Stieltjesův integrál

Milan Tvrdý

9. prosince 2010

Obsah

Základní úmluvy a označení

(i) $\mathbb{N}$ je *množina přirozených čísel* (mezi něž nezahrnujeme nulu).

(ii) $\mathbb{R}$ je *množina reálných čísel*, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$, $\mathbb{R}^{m \times n}$ je množina $m \times n$-matic reálných čísel, $\mathbb{R}^n = R^{n \times 1}$. Je-li $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$, pak příslušná transponovaná matice je označena symbolem M^{T} ($M^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n \times m}$).

(iii) Je-li $-\infty < a < b < \infty$, pak $[a, b]$ značí *uzavřený* interval $\{t \in \mathbb{R} : a \leq t \leq b\}$ a (a, b) je *otevřený* interval $\{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}$. Příslušné *polouzavřené* (resp. *polootevřené* intervaly značíme $[a, b)$ a $(a, b]$. Ve všech těchto případech nazýváme body a, b *krajní body* intervalu. V případě $a = b \in \mathbb{R}$ říkáme, že interval $[a, b]$ *degeneruje* na jednobodovou množinu a píšeme $[a, b] = [a]$. Budeme též užívat obvyklé značení I^o pro vnitřek intervalu I. Je-li I interval (uzavřený resp. otevřený resp. polootevřený) s krajními body a, b značíme symbolem $|I| = |b - a|$ jeho délku ($|[a]| = 0$).

(iv) Pro $A \in \mathbb{R}$ značíme $A^+ = \max(A, 0)$ a $A^- = \max(-A, 0)$. (Připomeňme, že platí $A^+ + A^- = |A|$ a $A^+ - A^- = A$ pro každé $A \in \mathbb{R}$.)

(v) Konečný systém bodů $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ intervalu $[a, b]$ nazveme *dělením intervalu* $[a, b]$, jestliže platí $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_m = b$. Množinu všech dělení intervalu $[a, b]$ značíme $\mathscr{D}[a, b]$. Je-li $D \in \mathscr{D}[a, b]$, pak jeho elementy zpravidla značíme α_i. Pro dané dělení $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$, značíme $\nu(D) = m$ a

$$|D| = \max_{i = 1,2,\ldots,\nu(d)} (\alpha_i - \alpha_{i-1}).$$

Bude-li to výhodné, budeme též dělení D intervalu $[a, b]$ chápat jako systém podintervalů $\{I_j; j = 1, 2, \ldots, \nu(D)\}$ takových, že platí

$$\bigcup_{j=1}^{\nu(D)} I_j = [a, b], \quad \text{přičemž } I_j^o \cap I_k^o = \emptyset \quad \text{jakmile } j \neq k.$$

Jestliže dělení D' a $D'' \in \mathscr{D}[a, b]$ jsou taková, že všechny elementy z D' jsou obsaženy v D'', říkáme, že D'' je *zjemnění* dělení D' a značíme $D' \subset D''$.

(vi) Dvojici $(D, \xi) \in \mathscr{D}[a, b] \times \mathbb{R}^{\nu(D)}$ nazveme *rozšířeným dělením* intervalu $[a, b]$, jestliže platí

$$\alpha_{i-1} \leq \xi_i \leq \alpha_i \quad \text{pro všechna } i = 1, 2, \ldots, \nu(D).$$

Množinu všech rozšířených dělení intervalu $[a, b]$ značíme $\mathscr{P}[a, b]$.

(vii) Pro libovolné funkce $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ a $g:[a,b] \to \mathbb{R}$ a reálné číslo λ součtem $f+g$ funkcí f a g rozumíme funkci $(f+g)(t) = f(t)+g(t)$, $t \in [a,b]$, a násobek λf funkce f číslem λ je funkce $(\lambda f)(t) = \lambda f(t)$, $t \in [a,b]$. (Zápis $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ znamená, že funkce f je definována pro každé $x \in [a,b]$ a každá její hodnota $f(x)$ je (konečné) reálné číslo.

(viii) Pro libovolnou funkci $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ značíme

$$\|f\| = \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|.$$

(Není-li funkce f ohraničená na intervalu $[a,b]$, pak je ovšem $\|f\| = \infty$.)

(ix) $\mathbb{C}[a,b]$ je prostor reálných funkcí spojitých na intervalu $[a,b]$ a zobrazení

$$f \in \mathbb{C}[a,b] \to \|f\|$$

definuje normu na $\mathbb{C}[a,b]$.

(x) $\mathbb{L}^1[a,b]$ je prostor reálných funkcí integrovatelných (ve smyslu Lebesgueově) na intervalu $[a,b]$ (s rovností $f = g \in \mathbb{L}^1[a,b] \iff f(x) = g(x)$ s.v. na $[a,b]$) a zobrazení

$$f \in \mathbb{L}^1[a,b] \to \|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| \, \mathrm{d}t$$

definuje normu na $\mathbb{L}^1[a,b]$.

(xi) Pro danou množinu $M \subset \mathbb{R}$ symbolem χ_M značíme její charakteristickou funkci, tj. funkci $\mathbb{R} \to \{0,1\}$ definovanou předpisem:

$$\chi_M(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \in M, \\ 0 & \text{pro } t \notin M. \end{cases}$$

(xii) Jestliže $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, $t \in [a,b)$ a $s \in (a,b]$ a jestliže existují konečné jednostranné limity $\lim_{\tau \to t+} f(\tau)$ a $\lim_{\tau \to s-} f(\tau)$, pak značíme

$$f(t+) = \lim_{\tau \to t+} f(\tau), \quad f(s-) = \lim_{\tau \to s-} f(\tau),$$

$$\Delta^+ f(t) = f(t+) - f(t), \quad \Delta^- f(s) = f(s) - f(s-),$$

$$\Delta f(x) = f(x+) - f(x-) \quad \text{pro } x \in (a,b).$$

Dále, budeme užívat následující úmluvu:

$$f(a-) = f(a), \quad f(b+) = f(b), \quad \Delta^- f(a) = \Delta^+ f(b) = 0.$$

(xiii) Je-li M podmnožina Banachova prostoru X, pak symbolem $\overline{M}$ značíme její uzávěr v prostoru X.

Kapitola 1

Funkce s konečnou variací.

Výklad v této kapitole se opírá zejména o monografie V. Jarníka *Diferenciální počet II* [5, Kapitola V] a *Integrální počet II* [6, Kapitola V] a dále o odstavec II.6 v monografii T.H.Hildebrandta *Theory of Integration* [3] a kapitolu XIII v monografii Š. Schwabika *Integrace v R (Kurzweilova teorie)* [9].

1.1. Definice. Pro danou funkci $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ a dělení D intervalu $[a,b]$,

$$D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \in \mathscr{D}[a,b],$$

definujeme

$$V(f,D) = \sum_{j=1}^{\nu(d)} |f(\alpha_j) - f(\alpha_{j-1})| \tag{1.1}$$

a

$$\operatorname{var}_a^b f = \sup_{D \in \mathscr{D}[a,b]} V(f,D). \tag{1.2}$$

Je-li $a = b$, definujeme $\operatorname{var}_a^b f = \operatorname{var}_a^a f = 0$. Veličinu $\operatorname{var}_a^b f$ nazýváme *variace funkce* f na intervalu $[a,b]$. Je-li $\operatorname{var}_a^b f < \infty$, říkáme, že funkce f má *konečnou variaci na* $[a,b]$. Množinu funkcí s konečnou variací na $[a,b]$ značíme $\mathbb{BV}[a,b]$.

1.2. Cvičení. Dokažte následující vlastnosti variace a funkcí s konečnou variací.

(i) Pro každou funkci $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ je $\operatorname{var}_a^b f \geq 0$.

(ii) Pro libovolné dvě funkce $f_1,\ f_2:[a,b] \to \mathbb{R}$ a reálné číslo c platí

$$\operatorname{var}_a^b (f_1 + f_2) \leq \operatorname{var}_a^b f_1 + \operatorname{var}_a^b f_2 \quad \text{a} \quad \operatorname{var}_a^b (c\,f_1) = |c| \operatorname{var}_a^b f_1.$$

(iii) Je-li $[c,d] \subset [a,b]$, pak pro každou funkci $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ platí

$$|f(d) - f(c)| \leq \operatorname{var}_c^d f \leq \operatorname{var}_a^b f.$$

(iv) Pro každou funkci $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ platí

$$|f(x)| \leq \|f\| \leq \|f\|_{\mathbb{BV}} \quad \text{pro} \quad x \in [a,b].$$

Každá funkce $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ je tedy ohraničená na $[a,b]$.

(v) $\operatorname{var}_a^b f = 0 \iff f(x) \equiv f(a)$ na $[a,b]$.

(vi) Zavedeme-li pro funkce z množiny $\mathbb{BV}[a,b]$ obvyklým způsobem operace sčítání a násobení skalárem (viz 0.(vi)), stane se lineárním normovaným prostorem vzhledem k těmto operacím a vzhledem k normě $\|.\|_{\mathbb{BV}}$ definované předpisem

$$f \in \mathbb{BV}[a,b] \to \|f\|_{\mathbb{BV}} = |f(a)| + \operatorname{var}_a^b f.$$

(vii) Pro každou funkci f monotonní na $[a,b]$ platí $\operatorname{var}_a^b f = |f(b) - f(a)|$.

(viii) Pro libovolná dělení D' a D'' intervalu $[a,b]$ taková, že $D'' \subset D'$ a libovolnou funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je $V(f, D'') \le V(f, D')$.

(ix) $\operatorname{var}_a^b f = d \in \mathbb{R} \iff (\forall \varepsilon > 0\ \exists\, D_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b] : D_\varepsilon \subset D \implies d - \varepsilon \le V(f,D) \le d)$.

(x) $\operatorname{var}_a^b f = \infty \iff (\forall\, K > 0\ \exists\, D_K \in \mathscr{D}[a,b] : V(f, D_K) \ge K)$.

(xi) Pro libovolné dělení $D_0 \in \mathscr{D}[a,b]$ platí $\operatorname{var}_a^b f = \sup_{D \supset D_0} V(f,D)$.

(xii) Dokažte Větu 1.3.

1.3. Věta. *Pro každé $c \in (a,b)$ a každou funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ platí:*

$$\operatorname{var}_a^b f = \operatorname{var}_a^c f + \operatorname{var}_c^b f.$$

□

1.4. Věta. *$f \in \mathbb{BV}[a,b]$ tehdy a jen tehdy, když existují funkce f_1 a f_2 neklesající na $[a,b]$ a takové, že platí $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ pro každé $x \in [a,b]$.*

D ů k a z . Stačí dokázat, že pro každou funkci $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ existují funkce f_1 a f_2 neklesající na $[a,b]$ a takové, že platí

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) \quad \text{na } [a,b].$$

Nechť tedy $f \in \mathbb{BV}[a,b]$. Položme

$$f_1(x) = \operatorname{var}_a^x f \quad \text{a} \quad f_2(x) = f_1(x) - f(x) \quad \text{pro} \ \ x \in [a,b].$$

Potom f_1 je evidentně neklesající na $[a,b]$. Dále, pro $x_2 \ge x_1$ máme vzhledem ke Větě 1.3

$$f_2(x_2) = f_1(x_1) + \operatorname{var}_{x_1}^{x_2} f - f(x_2)$$

a

$$f_2(x_2) - f_2(x_1) = \operatorname{var}_{x_1}^{x_2} f - (f(x_2) - f(x_1)) \ge 0,$$

t.zn., že f_2 je také neklesající na $[a,b]$. □

1.5. Cvičení. Nechť $f \in \mathbb{BV}[a,b]$. Dokažte, že funkce

$$p(x) = \sup_{D \in \mathscr{D}[a,x]} \sum_{j=1}^{\nu(d)} (f(\alpha_j) - f(\alpha_{j-1}))^+$$

a

$$n(x) = \sup_{D \in \mathscr{D}[a,x]} \sum_{j=1}^{\nu(d)} (f(\alpha_j) - f(\alpha_{j-1}))^-$$

jsou obě neklesající a nezáporné na $[a,b]$ a platí

$$f(x) = f(a) + p(x) - n(x) \quad \text{a} \quad \operatorname{var}_a^x f = p(x) + n(x) \quad \text{pro každé } \ x \in [a,b].$$

1.6. Důsledek. *Pro každou funkci $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ a pro všechna $t \in [a,b)$ a $s \in (a,b]$ existují konečné limity*

$$f(t+) = \lim_{\tau \to t+} f(\tau) \quad a \quad f(s-) = \lim_{\tau \to s-} f(\tau)$$

(tj. f může mít v $[a,b]$ pouze nespojitosti 1.druhu).

D ů k a z plyne z Věty 1.4 a z toho, že uvedené limity existují pro každou funkci monotonní na $[a,b]$. Např. je-li f neklesající na $[a,b]$, $t \in (a,b]$ a $t_n \searrow t+$, pak

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n) = \inf_{n \in \mathbb{N}} f(t_n).$$

□

1.7. Věta. *Každá funkce $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ má nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti na intervalu $[a,b]$.*

D ů k a z plyne z Důsledku 1.6 a z následujícího Lemmatu. □

Lemma. *Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval, $f : J \to \mathbb{R}$ a M je množina bodů nespojitosti 1. druhu funkce f v J. Potom M je nejvýše spočetná.*

D ů k a z . Označme

$$M^+ = \{x \in J : f(x+) \neq f(x)\}, \qquad M^- = \{x \in J : f(x-) \neq f(x)\}$$

a

$$M_1^+ = \{x \in M^+ : f(x+) > f(x)\}, \quad M_2^+ = \{x \in M^+ : f(x+) < f(x)\}.$$

Potom je $M = M^+ \cup M^-$ a $M^+ = M_1^+ \cup M_2^+$. Uspořádejme množinu $\mathbb{P}$ racionálních čísel tak, aby platilo $\mathbb{P} = \{r_k\}_{k=1}^{\infty}$. Dále, definujme funkci $r : M_1^+ \to \mathbb{P}$ předpisem

$$r(x) = r_j \iff r_j \in (f(x), f(x+)) \ \wedge \ \{r_1, r_2, \dots, r_{j-1}\} \cap (f(x), f(x+)) = \emptyset$$

a pro každé $q \in \mathbb{P}$ označme

$$r_{-1}(q) = \{x \in M_1^+ : r(x) = q\}.$$

Máme

$$M_1^+ = \bigcup_{q \in \mathbb{P}} r_{-1}(q).$$

Ukážeme-li tedy, že každá množina $r_{-1}(q)$, $q \in \mathbb{P}$, je spočetná, budeme mít současně také dokázáno, že i množina M_1^+ je spočetná.

Nechť je tedy dáno libovolné $q \in \mathbb{P}$. Vzhledem k definici množiny M_1^+ a zobrazení r, pro každé $x \in r_{-1}(q)$ existuje $\delta(x) > 0$ takové, že $x < y < x + \delta(x) \implies f(y) > r(x)$. Jsou-li x_1, $x_2 \in r_{-1}(q)$ takové, že $x_1 < x_2$ a $r(x_1) = r(x_2) = q$, pak musí platit

$$(x_1, x_1 + \delta(x_1)) \cap (x_2, x_2 + \delta(x_2)) = \emptyset.$$

Vskutku, kdyby bylo $x_1 < x_2 < x_1 + \delta(x_1)$, bylo by též (vzhledem k definici δ)

$$q = r(x_1) < f(x_2) < r(x_2) = q,$$

spor. Systém intervalů$\{(x, x + \delta(x)),\ x \in r_{-1}(q)\}$ je tedy disjunktní. V každém z nich můžeme zvolit jediné racionální číslo $r \in (x, x + \delta(x))$ a tím definovat prosté zobrazení $r_{-1}(q)$ do $\mathbb{P}$. To znamená, že každá množina $r_{-1}(q)$, $q \in \mathbb{P}$, je spočetná.

b) Protože $M_2^+ = \{x \in J : -f(x) < -f(x+)\}$, můžeme použít část a) tohoto důkazu k důkazu spočetnosti množiny M_2^+.

c) Konečně, $M^- = \{x \in J : f(-x) \neq f(-x+)\}$, takže podle částí a)–b) tohoto důkazu je také M^- spočetná množina. □

1.8 . Cvičení. Přesvědčete se, že důkaz předešlého lemmatu v sobě obsahuje též důkaz následujícího tvrzení:

Každý disjunktní systém intervalů v $\mathbb{R}$ je spočetný.

1.9 . Věta. *Nechť* $f \in \mathbb{BV}[a, b]$. *Potom*

$$\sum_{t \in [a,b)} |\Delta^+ f(t)| + \sum_{t \in (a,b]} |\Delta^- f(t)| < \infty. \tag{1.3}$$

D ů k a z . Nechť W značí množinu bodů nespojitosti funkce f ležících v otevřeném intervalu (a, b). Podle Věty 1.7 je S nejvýše spočetná. Je-li konečná, je tvrzení věty evidentní. Nechť $W = \{w_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Předpokládejme na chvíli, že funkce f je na intervalu $[a, b]$ neklesající. Potom

$$\sum_{t \in [a,b)} |\Delta^+ f(t)| + \sum_{t \in (a,b]} |\Delta^- f(t)| = \Delta^+ f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} (\Delta^+ f(w_k) + \Delta^- f(w_k)) + \Delta^- f(b).$$

Nechť $n \in N \cup [2, \infty)$ je dáno a nechť σ_k, $k = 0, 1, \ldots, n+1$, jsou body intervalu $[a, b]$ takové, že platí

$$a = \sigma_0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_n < \sigma_{n+1} = b \quad \text{a} \quad \{\sigma_k\}_{k=0}^{n+1} = \{a\} \cup \{w_k\}_{k=1}^{n} \cup \{b\}.$$

Zvolme dále t_k, $k = 1, 2, \dots, n+1$, tak, aby platilo

$$a < t_1 < \sigma_1 < t_2 < \sigma_2 < \dots < \sigma_n < t_{n+1} < b.$$

Potom

$$\begin{aligned}
&\Delta^+ f(a) + \sum_{k=1}^{n} \big(\Delta^+ f(w_k) + \Delta^- f(w_k)\big) + \Delta^- f(b) \\
&\quad = f(a+) - f(a) + f(\sigma_1) - f(\sigma_1-) + f(\sigma_1+) - f(\sigma_1) \\
&\qquad + \dots + f(\sigma_n+) - f(\sigma_n) + f(b) - f(b-) \\
&\quad \le f(a+) - f(a) + f(t_1) - f(a+) + f(\sigma_1-) - f(t_1) + f(\sigma_1) - f(\sigma_1-) \\
&\qquad + f(\sigma_1+) - f(\sigma_1) + f(t_2) - f(\sigma_1+) + f(\sigma_2-) - f(t_2) \\
&\qquad + \dots + f(\sigma_n+) - f(\sigma_n) + f(t_n) - f(\sigma_n+) + f(b-) - f(t_n) + f(b) - f(b-) \\
&\quad = f(b) - f(a).
\end{aligned}$$

Pro libovolné $n \in N$ tedy platí

$$\Delta^+ f(a) + \sum_{k=0}^{n} \big(\Delta^+ f(w_k) + \Delta^- f(w_k)\big) + \Delta^- f(b) \le f(b) - f(a)$$

a tudíž

$$\sum_{t \in [a,b)} |\Delta^+ f(t)| + \sum_{t \in (a,b]} |\Delta^- f(t)| \le f(b) - f(a).$$

Tvrzení (1.3) tedy platí pro každou funkci f neklesající na $[a, b]$. Důkaz věty nyní můžeme snadno dokončit použitím Věty 1.4. □

1.10. Věta. *Prostor $\mathbb{BV}[a, b]$ je Banachův prostor (tj. úplný normovaný prostor).*

D ů k a z . Dokážeme, že $\mathbb{BV}[a, b]$ je úplný prostor, tj. že každá posloupnost cauchyovská v $\mathbb{BV}[a, b]$ má v $\mathbb{BV}[a, b]$ limitu. Předpokládejme tedy, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{BV}[a, b]$ je cauchyovská v $\mathbb{BV}[a, b]$.

a) Potom platí

$$\begin{cases} \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_\varepsilon : \\ \quad n, m \ge n_\varepsilon \implies |f_n(x) - f_m(x)| \le \|f_n - f_m\|_{\mathbb{BV}} < \varepsilon \;\; \text{pro všechna} \;\; x \in [a, b]. \end{cases} \tag{1.4}$$

Speciálně je tedy pro každé $x \in [a, b]$ posloupnost reálných čísel $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská a tudíž pro každé $x \in [a, b]$ existuje konečná limita

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

b) Nechť je dáno libovolné $\varepsilon > 0$ a nechť $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ má vlastnost (1.4). Potom pro každé $x \in [a,b]$ máme také

$$|f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f_{n_\varepsilon}(x)| \le \varepsilon$$

a tudíž pro každé $n \ge n_\varepsilon$ a každé $x \in [a,b]$ platí

$$|f(x) - f_n(x)| \le |f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)| + |f_{n_\varepsilon}(x) - f_n(x)| < 2\,\varepsilon.$$

To ovšem znamená, že

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0,$$

neboli, posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje k f stejnoměrně na $[a,b]$.

c) Číselná posloupnost $\{\operatorname{var}_a^b f_n\}_{n=1}^\infty$ je ohraničená. Podle Bolzanovy-Weierstraßovy věty z ní tedy lze vybrat podposloupnost $\{\operatorname{var}_a^b f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, pro kterou platí:

$$0 \le \lim_{k\to\infty} \operatorname{var}_a^b f_{n_k} = d < \infty,$$

tj.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, k_\varepsilon : k \ge k_\varepsilon \wedge D \in \mathscr{D}[a,b] \implies V(f_{n_k}, D) < d + \varepsilon$$

a

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall D \in \mathscr{D}[a,b] : V(f,D) = \lim_{k\to\infty} V(f_{n_k}, D) \le d + \varepsilon.$$

Odtud ovšem už plyne, že je

$$\operatorname{var}_a^b f = \sup_{D \in \mathscr{D}[a,b]} V(f,D) \le d < \infty,$$

tj. $f \in \mathbb{BV}[a,b]$.

d) Podle (1.4) máme

$$\begin{cases} \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon : \\ \quad n, m \ge n_\varepsilon \implies V(f_n - f_m, D) \le \operatorname{var}_a^b(f_n - f_m(x)) < \varepsilon \text{ pro každé } \ D \in \mathscr{D}[a,b]. \end{cases}$$

Tudíž, je-li $m \ge n_\varepsilon$, pak pro každé $D \in \mathscr{D}[a,b]$ platí

$$V(f - f_m, D) = \lim_{n\to\infty} V(f_n - f_m, D) \le \varepsilon$$

neboli

$$\operatorname{var}_a^b(f - f_m) \le \varepsilon.$$

To ovšem znamená, že

$$\lim_{m\to\infty} \|f - f_m\|_{\mathbb{BV}} = 0,$$

což zbývalo ještě dokázat. $\square$

1.11. Cvičení. Definujme pro $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \ 0 \le x \le \frac{1}{n}, \\ x \, \sin(\frac{\pi}{x}) & \text{pro } \ \frac{1}{n} \le x \le 1. \end{cases}$$

Ukažte, že $f_n \in \mathbb{BV}[0,1]$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,1]$, kde

$$f(x) = \begin{cases} x \, \sin(\frac{\pi}{x}) & \text{pro } \ x > 0, \\ 0 & \text{pro } \ x = 0 \end{cases},$$

a přitom f nemá konečnou variaci na $[0,1]$.

