen wir dabei an, dass Meßgröße A zeitunabhängig bleibt

(7.4) $$\frac{dA(t)}{dt} = 0.$$

Die Evolution des Zustands $\omega = M$ in der Zeit t wird folgendermaßen bestimmt

(7.5) $$\omega(t) = M(t) = U(t) \cdot M \cdot U^*(t).$$

Aus (7.5) und (7.4) folgt unmittelbar

$$\frac{dM(t)}{dt} = \frac{dU(t)}{dt} \cdot M \cdot U^*(t) + U(t) \cdot M \cdot \frac{dU^*(t)}{dt}$$

(7.6)

$$= -\frac{i}{h}H \cdot U(t) \cdot M(t) \cdot U^*(t) + \frac{i}{h}U(t) \cdot M \cdot U^*(t) \cdot H = -\frac{i}{h}(H \cdot M(t) - M(t)H) = -\{H, M(t)\}_h$$

7.7. Übungsaufgabe. Zeigen Sie, dass die Evolution des Mittelwerts von Meßgrößen im Heisenbergbild mit der Evolution des Mittelwerts im Schrödingerbild übereinstimmt, d.h.

$$\frac{d}{dt} < A(t)|\omega >= \frac{d}{dt} < A|\omega(t) > .$$

Jetzt möchte ich die Schrödingergleichung einführen. Die Schrödingergleichung ist die Gleichung der Evolution reiner Zustände im Schrödingebild. Ich errinnere mich daran, dass ein reiner Zustand P_ϕ ein orthogonal Projektor auf dem 1-dimensionalen komplexen Vektorraum $\{\mathbb{C} \cdot \phi\}$ ist.

7.8. Satz. *Es sei $\phi(t) \in \mathcal{H}$ eine Lösung der Schrödingergleichung*

$$ih\frac{d\phi(t)}{dt} = H \cdot \phi(t) \tag{7.8.1}$$

mit der Anfangsbedingung

$$\phi(t)_{t=0} = \phi. \tag{7.8.2}$$

Dann sind die reinen Zustände $P_{\phi(t)}$ eine Lösung der Gleichung (7.6).

Beweis. Die Lösungen der Schrödingergleichung (7.8) haben die folgende Form

$$\phi(t) = U(t)\phi \tag{7.9}$$

mit $U(t)$ wie in (7.4). Es sei ξ ein Vektor in $\mathcal{H}$. Dann ist

$$\begin{aligned} P_{\phi(t)}\xi &=< \xi, \phi(t) > \phi(t) =< \xi, U(t)\phi > U(t)\phi = U(t) < U^*(t)\xi, \phi > \phi \\ &= U(t)P_\phi U^*(t)\xi \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $P_{\phi(t)}$ die Gleichung (7.5) erfüllt. □

Probleme der Quantizierung.

Jetzt möchte ich die Schrödingergleichung für Quantensysteme darstellen, die Analogie in der klassischen Mechanik haben. Ein Beispiel für solche Quantensysteme ist ein Teilchen, das sich in einem potentiellen Coulomb-Feld bewegt. Z. B. hat das 1-dimensionale Coulomb-Feld des Kerns des Wasserstoffs und des Elektrons die potentielle Energie

$$V(r) = -\frac{e^2}{r},$$

wobei e die Ladung des Kerns und $-e$ die Ladung des Elektrons sind. (Ein anderes Beispiel ist eindimensionaler Oszillator mit dem Potential $V(x) \cong const + \frac{m\omega x^2}{2}$, der die Schwingungen eines zweiatomigen Moleküls beschreibt (s. F. S. 97).

In der klassischen Mechanik läßt sich die Bewegung eines Teilchens der Masse m in einem potentiellen Feld $V(q)$ sich durch die Hamiltonian Funktion $H = T(p, q)+V(q)$ beschreiben, wo $T(p, q) = \frac{p^2}{2m}$ die kinetische Energie des Teichens ist (s. 1.13). Wir erinnern uns daran, dass $q = (q_1, q_2, q_3)$ die Koordinaten des Teichens in $\mathbb{R}^3$ sind und sein Impuls p der Legendresche transformierte Wert des Vektors $\dot{q}$ ist: $p = (p_1 = m\dot{q}_1, p_2 = m\dot{q}_2, p_3 = m\dot{q}_3)$. Wir wissen,dass

$$\{q_i, q_j\} = 0,\ \{p_i, p_j\} = 0,\ \{p_i, q_j\} = \delta_{ij},\ i, j = 1, 2, 3.$$

Wir nehmen an, dass die Algebra von Meßgrößen in unserem Quantensystem auch Meßgrößen P_i, Q_i besitznt mit der Eigenschaft

$$\{Q_i, Q_j\}_h = 0,\ \{P_i, P_j\}_h = 0,\ \{P_i, Q_j\}_h = \delta_{ij} Id. \forall i, j = 1, 2, 3. \tag{7.10}$$

Die Gleichung (7.10) heißt die Kommutationsrelation von Heisenberg.

FRAGE. Gibt es einen Hilbertraum $\mathcal{H}$ und selbst-adjungierte Operatoren P_i, Q_i auf $\mathcal{H}$ mit der Eigenschaft (7.10)?

Wir bemerken, dass die Operatoren P_i, Q_i mit der Eigenschaft (7.10) eine Lie-Unteralgebra der Algebra aller selbst-adjungierten Operatoren in $\mathcal{H}$ bilden. Also ist unsere Frage ein Problem der Darstellungstheorie der Lie-Algebra. Deshalb ist es hinreichend, nur die irreduzierbaren Darstellungen von (7.10) zufinden.

ANTWORT (Satz von Neuman-Stoun). Die irreduzierbare Darstellung von (7.10) existiert eindeutig.