Nyní se budeme věnovat vlastnostem funkcí s konečnou variací vzhledem k derivování. Nejprve připomeňme pojem množin s nulovou mírou.

1.12. Definice. Množina $M \subset \mathbb{R}$ má *nulovou míru* ($\mu(M) = 0$), když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje spočetný systém otevřených intervalů$\{I_j, \ j \in \mathbb{N}\}$ takový, že je

$$M \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \quad \text{a} \quad \sum_{j=1}^{\infty} |I_j| < \varepsilon.$$

Řekneme, že nějaká vlastnost platí *skoro všude* (s.v.) na intervalu $[a,b]$, jestliže existuje množina $M \subset [a,b]$ nulové míry taková, že tato vlastnost platí pro každé $x \in [a,b] \setminus M$.

1.13. Cvičení.

(i) Každá spočetná podmnožina S v $\mathbb{R}$ má nulovou míru.

(ii) Sjednocení spočetně mnoha množin nulové míry má nulovou míru.

1.14. Věta. *Každá funkce $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ má vlastní derivaci $f'(x)$ pro s.v. $x \in [a,b]$.*

Důkaz Věty 1.14 je technicky komplikovaný. Odsouváme ho proto do Dodatku 9.1.

1.15. Poznámka. Lze dokonce dokázat (viz [6, Věty 84 a 91]), že je-li $f \in \mathbb{BV}[a,b]$, pak $f' \in \mathbb{L}^1[a,b]$. **ALE !!!!** Obecně neplatí pro každou funkci $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ zdánlivě evidentní rovnost

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) \, \mathrm{d}t.$$

Existují totiž funkce $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ nekonstantní na $[a,b]$ a přitom takové, že platí $f'(x) = 0$ s.v. na $[a,b]$.

1.16. Definice. Funkce $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ se nazývá *singulární*, jestliže platí $f'(x) = 0$ pro s.v. $x \in [a,b]$.

Nejjednodušším příkladem nekonstantních singulárních funkcí jsou funkce tvaru

$$f(x) = \chi_{[a,c]}(x),$$

kde $c \in (a,b)$. Jejich zobecněním jsou třídy *jednoduchých skokových funkcí* (anglicky *step functions*) resp. *skokových funkcí* (anglicky *break functions*).

1.17 . Definice. Funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je *konečná skoková funkce na* $[a,b]$ ($f \in \mathbb{S}[a,b]$), jestliže existuje dělení $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \in \mathscr{D}[a,b]$ takové, že na každém jeho dílčím otevřeném intervalu (α_{j-1}, α_j) je f konstantní.

Funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je *skoková funkce na* $[a,b]$ ($f \in \mathbb{B}[a,b]$), jestliže existuje $c \in \mathbb{R}$, $K \subset \mathbb{N}$ a posloupnosti

$$\{w_k\}_{k\in K} \subset [a,b], \quad \{c_k\}_{k\in K} \subset \mathbb{R} \quad \text{a} \quad \{d_k\}_{k\in K} \subset \mathbb{R}$$

takové, že platí

$$\sum_{k\in K} (|c_k| + |d_k|) < \infty$$

a

$$f(x) = c + \sum_{a<w_k\le x} c_k + \sum_{a\le w_k<x} d_k \quad \text{pro} \quad x \in [a,b]. \tag{1.5}$$

1.18 . Cvičení.

(i) Funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je konečná skoková funkce na $[a,b]$ právě tehdy, když existuje dělení $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ intervalu $[a,b]$ takové, že

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m} f(\alpha_j)\, \chi_{[\alpha_j]}(x) + \sum_{j=1}^{m} f\Big(\frac{\alpha_{j-1}+\alpha_j}{2}\Big)\, \chi_{(\alpha_{j-1},\alpha_j)}(x)$$

pro $x \in [a,b]$.

(ii) Pro každou $f \in \mathbb{B}[a,b]$ tvaru (1.5) platí

$$\operatorname{var}_a^b f = \sum_{k\in K} (|c_k| + |d_k|)$$

a tudíž $\mathbb{S}[a,b] \subset \mathbb{B}[a,b] \subset \mathbb{BV}[a,b]$.

1.19 . Věta. *Každá skoková funkce na* $[a,b]$ *je singulární na* $[a,b]$.

D ů k a z . Nechť $c \in \mathbb{R}$, $K \subset \mathbb{N}$, $\{w_k\}_{k\in K} \subset [a,b]$, $\sum_{k\in K} (|c_k| + |d_k|) < \infty$ a

$$f(x) = c + \sum_{a<w_k\le x} c_k + \sum_{a\le w_k<x} d_k \quad \text{na } [a,b].$$

Definujme pro $x \in [a,b]$:

$$v(x) = \sum_{a<w_k\le x} |c_k| + \sum_{a\le w_k<x} |d_k| \quad \text{na } [a,b].$$

Potom je

$$v(x) = \sum_{k\in K} v_k(x) \quad \text{na} \quad [a,b],$$

kde

$$v_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{když} \;\; a \le x < w_k, \\ |c_k| & \text{když} \;\; x = w_k, \\ |c_k| + |d_k| & \text{když} \;\; w_k < x \le b. \end{cases}$$

Každá funkce v_k je neklesající na $[a,b]$ a $v_k'(x) = 0$ pro $x \ne w_k$. Máme tedy

$$v'(x) = \sum_{k\in K} v_k'(x) = 0 \quad \text{pro} \quad x \notin \{w_k\}_{k\in K}, \quad \text{tj. pro s.v. } x \in [a,b].$$

Protože pro všechna $x, y \in [a,b]$, $x \ne y$, zřejmě platí

$$\Big|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\Big| \le \Big|\frac{v(x)-v(y)}{x-y}\Big|,$$

plyne odsud tvrzení věty. □

1.20 . Poznámka. Příklad funkce, která je spojitá, neklesající a singulární na daném intervalu, je uveden v [5, V.9,cvičení 4].

1.21 . Lemma. *Nechť $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ a nechť $W = \{w_k\}_{k\in K}$, $K \subset \mathbb{N}$, je množina bodů nespojitosti funkce f v $[a,b]$. Definujme*

$$f^{\,\mathrm{B}}(x) = \sum_{a<w_k\le x} \Delta^- f(w_k) + \sum_{a\le w_k<x} \Delta^+ f(w_k) \quad \textit{pro} \quad x \in [a,b]. \tag{1.6}$$

Potom je $f^{\,\mathrm{B}} \in \mathbb{BV}[a,b]$ a funkce $f - f^{\,\mathrm{B}}$ je spojitá na $[a,b]$.

D ů k a z . Podle Věty 1.9 máme

$$\operatorname{var}_a^b f^{\,\mathrm{B}} = \sum_{k\in K} (|\Delta^- f(w_k)| + |\Delta^+ f(w_k)|) < \infty$$

a tudíž $f^{\,\mathrm{B}} \in \mathbb{B}[a,b] \subset \mathbb{BV}[a,b]$. Dále, pro každé $x \in [a,b)$ máme

$$f^{\,\mathrm{B}}(x+) = \sum_{a<w_k\le x} \Delta^- f(w_k) + \sum_{a\le w_k\le x} \Delta^+ f(w_k).$$

Proto také

$$f^{\mathrm{B}}(x+) - f^{\mathrm{B}}(x) = \Delta^+ f(x)$$

a

$$(f(x+) - f^{\mathrm{B}}(x+)) - (f(x) - f^{\mathrm{B}}(x)) = \Delta^+ f(x) - \Delta^+ f(x) = 0.$$

Podobně, pro každé $x \in (a, b]$ je

$$f^{\mathrm{B}}(x-) = \sum_{a < w_k < x} \Delta^- f(w_k) + \sum_{a \le w_k < x} \Delta^+ f(w_k)),$$

a tedy

$$(f(x) - f^{\mathrm{B}}(x)) - (f(x-) - f^{\mathrm{B}}(x-)) = \Delta^- f(x) - \Delta^- f(x) = 0.$$

□

1.22. Definice. Funkce f^{B} přiřazená k f podle definice (1.6) budeme nazývat *skoková část* funkce f. Rozdíl $f - f^{\mathrm{B}}$ nazýváme *spojitá část* funkce f a značíme f^{C}.

1.23. Poznámka. Podle Lemmatu 1.21 lze každou funkci s konečnou variací rozložit na součet funkce spojité a funkce skokové. Takový rozklad se nazývá *Jordanův rozklad* funkce s konečnou variací. Obecně jsou skoková resp. spojitá část z Jordanova rozkladu určeny jednoznačně až na konstantu. Všimněme si ještě, že použitím charakteristických funkcí podintervalů v $[a, b]$ lze definici (1.6) ekvivalentně zapsat též ve tvaru

$$f^{\mathrm{B}}(x) = \sum_{k \in K} \Delta^- f(w_k)\, \chi_{[w_k,b]}(x) + \sum_{k \in K} \Delta^+ f(w_k)\, \chi_{(w_k,b]}(x).$$

1.24. Lemma. *Nechť* $f \in \mathbb{BV}[a, b]$, $K \subset \mathbb{N}$, $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ *je množina bodů nespojitosti funkce* f *v intervalu* $[a, b]$ *a nechť* f^{B} *je definována jako v Lemmatu* 1.21. *Definujme dále*

$$f^{\mathrm{B}}_n(x) = \sum_{k \in K \cap [1,n]} \Delta^- f(w_k)\, \chi_{[w_k,b]}(x) + \sum_{k \in K \cap [1,n]} \Delta^+ f(w_k)\, \chi_{(w_k,b]}(x)$$

pro $n \in \mathbb{N}$ *a* $x \in [a, b]$.

Potom je $f^{\mathrm{B}}_n \in \mathbb{S}[a, b]$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *a platí*

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{var}_a^b (f^{\mathrm{B}} - f^{\mathrm{B}}_n) = 0.$$

D ů k a z plyne z nerovnosti

$$\operatorname{var}_a^b (f^{\mathrm{B}} - f^{\mathrm{B}}_n) \le \sum_{k \in K \setminus [1,n]} (|\Delta^- f(w_k)| + |\Delta^+ f(w_k)|)$$

a z Věty 1.9. □

1.25. Věta (Helly). *Nechť* $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{BV}[a,b]$, $\varkappa \in \mathbb{R}$,

$$|f_n(a)| \le \varkappa \quad a \quad \operatorname{var}_a^b f_n \le \varkappa \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Potom existují funkce $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ *a podposloupnost*

$$\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

takové, že platí

$$|f(a)| \le \varkappa, \quad \operatorname{var}_a^b f \le \varkappa \quad a \quad \lim_{k \to \infty} f_{n_k}(x) = f(x) \quad \text{na } [a,b].$$

K důkazu Hellyovy věty využijeme následujících dvou lemmat.

Lemma 1. *Nechť*

$$|f_n(x)| \le M < \infty \quad \text{na } [a,b] \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Potom pro každou spočetnou $P \subset [a,b]$ *existuje podposloupnost* $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ *posloupnosti* $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ *taková, že limita*

$$\lim_{k \to \infty} f_{n_k}(p)$$

je konečná pro všechna $p \in P$.

D ů k a z . Nechť $P = \{p_k\}_{k=1}^\infty$. Máme $|f_n(p_k)| \le M < \infty$ pro všechna $n, k \in \mathbb{N}$. Podle Bolzanovy-Weierstraßovy věty lze tedy vybrat z $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ podposloupnost $\{f_{n_{k,1}}\}_{k=1}^\infty$, pro níž existuje konečná limita

$$\lim_{k \to \infty} f_{n_{k,1}}(p_1) = q_1 \in \mathbb{R}.$$

Podobně existují

$$\{f_{n_{k,2}}\}_{k=1}^\infty \subset \{f_{n_{k,1}}\}_{k=1}^\infty \quad \text{a} \quad q_2 \in \mathbb{R}$$

tak, že

$$\lim_{k \to \infty} f_{n_{k,2}}(p_2) = q_2 \in \mathbb{R}.$$

Takto pro každé $j \in \mathbb{N}$ najdeme posloupnosti

$$\{f_{n_{k,j}}\}_{k=1}^\infty \subset \{f_{n_{k,j-1}}\}_{k=1}^\infty \quad \text{a} \quad q_j \in \mathbb{R}$$

takové, že platí

$$\lim_{k \to \infty} f_{n_{k,\ell}}(p_\ell) = q_\ell \in \mathbb{R} \quad \text{pro každé } \ell \in \{1, 2, \ldots, j\}.$$

Položme $f_{n_k} = f_{n_{k,k}}$ pro $k \in \mathbb{N}$. Potom

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(p_j) = q_j \in \mathbb{R} \quad \text{pro každé } j \in \mathbb{N}.$$

$\square$

Lemma 2. *Předpokládejme, že všechny funkce f_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou neklesající na $[a,b]$ a že existuje $M \in (0,\infty)$ takové, že $||f_n|| \le M$ platí pro každé $n \in \mathbb{N}$. Potom existují podposloupnost*

$$\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$$

a funkce $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ neklesající na $[a,b]$ takové, že platí

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x) \quad \text{na} \quad [a,b].$$

D ů k a z . Nechť $P = (\mathbb{P} \cap (a,b)) \cup [a] \cup [b]$ je množina racionálních čísel z intervalu (a,b) doplněná o body a, b. Body množiny P očíslujme tak, že bude $P = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$. Podle Lemmatu 1 existuje podposloupnost

$$\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$$

a zobrazení $\varphi : P \to \mathbb{R}$ takové, že platí

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(p) = \varphi(p) \quad \text{pro všechna } p \in P.$$

Zřejmě platí

$$\varphi(p') \le \varphi(p'') \quad \text{pro všechna } p', p'' \in P, p' \le p''.$$

Dále, definujme pro $x \in (a,b) \setminus P$

$$\varphi(x) = \sup_{p \in P \cap [a,x)} \varphi(p).$$

Potom máme

$$\varphi(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) \quad \text{pro} \quad x \in P \quad \text{a} \quad \varphi(x) = \lim_{\substack{p\to x- \\ p \in P}} \varphi(p)$$

a φ je definovaná a neklesající na $[a,b]$. Ukážeme, že v každém bodě $x_0 \in (a,b)$, ve kterém je funkce φ spojitá platí

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_0) = \varphi(x_0). \tag{1.7}$$

Vskutku, buď dáno $\varepsilon > 0$. Potom existuje $\delta_\varepsilon > 0$ takové, že

$$x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0 + \delta_\varepsilon \implies \varphi(x_0) - \varepsilon < \varphi(x) < \varphi(x_0) + \varepsilon.$$

Zvolíme-li $r' \in P \cap (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0)$ a $r'' \in P \cap (x_0, x_0 + \delta_\varepsilon)$, bude platit

$$\varphi(x_0) - \varepsilon < \varphi(r') \le \varphi(x_0) \le \varphi(r'') < \varphi(x_0) + \varepsilon.$$

Dále, zvolme k_ε tak, aby platilo

$$\varphi(r') - \varepsilon < f_{n_k}(r') < \varphi(r') + \varepsilon \quad \text{a} \quad \varphi(r'') - \varepsilon < f_{n_k}(r'') < \varphi(r'') + \varepsilon$$

pro každé $k \ge k_\varepsilon$. Potom, pro každé $k \ge k_\varepsilon$ dostaneme také

$$\begin{aligned}\varphi(x_0) - 2\varepsilon < \varphi(r') - \varepsilon < f_{n_k}(r') \le f_{n_k}(x_0) \\ \le f_{n_k}(r'') < \varphi(r'') + \varepsilon < \varphi(x_0) + 2\varepsilon,\end{aligned}$$

čili platí (1.7).

Dokázali jsme tedy, že značí-li Q množinu bodů nespojitosti funkce φ v (a,b), pak

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = \varphi(x) \quad \text{pro} \quad x \in [a,b] \setminus Q.$$

Podle Věty 1.7 je množina Q spočetná. Můžeme tedy použít ještě jednou Lemma 1 a dokázat tak existenci vybrané posloupnosti

$$\{f_{n_{k_\ell}}\}_{\ell=1}^{\infty} \subset \{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty},$$

která má limitu $\psi(x) \in \mathbb{R}$ pro každé $x \in Q$. Definujeme-li tedy

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{když} \;\; x \in [a,b] \setminus Q, \\ \psi(x) & \text{když} \;\; x \in Q, \end{cases}$$

bude

$$\lim_{\ell} f_{n_{k_\ell}}(x) = f(x) \quad \text{na } [a,b]$$

a protože funkce, která je na intervalu $[a,b]$ bodovou limitou posloupnosti funkcí neklesajících na $[a,b]$, je také neklesající, lemma je dokázáno. □

Důkaz Věty 1.25. Použitím Cvičení 1.5 a Lemmatu 2 se snadno ukáže existence funkce $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ a podposloupnosti $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ takových, že je

$$|f(a)| \le \varkappa \quad \text{a} \quad \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x) \;\; \text{na} \;\; [a,b].$$

Dále, protože pro libovolné dělení $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \in \mathscr{D}[a,b]$ máme

$$\begin{aligned} V(f,D) = \sum_{j=1}^{m} |f(\alpha_j) - f(\alpha_{j-1})| &= \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{m} |f_{n_k}(\alpha_j) - f_{n_k}(\alpha_{j-1})| \\ &= \lim_{k\to\infty} V(f_{n_k}, D) \le \lim_{k\to\infty} \operatorname{var}_a^b f_{n_k} \le \varkappa, \end{aligned}$$

platí také $\operatorname{var}_a^b f \le \varkappa$. □

Kapitola 2

Absolutně spojité funkce.