7.11. Ortsdarstellung (oder Schrödinger-Darstellung).[14] Wir werden den Satz von Neuman-Stoun nicht beweisen, sondern nur die Existenz der Darstellung (7.10) zeigen. Unser Hilbertraum ist der Raum $L^2(\mathbb{R}^3)$. Die Operatoren P_i, Q_i werden folgendermaßen bestimmt

$$Q_j \phi(x) = x_j \phi(x), \tag{7.11.1}$$

$$P_j \phi(x) = \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} \phi(x). \tag{7.11.2}$$

Es ist leicht zu sehen, dass P_i, Q_i selbst-adjungiert sind. Jetzt werden wir die Gleichung (7.10) überprüfen. Die zwei ersten Relationen sind offensichlich. Die letzte Relation folgt aus

$$P_k Q_j \phi(x) = \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x_k} (x_j \phi(x)) = \frac{h}{i} \delta_{jk} \phi(x) + x_j \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x_k} \phi(x),$$

$$Q_j P_k \phi(x) = x_j \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x_k} \phi(x).$$

Die Funktion ϕ in unserem Raum heißt **Wellenfunktion**.

[14] Eine unitarisch äquivalente Darstellung ist die Impuls-Darstellung: $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3(p)))$, $Q_j \phi(p) = ih \frac{\partial}{\partial p_j} \phi(p)$, $P_j \phi(p) = p_j \phi(p)$.

Jetzt möchte ich die Schrödingergleichung für die Bewegung eines Massenteilchens in einem potentiellen Feld mit potentieller Energie $V(q)$ aufschreiben. In der klassischen Mechanik wird diese Bewegung durch die folgende Gleichung beschrieben (s. §3):

$$(H-G) \qquad \frac{df_t}{dt} = \{f_t, H\}$$

wobei $H = T + V$ ist. Der Satz 7.8 besagt, dass die Schrödingergleichung (7.8.1) der Gleichung (H-G) entspricht. Nach der Formel (7.11.2) entspricht die kinetische Energie $T = \frac{p_1^+ p_2^2 + p_3^2}{2m}$ dem Operator T im Hilbertraum

$$(7.9) \qquad T\phi(x) := -\frac{h^2}{2m}\Delta\phi(x).$$

Nach der Formel (7.11.1) entspricht die potentielle Energie $V(q)$ dem Operator V im Hilbertraum

$$(7.10) \qquad V\phi(x) := V(x)\phi(x).$$

Nun ersetzen wir H durch den Operator $H = T + V$ in (7.9) und (7.10) und wir erhalten die Schrödingergleichung[15]

$$(7.11) \qquad ih\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t} = -\frac{h^2}{2m}\Delta\phi(x,t) + V(x)\phi(x,t)$$

Was wir gerade gemacht haben, heißt **Präquantisierung** des Systems von einem Massenpunkt in einem potentiellen Feld. Im allgemeinem besteht das Problem der Prequantisierung in folgendem.

PP. Ist es möglich für jede symplektische Mannigfaltigkeit (M, ω) der entsprechende Hilbertraum und die Algebra von Meßgrößen zu konstruieren.

Wie wir gesehen haben, ist das Problem der Präquantisierung ein Problem der Darstellung der Algebra $C^\infty(M)$ in der Algebra der selbst-adjungierten Operatoren in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dieses Problem wurde von Dirac 1925 formuliert. Der Satz von Neumann-Stoun gibt uns nur die Darstellung der Heisenberg-Unteralgebra der Lie-Algebra $C^\infty(T^*(\mathbb{R}^3))$ in der Algebra selbst-adjungierter Operatoren des Hilbertraums $L_2(\mathbb{R}^3)$.

QP. Reprsëntiert diese Darstellung, in allgemeinen Präquantisierung, ein reelles Quantensystem? Was ist die Relation zwischen dem Fluß der Hamiltonfunktion H auf M und der Zeit-Evolution im Hilbertraum $\mathcal{H}$?

Es gibt verschiedene Ansätze zu dieser Frage, und somit verschiedene Ansätze zur geometrischen Quantisierung. Wir werden die Weyl-Quantisierung untersuchen, wo dieser Ansatz in folgenden besteht. Mathematisch ausgedrückt müssen unsere quantisierten Systeme sich klassischen Systeme näheren, wenn die Verhältnisse von der Planck-Konstante und anderen

---

[15]wir können diese Schrödingergleichung aus der Maxwell-Gleichung ableiten, wie in [F, Kapitel 1].

Meßwerten sehr klein sind. Dabei nehmen wir an, dass die Korrespondenz $(f, H, \rho(p,q)) \to (A_f, H, M)$ Eins-zu-Eins ist. Wir müssen zeigen

$$\lim_{h\to 0} Tr\, M A_f = \int_{T^*M} f(p,q)\rho(p,q) dp\, dq \tag{7.12}$$

$$\lim_{h\to 0} \{H, A_f\}_h = \{H, f\} \tag{7.13}$$

Die Formel (8.12) bedeutet, dass der Mittelwert von Meßgrößen in der Quantenmechanik mit dem Mittelwert von Meßgrößen in der klassischen Mechanik übereinstimmt, wenn h sich Null nähert. In derselben Weise bedeutet (8.13),dass die Hamilton-Gleichung für die Meßgröße f aus der Heisenberg-Gleichung für die Meßgröße A_f folgt, wenn h sich Null nähert.

Weiterhin müssen wir überprüfen, ob sich diese Korrespondenz auch der Operation der Funktionen (und daher der Multiplikation und Poisson-Struktur) nähert, wenn $h \to 0$. Wir fordern nicht, dass die Korrespondenz eine (1-1)-Darstellung der Poissonschen Algebra $C^\infty(T^*\mathbb{R})$ ist.