2.1 . Definice. Funkce $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ je *absolutně spojitá* na intervalu $[a,b]$, jestliže ke každému $\varepsilon>0$ existuje $\delta>0$ takové, že

$$\sum_{j=1}^{m}|f(\beta_j)-f(\alpha_j)|<\varepsilon$$

platí pro každý systém intervalů $[\alpha_j,\beta_j]$, $j=1,2,,\dots,m$, splňující

$$a\le\alpha_1\le\beta_1\le\alpha_2\le\beta_2\dots\le\beta_{m-1}\le\alpha_m\le\beta_m\le b\quad\text{a}\quad\sum_{j=1}^{m}(\beta_j-\alpha_j)<\delta. \tag{2.1}$$

Množinu funkcí absolutně spojitých na $[a,b]$ značíme $\mathbb{AC}[a,b]$ resp. $\mathbb{AC}$ (je-li ze souvislostí jasné, o jaký interval se jedná).

2.2 . Cvičení. (i) Každá funkce absolutně spojitá na intervalu $[a,b]$ je na tomto intervalu stejnoměrně spojitá.

(ii) Nechť funkce $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ splňuje Lipschitzovu podmínku na intervalu $[a,b]$, tj. existuje $L\in\mathbb{R}$ takové, že

$$|f(x)-f(y)|\le L|x-y|\quad\text{platí pro všechna } x,y\in[a,b].$$

Potom $f\in\mathbb{AC}[a,b]$.

2.3 . Věta. *Každá funkce absolutně spojitá na intervalu $[a,b]$ má na tomto intervalu konečnou variaci.*

D ů k a z . Nechť $f\in\mathbb{AC}$. Zvolme $\delta>0$ tak, aby platilo

$$\sum_{j=1}^{m}|f(\beta_j)-f(\alpha_j)|<1$$

pro každý systém intervalů $[\alpha_j,\beta_j]$, $j=1,2,,\dots,k$, splňující (2.1). Dále, zvolme dělení $\{x_0,x_1,\dots,x_k\}$ intervalu $[a,b]$ tak, aby platilo

$$0<x_i-x_{i-1}<\delta\quad\text{pro každé } i=1,2,\dots,k.$$

Potom pro každé $i=1,2,\dots,k$ a každé dělení $D^i=\{\alpha_0^i,\alpha_1^i,\dots,\alpha_{m_i}^i\}$ intervalu $[x_{i-1},x_i]$ máme

$$\sum_{j=1}^{m_i}(\alpha_j^i-\alpha_{j-1}^i)=x_i-x_{i-1}<\delta$$

a tudíž (podle Věty 1.3)

$$\operatorname{var}_a^b f = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{var}_{x_{i-1}}^{x_i} f = \sum_{i=1}^{k} \sup_{D^i \in \mathscr{D}[x_{i-1},x_i]} \sum_{j=1}^{m_i} |f(\alpha_j^i) - f(\alpha_{j-1}^i| < k < \infty.$$

□

2.4 . Věta. *Jestliže* $f,\ g \in \mathbb{AC}[a,b]$, *pak* $|f|,\ f+g,\ f\,g,\ \max\{f,g\},\ \min\{f,g\} \in \mathbb{AC}[a,b]$. *Je-li navíc* $|f(x)| > 0$ *na* $[a,b]$, *pak také* $f^{-1} \in \mathbb{AC}[a,b]$.

D ů k a z . Nechť $f,\ g \in \mathbb{AC}[a,b]$.

a) Pro libovolná $x,\ y \in [a,b]$ platí $|f(x)| \le |f(x) - f(y)| + |f(y)|$. Tudíž

$$|f(x) - f(y)| \ge \big||f(x)| - f(y)|\big|$$

a

$$\sum_{j=1}^{m} \big||f(\beta_j)| - |f(\alpha_j)|\big| \le \sum_{j=1}^{m} |f(\beta_j) - f(\alpha_j)|.$$

Odtud už ovšem okamžitě plyne, že také $|f| \in \mathbb{AC}[a,b]$.

b) Druhé a třetí tvrzení, tj. $f+g \in \mathbb{AC}[a,b]$ a $f\,g \in \mathbb{AC}[a,b]$, plynou z nerovností

$$|(f(x)+g(x)) - (f(y)+g(y))| \le |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)|$$

a

$$|f(x)\,g(x) - f(y)\,g(y)| \le \|f\|\,|g(x) - g(y)| + \|g\|\,|f(x) - f(y)|.$$

c) Protože pro libovolné $x \in [a,b]$ máme

$$\max\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}\big(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|\big)$$

a

$$\min\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}\big(f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|\big),$$

platí v důsledku a) a b) také

$$\max\{f,g\} \in \mathbb{AC}[a,b] \quad \text{a} \quad \min\{f,g\} \in \mathbb{AC}[a,b].$$

d) Konečně, je-li navíc $|f(x)| > 0$ na $[a,b]$, pak existuje $\mu > 0$ takové, že platí $|f(x)| \ge \mu$ na $[a,b]$ a tudíž také

$$\Big|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)}\Big| \le \frac{|f(x) - f(y)|}{\mu^2}.$$

Nyní už je snadné ukázat, že $f^{-1} \in \mathbb{AC}[a,b]$. □

2.5. Poznámka. Podle vět 1.14 a 2.3 každá funkce f absolutně spojitá na intervalu $[a,b]$ má konečnou derivaci $f'(x)$ pro s.v. $x \in [a,b]$. Lze dokázat (viz [6, Věty 93 a 94]), že funkce $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ je absolutně spojitá na $[a,b]$ právě tehdy, když

$$f(x) - f(a) = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{na } [a,b]$$

pro nějakou funkci $g \in \mathbb{L}^1[a,b]$. (Potom je $f'(x) = g(x)$ pro s.v. $x \in [a,b]$.) Speciálně, platí, že je-li $f \in \mathbb{AC}[a,b]$ a $f'(x) = 0$ pro s.v. $x \in [a,b]$, pak je f konstantní na $[a,b]$. Dále, zobrazení

$$f \in \mathbb{AC}[a,b] \to (f(a), f') \in \mathbb{R} \times \mathbb{L}^1[a,b]$$

a

$$(c,g) \in \mathbb{R} \times \mathbb{L}^1[a,b] \to f(x) := c + \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{AC}[a,b]$$

představují vzájemně jednoznačný vztah mezi $\mathbb{AC}[a,b]$ a $\mathbb{R} \times \mathbb{L}^1[a,b]$. Na $\mathbb{AC}[a,b]$ definujeme normu předpisem

$$\|f\|_{\mathbb{AC}} = |f(a)| + \|f'\|_1 \quad \text{pro} \quad f \in \mathbb{AC}[a,b]$$

a $\mathbb{AC}[a,b]$ je pak Banachův prostor. Obecný spojitý lineární funkcionál na $\mathbb{AC}[a,b]$ má tvar:

$$f \in \mathbb{AC}[a,b] \to q\,f(a) + \int_a^b p\,f'\,\mathrm{d}t,$$

kde $q \in \mathbb{R}$ a $p \in \mathbb{L}^\infty[a,b]$. ($\mathbb{L}^\infty[a,b]$ značí prostor funkcí "v podstatě" ohraničených na $[a,b]$.)

Další podrobnosti o funkcích absolutně spojitých lze nalézti v monografiích V. Jarníka *Diferenciální počet II* [5, V.9] a *Integrální počet II* [6, V.5] a Š. Schwabika *Integrace v* $\mathbb{R}$ *(Kurzweilova teorie)* [9, XIII.4].

Víme již (viz Lemma 1.21 a Poznámka 1.23), že každou funkci s konečnou variací na $[a,b]$ můžeme rozložit na součet funkce spojité a funkce skokové resp. na rozdíl dvou funkcí neklesajících na $[a,b]$ (viz Věta 1.4). Funkce s konečnou variací lze také rozložit na součet funkce absolutně spojité a funkce singulární. Důkaz následujícího tvrzení je uveden např. v [6, Věta 125].

2.6. Věta (LEBESGUEŮV ROZKLAD FUNKCE S KONEČNOU VARIACÍ). *Pro každou funkci $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ existuje singulární funkce f^{SING} taková, že $f - f^{\mathrm{SING}}$ je absolutně spojitá na $[a,b]$. Funkce f^{SING} je určena jednoznačně až na konstantu.*

2.7 . Definice. Jestliže $f \in \mathbb{BV}[a,b]$, pak funkci f^{SING} přiřazenou k f podle Věty 2.6 nazýváme *singulární část* funkce f. Dále, rozdíl $f - f^{\mathrm{SING}}$ nazýváme *absolutně spojitá část* funkce f a značíme f^{AC}. Konečně, $f^{\mathrm{SC}} := f - f^{\mathrm{B}} - f^{\mathrm{AC}} = f^{\mathrm{C}} - f^{\mathrm{AC}}$ je *spojitá singulární část* funkce f.

Kapitola 3

Regulované funkce.

3.1 . Definice. Funkce $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ se nazývá *regulovaná* na $[a,b]$, jestliže pro každé $t\in(a,b]$ a každé $s\in[a,b)$ existují konečné limity

$$f(t-)=\lim_{\tau\to t-}f(\tau)\quad\text{a}\quad f(s+)=\lim_{\tau\to s+}f(\tau),$$

tj. má-li na intervalu $[a,b]$ nespojitosti nejvýše *1. druhu.* Množinu funkcí regulovaných na $[a,b]$ značíme $\mathbb{G}[a,b]$.

3.2 . Poznámka. Zřejmě platí $\mathbb{BV}[a,b]\cup\mathbb{C}[a,b]\subset\mathbb{G}[a,b]$, přičemž $\mathbb{G}[a,b]\setminus\mathbb{C}[a,b]\neq\emptyset$ a $\mathbb{G}[a,b]\setminus\mathbb{BV}[a,b]\neq\emptyset$.

Podobně jako pro funkce s konečnou variací (viz Lemma z důkazu Věty 1.7) platí pro regulované funkce:

3.3 . Věta. *Každá funkce regulovaná na $[a,b]$ má na $[a,b]$ nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti.* □

3.4 . Věta. *Jestliže pro posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{G}[a,b]$ a funkci $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ platí $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ stejnoměrně na $[a,b]$ (tj. $\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|=0$), pak $f\in\mathbb{G}[a,b]$.*

D ů k a z . Nechť $x\in[a,b)$, nechť $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset(x,b]$ je libovolná posloupnost taková, že $x_k<x$ pro všechna $k\in\mathbb{N}$ a $x_k\to x$ pro $k\to\infty$. Nechť je dáno libovolné $\varepsilon>0$. Zvolme $n_0\in\mathbb{N}$ a $k_0\in\mathbb{N}$ tak, aby platilo

$$\|f-f_{n_0}\|<\frac{\varepsilon}{3}\quad\text{a}\quad|f_{n_0}(x_k)-f_{n_0}(x_\ell)|<\frac{\varepsilon}{3}\quad\text{pro všechna } k,\ell\ge k_0.$$

Potom budeme mít pro všechna $k,\ell\ge k_0$

$$\begin{aligned}&|f(x_k)-f(x_\ell)|\\&\qquad\le|f(x_k)-f_{n_0}(x_k)|+|f_{n_0}(x_k)-f_{n_0}(x_\ell)|+|f(x_\ell)-f_{n_0}(x_\ell)|<\varepsilon,\end{aligned}$$

tj. existuje konečná limita $f(x+)=\lim_{k\to\infty}f(x_k)$. Podobně bychom ukázali, že pro každé $x\in(a,b]$ existuje konečná limita $f(x-)$. □

3.5 . Definice. Pro libovolnou funkci $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, podinterval $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ a dělení $D=\{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_m\}\in\mathscr{D}[a,b]$ definujeme

$$\omega_{(\alpha,\beta)}(f)=\sup_{x',x''\in(\alpha,\beta)}|f(x')-f(x'')|\quad\text{a}\quad\omega_D(f)=\max_{i=1,2,\dots,m}\omega_{(\alpha_{i-1},\alpha_i)}(f).$$

3.6. Věta. *Následující tři tvrzení jsou ekvivalentní*

(i) $f \in \mathbb{G}[a,b]$.

(ii) *Existuje posloupnost* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{S}[a,b]$ *taková, že platí* $f_n \rightrightarrows f$ *na* $[a,b]$ *pro* $n \to \infty$.

(iii) *Pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje dělení* $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \in \mathscr{D}[a,b]$ *takové, že* $\omega_D(f) < \varepsilon$.

D ů k a z . a) Implikace (ii) $\Longrightarrow$ (i) je dokázána Větou 3.4.

b) Předpokládejme, že platí (i) a nechť je dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Potom pro každé $x \in [a,b]$ existuje $\delta(x) > 0$ takové, že platí

$$x - \delta(x) > a \ \text{ pro všechna } \ x \in (a,b], \quad x + \delta(x) < b \ \text{ pro všechna } \ x \in [a,b)$$

a

$$\begin{cases} \omega_{(a,a+\delta(a))}(f) < \varepsilon, & \omega_{(b-\delta(b),b)}(f) < \varepsilon, \\ \omega_{(x-\delta(x),x)}(f) < \varepsilon \quad \text{a} & \omega_{(x,x+\delta(x))}(f) < \varepsilon \quad \text{pro všechna } x \in (a,b). \end{cases} \tag{3.1}$$

Intervaly

$$[a, a+\delta(a)),\ (x-\delta(x), x+\delta(x)),\ x \in (a,b), (b-\delta(b), b]$$

tvoří otevřené pokrytí intervalu $[a,b]$, ze kterého lze podle Vitaliovy věty (viz např. [5, Věta 81]) vybrat pokrytí konečné:

$$[a, a+\delta(a)),\ (x_i-\delta(x_i), x_i+\delta(x_i)),\ i = 1,2,\dots,m-1, (b-\delta(b), b],$$

přičemž vzhledem k (3.1) platí

$$\omega_{(x_i-\delta(x_i),x_i)}(f) < \varepsilon \quad \text{a} \quad \omega_{(x_i,x_i+\delta(x_i))}(f) < \varepsilon \text{ pro všechna } i = 1,2,\dots m-1.$$

Označme $x_0 := a$ a $x_m := b$ a nechť

$$D = \{x_0, \alpha_1, x_1, \dots \alpha_{m-1}, x_{m-1}, \alpha_m, x_m\},$$

kde

$$\alpha_i \in (x_i - \delta(x_i), x_{i-1} + \delta(x_{i-1})) \cap (x_{i-1}, x_i), \quad i = 1,2,\dots,m-1.$$

Potom

$$\omega_{(a,\alpha_1)}(f) \le \omega_{(a,a+\delta(a))}(f) < \varepsilon, \qquad \omega_{(\alpha_m,b)}(f) \le \omega_{(b-\delta(b),b)}(f) < \varepsilon$$

a

$$\omega_{(\alpha_i,x_i)}(f) \le \omega_{(x_i-\delta(x_i),x_i)}(f) < \varepsilon \quad \text{a} \quad \omega_{(x_i,\alpha_{i+1})}(f) \le \omega_{(x_i,x_i+\delta(x_i))}(f) < \varepsilon$$

pro každé $i = 1,2,\dots,m-1$, tj.

$$\omega_D(f) < \varepsilon.$$

c) Předpokládejme, že platí (iii). Nechť je dáno $\varepsilon > 0$ a nechť

$$D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \in \mathscr{D}[a,b]$$

je dělení $[a,b]$ takové, že $\omega_D(f) < \varepsilon$. Pro každé $i \in \{1,2,\dots,m\}$ zvolme $\xi_i \in (\alpha_{i-1}, \alpha_i)$ a definujme

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} f(\alpha_i) & \text{pro } \ x = \alpha_i, \\ f(\xi_i) & \text{pro } \ x \in (\alpha_{i-1}, \alpha_i). \end{cases}$$

Pro každé $x \in [a,b]$ máme $|f(x) - g_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ a tudíž také $\|f - g_\varepsilon\| < \varepsilon$. Jestliže tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme $f_n = g_{1/n}$, bude $f_n \in \mathbb{S}[a,b]$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$ pro $n \to \infty$. □

3.7. Důsledky.

(i) *Každá funkce regulovaná na $[a,b]$ je na $[a,b]$ ohraničená. Tudíž také $G[a,b] \subset \mathbb{L}^1[a,b]$.*

(ii) *Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje nejvýše konečně mnoho $x \in [a,b]$ takových, že platí*

$$|\Delta^+ f(x)| \ge \varepsilon \quad \textit{nebo} \quad |\Delta^- f(x)| \ge \varepsilon.$$

D ů k a z . Obě tvrzení plynou z vlastnosti (iii) z Věty 3.6. □

3.8. Věta. $\mathbb{G}[a,b]$ *je Banachův prostor vzhledem k normě*

$$\|f\|_{\mathbb{G}} = \|f\| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

D ů k a z . Předpokládejme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{G}[a,b]$ je cauchyovská v $\mathbb{G}[a,b]$. Jako v částech a) a b) důkazu Věty 1.10 dokážeme, že existuje funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ takové, že platí $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$. Podle Věty 3.4 ovšem platí $f \in \mathbb{G}[a,b]$ a tím je věta dokázána. □

3.9. Poznámky.

(i) $f \in \mathbb{S}[a,b] \iff f$ je konečná lineární kombinace charakteristických funkcí intervalů $[a,\tau]$, $[a,\tau)$, $\tau \in (a,b]$, a charakteristické funkce jednobodového intervalu $[a]$, tj.

$$\mathbb{S}[a,b] = \mathrm{Lin}\Big(\chi_{[a,\tau]}, \chi_{[a,\tau)}, \tau \in (a,b], \chi_{[a]}\Big).$$

(Lin(M) značí lineární obal množiny M.)

(ii) Množina $\mathbb{S}[a,b]$ je podle tvrzení (ii) Věty 3.6 hustá v $\mathbb{G}[a,b]$, tj. $\overline{\mathbb{S}[a,b]} = \mathbb{G}[a,b]$, kde $\overline{\mathbb{S}[a,b]}$ značí uzávěr $\mathbb{S}[a,b]$ v $\mathbb{G}[a,b]$.

3.10. Lemma. *Nechť* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{G}[a,b]$ *a* $f_n \rightrightarrows f$ *na* $[a,b]$. *Potom platí též*

$$f_n(x-) \rightrightarrows f(x-) \quad a \quad f_n(x+) \rightrightarrows f(x+) \quad na\ [a,b],$$

kde $f(a-) = f(a)$, $f(b+) = f(b)$ *a* $f_k(a-) = f_k(a)$ *a* $f_k(b+) = f_k(b)$ *pro* $k \in \mathbb{N}$.

D ů k a z . Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$\widetilde{f}_n(x) = \begin{cases} f_n(x+) & \text{když } x \in [a,b), \\ f_n(b) & \text{když } x = b \end{cases}$$

a

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x+) & \text{když } x \in [a,b), \\ f(b) & \text{když } x = b. \end{cases}$$

Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Existuje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takové, že je $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$ pro každé $n \geq n_\varepsilon$ a každé $t \in [a,b]$. Odtud ovšem limitním přechodem $t \to x+$ dostaneme, že také pro každé $x \in [a,b)$ a každé $n \geq n_\varepsilon$ platí

$$|\widetilde{f}_n(x) - \widetilde{f}(x)| = \lim_{t \to x+} |f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon,$$

tj.

$$\lim_{n \to \infty} \|\widetilde{f}_n - \widetilde{f}\| = 0$$

neboli

$$f_n(x+) \rightrightarrows f(x+).$$

Podobně bychom ukázali, že platí i $f_n(x-) \rightrightarrows f(x-)$ na $[a,b]$. □

Ve zbývající části kapitoly uvedeme několik tvrzení, které budou později (zejména v kapitole 6) užitečné. Nejprve shrneme důsledky Lemmatu 3.10 pro některé důležité podmnožiny prostoru $\mathbb{G}[a,b]$.

3.11. Důsledky. *Množiny*

$$\begin{cases} \mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b] = \{f \in \mathbb{G}[a,b] : f(x-) = f(x) \ na\ (a,b)\}, \\ \widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{L}}[a,b] = \{f \in \mathbb{G}[a,b] : f(x-) = f(x) \ na\ (a,b]\}, \\ \mathbb{G}_{\mathrm{R}}[a,b] = \{f \in \mathbb{G}[a,b] : f(x+) = f(x) \ na\ (a,b)\}, \\ \widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{R}}[a,b] = \{f \in \mathbb{G}[a,b] : f(x-) = f(x) \ na\ [a,b)\}, \\ \mathbb{G}_{reg}[a,b] = \{f \in \mathbb{G}[a,b] : f(x-) + f(x+) = 2\,f(x) \ na\ (a,b)\} \end{cases} \tag{3.2}$$

jsou uzavřené v $\mathbb{G}[a,b]$ *a tudíž jsou to také Banachovy prostory vzhledem k operacím a normě indukovaným z* $\mathbb{G}[a,b]$.