8. Methoden der Präquantisierung und Quantisierung.

8.1. Weyl-Quantisierung für Systeme mit Freiheitsgrad 1. Wir werden sehen, dass für einfache Systeme eine Quanatizierung mit den Eigenschaften (8.12) und (8.13) existiert. Systeme mit Freiheitsgrad 1 haben den Konfigurationsraum $\mathbb{R}^1$. Für diese Systeme hat Weyl die Darstellung der Algebra $C^\infty(T^*\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}^2)$ in der Algebra der selbstadjungierten Operatoren des Hilbertraums $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^2)$ konstruiert und er hat gezeigt, dass diese Darstellung die Eigenschaften (8.12) und (8.13) besitzt.

Wir wenden die Fouriertransformation an. Wir erinnern uns daran, dass die Fouriertransfomierte Funktion $\hat{f}(u,v)$ einer Funktion $f(p,q)$ folgendermaßen definiert wird

$$\hat{f}(u,v) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} f(q,p) e^{iqv} e^{ipu} dq\, dp.$$

Dann ist

$$f(q,p) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(u,v) e^{-iqv} e^{-ipu} du\, dv.$$

Laut dem Weyl-Rezept ordnen wir jeder Funktion f den Operator A_f folgendermaßen zu:

$$A_f = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(u,v) V(v) U(u) e^{\frac{ihuv}{2}} du\, dv, \tag{8.1.1}$$

wobei $u(u_1, u_2, u_3)$, $v(v_1, v_2, v_3)$ im allgemeinen Fall reelle Parameter sind und

$$U(u) = e^{-i(u_1 P_1 + u_2 P_2 + u_3 P_3)}, \tag{8.1.2}$$

$$V(v) = e^{-i(v_1 Q_1 + v_2 Q_2 + v_3 Q_3)}. \tag{8.1.3}$$

(s. die Definition von Operatoren P, Q in 7.11)

Bemerkung. Operator $V(v)$ in der Ortsdarstellung ist der Operator der Multiplikation auf der Funktion:

(8.1.3′) $$V(v)\phi(x) = e^{-ivx}\phi(x).$$

Operator $U(u)$ in der Ortsdarstellung ist der Operator der Verschiebung der Veränderlichen x einer Funktion $\phi(x)$ auf $-hu$ (wir benutzen DG):

$$U(u)\phi(x) = \phi(x - uh).$$

<u>Schritt 1.</u> Wir behaupten, dass A_f selbst-adjungiert ist. Wir haben

$$A_f^* = \frac{1}{2\pi}\int \overline{\hat{f}(u,v)U^*(u)V^*(v)e^{-\frac{ihuv}{2}}}\,du\,dv$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int \hat{f}(-u,-v)U(-u)V(-v)e^{-\frac{ihuv}{2}}\,du\,dv$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int \hat{f}(u,v)U(u)V(v)e^{-\frac{ihuv}{2}}\,du\,dv$$
$$= \frac{1}{2pi}\int \hat{f}(u,v)V(v)U(u)e^{\frac{ihuv}{2}}\,du\,dv = A_f.$$

<u>Schritt 2</u>. Wir zeigen die Formel der Umkehrung $A_f \mapsto \hat{f}(u,v)$:

(8.1.4) $$\hat{f}(u,v) = hTr\,A_f V(-v)U(-u)e^{\frac{ihuv}{2}}.$$

Dafür benutzen die folgenden Formeln

(8.1.5) $$U(u)V(v) = V(v)U(u)e^{ihuv},$$

(8.1.6) $$Tr\,K = \int K(x,x)\,dx$$

für einen Integraloperator K mit Kern $K(x,y)$. In unserem Fall ist $K = V(v)U(u)$ und

$$V(v)U(u)\phi(x) = e^{-ivx}\phi(x - uh).$$

Deshalb ist der Kern von K gleich

(8.1.7) $$V(v)U(u)(x,x') = e^{-ivx}\delta(x - uh - x').$$

Aus (8.1.6) und (8.1.7) erhalten wir

(8.1.8) $$Tr\,V(v)U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivx}\delta(-uh)\,dx = \frac{2\pi}{h}\delta(v)\delta(u).$$

Jetzt berechnen wir die RS von (8.1.4) unter Berücksichtigung von (8.1.5) und (8.1.8)

$$Tr\,A_f V(-v)U(_u)e^{\frac{ihuv}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} Tr \int \hat{f}(u',v')V(v')U(u')e^{\frac{ihu'v'}{2}} V(-v)U(-u)e^{\frac{ihuv}{2}} du'dv'$$

$$= \frac{}{2\pi} Tr \int \hat{f}(u',v')V(v')V(-v)U(u')U(-u)e^{\frac{ih}{2}(u'v'+uv-2u'v)} du'dv'$$

$$= \frac{1}{2\pi} Tr \int \hat{f}V(v'-v)U(u'-u)e^{\frac{ih}{2}(u'v'+uv-2u'v)} du'dv'$$

$$= \frac{1}{h} \int \hat{f}(u',v')\delta(v'-v)\delta(u'-u)e^{\frac{ih}{2}(u'v'+uv-2u'v)} du'dv'$$

$$= \frac{1}{h}\hat{f}(u,v).$$

Korollar. Wir setzen $u = v = 0$ in (8.1.4) ein und benutzen die Fouriertransformation. Dann erhalten wir

$$hTr\, A_f = \hat{f}(0,0) = \frac{1}{2\pi} \int f(p,q) dp\, dq. \tag{8.1.9}$$

Aus dieser Formel folgt die Eigenschaft (8.12).