□

3.12. Lemma.

$$\overline{\mathbb{G}_{\rm L}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]}=\mathbb{G}_{\rm L}[a,b],\qquad \overline{\widetilde{\mathbb{G}}_{\rm L}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]}=\widetilde{\mathbb{G}}_{\rm L}[a,b],$$

$$\overline{\mathbb{G}_{\rm R}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]}=\mathbb{G}_{\rm R}[a,b],\qquad \overline{\widetilde{\mathbb{G}}_{\rm R}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]}=\widetilde{\mathbb{G}}_{\rm R}[a,b],$$

$$\overline{\mathbb{G}_{reg}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]}=\mathbb{G}_{reg}[a,b].$$

D ů k a z . Dokážeme pouze první a poslední tvrzení. Zbývající vztahy se dokážou analogicky.

(i) Nechť $f\in\mathbb{G}_{\rm L}[a,b]$ a $\varepsilon>0$. Podle Věty 3.6 (ii) existuje $\varphi\in\mathbb{S}[a,b]$ takové, že

$$|f(x)-\varphi(x)|\le\|f-\varphi\|<\varepsilon\quad\text{pro všechna } x\in[a,b]. \tag{3.3}$$

Dále, pro každé $x\in(a,b)$ existuje $\delta(x)>0$ takové, že $x-\delta(x)>a$ a

$$|f(x)-f(t)|=|f(x-)-f(t)|<\varepsilon\quad\text{pro všechna } t\in(x-\delta(x),x).$$

Pro každé $x\in(a,b)$ a $t\in(x-\delta(x),x]$ tedy máme

$$|\varphi(x)-\varphi(t)|\le|\varphi(x)-f(x)|+|f(x)-f(t)|+|f(t)-\varphi(t)|<3\,\varepsilon,$$

tj.

$$|\varphi(x)-\varphi(x-)|<3\,\varepsilon.$$

Položme

$$\widetilde{\varphi}(x)=\begin{cases}\varphi(x) & \text{pro}\ \ x=a \text{ nebo } x=b.\\ \varphi(x-) & \text{pro}\ \ x\in(a,b),\end{cases}$$

Potom $\varphi\in\mathbb{G}_{\rm L}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]$,

$$|f(x)-\widetilde{\varphi}(x)|=|f(x)-\varphi(x)|<\varepsilon \text{ když }\ x=a \text{ nebo } x=b$$

a

$$|f(x)-\widetilde{\varphi}(x)|\le|f(x)-\varphi(x)|+|\varphi(x)-\varphi(x-)|<4\,\varepsilon \text{ když }\ x\in(a,b).$$

Odtud už plyne, že množina $\mathbb{G}_{\rm L}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]$ je hustá v $\mathbb{G}_{\rm L}[a,b]$.

(ii) Nechť $f\in\mathbb{G}_{\rm reg}[a,b]$. Nechť je dáno $\varepsilon>0$ a funkce $\varphi\in\mathbb{S}[a,b]$ je taková, že platí (3.3). Potom musí být také

$$|f(x-)-\varphi(x-)|\le\varepsilon\quad\text{pro}\ \ x\in[a,b)\quad\text{a}\quad|f(x+)-\varphi(x+)|\le\varepsilon\quad\text{pro}\ \ x\in(a,b]. \tag{3.4}$$

Položme

$$\widetilde{\varphi}(x)=\begin{cases}\varphi(a) & \text{když}\ \ x=a,\\ \frac{1}{2}\Big(\varphi(x+)+\varphi(x-)\Big) & \text{když}\ \ x\in(a,b)\\ \varphi(b) & \text{když}\ \ x=b.\end{cases} \tag{3.5}$$

Potom $\widetilde{\varphi} \in \mathbb{S}[a,b] \cap \mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b]$. Dále, vzhledem k (3.4) a (3.5),

$$
\begin{aligned}
|f(x) - \widetilde{\varphi}(x)| &= \left|\tfrac{1}{2}\,[f(x+) + f(x-)] - \tfrac{1}{2}\,[\varphi(x+) + \varphi(x-)]\right| \\
&\le \tfrac{1}{2}\Big(\big|f(x+) - \varphi(x+)\big| + \big|f(x-) - \varphi(x-)\big|\Big) \le \varepsilon \quad \text{když } \ x \in (a,b).
\end{aligned}
$$

Konečně, podle (3.3) a (3.5) máme

$$
|f(x) - \widetilde{\varphi}(x)| = |f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon \text{ když } \ x = a \text{ nebo } x = b.
$$

Odtud už plyne, že platí $\overline{\mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b]} = \mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b]$. □

3.13. Lemma.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b] &= \mathrm{Lin}\Big(1, \chi_{(\tau,b]}, \tau \in [a,b), \chi_{[b]}\Big), \\
\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{L}}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b] &= \mathrm{Lin}\Big(1, \chi_{[a]}, \chi_{(\tau,b]}, \tau \in [a,b)\Big), \\
\mathbb{G}_{\mathrm{R}}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b] &= \mathrm{Lin}\Big(1, \chi_{[a]}, \chi_{[\tau,b]}, \tau \in [a,b)\Big), \\
\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{R}}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b] &= \mathrm{Lin}\Big(1, \chi_{[\tau,b]}, \tau \in [a,b), \chi_{[b]}\Big), \\
\mathbb{G}_{reg}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b] &= \mathrm{Lin}\Big(1, \chi_{(a,b]}, \frac{1}{2}\,\chi_{[\tau]} + \chi_{[\tau,b]}, \tau \in (a,b), \chi_{[b]}\Big),
\end{aligned}
$$

D ů k a z . Dokážeme např. poslední z uvedených relací. Nechť tedy $f \in \mathbb{S}[a,b] \cap \mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b]$. Potom existují $m \in \mathbb{N}$, $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{m+1} \in \mathbb{R}$ a dělení $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ intervalu $[a,b]$ takové, že

$$
f(x) = \begin{cases}
c_0 & \text{když } \ x = a, \\
c_j & \text{když } \ x \in (\alpha_{j-1}, \alpha_j) \text{ pro nějaké } \ j = 1, 2, \ldots, m, \\
\frac{c_j + c_{j+1}}{2} & \text{když } \ x = \alpha_j \text{ pro nějaké } \ j = 1, 2, \ldots, m-1, \\
c_{m+1} & \text{když } \ x = b,
\end{cases}
$$

tj.

$$
\left\{
\begin{aligned}
&f(x) = c_0\,\chi_{[a]}(x) + \textstyle\sum_{j=1}^{m} c_j\,\chi_{(\alpha_{j-1},\alpha_j)}(x) \\
&\qquad + \tfrac{1}{2}\Big(\textstyle\sum_{j=1}^{m-1}\big(c_j + c_{j+1}\big)\chi_{[\alpha_j]}(x)\Big) + c_{m+1}\chi_{[b]}(x) \text{ pro } \ x \in [a,b].
\end{aligned}
\right.
\tag{3.6}
$$

Pravou stranu vztahu (3.6) můžeme upravit takto

$$
\begin{aligned}
f = \quad & c_0\,\chi_{[a,b]} - c_0\,\chi_{(a,b]} + \sum_{j=1}^{m} c_j\,\chi_{(\alpha_{j-1},b]} - \sum_{j=1}^{m-1} c_j\,\chi_{[\alpha_j,b]} - c_m\,\chi_{[b]} \\
+ \quad & \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1} c_j\,\chi_{[\alpha_j]} + \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1} c_{j+1}\,\chi_{[\alpha_j]} + c_{m+1}\,\chi_{[b]}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= c_0\,\chi_{[a,b]} - c_0\,\chi_{(a,b]} + \sum_{j=1}^{m} c_j\,\chi_{(\alpha_{j-1},b]} - \sum_{j=1}^{m-1} c_j\,(\chi_{(\alpha_j,b]} + \chi_{[\alpha_j]}) \\
&+ \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1} c_j\,\chi_{[\alpha_j]} + \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1} c_{j+1}\,\chi_{[\alpha_j]} + (c_{m+1}-c_m)\,\chi_{[b]} \\
&= c_0\,\chi_{[a,b]} - c_0\,\chi_{(a,b]} + \sum_{j=0}^{m-1} c_{j+1}\,\chi_{(\alpha_j,b]} - \sum_{j=1}^{m-1} c_j\,\chi_{(\alpha_j,b]} \\
&- \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1} c_j\,\chi_{[\alpha_j]} + \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1} c_{j+1}\,\chi_{[\alpha_j]} + (c_{m+1}-c_m)\,\chi_{[b]} \\
&= c_0\chi_{[a,b]} + (c_1-c_0)\,\chi_{(a,b]} + \sum_{j=1}^{m-1}(c_{j+1}-c_j)\,\Big(\chi_{(\alpha_j,b]} + \tfrac{1}{2}\chi_{[\alpha_j]}\Big) \\
&+ (c_{m+1}-c_m)\,\chi_{[b]} \\
&= d_0\chi_{[a,b]} + d_1\,\chi_{(a,b]} + \sum_{j=2}^{m} d_j\,\Big(\chi_{(\alpha_j,b]} + \tfrac{1}{2}\chi_{[\alpha_j]}\Big) + d_{m+1}\,\chi_{[b]},
\end{aligned}$$

kde

$$d_0 = c_0,\ d_j = c_j - c_{j-1} \text{ pro } \ j = 1,2,\dots,m+1, \tag{3.7}$$

Dokázali jsme tedy, že $f \in \mathrm{Lin}\Big(1, \chi_{(a,b]}, \frac{1}{2}\,\chi_{[\tau]} + \chi_{[\tau,b]}, \tau \in (a,b), \chi_{[b]}\Big)$. Protože, vztahy (3.7) definují vzájemně jednoznačnou korespondenci mezi vektory

$$(c_0, c_1, \dots, c_m, c_{m+1}) \quad \text{a} \quad (d_0, d_1, \dots, d_m, d_{m+1}),$$

znamená to, že platí

$$\mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b] = \mathrm{Lin}\Big(1, \chi_{(a,b]}, \chi_{[\tau]}, \chi_{[\tau,b]}, \tau \in (a,b), \chi_{[b]}\Big).$$

□

Další podrobnosti týkající se regulovaných funkcí lze nalézti zejména v monografii Ch. Hönig: *Volterra Stieltjes-Integral Equations*[4, sec.3].

Kapitola 4

Riemannův-Stieljesův integrál

Text této kapitoly se opírá zejména o kapitolu II Hildebrandtovy monografie [3].

4.1. Definice. Pro libovolné dvě funkce $f,\, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ a rozšířené dělení $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$ intervalu $[a,b]$, $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)^{scriptsizeT} \in \mathbb{R}^m$, definujeme

$$S_{f\Delta g}(D,\xi) :\, = \sum_{j=1}^{m} f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})].$$

(Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme psát zjednodušeně $S(D,\xi)$ místo $S_{f\Delta g}(D,\xi)$.)

4.2. Definice. Nechť $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Řekneme, že existuje *normový Riemannův-Stieltjesův integrál* ((n) RS-integrál)

$$(\mathrm{n}) \int_a^b f \,\mathrm{d}[g] = (\mathrm{n}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}[g(x)]$$

a má hodnotu $I \in \mathbb{R}$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že platí

$$\Big((D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b] \quad \wedge \quad |D| < \delta \Big) \implies |S(D,\xi) - I| < \varepsilon.$$

Řekneme, že existuje *σ-Riemannův-Stieltjesův integrál* ((σ) RS-integrál)

$$(\sigma) \int_a^b f \,\mathrm{d}[g] = (\sigma) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}[g(x)]$$

a má hodnotu $I \in \mathbb{R}$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení $D_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b]$ takové, že platí

$$\Big((D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b] \quad \wedge \quad D_\varepsilon \subset D \Big) \implies |S(D,\xi) - I| < \varepsilon.$$

Existuje-li integrál $\int_a^b f \,\mathrm{d}[g]$ (v některém z výše uvedených smyslů), pak pro libovolné funkce $f,\, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ definujeme:

$$\int_b^a f \,\mathrm{d}[g] = -\int_a^b f \,\mathrm{d}[g].$$

Dále, pro každé $c \in [a,b]$ a pro všechny funkce $f,\, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ definujeme:

$$\int_c^c f \,\mathrm{d}[g] = 0.$$

4.3 . Cvičení. *Jestliže funkce* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *a* $g\in\mathbb{BV}[a,b]$ *jsou takové, že existuje* RS-*integrál* $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ *(v normovém či zjemňovacím smyslu), pak platí:*

$$\Big|\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]\Big|\le\|f\|\operatorname{var}_a^b g.$$

Pro každá dvě dělení D', $D''\in\mathscr{D}[a,b]$ taková, že $D'\subset D''$ (D'' je zjemnění D') platí $|D''|\le|D'|$. Snadno lze tedy dokázat následující tvrzení:

4.4 . Věta. *Je-li* (n) $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]=I\in\mathbb{R}$, *pak platí také* $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]=I$. □

4.5 . Poznámka. Nechť $f\in\mathbb{G}[a,b]$, $x_0\in(a,b)$, $c,d\in\mathbb{R}$, $c\,d>0$ a

$$g(x)=-c\,\chi_{[a,x_0)}(x)+d\,\chi_{(x_0,b]}(x)=\begin{cases}-c & \text{pro } \ x<x_0,\\ 0 & \text{pro } \ x=x_0,\\ d & \text{pro } \ x>x_0.\end{cases}$$

Pro libovolné rozšířené dělení

$$(D,\xi)=\Big(\{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_m\},(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m)\Big)\in\mathscr{P}[a,b]$$

intervalu $[a,b]$ máme

$$S(D,\xi)=\begin{cases}f(\xi')\,(c+d) & \text{je-li } x_0\in(\alpha_j,\alpha_{j+1}),\ \xi_j=\xi'\ne x_0,\\ f(x_0)\,(c+d) & \text{je-li } x_0\in(\alpha_j,\alpha_{j+1}),\ \xi_j=x_0,\\ f(\xi')\,c+f(\xi'')\,d & \text{je-li } x_0=\alpha_j,\ \xi_{j-1}=\xi'\ne x_0,\ \xi_j=\xi''\ne x_0,\\ f(x_0)\,c+f(\xi'')\,d & \text{je-li } x_0=\alpha_j,\ \xi_{j-1}=x_0,\ \xi_j=\xi''\ne x_0,\\ f(\xi')\,c+f(x_0)\,d & \text{je-li } x_0=\alpha_j,\ \xi_{j-1}=\xi'\ne x_0,\ \xi_j=x_0.\end{cases}$$

Odtud vidíme, že pokud je $-c=g(x_0-)\ne d=g(x_0+)$, pak k tomu, aby částečné součty $S(D,\xi)$ konvergovaly pro $|D|\to0$ k nějaké konečné hodnotě I, je nutné, aby funkce f byla v bodě x_0 spojitá ($\lim_{\xi\to x_0}f(\xi)=f(x_0)$). Lze tedy očekávat, že pro existenci normového integrálu (n) $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ bude nutné, aby funkce f a g neměly žádný společný bod nespojitosti.

Nyní, nechť $D_0\in\mathscr{D}[a,b]$ je libovolné dělení obsahující x_0. Pro každé jeho zjemnění D potom máme

$$S(D,\xi)\in\{f(\xi')\,c+f(\xi'')\,d,\ f(x_0)\,c+f(\xi'')\,d,\ f(\xi')\,c+f(x_0)\,d\},$$

kde $\xi'<x_0$ a $\xi''>x_0$. Bude-li tedy funkce f regulovaná na $[a,b]$, bude množina $\mathcal{Q}$ hromadných bodů množiny $\{S(D,\xi):(D,\xi)\in\mathscr{P}[a,b]\wedge D_0\subset D\}$ nejvýše tříbodová:

$$\mathcal{Q}=\{f(x_0-)\,c+f(x_0+)\,d,\ f(x_0)\,c+f(x_0+)\,d,\ f(x_0-)\,c+f(x_0)\,d\}$$

To naznačuje, že pro existenci integrálu $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ bude nutné (a mohlo by stačit (?)), aby pro funkce f a g a libovolné $x \in [a,b]$ platilo:

$$(\Delta^+ f(x)\,\Delta^+ g(x) = 0) \quad \wedge \quad (\Delta^- f(x)\,\Delta^- g(x) = 0).$$

Standardním způsobem lze dokázat následující tvrzení.

4.6 . Věta (Bolzano - Cauchyova podmínka). *Pro dané funkce $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ existuje normový integrál $(n)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ právě tehdy, když je splněna podmínka:*

$$\begin{cases} \forall\,\varepsilon > 0\,\exists\,\delta > 0\colon \Big((D',\xi'),(D'',\xi'') \in \mathscr{P}[a,b] \wedge |D'| < \delta \wedge |D''| < \delta\Big) \\ \implies |S(D',\xi') - S(D'',\xi'')| < \varepsilon. \end{cases} \tag{4.1}$$

Podobně, $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když platí

$$\begin{cases} \forall\,\varepsilon > 0\,\exists\,D_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b]\colon \Big((D',\xi'),(D'',\xi'') \in \mathscr{P}[a,b] \wedge D' \supset D_\varepsilon \wedge D'' \supset D_\varepsilon\Big) \\ \implies |S(D',\xi') - S(D'',\xi'')| < \varepsilon. \end{cases} \tag{4.2}$$

D ů k a z . Nutnost splnění uvedených podmínek pro existenci příslušných integrálů je zřejmá z Definice 4.2.

Předpokládejme, že je splněna podmínka (4.2). Potom můžeme vybrat posloupnost rozšířených dělení $\{(D^{[k]},\xi^k)\}_{k=1}^\infty$ intervalu $[a,b]$ takovým způsobem, že bude platit

$$|S(D,\xi) - S(D^{[k]},\xi^k)| < \tfrac{1}{k} \quad \text{pro každé } D \supset D_k \quad \text{a} \quad (D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b] \tag{4.3}$$

a přitom současně

$$D_k \subset D_\ell \quad \text{a} \quad |S(D_k,\xi^k) - S(D_\ell,\xi^\ell)| < \tfrac{1}{k} \quad \text{pro každé } k \in N \quad \text{a} \quad \ell \geq k. \tag{4.4}$$

Posloupnost $\{S(D_k,\xi^k)\}_{k=1}^\infty$ je cauchyovská posloupnost reálných čísel a existuje tedy reálné číslo $I \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{k\to\infty} S(D_k,\xi^k) = I.$$

Nyní, nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Zvolíme-li k_ε tak, aby bylo současně

$$\frac{1}{k_\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad |S(D_{k_\varepsilon},\xi_{k_\varepsilon}) - I| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{4.5}$$

bude, vzhledem k (4.3) a (4.5), pro každé $D \supset D_{k_\varepsilon}$ a každé $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$ platit

$$|S(D,\xi) - I| \leq |S(D,\xi) - S(D_{k_\varepsilon},\xi_{k_\varepsilon})| + |S(D_{k_\varepsilon},\xi_{k_\varepsilon}) - I| < \varepsilon,$$

neboli

$$I = (\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g].$$

Implikace (4.1) $\Longrightarrow$ $(\mathrm{n})\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] \in \mathbb{R}$ by se dokazovala podobně a ponechává se čtenáři jako cvičení. $\square$

Pokud nebude v následujících tvrzeních explicitně zmíněno, zda se jedná o normový integrál či o (σ)-integrál, bude to znamenat, že tvrzení platí pro oba typy integrálu.