<u>Schritt 3</u>. Wir finden die Formel der Umkehrung von $A_f \circ A_g$ und $\{A_f, A\}_h$ und zeigen, dass die Grenzen dieser Funktionen sich den Funktionen fg und $\{f,g\}$ nähern, wenn $h \to 0$ (die Eigenschaft (8.13)). Ich wiederhole, dass $A_f \circ A_g = A_f A_g + A_g A_f$. Die Formel der Umgekehrung (8.1.4) gibt uns

$$\hat{F}(u,v) := (KD)^{-1}(A_f A_g) = hTr\, A_f A_g V(-v)U(-u)e^{\frac{ihuv}{2}}$$

$$= hTr(\frac{1}{2\pi}^2 \int du_1 dv_1 du_2 dv_2 \hat{f}(u_1,v_1)\hat{g}(u_2,v_2)V(v_1)U(u_1)e^{\frac{ihu_1v_1}{2}} \times$$

$$\times V(v_2)U(u_2)e^{\frac{ihu_2v_2}{2}} V(-v)U(-u)e^{\frac{ihuv}{2}}$$

$$= hTr(\frac{1}{2\pi}^2 \int du_1 dv_1 du_2 dv_2 \hat{f}(u_1,v_1)\hat{g}(u_2,v_2) \times V(v_1+v_2-v) \times$$

$$\times U(u_1+u_2-u) exp\,(\frac{ih}{2}(u_1v_1+u_2v_2+uv+2u_1v_2-2u_1v-2u_2v))$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int du_1 dv_1 du_2 dv_2 \hat{f}(u_1,v_1)\hat{g}(u_2,v_2)\delta(v_1+v_2-v)\delta(u_1+u_1-u)e^{\frac{ih}{2}(u_1v_2-u_2v_1)}. \tag{8.1.10}$$

Andererseits haben wir die Fourier-Transformation $\hat{\Phi}(u,v)$ des Produktes zweier Funktionen $f(p,q)g(p,q)$

$$\hat{\Phi}(u,v) = \frac{1}{2\pi} \int du_1 dv_1 du_2 dv_2 \hat{f}(u_1,v_1)\hat{g}(u_2,v_2)\delta(v_1+v_2-v)\delta(u_1+u_2-u). \tag{8.1.11}$$

Wir vergleichen (8.1.10) mit (8.1.11) und bemerken, dass $\hat{F}(u,v) = \hat{\Phi}(u,v)$, wenn $h \to 0$. Folglich erhalten wir,

$$\lim_{h\to 0} A_f \circ A_g = f.g.$$

Jetzt berechnen wir die umgekehrte Funktion $\hat{G}(u,v)$ von $\{A_f, A_g\}_h$. Nach der Formel (8.1.10) haben wir

$$\hat{G}(u,v) = \frac{1}{2\pi h}\int du_1 dv_1 du_2 dv_2 \hat{f}(u_1,v_1)\hat{g}(u_2,v_2)\delta(v_1 +_2 - v)\times$$

$$\times\delta(u_1+u_2-u)(e^{\frac{ih}{2}(u_1v_2-u_2v_1)} - e^{\frac{ih}{2}(u_2v_1u_1v_2)}$$

$$= \frac{1}{\pi h}\int du_1 dv_1 du_2 dv_2 \hat{f}(u_1,v_1)\hat{g}(u_2,v_2)\delta(v_1+v_2-v)\delta(u_1+u_2-u)\sin\frac{h}{2}(u_2v_1-u_1v_2).$$

Folglich ist

$$\lim_{h\to 0}\hat{G}(u,v) = \frac{1}{2\pi}\int du_1 dv_1 du_2 dv_2 (u_2v_1-u_1v_2)\hat{f}(u_1,v_1)\hat{g}(u_2,v_2)\times$$

$$\times\delta(v_1+v_2-v)\delta(u_1+u_2-u). \tag{8.1.12}$$

Es ist leicht zu sehen, dass die RS von (8.1.12) die Fouriertransformation der Poissonschen Klammer

$$\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p},$$

ist, da die Fouriertransformationen von $\frac{\partial f}{\partial q}$ und $\frac{\partial f}{\partial p}$ die Funktionen $-iv\hat{f}$ und $-iu\hat{f}$ sind. $\square$

8.2. Präquantisierung nach Koopman-van Hove-Segal. Wir können die Weyl-Methode der Quantisierung nicht auf jede symplektische Mannigfaltigkeit verallgemeinern. Wir wissen nicht einmal, ob Präquantisierung für jede symplektische Mannigfaltigkeit existiert. Für $M = T^*N, \omega = d\theta$ haben Segal, Koopman, van Hove eine Präquantisierung konstruiert. Der Präquantisierungsraum (der Hilbertraum) ist $C_0^\infty(M)\cap L_2(M)$. Die Darstellung $f\mapsto A_f$ wird folgendermaßen definiert

$$A_f = f + \frac{h}{2\pi i} sgrad\, f - \theta(sgrad\, f), \tag{8.2.1}$$

wobei das Vektorfeld $sgrad\, f$ als ein Operator in $C^\infty(M)$ betrachtet wird.

Jetzt überprüfen wir, ob (8.2.1) eine Darstellung der Lie-Algebra $C_0^\infty(M)$ in der Algebra von sebst-adjungierten Operatoren ist. Offensichtlich bestimmt (8.2.1) eine lineare Abbildung. Die RS von (8.2.1) ist ein selbst-adjungierter Operator, da für die Funktionen $p,q\in C_0^\infty$ gilt

$$\int_M \frac{h}{2\pi i} sgrad\, f(p) q\, vol + \int_M p\frac{h}{2\pi i} sgrad\, f(q)\, vol = \frac{h}{2\pi i} sgrad\, f(p.q)\, vol =$$

$$-\frac{h}{2\pi i}\int_M df\wedge(sgrad(p.q)\rfloor\omega^n) = \frac{n.h}{2\pi i}\int_M df\wedge d(p.q)\wedge\omega^{n-1} = 0.$$

Endlich zeigen wir, dass (8.2.1) die Lie-Klammer erhält, d.h.

$$A_{\{f,g\}} = \frac{i}{h}(A_fA_g - A_gA_f) \tag{8.2.2}$$

Einerseits ist die LS von (8.2.2) gleich

$$\{f,g\} + \frac{h}{2\pi i} sgrad\,\{f,g\} - \theta(sgrad\{f,g\}) = \tag{8.2.3}$$