4.7. Věta. *Jestliže existuje integrál* $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ *a* $c \in (a,b)$, *pak existují také integrály*

$$\int_a^c f\,\mathrm{d}[g] \quad a \quad \int_c^b f\,\mathrm{d}[g]$$

a platí

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] = \int_a^c f\,\mathrm{d}[g] + \int_c^b f\,\mathrm{d}[g].$$

D ů k a z . a) Existenci integrálů

$$\int_a^c f\,\mathrm{d}[g] \quad \text{a} \quad \int_c^b f\,\mathrm{d}[g]$$

dokážeme snadno pomocí Věty 4.6.

b) Dále, nechť je dáno $\varepsilon>0$. Zvolme rozšířená dělení $(D',\xi')\in\mathscr{P}[a,c]$ a $(D'',\xi'')\in\mathscr{P}[c,b]$ tak, aby platilo

$$\Big|S(D',\xi') - \int_a^c f\,\mathrm{d}[g]\Big| + \Big|S(D'',\xi'') - \int_c^b f\,\mathrm{d}[g]\Big| + \Big|S(D,\xi) - \int_a^b f\,\mathrm{d}[g]\Big| < \varepsilon, \tag{4.6}$$

kde

$$(D,\xi) = (D'\cup D'', (\xi',\xi'')) \in \mathscr{P}[a,b].$$

Potom bude $S(D,\xi) = S(D',\xi') + S(D'',\xi'')$ a tudíž

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] - \int_a^c f\,\mathrm{d}[g] - \int_c^b f\,\mathrm{d}[g]\Big| \\
&\quad\le \Big|\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] - S(D,\xi)\Big| + \big|S(D,\xi) - S(D',\xi') - S(D'',\xi'')\big| \\
&\qquad + \Big|S(D',\xi') - \int_a^c f\,\mathrm{d}[g]\Big| + \Big|S(D,\xi) - \int_a^b f\,\mathrm{d}[g]\Big| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

$\square$

4.8 . Cvičení. Pro oba integrály (normový i zjemňovací) proveďte podrobně část a) důkazu předchozí věty. Dále podrobně zdůvodněte proč z existence integrálů

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g], \quad \int_a^c f\,\mathrm{d}[g], \quad \int_c^b f\,\mathrm{d}[g]$$

opravdu plyne existence rozšířených dělení $(D',\xi')\in\mathscr{P}[a,c]$ a $(D'',\xi'')\in\mathscr{P}[c,b]$ takových, že platí (4.6).

Další tvrzení plyne přímo z Definice 4.2.

4.9 . Cvičení. Nechť $f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$, a nechť existují integrály :

$$\int_a^b f_1 \, \mathrm{d}[g], \quad \int_a^b f_2 \, \mathrm{d}[g], \quad \int_a^b f \, \mathrm{d}[g_1] \quad \text{a} \quad \int_a^b f_2 \, \mathrm{d}[g_2].$$

Potom pro libovolná $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ platí

$$\int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2) \, \mathrm{d}[g] = c_1 \int_a^b f_1 \, \mathrm{d}[g] + c_2 \int_a^b f_2 \, \mathrm{d}[g],$$

a

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}[c_1 g_1 + c_2 g_2] = c_1 \int_a^b f \, \mathrm{d}[g_1] + c_2 \int_a^b f \, \mathrm{d}[g_2].$$

4.10 . Věta. *Nechť $g \in \mathbb{BV}[a,b]$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je ohraničená a funkce $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in N$, jsou takové, že*

$$\int_a^b f_n \, \mathrm{d}[g] \in \mathbb{R} \quad \text{pro všechna } n \in N \tag{4.7}$$

a

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0. \tag{4.8}$$

Potom existuje také integrál $\int_a^b f \, \mathrm{d}[g]$ a platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \, \mathrm{d}[g] = \int_a^b f \, \mathrm{d}[g]. \tag{4.9}$$

D ů k a z provedeme pro σ integrál :

Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Vzhledem k předpokladu (4.8) můžeme zvolit $n_\varepsilon \in N$ tak, aby platilo

$$n \geq n_\varepsilon \implies \Big(\|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{\operatorname{var}_a^b g} \Big) \wedge \Big(\|f_n\| < \|f\| + 1 \Big). \tag{4.10}$$

Dále, za našich předpokladů (viz Cvičení 4.3) je pro $n \geq n_\varepsilon$

$$\Big| \int_a^b f_n \, \mathrm{d}[g] \Big| \leq \|f_n\| \operatorname{var}_a^b g \leq (\|f\| + 1) \operatorname{var}_a^b g.$$

Můžeme tedy vybrat podposloupnost $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ v $\mathbb{N}$ a $I \in \mathbb{R}$ tak, že bude platit

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_{n_k} \, \mathrm{d}[g] = I.$$

Speciálně, existuje $k_\varepsilon \in N$ takové, že

$$n_{k_\varepsilon} \geq n_\varepsilon \quad \text{a} \quad \Big(k \geq k_\varepsilon \implies \Big| \int_a^b f_{n_k} \, \mathrm{d}[g] - I \Big| < \varepsilon \Big). \tag{4.11}$$

Dále, nechť $D_\varepsilon = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \in \mathscr{D}$ je takové dělení intervalu $[a, b]$, že

$$\Big((D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]\Big) \wedge \Big(D_\varepsilon \subset D\Big) \implies \Big|S_{k_\varepsilon}(D,\xi) - \int_a^b f_{n_{k_\varepsilon}} \,\mathrm{d}[g]\Big| < \varepsilon, \tag{4.12}$$

kde

$$S_{k_\varepsilon}(D,\xi) = \sum_{j=1}^{m} f_{n_{k_\varepsilon}}(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})].$$

Protože je $n_{k_\varepsilon} \ge n_\varepsilon$ (viz (4.11)), znamená (4.10), že pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$ splňující $D_\varepsilon \subset D$ je

$$\big|S(D,\xi) - S_{k_\varepsilon}(D,\xi)\big| \le \|f - f_{n_{k_\varepsilon}}\| \operatorname{var}_a^b g < \varepsilon.$$

Vzhledem k (4.11)-(4.12) tedy dostáváme

$$|S(D,\xi) - I| \le |S(D,\xi) - S_{k_\varepsilon}(D,\xi)| + \Big|S_{k_\varepsilon}(D,\xi) - \int_a^b f_{n_{k_\varepsilon}} \,\mathrm{d}[g]\Big| + \Big|\int_a^b f_{n_{k_\varepsilon}} \,\mathrm{d}[g] - I\Big| < 3\,\varepsilon.$$

Odtud okamžitě plyne, že platí

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}[g] = I.$$

Konečně, protože podle Cvičení 4.3 máme

$$\Big|\int_a^b f_n \,\mathrm{d}[g] - \int_a^b f \,\mathrm{d}[g]\Big| \le \|f_n - f\| \operatorname{var}_a^b g,$$

tvrzení (4.9) plyne nyní snadno z předpokladu (4.8). □

4.11 . Poznámka. Všimněme si, že že z existence integrálu $(\sigma)\int_a^b f \,\mathrm{d}[g] \in \mathbb{R}$ plyne, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení $D_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b]$ takové, že:

$$\Big((D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b] \;\wedge\; D \supset D_\varepsilon\Big) \implies \Big|\sum_{j=1}^{\nu(D)} \Big(f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f \,\mathrm{d}[g]\Big)\Big| < \varepsilon.$$

4.12 . Lemma. *Nechť $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ a nechť existuje $(\sigma)\int_a^b f \,\mathrm{d}[g]$. Buď dáno $\varepsilon > 0$ a nechť $D_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b]$ je takové, že*

$$\Big|S(D,\xi) - (\sigma)\int_a^b f \,\mathrm{d}[g]\Big| < \varepsilon$$

platí pro každé rozšířené dělení $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$ takové, že $D \supset D_\varepsilon$.

Potom pro každé rozšířené dělení (D,ξ), $D = \{\alpha_0, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$, takové, že $D \supset D_\varepsilon$ platí

$$\sum_{j=1}^{m} \Big|f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f \,\mathrm{d}[g]\Big| < 6\,\varepsilon. \tag{4.13}$$

D ů k a z . a) Pro každou dvojici (D',ξ'), $(D'',\xi')\in\mathscr{P}[a,b]$ takovou, že je $D'\supset D_\varepsilon$ a $D''\supset D_\varepsilon$ máme

$$|S(D',\xi')-S(D'',\xi'')|<2\,\varepsilon. \tag{4.14}$$

Nechť $(D,\xi)\in\mathscr{P}[a,b]$, $D=\{\alpha_0,\alpha_2,\dots,\alpha_m\}$, $\xi=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m)$ a $D\supset D_\varepsilon$. Pro každé $j\in\{1,2,\dots,m\}$ můžeme zvolit $D_\varepsilon^{(j)}\in\mathscr{D}[\alpha_{j-1},\alpha_j]$ a $\xi_\varepsilon^{(j)}\in\mathbb{R}^m$ tak, aby platilo

$$(D_\varepsilon^{(j)},\xi_\varepsilon^{(j)})\in\mathscr{P}[\alpha_{j-1},\alpha_j]$$

a

$$\Big|S(D_\varepsilon^{(j)},\xi_\varepsilon^{(j)})-(\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big|<\frac{\varepsilon}{m}. \tag{4.15}$$

Nechť

$$U=\{j_1,j_2,\dots,j_k\}\subset\{1,2,\dots,m\},\quad 1\le j_1<j_2<\dots<j_k\le m,$$

je daná podmnožina indexů. Potom pro každý vektor $\xi=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m)$ takový, že $(D,\xi)\in\mathscr{P}[a,b]$, máme

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{j\in U}\Big(f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-(\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big)\Big|\\
&\le\Big|\sum_{j\in U}\Big(f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-S(D_\varepsilon^{(j)},\xi_\varepsilon^{(j)})\Big)\Big|\\
&\qquad+\Big|\sum_{j\in U}\Big(S(D_\varepsilon^{(j)},\xi_\varepsilon^{(j)})-(\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big)\Big|\\
&=\Big|S(D,\xi)-\sum_{j\notin U} f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-\sum_{j\in U}S(D_\varepsilon^{(j)},\xi_\varepsilon^{(j)})\Big|\\
&\qquad+\Big|\sum_{j\in U}\Big(S(D_\varepsilon^{(j)},\xi_\varepsilon^{(j)})-(\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big)\Big|\\
&=\big|S(D,\xi)-S(D',\xi')\big|+\Big|\sum_{j\in U}\Big(S(D_\varepsilon^{(j)},\xi_\varepsilon^{(j)})-(\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big)\Big|,
\end{aligned}$$

kde $(D',\xi')\in\mathscr{P}[a,b]$, $D'=D\cup\bigcup_{j\in U}D_\varepsilon^{(j)}$. Odtud, vzhledem k (4.14) a (4.15), plyne

$$\Big|\sum_{j\in U}\Big(f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-(\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big)\Big|<2\,\varepsilon+k\,\frac{\varepsilon}{m}\le 3\,\varepsilon. \tag{4.16}$$

b) Označme

$$U^+ = \{j \in \{1,2,\dots,m\} : f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g] \ge 0\}.$$

Po dosazení $U = U^+$ do (4.16) získáme nerovnost

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j\,\in\,U^+} \big|f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\big| \\ \displaystyle\quad = \sum_{j\,\in\,U^+} \Big(f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big) < 3\,\varepsilon. \end{cases} \tag{4.17}$$

Podobně, pro $U = U^-$,

$$U^- = \{j \in \{1,2,\dots,m\} : f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g] < 0\},$$

dostaneme

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j\,\in\,U^-} \Big|f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big| \\ \displaystyle\quad = -\sum_{j\,\in\,U^-} \Big(f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big) < 3\,\varepsilon. \end{cases} \tag{4.18}$$

Odtud a z (4.17) plyne

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{m} |f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]| \\ &\quad = \sum_{j\,\in\,U^+} f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g] \\ &\qquad - \sum_{j\,\in\,U^-} f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g] \\ &\quad = \big|\sum_{j\,\in\,U^+} f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\big| \\ &\qquad + \big|\sum_{j\,\in\,U^-} f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\big| < 6\,\varepsilon, \end{aligned}$$

tj. platí (4.13). $\square$

4.13. Poznámka. Povšimněme si, že důkaz Lemmatu 4.12 obsahuje také důkaz následujícího tvrzení:
Nechť $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *a nechť existuje* $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$. *Buď dáno* $\varepsilon > 0$ *a nechť* $D_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b]$ *je takové, že*

$$\Big|S(D,\xi) - (\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]\Big| < \varepsilon$$

platí pro každé rozšířené dělení $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$ *takové, že* $D \supset D_\varepsilon$. *Dále, nechť*

$$U = \{j_1, j_2, \dots, j_k\} \subset \{1,2,\dots,m\}, \quad 1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_k \le m,$$

je daná podmnožina indexů.

Potom pro každé rozšířené dělení (D,ξ), $D = \{\alpha_0, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$, *takové, že* $D \supset D_\varepsilon$ *platí*

$$\Big|\sum_{j\in U} f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big| < 3\,\varepsilon.$$

Tvrzení tohoto typu se zpravidla nazývá Saksovo-Henstockovo lemma a hraje důležitou roli v teorii integrálu.

Důležitým důsledkem Lemmatu 4.12 je následující tvrzení:

4.14. Věta (Substituce). *Nechť* $f, g, h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, *přičemž* f *je ohraničená na intervalu* $[a,b]$ *a* $\int_a^b g\,\mathrm{d}[h] \in \mathbb{R}$. *Potom existuje jeden z integrálů*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\Big[\int_a^x g\,\mathrm{d}[h]\Big] \quad a \quad \int_a^b f\,g\,\mathrm{d}[h] \tag{4.19}$$

právě tehdy když existuje i ten druhý. V takovém případě pak platí

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\Big[\int_a^x g\,\mathrm{d}[h]\Big] = \int_a^b f\,g\,\mathrm{d}[h]. \tag{4.20}$$

D ů k a z provedeme opět pouze pro σ integrál:

Nejprve si povšimněme, že z existence integrálu $\int_a^b g\,\mathrm{d}[h] \in \mathbb{R}$ plyne, že pro libovolné $x \in [a,b]$ je definovaná funkce

$$w(x) = \int_a^x g\,\mathrm{d}[h]$$

(viz Věta 4.7). Dále, pro každé rozšířené dělení

$$(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b], \quad D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$$

máme:

$$\Big|\sum_{j=1}^m f(\xi_j)\,g(\xi_j)\,[h(\alpha_j)-h(\alpha_{j-1})] - \sum_{j=1}^m f(\xi_j)\,[w(\alpha_j)-w(\alpha_{j-1})]\Big|$$

$$\le \sum_{j=1}^m |f(\xi_j)|\,\Big|g(\xi_j)\,[h(\alpha_j)-h(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} g\,\mathrm{d}[h]\Big|$$

$$\le \|f\|\,\Big(\sum_{j=1}^m \Big|g(\xi_j)\,[h(\alpha_j)-h(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} g\,\mathrm{d}[h]\Big|\Big)$$

Buď dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Zvolme $D_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b]$ tak aby platilo

$$\Big|S(D,\xi) - (\sigma)\int_a^b g\,\mathrm{d}[h]\Big| < \varepsilon$$

pro každé rozšířené dělení $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$ takové, že $D \supset D_\varepsilon$. Potom podle Saks-Henstockova lemmatu (Lemma 4.12) máme

$$\sum_{j=1}^m \Big|g(\xi_j)\,[h(\alpha_j)-h(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} g\,\mathrm{d}[h]\Big| < 6\,\varepsilon$$

pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$ takové, že $D \supset D_\varepsilon$. To ovšem znamená, že pro integrální součty příslušné k integrálům (4.19) platí:

$$\Big|\sum_{j=1}^m f(\xi_j)\,g(\xi_j)\,[h(\alpha_j)-h(\alpha_{j-1})] - \sum_{j=1}^m f(\xi_j)\,[w(\alpha_{j-1})-w(\alpha_j)]\Big| < \|f\|\,6\,\varepsilon.$$

Odtud už důkaz našeho tvrzení snadno plyne. □

4.15. Věta (INTEGRACE PER-PARTES)**.** *Existuje-li jeden z integrálů*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g], \qquad \int_a^b g\,\mathrm{d}[f],$$

existuje i druhý a platí

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] + \int_a^b g\,\mathrm{d}[f] = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a). \tag{4.21}$$

D ů k a z . Pro libovolné rozšířené dělení

$$(D,\xi) = \{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_m\},(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m)\} \in \mathscr{P}[a,b]$$

platí

$$\begin{aligned}
&S_{f\Delta g}(D,\xi)\\
&\quad = f(\xi_1)\,[g(\alpha_1)-g(a)] + f(\xi_2)\,[g(\alpha_2)-g(\alpha_1)] + \cdots + f(\xi_m)\,[g(b)-g(\alpha_{m-1})]\\
&\quad = -f(a)\,g(a) - [f(\xi_1)-f(a)]\,g(a) - [f(\xi_2)-f(\alpha_1)]\,g(\alpha_1)\\
&\qquad -[f(\alpha_1)-f(\xi_1)]\,g(\alpha_1) - \cdots - [f(\xi_m)-f(\alpha_{m-1})]\,g(\alpha_{m-1})\\
&\qquad -[f(\alpha_{m-1})-f(\xi_{m-1})]\,g(\alpha_{m-1}) - [f(b)-f(\xi_m)]\,g(b) + f(b)\,g(b)\\
&\quad = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - S_{g\Delta f}(D',\xi'),
\end{aligned}$$

kde

$$\xi' = (a,\alpha_1,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2,\dots,\alpha_{m-1},\alpha_{m-1},b) \quad \text{a} \quad D' = \{a,\xi_1,\alpha_1,\xi_2,\alpha_2,\dots\alpha_{m-1},\xi_m,b\}$$

je zjemněním D. (Stane-li se, že $\xi_j = \alpha_{j-1}$ resp. $\xi_j = \alpha_j$ pro nějaké j, musíme ovšem tyto body ξ_j z D' i z ξ' vynechat.)

Nechť je dáno $\varepsilon > 0$ a nechť existuje integrál $\int_a^b g\,\mathrm{d}[f]$. Zvolme dělení D_ε intervalu $[a,b]$ tak, aby pro každé jeho zjemnění D' a každé $(D',\xi') \in \mathscr{P}[a,b]$ platilo

$$\left| S_{g\Delta f}(D',\xi') - \int_a^b g\,\mathrm{d}[f] \right| < \varepsilon.$$

Vzhledem k výše uvedenému máme tedy pro každé $D \supset D_\varepsilon$ a každé příslušné rozšířené dělení (D,ξ)

$$S_{f\Delta g}(D,\xi) - f(b)\,g(b) + f(a)\,g(a) + \int_a^b g\,\mathrm{d}[f] = \int_a^b g\,\mathrm{d}[f] - S_{g\Delta f}(D',\xi'),$$

kde $D' \supset D \supset D_\varepsilon$ a tudíž

$$\left| S_{f\Delta g}(D,\xi) - f(b)\,g(b) + f(a)\,g(a) + \int_a^b g\,\mathrm{d}[f] \right| = \left| \int_a^b g\,\mathrm{d}[f] - S_{g\Delta f}(D',\xi') \right| < \varepsilon.$$

Odtud už snadno plyne existence integrálu $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ a platnost vztahu (4.21).

Druhá implikace by se dokazovala symetricky. □

4.16. Věta. *Jestliže $c \in [a,b]$ a jestliže existují integrály*

$$I_1 = (\sigma)\int_a^c f\,\mathrm{d}[g] \quad a \quad I_2 = (\sigma)\int_c^b f\,\mathrm{d}[g],$$

pak existuje také integrál $I = (\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ a platí $I = I_1 + I_2$.

D ů k a z . Buď dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme dělení $D'_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,c]$ a $D''_\varepsilon \in \mathscr{D}[c,b]$ tak, aby platilo

$$\big|S(D',\xi') - I_1\big| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } (D',\xi') \in \mathscr{P}[a,c] \quad \text{taková, že } D' \supset D'_\varepsilon$$

a

$$\big|S(D'',\xi'') - I_2\big| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } (D'',\xi'') \in \mathscr{P}[c,b] \quad \text{taková, že } D'' \supset D''_\varepsilon.$$

Nyní, nechť $D_\varepsilon = D'_\varepsilon \cup D''_\varepsilon$. Protože je $c \in D_\varepsilon$, každé rozšířené dělení $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$ splňující $D \supset D_\varepsilon$ můžeme rozdělit:

$$D = D' \cup D'' \quad \text{a} \quad \xi = (\xi', \xi'')$$

tak, že bude platit $(D',\xi') \in \mathscr{P}[a,c]$, $(D'',\xi'') \in \mathscr{P}[c,b]$, $D' \supset D'_\varepsilon$ a $D'' \supset D''_\varepsilon$. Navíc, je

$$S(D,\xi) = S(D',\xi') + S(D'',\xi'').$$

Vzhledem k definici D'_ε a D''_ε tedy pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$ splňující $D \supset D_\varepsilon$ máme

$$\big|S(D,\xi) - (I_1 + I_2)\big| \le \big|S(D',\xi') - I_1\big| + \big|S(D'',\xi'') - I_2\big| < 2\,\varepsilon,$$

tj. dokázali jsme tvrzení věty. □

4.17. Věta. *Nechť $f \in \mathbb{C}[a,b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a,b]$. Potom existují oba integrály*

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}[g] \quad i \quad \int_a^b g \,\mathrm{d}[f].$$

D ů k a z . Vzhledem k Větám 1.4, 4.4 a 4.15 stačí dokázat existenci normového integrálu $(n)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$, pro případ, že f je spojitá na $[a,b]$ a g neklesající na $[a,b]$.