Aus der Identität

$$[sgrad\,f, sgrad\,g] = sgrad\,\{f,g\}$$

folgt andererseits die RS von (8.2.2)

$$-f sgrad\,g - sgrad\,f \circ g + g sgrad\,f + sgrad\,g \circ f + \frac{h}{2\pi i} sgrad\,\{f,g\} +$$

$$sgrad\,f \circ \theta(sgrad\,g) + \theta(sgrad\,f) sgrad\,g - sgrad\,g \circ \theta(sgrad\,f) - \theta(sgrad\,g) sgrad\,f =$$

$$= \frac{h}{2\pi i} sgrad\,\{f,g\} + 2\{f,g\} - sgrad\,f(\theta(sgrad\,g)) + sgrad\,g(\theta(sgrad\,f)). \tag{8.2.4}$$

Wir vergleichen (8.2.3) und (8.2.4) unter Berücksichtigung von

$$\{f,g\} = d\theta(sgrad\,f, sgrad\,g) \tag{8.2.5}$$

$$= sgrad\,f(\theta(sgrad\,g)) - sgrad\,g(\theta(sgrad\,f)) - \theta([sgrad\,f, sgrad\,g]).$$

und wir erhalten (8.2.2). □

8.3. Präquantisierung nach Souriau-Kostant. Der Versuch, die Konstruktion von Koopman-van Hove-Segal auf andere symplektische Mannigfaltigkeiten zu verallgemeinern, führt uns zu komplexen Geradenbündeln über symplektischen Mannigfaltigkeiten. Wir bemerken, dass die Formel (8.2.1) auf der Identität $\omega = d\theta$ basiert. Diese Identität gilt lokal auf jeder symplektischen Mannigfaltigkeit. So können wir für eine lokale offene Menge $U_\alpha \subset M$ die Darstellung $f \mapsto A_f^\alpha \in \mathcal{O}(C^\infty(U_\alpha))$ definieren. Wir werden sehen, dass wir unter einer Bedingung von ω die lokalen Operatoren $A_f^\alpha, \alpha \in I$ zu einem globalen Operator A_f kleben können, falls $\{U_\alpha, \alpha \in I\}$ eine Überlagerung auf M ist. Aber dieser Operator operiert nicht auf $C^\infty(M)$, sondern auf dem Raum der Schnitte eines komplexen Geradenbündels L über M. Die Form θ_α wird als der lokale Ausdruck des Zusammenhangs von L über U_α interpretiert. Wir kommen zu einer genauen Formulierung.

Es sei L ein komplexes Geradenbündel über M mit einer Hermitischen Struktur $<,>$ und ∇ sei sein Hermitischer Zusammenhang, d.h.

$$\mathcal{L}_v < s_1, s_2 > = < \nabla_v s_1, s_2 > + < s_1, \nabla_v s_2 > .$$

Wenn L über $U_\alpha \subset M$ einen nichtverschwindenden Schnitt s_α besitzt, können wir den Schnittenraum $\Gamma(L, U_\alpha)$ mit dem Raum $C^\infty(U_\alpha)$ folgendermaßen identifizieren

$$C^\infty(U_\alpha) \ni \phi \mapsto \phi \cdot s_\alpha \in \Gamma(L, U_\alpha).$$

Mit dieser Identifizierung nimmt der Operator ∇_v die Form

$$\nabla_v \phi = \mathcal{L}_v \phi - \frac{2\pi i}{h} - \frac{2\pi i}{h} \theta_\alpha(v)\phi, \tag{8.3.1}$$

an, wobei θ_α nach der Leibniz-Regel durch die folgende Formel bestimmt ist

$$\nabla_v s_\alpha = -\frac{2\pi i}{h} \theta_\alpha(v).s_\alpha. \tag{8..3.2}$$

Der Vergleich von (8.3.2) mit (8.2.1) deutet die Formel der Präquantisierung nach Sourriau-Kostant an:

$$A_f = f + \frac{h}{2\pi i} \nabla_{sgrad\, f}. \tag{8.3.3}$$

Offensichtlich bestimmt (8.3.2) eine lineare Abbildung. Genauso wie für (8.2.1) sehen wir, dass die RS von (8.3.3) ein selbst-adjungierter Operator ist.

Endlich wollen wir wissen, ob (8.3.2) die Lie-Klammer erhält. Wir erinnern uns daran, dass die Krümmungsform des Zusammenhangs ∇ eine 2-Form Ω auf M ist mit

$$\Omega(v_1, v_2) \frac{1}{2\pi i} ([\nabla_{v_1}, \nabla_{v_2}] - \nabla_{[v_1, v_2]}). \tag{8.3.4}$$

Wir benutzen die Formel (8.3.1) und erhalten aus (8.3.4)

$$\Omega(v_1, v_2) = \frac{1}{h} (v_1 \theta_\alpha(v_2) - v_2 \theta_\alpha(v_1) - \theta_\alpha([v_1, v_2]). \tag{8.3.5}$$

Die Gleichung (8.3.5) ist gleichwertig mit der folgenden

$$\Omega = h^{-1} d\theta_\alpha. \tag{8.3.6}$$

Einerseits ist die LS der Gleichung

$$A_{f,g} = \frac{i}{h} (A_f A_g - A_g A_f) \tag{8.3.7}$$

gleich

$$\{f, g\} + \frac{h}{2\pi} \nabla_{sgrad\,\{f,g\}}. \tag{8.3.8}$$

Andererseits ist die RS von (8.3.7) gleich (s. auch (8.2.4))

$$\frac{h}{2\pi i} (sgrad\,\{f, g\} + 2\{f, g\} - sgrad\, f(\theta_\alpha(sgrad\ g)) + sgrad\, g(\theta(sgrad\, f)). \tag{8.3.9}$$