Nechť tedy f je spojitá na $[a,b]$, g neklesající na $[a,b]$ a buď dáno $\varepsilon > 0$. Jestliže $g(b) = g(a)$, pak funkce g je nutně konstantní na $[a,b]$ a tudíž $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] = 0$. Bez újmy na obecnosti můžeme tedy předpokládat, že $g(b) - g(a) > 0$. Dále využijeme toho, že každá funkce spojitá na kompaktním intervalu je na tomto intervalu také stejnoměrně spojitá. Existuje tedy $\delta_\varepsilon > 0$ takové, že

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2\,[g(b) - g(a)]} \text{ pro všechna } x, y \in [a,b] \text{ taková, že } |x - y| < \delta_\varepsilon. \tag{4.22}$$

Dokážeme, že pro libovolná dvě rozšířená dělení $(D,\xi)\,,(D',\xi')$ intervalu $[a,b]$ taková, že $|D| < \delta_\varepsilon$ a $|D'| < \delta_\varepsilon$ platí $|S(D,\xi) - S(D',\xi')| < \varepsilon$. Podle Věty 4.6 to už bude znamenat, že existuje $(n)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$.

Nechť (D^*,ξ^*) je rozšířené dělení intervalu $[a,b]$ takové, že současně platí $D \subset D^*$ a $D' \subset D^*$. Jestliže $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$, pak prvky dělení D^* a složky vektoru ξ^* označme tak, že bude

$$D^* = \{\alpha_0, \alpha_1^1, \ldots, \alpha_{n_1-1}^1, \alpha_1, \alpha_1^2, \ldots, \alpha_{n_2-1}^2, \alpha_2, \ldots \alpha_{m-1}, \alpha_1^m, \ldots, \alpha_{n_m-1}^m, \alpha_m\}$$

$$\xi^* = (\xi_1^1, \quad \ldots, \quad \xi_{n_1}^1, \xi_1^2, \quad \ldots, \quad \xi_{n_2}^2, \quad \ldots, \quad \xi_1^m, \quad \ldots, \quad \xi_{n_m}^m).$$

Potom

$$S(D,\xi)=\sum_{j=1}^{m} f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]=\sum_{j=1}^{m} f(\xi_j)\sum_{i=1}^{n_j}[g(\alpha_i^j)-g(\alpha_{i-1}^j)]$$

a

$$|S(D,\xi)-S(D^*,\xi^*)|\le\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j}|[f(\xi_j)-f(\xi_i^j)]|\,[g(\alpha_i^j)-g(\alpha_{i-1}^j)].$$

Pro každé $j=1,2,\dots,m$ a každé $j=1,2,\dots,n_i$ je $|\xi_j-\xi_i^j|<|D|<\delta_\varepsilon$. Můžeme tedy použít (4.22) a poté dostaneme

$$\begin{aligned}|S(D,\xi)-S(D^*,\xi^*)|&\le\frac{\varepsilon}{2\,(g(b)-g(a))}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j}[g(\alpha_i^j)-g(\alpha_{i-1}^j)]\\&=\frac{\varepsilon}{2\,[g(b)-g(a)]}\,[g(b)-g(a)]=\tfrac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Stejně bychom dokázali, že platí také

$$|S(D',\xi')-S(D^*,\xi^*)|<\tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Odtud okamžitě plyne, že

$$|S(D,\xi)-S(D',\xi')|\le|S(D,\xi)-S(D^*,\xi^*)|+|S(D',\xi')-S(D^*,\xi^*)|<\varepsilon.$$

Tím je důkaz hotov. □

4.18 . Věta. *Je-li $g\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ regulovaná na $[a,b]$, pak integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ existuje pro každou funkci f spojitou na $[a,b]$ pouze tehdy, když g má konečnou variaci na $[a,b]$.*

D ů k a z . a) Je-li $f\in\mathbb{C}[a,b]$ a $g\in\mathbb{BV}[a,b]$, pak podle Věty 4.17 existuje $(n)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$. Podle Věty 4.4 tedy existuje i $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$.

b)Důkaz obrácené implikace se opírá o následující tři pomocná tvrzení.

Tvrzení 1. *Je-li $a_n\ge 0$ pro všechna $n\in\mathbb{N}$ a $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\infty$, pak existuje posloupnost $\{c_n\}_{n\in N}$ taková, že platí*

$$c_n>0\quad\textit{pro všechna } n\in N,\qquad \lim_{n\to\infty}c_n=0\quad\textit{a}\quad\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,a_n=\infty. \tag{4.23}$$

D ů k a z . Označíme-li $s_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ pro $n\in\mathbb{N}$, bude posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ neklesající a

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\infty. \tag{4.24}$$

Speciálně, pro dostatečně velká n ($n \geq n_0$) bude $s_n > 0$. Můžeme tudíž definovat

$$c_n = \begin{cases} 1 & \text{pro } \ n < n_0, \\ \dfrac{1}{s_n} & \text{pro } \ n \geq n_0. \end{cases}$$

Zřejmě je $c_n > 0$ pro každé $n \in N$ a $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. Na druhou stranu, pro libovolná $m, n \in N$, $m > n \geq n_0$ máme

$$\sum_{k=n}^{m} c_k\, a_k = \sum_{k=n}^{m} \frac{a_k}{s_k} \geq \frac{\sum_{k=n}^{m} a_k}{s_m} = 1 - \frac{s_{n-1}}{s_m}.$$

Vzhledem k (4.24), pro každé $n \in N$ existuje $m_n > n$ takové, že je $\dfrac{s_{n-1}}{s_{m_n}} < \dfrac{1}{2}$, tj.

$$\sum_{k=n}^{m_n} c_k\, a_k > \frac{1}{2}.$$

To ovšem znamená, že musí platit (4.23). □

Druhé tvrzení je snadným důsledkem Vitaliovy věty o konečném pokrytí a Věty 1.3.

Tvrzení 2. *Funkce $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ má konečnou variaci na $[a, b]$ právě tehdy, když platí*

$$\begin{cases} \textit{pro každé } x \in (a, b] \textit{ existuje } \delta_1 \in (0, x - a) \textit{ takové, že } \operatorname{var}_{x-\delta_1}^{x} g < \infty \\ a \\ \textit{pro každé } x \in [a, b) \textit{ existuje } \delta_2 \in (0, b - x) \textit{ takové, že } \operatorname{var}_{x}^{x+\delta_2} g < \infty. \end{cases} \tag{4.25}$$

Tvrzení 3. *Nechť $g \in G[a, b]$, $x_0 \in (a, b]$ a*

$$\operatorname{var}_{x}^{x_0} g = \infty \quad \textit{pro každé } \ x \in [a, x_0). \tag{4.26}$$

Potom existuje rostoucí posloupnost $\{x_k\}$ bodů v $(0, x_0)$ taková, že

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x_0 \quad a \quad \sum_{k=1}^{\infty} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| = \infty. \tag{4.27}$$

D ů k a z rozdělíme na dvě části: podle toho, zda platí

$$\sup\{|g(x)|\,;\, x \in [y, x_0]\} = \infty \quad \text{pro všechna } \ y \in [a, x_0) \tag{4.28}$$

či nikoliv.

a) Předpokládejme nejprve, že (4.28) neplatí. To znamená, že existuje $y_1 \in [a, x_0)$ takové, že

$$g^* := \sup\{|g(x)|\,; x \in [y_1, x_0]\} \in [0, \infty). \tag{4.29}$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $y_1 > x_0 - 1$. Podle našeho předpokladu je $\operatorname{var}_{y_1}^{x_0} g = \infty$. Existuje tedy dělení $D^1 = \{\alpha_0^1, \alpha_1^1, \dots, \alpha_{m_1}^1\}$ intervalu $[y_1, x_0]$ takové, že $V(g, D^1) \ge 1 + 2\,g^*$. Vzhledem k (4.29) tedy máme

$$\sum_{j=1}^{m_1-1} |g(\alpha_j^1) - g(\alpha_{j-1}^1)| \ge 1 + 2\,g^* - |g(x_0)| - |g(\alpha_{m_1-1}^1)| \ge 1 + 2\,g^* - 2\,g^* = 1.$$

Položme $x_1 = y_1$, $x_k = \alpha_{k-1}^1$ pro $k = 2, \dots, m_1$, $y_2 = \max\{x_{m_1-1}, x_0 - \frac{1}{2}\}$ a $r_1 = m_1 - 1$. Máme opět $\operatorname{var}_{y_2}^{x_0} g = \infty$. Existuje tedy dělení $D^2 = \{\alpha_0^2, \alpha_1^2, \dots, \alpha_{m_2}^2\}$ intervalu $[y_2, x_0]$ takové, že $V(g, D^2) \ge 1 + 2\,g^*$. Tudíž, podle (4.29),

$$\sum_{j=1}^{m_2-1} |g(\alpha_j^2) - g(\alpha_{j-1}^2)| \ge 1 + 2\,g^* - |g(x_0)| - |g(\alpha_{m_2-1}^2)| \ge 1.$$

Položme

$$r_2 = m_1 + m_2 - 1,\ \ x_k = \alpha_{k-r_1}^2 \ \text{pro}\ k = r_1 + 1, r_1 + 2, \dots, r_2 \quad \text{a} \quad y_3 = \max\{x_{r_2}, x_0 - \tfrac{1}{3}\}.$$

(Všimněme si, že $x_{r_1+1} = y_2 = \alpha_0^2$.)

Nyní, nechť $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$ a nechť r_i, y_i, $i = 1, 2, \dots, n-1$, a x_k, $k = 1, 2, \dots r_{n-1}$, jsou takové, že

$$x_{r_{i-1}+1} = y_{i-1},\ \ x_k \in (y_{i-1}, y_i] \ \ \text{pro}\ k = r_{i-1}+2, \dots, r_i$$

a

$$y_i = \max\{x_{r_{i-1}}, x_0 - \tfrac{1}{i}\}, \qquad \sum_{k=r_{i-1}}^{r_i-1} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| \ge 1$$

platí pro $i = 1, 2, \dots, n-1$. Položme $y_n = \max\{x_{r_{n-1}}, x_0 - \frac{1}{n}\}$. Máme opět $\operatorname{var}_{y_n}^{x_0} g = \infty$. Vzhledem k (4.29) tedy existuje dělení $D^n = \{\alpha_0^n, \alpha_1^n, \dots, \alpha_{m_n}^n\}$ intervalu $[y_n, x_0]$ takové, že

$$\sum_{j=1}^{m_n-1} |g(\alpha_j^n) - g(\alpha_{j-1}^n)| \ge 1.$$

Položíme-li

$$r_n = r_{n-1} + m_n - 1 \quad x_k = \alpha_{k-r_{n-1}}^n \ \text{pro}\ k = r_{n-1} + 1, \dots, r_n,$$

bude platit

$$\sum_{k=r_{n-1}}^{r_n-1} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| \geq 1 \quad \text{a} \quad x_k \geq y_n \geq x_0 - \tfrac{1}{n} \quad \text{pro } k = r_{n-1}, \dots, r_n.$$

Shrnutí: indukcí jsme zkonstruovali rostoucí posloupnosti $\{r_n\}$, $\{y_n\}$ a $\{x_k\}$ takové, že

$$y_n \in (x_0 - \tfrac{1}{n}, x_0), \qquad \sum_{k=r_{n-1}}^{r_n-1} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| \geq 1 \;\text{ pro }\; n \in \mathbb{N}$$

a $x_k \geq y_n \geq x_0 - \frac{1}{n}$ pro $k \geq r_{n-1}$. Odtud plyne, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{j=r_{n-1}}^{r_n-1} |g(x_{j+1}) - g(x_j)| \Big) \geq \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$$

a $\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} y_n = x_0$. Dokázali jsme tedy, že naše posloupnost $\{x_k\}$ je rostoucí a splňuje (4.27).

b) Předpokládejme, že (4.28) platí. Nejprve si povšimněme, že pro libovolné $y \in [a, x_0)$ platí

$$\sup\{|g(x)|\,; x \in [y, x_0]\} = \infty \quad \text{tehdy a jen tehdy když} \quad \sup\{|g(x)|\,; x \in (y, x_0)\} = \infty.$$

Vskutku, je-li $\sup\{|g(x)|\,; x \in [y, x_0]\} = \infty$, pak musí v intervalu (y, x_0) existovat bod x takový, že $|g(x)| \geq \max\{|g(y)|, |g(x_0)|\}$. (Připomeňme si, že funkce g je definována na celém intervalu $[a, b]$ a zobrazuje tento interval do $\mathbb{R}$.) Vzhledem k (4.28) můžeme vybrat $x_k \in (y, x_0)$, $k \in \mathbb{N}$, tak, aby platilo $|g(x_1)| > 1$ a

$$x_k > \max\{x_{k-1}, x_0 - \tfrac{1}{k}\} \quad \text{a} \quad |g(x_k)| > |g(x_{k-1})| + 1 \quad \text{pro} \quad k = 2, 3, \dots .$$

Zřejmě $\{x_k\}$ je rostoucí, $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ a

$$\sum_{k=1}^{n} |g(x_k + 1) - g(x_k)| \geq \sum_{k=1}^{n} \big(|g(x_k + 1)| - |g(x_k)|\big) > \sum_{k=1}^{n} 1 = \infty.$$

Naše posloupnost $\{x_k\}$ je neklesající a splňuje (4.27). □

Pokračování D ů k a z u Věty 4.18:

Vzhledem k Větě 4.4 se můžeme omezit na σ integrál. Nechť $\operatorname{var}_a^b g = \infty$. Podle Tvrzení 2 existuje $x_0 \in [a, b]$ pro které není splněna jedna z podmínek (4.25). Nechť tedy např. $x_0 \in (a, b]$ a nechť pro každé $x \in [a, x_0)$ platí (4.26). Podle Tvrzení 3 tedy existuje rostoucí posloupnost $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ bodů v $(0, x_0)$ taková, že

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x_0 \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |g(x_k) - g(x_{k-1})| = \infty.$$

Dále, podle Tvrzení 1 existuje posloupnost $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ kladných čísel taková, že platí

$$\lim_{k\to\infty} c_k = \infty \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k\,|g(\alpha_k) - g(\alpha_{k-1})| = \infty.$$

Položme

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \ x \le \alpha_0 \text{ resp. } x \ge x_0 \text{ resp. } x \in \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}\,, \\ c_k\ \mathrm{sign}(g(\alpha_k) - g(\alpha_{k-1})) & \text{pro } \ x = \xi_k :\, = \dfrac{\alpha_k + \alpha_{k-1}}{2} \end{cases}$$

a ve zbývajících bodech intervalu $[a,b]$ dodefinujme funkci f lineárně. Takto definovaná funkce $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ bude zřejmě spojitá na $[a,b]$ a přitom pro ní bude platit

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(\xi_k)\,[g(\alpha_k) - g(\alpha_{k-1})] = \infty.$$

Speciálně, pro každé $M > 0$ existuje $N_M \in N$ takové, že

$$\sum_{k=1}^{N_M} f(\xi_k)\,[g(\alpha_k) - g(\alpha_{k-1})] > M.$$

Pro dané $M > 0$, označme $D_M = \{a, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{N_M}, x_0, b\}$ a $\xi_M = (a, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{N_M}, x_0, b)$. Potom je $(D_M, \xi_M) \in \mathscr{P}$ a $S(D_M, \xi_M) > M$. To ale znamená, že integrál $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ nemůže existovat.

Není-li splněna druhá z podmínek v (4.25), tj. jestliže existuje $x_0 \in [a,b)$ a $\mathrm{var}_{x_0}^{x}\, g = \infty$ pro každé $x \in [x_0, b)$, je třeba místo Tvrzení 3 použít jeho vhodnou úpravu. $\square$

4.19. Cvičení. Zformulujte a dokažte analogii Tvrzení 3 potřebnou k dokončení důkazu Věty 4.18.

4.20 . Věta. *Integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ existuje pro každou konečnou skokovou funkci g pouze tehdy, když f je spojitá na $[a,b]$.*

D ů k a z . Stejně jako v důkazu předešlé věty, můžeme se omezit na σ-integrál. Nechť $x_0 \in (a,b)$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c\,d > 0$ a nechť funkce $g:[a,b] \to \mathbb{R}$ je definována podobně jako v Poznámce 4.5 :

$$g(x) = -c\,\chi_{[a,x_0)}(x) + d\,\chi_{(x_0,b]}(x) \quad \text{pro } \ x \in [a,b].$$

Podle Poznámky 4.5 může integrál $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ existovat pouze tehdy, bude-li platit

$$c\,\Delta^- f(x_0) = 0 \quad \text{a} \quad d\,\Delta^+ f(x_0) = 0,$$

tj. $\Delta^- f(x_0) = \Delta^+ f(x_0) = 0$. Existuje-li tedy integrál $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$, musí být f spojitá v každém bodě $x_0 \in (a,b)$. Podobně bychom dokázali, že pak musí být f spojitá i v bodě a zprava a v bodě b zleva. □

Kapitola věnovaná RS-integrálům bude zakončena uvedením několika dalších důležitých tvrzení. Pro důkazy zatím odkazuju čtenáře na kapitolu II již zmíněné Hildebrandtovy monografie [3].

4.21 . Definice. Řekneme, že funkce $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ splňují v bodě $x \in (a,b)$ podmínku (PA) (*podmínku pseudoaditivity*), jestliže

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Pro každé } \varepsilon > 0 \text{ existuje } \delta_0 > 0 \text{ takové, že pro všechna} \\ \quad \delta' \in (0,\delta_0),\ \ \delta'' \in (0,\delta_0),\ \ \xi \in [x-\delta', x+\delta''],\ \ \xi' \in [x-\delta', x] \text{ a } \ \xi'' \in [x, x+\delta''] \\ \text{platí:} \\ \quad \big| f(\xi)\,[g(x+\delta'') - g(x-\delta')] \\ \qquad\quad - f(\xi')\,[g(x) - g(x-\delta')] - f(\xi'')\,[g(x+\delta'') - g(x)]\big| < \varepsilon. \end{array}\right.$$

Následující tvrzení plyne z [3, Theorem II.3.10]), kde je ovšem třeba intervalovou funkci $f(I)$ nahradit mnohoznačnou intervalovou funkcí

$$F : [c,d] \to f(\xi)\,[g(d) - g(c)], \quad \xi \in [c,d].$$

4.22. Věta. *Normový integrál* $(n)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ *existuje právě tehdy, když existuje* $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ *a je splněna podmínka* (PA) *v každém bodě* $x \in (a,b)$.

4.23 . Věta. *Nechť* $x \in (a,b)$. *Funkce* $f,\ g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *splňují podmínku (PA) v bodě* $x \in (a,b)$ *právě tehdy, když alespoň jedna z nich je v bodě* x *spojitá.*

4.24 . Poznámka. Je-li f ohraničená v okolí bodu $x \in (a,b)$ a g spojitá v bodě x, pak funkce f, g splňují podmínku (PA) v bodě x.

4.25 . Důsledek. ([3, Corollary II,10,6]) (n) $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ *existuje pouze tehdy, když funkce* f *a* g *nemají společný bod nespojitosti v* (a,b).

4.26 . Důsledek. *Nechť* $c \in (a,b)$ *a nechť funkce* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *splňují (PA) v bodě* c. *Potom, jestliže existují integrály:*

$$(\mathrm{n})\int_a^c f\,\mathrm{d}[g] = I_1 \quad a \quad (\mathrm{n})\int_c^b f\,\mathrm{d}[g] = I_2,$$

pak existuje také integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ *a platí*

$$(\mathrm{n})\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] = I_1 + I_2.$$

4.27. Věta. *Jestliže existuje* $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$, *pak platí obě následující tvrzení:*

(*i*) *Pro každé* $x \in [a,b)$ *je alespoň jedna z funkcí* f, g *spojitá v* x *zprava,*

(*ii*) *Pro každé* $x \in (a,b]$ *je alespoň jedna z funkcí* f, g *spojitá v* x *zleva.*

Kapitola 5

Kurzweilův-Stieltjesův integrál

5.1 . Definice. Funkce $\delta\colon [a,b] \to \mathbb{R}^+ = (0,\infty)$ se nazývají *kalibry* na intervalu $[a,b]$, množinu kalibrů na intervalu $[a,b]$ značíme $\mathscr{G} = \mathscr{G}[a,b]$.