Unter Berücksichtigung von (8.3.1) ist der Unterschied von LS und RS von (8.3.7) gleich

$$\{f, g\} - sgrad\, f(\theta_\alpha(sgrad\, g)) + sgrad\, g(\theta_\alpha(sgrad\, f)) + \theta_\alpha(sgrad\,\{f, g\}). \tag{8.3.10}$$

Offensichtlich gilt (8.3.10) genau dann, wenn $\Omega = h^{-1}\omega$. Zusammenfassend haben wir

8.3.11. Satz. *Die Formel (8.3.3) ergibt eine Präquantisierung genau dann, wenn die Krümmungform Ω mit der Form $h^{-1}\omega$ übereinstimmt.*

Jetzt bleibt die Frage, wann die Form $h^{-1}\omega$ die Krümmungsform eines Hermitischen Zusammenhangs ∇ auf einem komplexen Geradenbündel L über M ist. Die Antwort auf diese Frage gibt uns der folgenden Satz (aus der Theorie der komplexen Geradenbündel)

8.3.12 Satz . *Eine symplektische Form ω auf M ist eine Krümmungsform eines komplexen Geradenbündels L mit einem Hermitischen Zusammenhangs über M genau dann, wenn ω ganzzahlig ist.*

8.4. Quantisierung und Polarisierung. Das Problem der Präquantisierung liegt darin, dass der Hilbertraum der Präquantisierung zu groß ist, um den Phasenraum eines physikalischen Quantensystems darzustellen. In der Quantenmechanik hängen Wellenfunktionen nur von der Häfte der Koordinaten des Phasenraum ab: in der Ortsdarstellung hängen Wellenfunktionen nicht von Impulsen ab und in der Impulsdarstellung hängen sie nicht von dem Ort ab. In der Sichtweise der symplektischen Geometrie können wir sagen, dass der Quantisierungsraum aus den Funktionen besteht, die längs Fasern einer reellen Polarisierung konstant sind. Somit sollte der Quantisierungsraum aus solchen Elementen s im Präquantisierungsraum besteht, dass

$$\nabla_v s = 0 \text{ für jedes Vektorfeld } v \in TP \subset TM \tag{8.4.1}$$

Wir bezeichnen den Raum solcher Schnitte s mit $\Gamma(L, M, P)$.

Zwei Fragen entstehen bei dieser Konstruktion des Quantisierungsraums.

1) Ist der Raum $\Gamma(L, M, P)$ nicht-trivial (d.h. hat er das einzige Elememnt $s = 0$) ?

2) Erhält der Präquantisierungsoperator A_f den Quantisierungsraum $\Gamma(L, M; P)$?

Wir nehmen an, dass die Fasern des Polarisierung P nicht zusammenziehbar sind. Dann führt die parallele Verschiebung längs einer Schleife Γ auf M einen Vektor $s(x) \in L(x)$ in einen Vektor $Q(\Gamma)s(x)$ über, wobei $\mathbb{Q}(\Gamma) \in \mathbb{C}$ ist. Wenn $Q(\Gamma) \neq 0$ ist, ist der Quantisierungsraum trivial. In diesem Fall müssen wir die Definition des Quantisierungsraums modifizieren. Wir betrachten die Menge M_0 aller Fasern F, wofür die Monodromie $\chi : \pi_1(F) \to Q(\pi_1(F))$ trivial ist. Die Menge M_0 wird die Bohr-Sommerfeld-Untermannigfaltigkeit genannt. Statt $\Gamma(L, M, P)$ betrachten wir nun den Raum der verallgemeinerten Lösungen von (8.4.1) mit der Eigenschaft, dass der Träger dieser Lösungen auf M_0 liegt. Diesen Raum der verallgemeinerten Lösungen bezeichnen wir mit $\Gamma_0(L, M, P)$.

8.4.2. Beispiel. Es seien $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \omega = dx \wedge dy$, und $P = \{x^2 + y^2 = const\}$. Das entsprechende Geradenbündel L ist das triviale Bündel $L = \mathbb{C} \times M$. Die in (8.3.6) definierte Form θ wird hier als $\frac{1}{2}(xdy - ydx)$ angenommen. In den Polarkoordinaten ist $\theta = \frac{1}{2}r^2 d\phi$. Aus der Formel (8.3.2) erhalten wir nun

$$Q(\Gamma) = \exp(\frac{2\pi i}{h}\int_\Gamma \theta_\alpha) = \exp(\frac{2\pi i r^2}{ih}). \tag{8.4.3}$$

Folglich ist die Bohr-Sommerfeld-Untermannigfaltigkeit die Menge aller Kreise, die die Fläche $\pi r^2 = nh, n \in \mathbb{Z}$, begrenzen.

Die zweite Obstruktion zur Frage 1 liegt darin,dass das Skalarquadrat $< s, s >$ eines Schnittes $s \in \Gamma(L, M, P)$ eine Funktion auf M ist, die konstant längs P ist. Wenn die Fasern nicht kompakt sind, divergiert das Integral dieser Funktion über M.

Um dieses Problem zu überwinden, haben Blattner und Kostant einen neuen Begriff von Halb-Formen auf M mit Wert in L eingeführt, die normal zu einer Polarisierung P sind. (s. Woodhouse).

Jetzt kommen wir zur Frage 2.

Zuerst zeigen wir die Relation

$$[A_f, \nabla_v]s = \frac{h}{2\pi i}\nabla_{[sgrad\, f, v]}s, \tag{8.4.4}$$

für $v \in TP$ und $s \in \Gamma(L, M, P)$. Die LS von (8.4.4) ist gleich

$$[f + \frac{h}{2\pi i}\nabla_{sgrad\, f}, \nabla_v] \overset{(8.3.4)}{=} [f, \nabla_v] + \frac{h}{2\pi i}(\nabla_{[sgrad\, f, v]}) + h\Omega(sgrad\, f, v). \tag{8.4.5}$$

Unter Berücksichtigung der Identitäten $\Omega = h^{-1}\omega$ und $\nabla_v s = 0$ erhalten wir (8.4.4) aus (8.4.5).