Pro daný kalibr $\delta \in \mathscr{G}$, řekneme, že rozšířené dělení $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$ je δ-*jemné* (píšeme $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta) = \mathscr{A}(\delta;[a,b])$), jestliže platí

$$[\alpha_{j-1},\alpha_j] \subset (\xi_j - \delta(\xi_j), \xi_j + \delta(\xi_j)) \quad \text{pro všechna } j = 1,2,\ldots,\nu(D).$$

Pro dané funkce $f,g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ a rozšířené dělení $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$ definujeme (jako v kapitole 4)

$$S(D,\xi)(= S_{f\Delta g}(D,\xi))\colon = \sum_{j=1}^{\nu(D)} f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})].$$

5.2 . Definice (Kurzweil)**.** Nechť $f,g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ a $I \in \mathbb{R}$. Řekneme, že existuje *Kurzweilův-Stieltjesův integrál* (KS-integrál)

$$(\mathrm{KS})\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] = (\mathrm{KS})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}[g(x)]$$

a má hodnotu $I \in \mathbb{R}$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje kalibr $\delta_\varepsilon \in \mathscr{G}$ takový, že

$$\Big| I - S(D,\xi) \Big| < \varepsilon \tag{5.1}$$

platí pro všechna δ_ε–jemná rozšířená dělení (D,ξ) (tj. pro všechna $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$).

Jestliže existuje integrál $(\mathrm{KS})\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$, definujeme $(\mathrm{KS})\int_b^a f\,\mathrm{d}[g] = -(\mathrm{KS})\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$. Dále, $(\mathrm{KS})\int_a^a f\,\mathrm{d}[g] = 0$.

Tato definice má smysl díky následujícímu lemmatu.

5.3 . Lemma (Cousin)**.** *Pro každý kalibr $\delta \in \mathscr{G}$ je množina $\mathscr{A}(\delta)$ všech δ–jemných rozšířených dělení intervalu $[a,b]$ neprázdná.*

D ů k a z . Nechť je dáno $\delta \in \mathscr{G}$. Označme M množinu všech $c \in (a,b]$ pro něž je $\mathscr{A}(\delta;[a,c]) \neq \emptyset$. Protože je $\delta(a) > 0$, položíme-li $c = \min\{a + \delta(a), b\}$, $D = \{a,c\}$ a $\xi = a$, bude $c \in (a,b]$ a $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta;[a,c])$, tj. $c \in M$ a $M \neq \emptyset$. Položme $d = \sup M$. Protože je $\delta(d) > 0$, existuje $c \in (d - \delta(d), d] \cap M$. Je-li $c < d$, pak existuje $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta;[a,c])$. Definujme $\widetilde{D} = D \cup \{d\}$ a $\widetilde{\xi} = (\xi, d)$. Potom $(\widetilde{D},\widetilde{\xi}) \in \mathscr{P}[a,d]$ a protože je $[c,d] \in (d - \delta(d), d + \delta(d))$, znamená to, že $(\widetilde{D},\widetilde{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta;[a,d])$, tj. $d \in M$. Konečně, kdyby bylo $d < b$, pak bychom mohli zvolit $c \in (d, d + \delta(d)) \cap (d, b)$ a ukázat, že $c \in M$, což by znamenalo spor s definicí $d = \sup M$. To znamená, že platí $d = \sup M = b$ a důkaz je proveden. $\square$

Nebude-li uvedeno jinak, bude mít v následujícím textu symbol integrálu vždy smysl KS-integrálu.

Důkazy tvrzení uvedených v této kapitole byly jednak převzaty z monografické publikace [8], jednak jsou modifikacemi důkazů analogických tvrzení pro speciální případ $g(x) \equiv x$ ze Schwabikovy monografie [9].

5.4. Poznámka. Jsou-li δ a $\delta_0 \in \mathscr{G}$ kalibry na intervalu $[a, b]$, pro které je $\delta(x) \le \delta_0(x)$ na $[a, b]$, pak každé rozšířené dělení intervalu $[a, b]$, které je δ–jemné je také δ_0–jemné, tj. platí $\mathscr{A}(\delta) \subset \mathscr{A}(\delta_0)$. Platí-li tedy nějaká vlastnost pro všechna $(D, \xi) \in \mathscr{A}(\delta_0)$ tím spíše platí i pro všechna $(D, \xi) \in \mathscr{A}(\delta)$. Speciálně, je-li δ_0 libovolný kalibr na intervalu $[a, b]$, stačí v Definici 5.2 požadovat existenci kalibru δ_ε, pro který kromě vlastností v definici požadovaných platí navíc i $\delta_\varepsilon(x) \le \delta_0(x)$ na $[a, b]$.

Pro existenci KS-integrálu platí podmínka Bolzanova-Cauchyova typu:

5.5. Věta (Bolzanova-Cauchyova podmínka). *Nechť f, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Potom integrál $\int_a^b f \,\mathrm{d}[g]$ existuje právě tehdy, když je splněna následující podmínka:*

$$\forall \varepsilon > 0 \,\exists \delta_\varepsilon \in \mathscr{G} : \Big((D, \xi), (D', \xi') \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)\Big) \implies \Big|S(D, \xi) - S(D', \xi')\Big| < \varepsilon. \tag{5.2}$$

D ů k a z . a) Existuje-li integrál $\int_a^b f \,\mathrm{d}[g] = I \in \mathbb{R}$, pak podle Definice 5.2 pro každé $\varepsilon > 0$ existuje kalibr $\delta_\varepsilon \in \mathscr{G}$ takový, že je $|S(D, \xi) - I| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro všechna $(D, \xi) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$. Pro všechny dvojice (D, ξ), $(D', \xi') \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ tedy máme

$$|S(D, \xi) - S(D', \xi')| \le |S(D, \xi) - I| + |S(D', \xi') - I| < \varepsilon,$$

tj. je splněna (B-C) podmínka (5.2).

b) Předpokládejme nyní, že je splněna (B-C) podmínka (5.2). Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Podle (5.2) můžeme zvolit kalibr δ_ε tak, aby

$$|S(D, \xi) - S(D', \xi')| < \frac{\varepsilon}{2}$$

platilo pro všechna (D, ξ), $(D', \xi') \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$. Označme nyní

$$M = \{m \in \mathbb{R} : \exists\, \delta_m \in \mathscr{G} \text{ takové, že } \ (D, \xi) \in \mathscr{A}(\delta_m) \implies S(D, \xi) \ge m\}$$

Zvolíme-li libovolně $(D_0, \xi_0) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$, bude pro každé $(D, \xi) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ platit

$$S(D_0, \xi_0) - \frac{\varepsilon}{2} < S(D, \xi) < S(D_0, \xi_0) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.3}$$

Odtud plyne, že $(-\infty, S(D_0,\xi_0) - \frac{\varepsilon}{2}) \subset M$, a tudíž množina M není prázdná. Dále, pro každé $m \in M$ a každé $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\widetilde{\delta}_m)$, kde

$$\widetilde{\delta}_m(x) = \min\{\delta_m(x), \delta_\varepsilon(x)\} \quad \text{na } [a,b],$$

máme také $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ a tudíž

$$m \le S(D,\xi) < S(D_0,\xi_0) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{tj.} \quad M \subset (-\infty, S(D_0,\xi_0) + \frac{\varepsilon}{2}).$$

To ale znamená, že množina M je shora ohraničená, tj. $\sup M < \infty$, a platí

$$S(D_0,\xi_0) - \frac{\varepsilon}{2} \le \sup M \le S(D_0,\xi_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Toto spolu s nerovností (5.3) implikuje, že platí

$$|S(D,\xi) - \sup M| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } (D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$$

neboli

$$\sup M = \int_a^b f \, \mathrm{d}[g].$$

□

KS-integrál má obvyklé lineární vlastnosti:

5.6. Věta. *Nechť* $f,\ f_1,\ f_2,\ g,\ g_1,\ g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$, *a nechť existují integrály:*

$$\int_a^b f_1 \, \mathrm{d}[g], \quad \int_a^b f_2 \, \mathrm{d}[g], \quad \int_a^b f \, \mathrm{d}[g_1] \quad a \quad \int_a^b f \, \mathrm{d}[g_2].$$

Potom pro libovolná $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *platí*

$$\int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2) \, \mathrm{d}[g] = c_1 \int_a^b f_1 \, \mathrm{d}[g] + c_2 \int_a^b f_2 \, \mathrm{d}[g],$$

a

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}[c_1 g_1 + c_2 g_2] = c_1 \int_a^b f \, \mathrm{d}[g_1] + c_2 \int_a^b f \, \mathrm{d}[g_2].$$

D ů k a z . Ukažme si např. důkaz prvního tvrzení: Buď dáno $\varepsilon > 0$. Podle předpokladu existují kalibry $\delta_1 \in \mathscr{G}$ a $\delta_2 \in \mathscr{G}$ takové, že platí

$$(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta_i) \implies |S_{f_i \Delta g}(D,\xi)] - \int_a^b f_i \, \mathrm{d}[g]| < \varepsilon \quad \text{pro} \quad i = 1,2.$$

Pro $x \in [a,b]$ položme $\delta_\varepsilon(x) = \min\{\delta_1(x), \delta_2(x)\}$. Označme $h = c_1 f_1 + c_2 f_2$. Protože pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ platí

$$\begin{aligned} S_{h\Delta g}(D,\xi) &= \sum_{j=1}^{\nu(D)} (c_1 f_1(\xi_j) + c_2 f_2(\xi_j)) \, [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] \\ &= c_1 \, S_{f_1 \Delta g}(D,\xi) + c_2 \, S_{f_2 \Delta g}(D,\xi), \end{aligned}$$

dostáváme

$$\begin{aligned}
&\Big|S_{h\Delta g}(D,\xi) - c_1\int_a^b f_1\,\mathrm{d}[g] + c_2\int_a^b f_2\,\mathrm{d}[g]\Big| \\
&\quad\le |c_1|\,\Big|S_{f_1\Delta g}(D,\xi) - \int_a^b f_1\,\mathrm{d}[g]\Big| + |c_2|\,\Big|S_{f_2\Delta g}(D,\xi) - \int_a^b f_2\,\mathrm{d}[g]\Big| \\
&\quad< (|c_1| + |c_2|)\,\varepsilon.
\end{aligned}$$

Odtud už ovšem naše tvrzení bezprostředně plyne.

Druhé tvrzení věty by se dokazovalo obdobně a důkaz lze ponechat čtenáři jako cvičení. □

5.7 . Věta. *Jestliže existuje integrál* $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ *a jestliže* $[c,d]\subset[a,b]$, *pak existuje také integrál* $\int_c^d f\,\mathrm{d}[g]$.

D ů k a z . Předpokládejme, že je $a<c<d<b$. Nechť je dáno $\varepsilon>0$. Podle (B-C) podmínky (viz Věta 5.5) můžeme zvolit kalibr $\delta_\varepsilon\in\mathscr{G}$ tak, aby platilo

$$|S(\widetilde{D},\widetilde{\xi}) - S(\widetilde{D}',\widetilde{\xi}')| < \varepsilon \tag{5.4}$$

pro všechna $\delta_\varepsilon-$jemná rozšířená dělení $(\widetilde{D},\widetilde{\xi})$ a $(\widetilde{D}',\widetilde{\xi}')$ intervalu $[a,b]$. Mějme nyní libovolnou dvojici (D,ξ), $(D',\xi')\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon;[c,d])$. Dále, zvolme libovolně $(D^-,\xi^-)\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon;[a,c])$, $(D^+,\xi^+)\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon;[d,b])$ a doplňme jimi (D,ξ) a (D',ξ') na rozšířená dělení intervalu $[a,b]$, tj. položme

$$\widetilde{D} = D^-\cup D\cup D^+,\quad \widetilde{\xi} = (\xi^-,\xi,\xi^+),$$

a

$$\widetilde{D}' = D^-\cup D'\cup D^+,\quad \widetilde{\xi}' = (\xi^-,\xi',\xi^+).$$

Zřejmě je $(\widetilde{D},\widetilde{\xi})\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon;[a,b])$ a $(\widetilde{D}',\widetilde{\xi}')\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon;[a,b])$ a vzhledem k (5.4) platí

$$|S(D,\xi) - S(D',\xi')| = |S(\widetilde{D},\widetilde{\xi}) - S(\widetilde{D}',\widetilde{\xi}')| < \varepsilon.$$

Odtud, vzhledem ke Větě 5.5, již existence integrálu $\int_c^d f\,\mathrm{d}[g]$ bezprostředně plyne. Modifikace důkazu pro případ, že $c=a$ resp. $d=b$ je zřejmá. □

5.8 . Věta. *Nechť* $f,g\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ *a* $c\in[a,b]$. *Integrál* $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ *existuje právě tehdy když existují oba integrály* $\int_a^c f\,\mathrm{d}[g]$ *a* $\int_c^b f\,\mathrm{d}[g]$. *Potom navíc platí také rovnost*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] = \int_a^c f\,\mathrm{d}[g] + \int_c^b f\,\mathrm{d}[g].$$

D ů k a z . a) Existuje-li integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$, pak podle Věty 5.7 existují také oba integrály $\int_a^c f\,\mathrm{d}[g]$ a $\int_c^b f\,\mathrm{d}[g]$.

b) Nechť

$$\int_a^c f\,\mathrm{d}[g] = I_1 \quad \text{a} \quad \int_c^b f\,\mathrm{d}[g] = I_2.$$

Budiž dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme kalibry $\delta'_\varepsilon \in \mathscr{G}[a,c]$ a $\delta''_\varepsilon \in \mathscr{G}[c,b]$ tak, aby pro všechna $(D',\xi') \in \mathscr{A}(\delta'_\varepsilon;[a,c])$ a $(D'',\xi'') \in \mathscr{A}(\delta''_\varepsilon;[c,b])$ platilo

$$|S(D',\xi') - I_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad |S(D'',\xi'') - I_2| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.5}$$

Definujme nyní kalibr δ_ε na $[a,b]$ předpisem

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \min\left\{\delta'_\varepsilon(x), \frac{1}{4}(c-x)\right\} & \text{když } x \in [a,c), \\ \min\left\{\delta'_\varepsilon(c), \delta''_\varepsilon(c)\right\} & \text{když } x = c, \\ \min\left\{\delta''_\varepsilon(x), \frac{1}{4}(x-c)\right\} & \text{když } x \in (c,b]. \end{cases}$$

Potom,

$$x + \delta(x) \le x + \frac{1}{4}(c-x) < c \quad \text{je-li } x < c,$$

a

$$x - \delta(x) \ge x - \frac{1}{4}(c-x) > c \quad \text{je-li } x > c.$$

Pro žádné $x \neq c$ tedy nemůže platit $|c-x| < \delta(x)$. T.zn., že pro každé δ_ε–jemné rozšířené dělení (D,ξ) intervalu $[a,b]$ musí existovat index $k \in \{1,2,\ldots,\nu(D)\}$ takový, že $\xi_k = c$. Navíc, bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že platí

$$\alpha_{k-1} < \alpha_k = \xi_k = \xi_{k+1} = c < \alpha_{k+1}.$$

(Kdyby bylo $\alpha_{k-1} < c = \xi_k < \alpha_k$, upravili bychom příslušný člen v součtu $S(D,\xi)$ následujícím způsobem:

$$f(c)\,[g(\alpha_k) - g(\alpha_{k-1})] = f(c)\,[g(\alpha_k) - g(c)] + f(c)\,[g(c) - g(\alpha_{k-1})].)$$

To znamená, že každé rozšířené dělení $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon;[a,b])$ intervalu $[a,b]$ můžeme rozdělit: $D = D' \cup D''$, $\xi = (\xi',\xi'')$ tak, že bude

$$(D',\xi') \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon;[a,c]) \subset \mathscr{A}(\delta'_\varepsilon;[a,c]), \quad (D'',\xi'') \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon;[c,b]) \subset \mathscr{A}(\delta''_\varepsilon;[c,b])$$

a

$$S(D,\xi) = S(D',\xi') + S(D'',\xi'').$$

Tudíž, vzhledem k (5.5),

$$|S(D,\xi)-(I_1+I_2)| = |S(D',\xi')+S(D'',\xi'')-(I_1+I_2)|$$
$$\le |S(D',\xi')-I_1|+|S(D'',\xi'')-I_2| < \varepsilon,$$

tj. $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] = I_1+I_2$. □

5.9 . Poznámka (Srovnání s normovým RS-integrálem)**.** Jestliže existuje normový RS-integrál (n)$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$, pak také existuje KS-integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ a má tutéž hodnotu. Je-li totiž (n)$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] = I \in \mathbb{R}$, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\Delta_\varepsilon > 0$ takové, že $|S(D,\xi)-I| < \varepsilon$ platí pro všechna rozšířená dělení (D,ξ) intervalu $[a,b]$ taková, že $|D| < \Delta_\varepsilon$. Definujeme-li pak $\delta_\varepsilon(x) \equiv \Delta_\varepsilon$, získáme evidentně kalibr s vlastnostmi zaručujícími existenci příslušného KS-integrálu $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] = I$.

Na druhou stranu, jestliže existuje KS-integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] = I$, přičemž pro každé $\varepsilon > 0$ lze najít kalibr $\delta_\varepsilon \in \mathscr{G}[a,b]$ takový, že platí $\inf\{\delta_\varepsilon(x)\,;x\in[a,b]\} > 0$ a

$$|S(D,\xi)-I| < \varepsilon \quad \text{pro každé } (D,\xi)\in\mathscr{A}(\delta),$$

pak existuje také (n)$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ a platí rovnost (n)$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] = I$. Položíme-li totiž pro dané $\varepsilon > 0$ $\Delta_\varepsilon = \inf\{\delta_\varepsilon(x)\,;x\in[a,b]\}$, bude platit také

$$|S(D,\xi)-I| < \varepsilon \quad \text{pro každé } (D,\xi)\in\mathscr{P}([a,b]) \quad \text{takové, že } \ |D| < \Delta_\varepsilon.$$

Následující věta popisuje vztah (σ)RS-integrálu a KS-integrálu.

5.10 . Věta. *Jestliže existuje* (σ)RS-*integrál* $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$, *pak existuje také* KS-*integrál* $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ *a platí*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] = (\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g].$$

D ů k a z . Označme $I = (\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$. Buď dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Z předpokladu o existenci (σ)RS-integrálu plyne, že existuje dělení $D_\varepsilon = \{s_0,s_1,\dots,s_m\} \in \mathscr{D}[a,b]$ takové, že pro každé rozšířené dělení $(D,\xi)\in\mathscr{P}[a,b]$, kde D je zjemněním D_ε platí (5.1). Položme nyní

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac14 \min\{|x-s_j|; j=0,1,\dots,m\} & \text{když } \ x\notin D_\varepsilon\,, \\ 1 & \text{když } \ x\in D_\varepsilon. \end{cases}$$

Potom $(D,\xi)\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ pouze tehdy, když

$$D_\varepsilon \subset \{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_{\nu(D)}\}. \tag{5.6}$$

Navíc máme ještě

$$S(D,\xi) = \sum_{j=1}^{\nu(D)} \Big[f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\xi_j)] + f(\xi_j)\,[g(\xi_j) - g(\alpha_{j-1})] \Big] = S(D',\xi'), \qquad (5.7)$$

kde $D' = \{\alpha_0, \xi_1, \alpha_1, \xi_2, \dots, \xi_{\nu(D)}, \alpha_{\nu(D)}\}$ a $\xi' = (\xi_1, \xi_1, \xi_2, \xi_2, \dots, \xi_{\nu(D)}, \xi_{\nu(D)})^{\mathrm{T}}$. Podle (5.6) je

$$D_\varepsilon \subset \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{\nu(D)}\} \subset D'$$

a vzhledem k (5.7) odtud plyne

$$|S(D,\xi) - I| = |S(D',\xi') - I| < \varepsilon, \quad \text{t.j.} \quad \int_a^b f\,\mathrm{d}[g] = I.$$

□

5.11. Příklad. V případě $g(x) \equiv x$ budeme místo o KS-integrálu mluvit o K-integrálu (Kurzweilův integrál). K-integrál je zřejmě zobecněním klasického Riemannova integrálu.