Die Gleichung (8.4.3) bedeutet, dass nur eine beschränkte Klasse von Funktionen f (auch klassische Meßgrößen) unmittelbar quantisiert werden können. Hier müssen wir auch neue Methoden finden. (s. Woodhause).

9. WKB-Näherung

Wir haben diskutiert, dass wir die Relation zwischen den Lösungen eines Systems in der klassischen Mechanik und den Lösungen des quantisierten Systems betrachten wollen. Wir möchten feststellen, dass klassische Lösungen Hamiltonscher Gleichungen Näherungslösungen der Schrödingergleichungen bringen. Eine grundlegende Technik für die Beschaffung Näherungslösungen heißt WKB-Methode (nach Wentzel, Kramers und Brillouin).

Wir werden auch sehen, dass viele Elemente der symplektischen Geometrie (z. B. die Hamilton-Jacobi-Gleichung) und Präquantisierung (z.B. Halb-Dichte) in dieser WKB-Methode erscheinen.

Wir schreiben nochmal die 1-dimensionale Schrödingergleichung (s. (7.11))

$$ih\frac{\partial \phi}{\partial t} = \hat{H}\phi,$$

wobei

$$\hat{H} = -\frac{h^2}{2m}\frac{\partial}{\partial x^2} + V(x). \tag{9.1}$$

Näherung erster Ordnung.

Im ersten Schritt zur Lörsung der Schrödingergleichung suchen wir nach stationären Zuständen, d.h. nach Lösungen der Gestalt

$$\phi(x,t) = \phi(x)e^{-i\omega t}. \tag{9.2}$$

(Diese Lösungen erhalten ihre Gestalt, wenn die Zeit t läuft.) Wir setzen (9.2) in (9.1) ein und wir erhalten

$$h\omega\phi(x)e^{-i\omega t} = (\hat{H}\phi)e^{-i\omega t}.$$

Somit erhalten wir die zeitunabhängige Schrödingergleichung

$$(\hat{H} - E)\phi = 0, \tag{9.3}$$

wobei $E = h\omega$. Diese Gleichung bedeutet, dass ϕ eine Eigenfunktion des linearen Differentialoperators $\hat{H}$ ist. Der Eigenwert E stellt die Energie des Systems dar.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass das Potential $V(x)$ konstant ist. In diesem Fall beschreibt $\phi(x)$ die Bewegung eines freien Teilchens. Auf der Suche nach einer Lösung der Gestalt

$$\phi(x) = e^{ix\xi}, \text{ wobei } \xi \text{ eine Konstante ist}$$

finden wir ,dass

$$(\hat{H} - E)\phi = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (h\xi)^2 = 2m(E - V).$$

Die grundlegende Idee im diesen Stadium der WKB-Methode liegt in folgendem: wenn $V(x)$ nicht konstant ist, muß ξ von x auch abhängen und wir suchen nach Lösungen der Gestalt

$$\phi(x) = e^{iS(x)/h}, \tag{9.4}$$

wobei $S(x)$ eine Phasenfunktion heißt. Die Gleichung (9.4) ist die einfachste Version des WKB-Ansatzes. In diesem Fall haben wir

$$(\hat{H} - E)\phi = [\frac{(S'(x))^2}{2m} + (V - E) - \frac{ih}{2m}S''(x)]e^{iS(x)/h} \tag{9.5.}$$

Da wir h als "klein" betrachten, wird unsere Näherung erster Ordnung den letzten Term in der Klammer ignorieren. Die anderen Terms in der Klammer verschwinden genau dann, wenn S die Hamilton-Jacobi-Gleichung erfüllen

$$H(x, S'(x)) = \frac{(S'(x))^2}{2m} + V(x) = E,$$

d.h.

$$S'(x) = \pm\sqrt{2m(E - V(x))}.$$

9.6. Bemerkung. Für den n-dimensionalen Schrödinger-Operator

$$\hat{H} = -\frac{h^2}{2m}\Delta + V(x)$$

betrachten wir wieder die Lösungen der Gestalt $\phi = e^{iS/h}$. Dann finden wir, dass

$$(\hat{H} - E)\phi = [\frac{||\nabla S||^2}{2m} + (V - E) - \frac{ih}{2m}\Delta S]e^{iS/h}$$

gleich $O(h)$ ist, wenn S die Hamilton-Jacobi-Gleichung erfüllt

$$H/x_1, \cdots, x_n, \frac{\partial S}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial S}{\partial x_n}) = \frac{||\nabla S(x)||^2}{2m} + V(x) = E.$$

Wir haben in (5.2) gesehen, dass S die Hamilton-Jacobi-Gleichung genau dann erfüllt, wenn das Bild von $dS = \{(p = \frac{\partial S}{\partial q}, q\}$ auf der Niveau-Untermannigfaltigkeit $H{-}1(E)$ liegt. Zusammenfassend gilt:

Wenn das Bild von dS auf der Niveau-Untermannigfaltigkeit einer Hamiltonfunktion H, kann S als die Phasenfunktion einer Näherungslösung erster Ordnung der assoziierten Schrödingergleichung.

Eine Funktion $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ wird **zulässig** genannt, wenn sie die Hamilton-Jacobi-Gleichung erfüllt.

Semiklassische Näherung.

Wir haben gesehen, dass die Funktion $\phi(x) = e^{iS(x)/h}$ die Gleichung

$$(\hat{H} - E)\phi = O(h)$$

erfüllt, wenn S eine zulässige Funktion ist.

Mit anderen Worten ist ϕ eine Eigenfunktion bis auf einen Term der h-Ordnung von $\hat{H}$ mit Eigenwert E.

Wir bemerken, dass $\phi(x) = 1$ für alle x ist. In der Quantenmechanik bedeutet diese Identität, dass die Wahrscheinlichkeit des Teichens in Position x gleich 1 ist. Somit ist unser Ansatz für ϕ zu beschränkt. Wir hoffen eine neue bessere Näherung zu finden, indem wir ϕ mit einer Amplitudenfunktion a multiplizieren

$$\phi(x) = e^{iS(x)/h}a(x).$$

Es sei S eine zulässige Funktion. Dann haben wir

$$(\hat{H} - E)\phi = -\frac{1}{2m}[ih(a\Delta S + 2\sum_j \frac{\partial a}{\partial x_j}\frac{\partial S}{\partial x_j}) + h^2\Delta a]e^{iS/h}. \tag{9.7}$$

Wir wählen die Funktion a so, dass der Koeffizient von h in der RS von (9.7) verschwindet. Dann ist ϕ eine Eigenfunktion von $\hat{H}$ bis auf einen Term der Ordnung $\emptyset(h^2)$. Diese Bedingung von a heißt die **homogene Transportgleichung**:

$$a\Delta S + 2\sum_j \frac{\partial a}{\partial x_j}\frac{\partial S}{\partial x_j} = 0.$$

Wenn S eine Phasenfunktion ist und die Amplitude a die homogene Transportgleichung erfüllt, heißt die Lösung $\phi = e^{iS/h}$ die semiklassische Näherung.

Unhomogene Transportgleichung.

Um bessere Näherungslösungen von Eigenwertproblemen zu finden, wiederholen wir die obige Methode. Wir betrachten Lösungen der Gestalt

$$\phi = e^{iS/h}(a_0 + a_1).$$

Wir nehmen an, dass $e^{iS/h}$ eine semiklassische Näherungslösung ist. Dann ist

$$(\hat{H} - E)\phi = -\frac{1}{2m}[ih^2(a_1\Delta S + 2\sum_j \frac{\partial a_1}{\partial x_j}\frac{\partial S}{\partial x_j} - i\nabla a_0) + h^3\Delta a_1]e^{iS(x)/h}.$$

Offensichtlich ist ϕ eine Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung bis auf den Terms $O(h^3)$, wenn a_1 die unhomogene Transportgleichung

$$a_1\Delta S + 2\sum_j \frac{\partial a_1}{\partial x_j}\frac{\partial S}{\partial x_j} = i\Delta a_0$$

ist. In allgemeinen suchen wir Näherungslösungen der Gestalt

$$\phi = e^{iS/h}(a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n),$$

wobei S die Hamilton-Jacobi-Gleichung erfüllt, a_0 die homogene Transportgleichung erfüllt und für alle $k > 0$ die Funktion a_k die unhomogene Transportgleichung

$$a_k\Delta S + 2\sum_j \frac{\partial a_k}{\partial x_j}\frac{\partial S}{\partial x_j} = i\Delta a_{k-1}$$

erfüllt.

Geometrie der Transportgleichung.

Wir haben gesehen, dass WKB-Näherungslösungen erster Ordnung durch die Wahl zulässiger Phasenfunktionen bestimmt werden. Zulässige Phasenfunktionen S erfüllen die Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$H(x, \frac{\partial S}{\partial x}) = E$$

Mit anderen Worten sagen wir, dass sich WKB-Näherungslösungen Lagrangeschen Untermannigfaltigkeiten in der Niveaumenge $H^{-1}(E)$ entsprechen. Wir wollen auf dieselbe Weise die semiklassische Näherung interpretieren.

Es sei a eine Funktion auf $\mathbb{R}^n$, die die Transportgleichung erfüllt

$$a\Delta S + 2\sum_j \frac{\partial a}{\partial x_j}\frac{\partial S}{\partial x_j} = 0.$$

Wir multiplizieren beide Seiten der Gleichung mit a und wir erhalten

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}(a^2 \frac{\partial S}{\partial x_j}) = 0. \tag{9.7}$$

Dies bedeutet, dass die Divergenz des Vektorfelds $a^2\Delta S$ auf $\mathbb{R}^n$ verschwindet. Da $\mathbb{R}^n$ diffeomorph zur Lagrangeschen Untermannigfaltigkeit $L = im(dS) \subset T^*\mathbb{R}^n$ ist, möchten wir diese Bedingung auf L interpretieren. Wir bezeichnen den Diffeomorphismus $L \cong \mathbb{R}^n$ ebenfalls mit π.

Zuerst bemerken wir, dass die Einschränkung des Hamiltonschen Vektorfelds $sgrad\, H$, $H = \sum_i p_i^2/2 + V(q)$, auf L gleich

$$sgrad\, H_{|L} = \sum_j (\frac{\partial S}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial q_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j}\frac{\partial}{\partial p_j})$$

ist. Somit stimmt die Projektion $\pi_*(sgrad\, H_{|L})$ auf $\mathbb{R}^n$ mit ∇S überein. Also besagt die homogene Transportgleichung, dass das Vektorfeld $a^2(x)\pi_*(sgrad\, H_{|L})$ divergenzfrei bezüglich der kanonischen Dichte $|dx| = |dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n|$ auf $\mathbb{R}^n$ ist. Diese Bedingung ist gleichwertig mit folgendem

$$\mathcal{L}_{\pi_*(sgrad\, H_{|L})}(a^2|dx|) = 0.$$

$$\Longleftrightarrow \mathcal{L}_{sgrad\, H_{|L})}(\pi^*(a^2|dx|)) = 0.$$

Zusammenfassend erhalten wir

Ein (geometrischer) semiklassischer Zustand ist durch eine Lagrangesche Untermannigfaltigkeit $L \subset T^*(\mathbb{R}^n)$ bestimmt, die mit einer Halb-Dichte a ausgestattet ist. Ein solcher Zustand ist stationär, wenn L auf der Niveaumenge der Hamiltonfunktion liegt und a invariant unter ihrem Fluß ist.