(i) Nechť $f(x) = 0$ na $[a,b] \setminus W$, kde W je spočetná podmnožina $[a,b]$, $W = \{w_k\}_{k=1}^{\infty}$. Buď dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Definujme

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{když } x \notin W, \\ \dfrac{\varepsilon}{2^{k+1}(1 + |f(w_k)|)} & \text{když } x = w_k \in W. \end{cases}$$

Pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$ se v příslušném integrálním součtu $S(D,\xi)$,

$$S(D,\xi) = \sum_{j=1}^{m} f(\xi_j)\,[\alpha_j - \alpha_{j-1}],$$

uplatní pouze takové sčítance, pro které existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že platí $\xi_j = w_k \in W$. Pro každé δ_ε–jemné rozšířené dělení (D,ξ) intervalu $[a,b]$, (tj. $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$, kde $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \in \mathscr{D}[a,b]$ a $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m$) a každý takový index j ovšem musí platit

$$\alpha_j - \alpha_{j-1} \le \frac{\varepsilon}{2^k(1 + |f(w_k)|)}$$

a tudíž je

$$|S(D,\xi)| \le \sum_{k=1}^{\infty} |f(w_k)|\,|\frac{\varepsilon}{2^k(1 + |f(w_k)|)} \le \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \varepsilon.$$

Podle Definice 5.2 je tedy $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

(ii) Nechť existuje Newtonův integrál $(\mathrm{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, kde funkce F je spojitá na $[a,b]$ a platí

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pro každé } x \in (a,b), \quad F'(a+) = f(a), \quad F'(b-) = f(b).$$

Ukážeme, že pak existuje také K-integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a rovná se také $F(b) - F(a)$.

Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Pro každé $\xi \in [a,b]$ zvolme $\delta_\varepsilon(\xi) > 0$ tak, aby platilo

$$|F(x) - F(\xi) - f(\xi)(x-\xi)| < \frac{\varepsilon}{b-a}\,|x-\xi|$$
$$\text{pro všechna } x \in [a,b] \cap (\xi - \delta_\varepsilon(\xi), \xi + \delta_\varepsilon(\xi)).$$

Pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ ($D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m$) a každé $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ tedy platí

$$\begin{aligned}
&|F(\alpha_j) - F(\alpha_{j-1}) - f(\xi_j)\,[\alpha_j - \alpha_{j-1}]| \\
&\quad \le |F(\alpha_j) - F(\xi_j) - f(\xi_j)\,[\alpha_j - \xi_j]| + |F(\xi_j) - F(\alpha_{j-1}) - f(\xi_j)\,[\xi_j - \alpha_{j-1}]| \\
&\quad \le \frac{\varepsilon}{b-a}\,(|\alpha_j - \xi_j| + |\xi_j - \alpha_{j-1}|) = \frac{\varepsilon}{b-a}\,[\alpha_j - \alpha_{j-1}]
\end{aligned}$$

a tudíž

$$|S(D,\xi) - [F(b) - F(a)]| = \Big|\sum_{j=1}^m (F(\alpha_j) - F(\alpha_{j-1}) - f(\xi_j)\,[\alpha_j - \alpha_{j-1}])\Big|$$

$$\le \sum_{j=1}^m |F(\alpha_j) - F(\alpha_{j-1}) - f(\xi_j)\,[\alpha_j - \alpha_{j-1}]| \le \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{j=1}^m [\alpha_j - \alpha_{j-1}] = \varepsilon,$$

tj.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Platí dokonce, že K-integrál je ekvivalentní s Perronovým integrálem. Zahrnuje tedy současně integrály nejen Riemannův či Newtonův, ale i Lebesgueův. Tím se rozumí, že je-li na nějakém intervalu daná funkce integrovatelná ve smyslu Lebesgueově, pak má na tomto intervalu i K-intergrál a oba integrály jsou si rovny. Navíc, má-li funkce f K-integrál, pak f je Lebesgueovsky integrovatelná právě tehdy když také její absolutní hodnota $|f|$ má K-integrál.

Ukážeme si nyní, jak lze v některých jednoduchých příkladech určit hodnotu integrálu přímo z definice.

5.12. Příklady.

(i) Z Definice 5.2 je zřejmé, že je-li $f(t) \equiv f(a)$ na $[a,b]$, pak

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] = f(a)\,[g(b) - g(a)] \quad \text{a} \quad \int_a^b g\,\mathrm{d}[f] = 0$$

pro každou funkci $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

(ii) Pro libovolnou funkci $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ platí

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[\chi_{(\tau,b]}] = f(\tau) \qquad \text{pro} \quad \tau \in [a,b), \tag{5.8}$$

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[\chi_{[\tau,b]}] = f(\tau) \qquad \text{pro} \quad \tau \in (a,b), \tag{5.9}$$

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[\chi_{[a,\tau]}] = -f(\tau) \quad \text{pro} \quad \tau \in (a,b), \tag{5.10}$$

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[\chi_{[a,\tau)}] = -f(\tau) \quad \text{pro} \quad \tau \in (a,b], \tag{5.11}$$

a

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[\chi_{[\tau]}] = \begin{cases} -f(a) & \text{když} \quad \tau = a, \\ 0 & \text{když} \quad \tau \in (a,b), \\ f(b) & \text{když} \quad \tau = b. \end{cases} \tag{5.12}$$

Ukažme si odvození vztahů (5.8) a (5.9). Všechny ostatní se z nich už snadno odvodí použitím Věty 5.8. Nechť $g(x) = \chi_{(\tau,b]}(x)$ na $[a,b]$. Potom je

$$\int_a^\tau f\,\mathrm{d}[g] = 0.$$

Dále, položme

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{když} \quad x = \tau, \\ \frac{1}{4}(x-\tau) & \text{když} \quad x \in (\tau,b]. \end{cases}$$

Pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta;[\tau,b])$ $(D = \{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_m\}$, $\xi = (\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m))$ pak platí $\tau = \alpha_0 = \xi_1$, $g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1} = 0$ pro $j = 2,3,\dots,m$. Tudíž

$$S(D,\xi) = f(\tau)\,[g(\alpha_1) - g(\tau)] = f(\tau)$$

a

$$\int_\tau^b f\,\mathrm{d}[g] = f(\tau).$$

Důkaz vztahu (5.8) teď už snadno dokončíme použitím Věty 5.8.

Vztah (5.9) se dokazuje podobně. Tentokrát ovšem máme $g(x) = \chi_{[\tau,b]}(x)$ na $[a,b]$, $\int_\tau^b f\,\mathrm{d}[g] = 0$ a položíme

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{když } \ x = \tau, \\ \frac{1}{4}(\tau - x) & \text{když } \ x \in [a,\tau). \end{cases}$$

Pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta;[a,\tau])$ pak máme $\alpha_m = \xi_m = \tau$ a tedy

$$S(D,\xi) = f(\tau)\,[g(\tau) - g(\alpha_{m-1})] = f(\tau) \quad \text{a} \quad \int_a^\tau f\,\mathrm{d}[g] = f(\tau).$$

(iii) Pro libovolnou funkci $g \in \mathbb{G}[a,b]$ platí

$$\int_a^b \chi_{(\tau,b]}\,\mathrm{d}[g] = g(b) - g(\tau+) \quad \text{pro} \ \ \tau \in [a,b), \tag{5.13}$$

$$\int_a^b \chi_{[\tau,b]}\,\mathrm{d}[g] = g(b) - g(\tau-) \quad \text{pro} \ \ \tau \in (a,b), \tag{5.14}$$

$$\int_a^b \chi_{[a,\tau]}\,\mathrm{d}[g] = g(\tau+) - g(a) \quad \text{pro} \ \ \tau \in (a,b), \tag{5.15}$$

$$\int_a^b \chi_{[a,\tau)}\,\mathrm{d}[g] = g(\tau-) - g(a) \quad \text{pro} \ \ \tau \in (a,b] \tag{5.16}$$

a

$$\int_a^b \chi_{[\tau]}\,\mathrm{d}[g] = \begin{cases} g(a+) - g(a) & \text{když } \ \tau = a, \\ g(\tau+) - g(\tau-) & \text{když } \ \tau \in (a,b), \\ g(b) - g(b-) & \text{když } \ \tau = b. \end{cases} \tag{5.17}$$

Opět provedeme důkaz pouze prvních dvou z uvedených vztahů. Nechť tedy $f(x) = \chi_{(\tau,b]}(x)$ na $[a,b]$. Potom je

$$\int_a^\tau f\,\mathrm{d}[g] = 0.$$

Buď dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme nyní $\eta > 0$ tak, aby platilo $|g(\tau+) - g(x)| < \varepsilon$ pro každé $x \in (\tau, \tau + \eta)$ a definujme

$$\delta(x) = \begin{cases} \eta & \text{když } \; x = \tau \\ \frac{1}{4}(x - \tau) & \text{když } \; x \in (\tau, b]. \end{cases}$$

Pro každé $(D, \xi) \in \mathscr{A}(\delta; [\tau, b])$ musí platit $\tau = \alpha_0 = \xi_1$ a tedy

$$\begin{aligned} &|S(D,\xi) - [g(b) - g(\tau+)]| \\ &\quad = |[g(b) - g(\alpha_{m-1})] + [g(\alpha_{m-1}) - g(\alpha_{m-2}] \\ &\qquad + \cdots + [g(\alpha_2) - g(\alpha_1)] - [g(b) - g(\tau+)]| \\ &\quad = |g(\tau+) - g(\alpha_1)|. \end{aligned}$$

Protože $\tau < \alpha_1 < \tau + \delta(\tau) = \tau + \eta$, plyne odtud a z definice η, že

$$|S(D,\xi) - [g(b) - g(\tau+)]| < \varepsilon \quad \text{pro každé } \; (D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta; [\tau, b]).$$

Tudíž

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}[g] = \int_a^\tau f \, \mathrm{d}[g] + \int_\tau^b f \, \mathrm{d}[g] = g(b) - g(\tau+),$$

tj. platí (5.13).

V druhém případě, $f(x) = \chi_{[\tau,b]}(x)$ na $[a, b]$, máme

$$\int_\tau^b f \, \mathrm{d}[g] = g(b) - g(\tau).$$

Zvolme $\eta > 0$ tak, aby platilo $|g(\tau-) - g(x)| < \varepsilon$ pro každé $x \in (\tau - \eta, \tau)$, a definujme

$$\delta(x) = \begin{cases} \eta & \text{když } \; x = \tau, \\ \frac{1}{4}(\tau - x) & \text{když } \; x \in [a, \tau). \end{cases}$$

Tím si opět vynutíme, že pro každé $(D, \xi) \in \mathscr{A}(\delta; [a, \tau])$ musí být $\tau = \alpha_m = \xi_m$ a tudíž

$$S(D, \xi) = [g(\tau) - g(\alpha_{m-1})],$$

kde $\alpha_{m-1} \in (\tau - \eta, \tau)$. Jako v předchozím případě, odtud plyne, že platí

$$\int_a^\tau f \, \mathrm{d}[g] = g(\tau) - g(\tau-), \text{tj. } \int_a^b f \, \mathrm{d}[g] = \int_a^\tau f \, \mathrm{d}[g] + \int_\tau^b f \, \mathrm{d}[g] = g(b) - g(\tau-).$$

Výše uvedené příklady můžeme podle Cvičení 1.18 (i) shrnout do následujícího tvrzení:

5.13. Důsledek. *Jestliže $g \in \mathbb{G}[a,b]$ a $f \in \mathbb{S}[a,b]$, pak oba integrály*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] \quad a \quad \int_a^b g\,\mathrm{d}[f]$$

existují.

Následující věta poskytuje základní odhad pro integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ za předpokladu, že $\operatorname{var}_a^b g < \infty$. Na funkci f přitom žádné zásadní omezení neklademe.

5.14. Věta. *Jestliže $g \in \mathbb{BV}[a,b]$ a $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je taková, že integrály*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] \quad a \quad \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}[\operatorname{var}_a^x g]$$

existují, pak platí

$$\Big|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}[g(x)]\Big| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}[\operatorname{var}_a^x g] \le \|f\| \operatorname{var}_a^b g. \tag{5.18}$$

D ů k a z . Pro každé rozšířené dělení (D,ξ) intervalu $[a,b]$ platí

$$\begin{aligned} |S(D,\xi)| &\le \sum_{j=1}^{\nu(D)} |f(\xi_j)|\,|g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})| \\ &\le \sum_{j=1}^{\nu(D)} |f(\xi_j)| \operatorname{var}_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} g \le \|f\| \operatorname{var}_a^b g. \end{aligned}$$

□

Další věta poskytuje nejjednodušší konvergenční tvrzení:

5.15. Věta. *Nechť $g \in \mathbb{BV}[a,b]$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je funkce ohraničená na $[a,b]$ a $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí definovaných na intervalu $[a,b]$ taková, že platí*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0 \tag{5.19}$$

a existují všechny integrály $\int_a^b f_n\,\mathrm{d}[g]$, $n \in N$. Potom existuje také integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ a platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\,\mathrm{d}[g] = \int_a^b f\,\mathrm{d}[g]. \tag{5.20}$$

D ů k a z . a) Protože f je ohraničená, z předpokladu (5.19) plyne, že existuje $n_0 \in N$ takové, že platí

$$\|f_n\| \le \|f\| + 1 < \infty \quad \text{pro všechna } n \ge n_0.$$

Podle Věty 5.14 tedy máme

$$\Big| \int_a^b f_n \, \mathrm{d}[g] \Big| \le (\|f\| + 1) \operatorname{var}_a^b < \infty \quad \text{pro všechna } n \ge n_0$$

a podle Bolzanovy-Weierstraßovy věty tedy existuje podposloupnost $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ v $\mathbb{N}$ a $I \in \mathbb{R}$ takové, že platí $n_1 \ge n_0$ a

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_{n_k} \, \mathrm{d}[g] = I. \tag{5.21}$$

Označme

$$\begin{cases} I_k : = \displaystyle\int_a^b f_{n_k} \, \mathrm{d}[g] & \text{pro } k \in N, \\ S_k(D,\xi) : = S_{f_{n_k}\Delta g}(D,\xi) & \text{pro } \ k \in N,\ (D,\xi) \in \mathscr{D}[a,b], \\ S(D,\xi) : = S_{f\Delta g}(D,\xi), & \text{pro } \ (D,\xi) \in \mathscr{D}[a,b]. \end{cases} \tag{5.22}$$

b) Buď dáno $\varepsilon > 0$. Vzhledem k (5.19) a (5.21) můžeme zvolit $k_0 \in N$ tak, že platí

$$|I_k - I| < \varepsilon \quad \text{a} \qquad \|f_{n_k} - f\| < \varepsilon \quad \text{pro } \ k \ge k_0.$$

Potom bude také

$$|S(D,\xi) - S_{k_0}(D,\xi)| < \varepsilon \operatorname{var}_a^b g \quad \text{pro všechna } \ (D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b].$$

Dále, nechť $\delta_0 \in \mathscr{G}[a,b]$ je kalibr na $[a,b]$ takový, že pro všechna δ_0-jemná rozšířená dělení (D,ξ) intervalu $[a,b]$ platí

$$|S_{k_0}(D,\xi)] - I_{k_0}| < \varepsilon.$$

Pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta_0)$ tedy máme

$$|S(D,\xi) - I| \le |S(D,\xi) - S_{k_0}(D,\xi)| + |S_{k_0}(D,\xi) - I_{k_0}| + |I_{k_0} - I| < \varepsilon\,(\operatorname{var}_a^b g + 2).$$

Odtud

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}[g] = I = \lim_{k\to\infty} \int_a^b f_{n_k} \, \mathrm{d}[g].$$

c) Konečně, opětným použitím Věty 5.14,

$$\Big| \int_a^b f_n \, \mathrm{d}[g] - \int_a^b f \, \mathrm{d}[g] \Big| \le \|f_n - f\| \operatorname{var}_a^b g \quad \text{pro každé } \ n \in N.$$

Platí tedy i (5.20). □

Nyní můžeme formulovat první významnější existenční výsledek:

5.16. Věta. *Nechť* $f \in \mathbb{G}[a,b]$ *a* $g \in \mathbb{BV}[a,b]$. *Potom* $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ *existuje.*

D ů k a z . Podle Věty 3.6 (ii) existuje posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konečných skokových funkcí, která konverguje stejnoměrně na $[a,b]$ k funkci f. Podle Věty 5.6 a Příkladů 5.12(iii) integrál $\int_a^b f_n\,\mathrm{d}[g]$ existuje pro každé $n \in N$. To znamená, že podle Věty 5.15 existuje také integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ a platí (5.20). □

Následující konvergenční výsledek je tak trochu symetrický k Větě 5.15.

5.17. Věta. *Nechť* $g \in \mathbb{BV}[a,b]$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *je funkce ohraničená na* $[a,b]$ *a* $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ *je posloupnost funkcí definovaných na intervalu* $[a,b]$ *taková, že platí*

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{var}_a^b (g_n - g) = 0$$

a existují všechny integrály $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g_n]$, $n \in N$. *Potom existuje také integrál* $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ *a platí*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f\,\mathrm{d}[g_n] = \int_a^b f\,\mathrm{d}[g]. \tag{5.23}$$

D ů k a z . Zaveďme opět značení (5.22). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat

$$g_n(a) = g(a) = 0 \quad \text{pro všechna } n \in N.$$

Dále je důkaz podobný důkazu Věty 5.15. Existuje $n_0 \in N$ takové, že platí

$$\operatorname{var}_a^b g_n \le \operatorname{var}_a^b g + 1 \quad \text{pro všechna } n \ge n_0.$$

Podle Věty 5.14 tedy máme

$$\Big| \int_a^b f\,\mathrm{d}[g_n] \Big| \le \|f\| \,(\operatorname{var}_a^b g + 1) \quad \text{pro všechna } n \ge n_0$$

a podle Bolzanovy-Weierstraßovy věty tedy existuje podposloupnost $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ v $\mathbb{N}$ a $I \in \mathbb{R}$ takové, že platí $n_1 \ge n_0$ a

$$\lim_{k\to\infty} I_k = \lim_{k\to\infty} \int_a^b f\,\mathrm{d}[g_{n_k}] = I.$$

Použijeme značení analogické značení zavedenému v (5.22). Buď dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme $k_0 \in N$ tak, aby platilo

$$|I_k - I| < \varepsilon \quad \text{a} \quad \operatorname{var}_a^b (g_{n_k} - g) < \varepsilon \quad \text{pro} \quad k \ge k_0.$$

Dále, nechť $\delta_0 \in \mathscr{G}[a,b]$ je kalibr na $[a,b]$ takový, že pro všechna δ_0-jemná rozšířená dělení (D,ξ) intervalu $[a,b]$ platí

$$|S_{k_0}(D,\xi)] - I_{k_0}| < \varepsilon.$$

Pro každé $(D,\xi)\in\mathscr{A}(\delta_0)$ tedy máme

$$|S(D,\xi)-I|\le|S(D,\xi)-S_{k_0}(D,\xi)|+|S_{k_0}(D,\xi)-I_{k_0}|+|I_{k_0}-I|<\varepsilon\,(\|f\|+2).$$

Odtud

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]=I=\lim_{k\to\infty}\int_a^b f\,\mathrm{d}[g_{n_k}].$$

Konečně, opětným použitím Věty 5.14,

$$\Big|\int_a^b f\,\mathrm{d}[g_n]-\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]\Big|\le\|f\|\operatorname{var}_a^b(g_n-g)\quad\text{pro každé } n\in N.$$

Platí tedy (5.23). □

Podle Věty 5.16 integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ existuje pro všechny $f\in\mathbb{G}[a,b]$ a $g\in\mathbb{BV}[a,b]$. Chtěli bychom ukázat, že tento integrál vždy existuje i v symetrické situaci: $f\in\mathbb{BV}[a,b]$ a $g\in\mathbb{G}[a,b]$. Rozložíme-li funkci f na součet spojité části $f^{\,\mathrm{C}}$ a skokové části $f^{\,\mathrm{B}}$ (viz Lemma 1.21 a Definice 9.9) a vzpomeneme-li si na Lemma 1.24, podle kterého existuje posloupnost konečných skokových funkcí $f_n^{\,\mathrm{B}}\in\mathbb{S}[a,b]$ taková, že platí

$$\lim_{n\to\infty}\|f^{\,\mathrm{B}}-f_n^{\,\mathrm{B}}\|_{\mathbb{BV}}=0,$$

zjistíme, že ke svému cíli dospějeme, budeme-li umět dokázat existenci integrálu $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ pro každou funkci $f\in\mathbb{BV}\cap\mathbb{C}$ a každou $g\in\mathbb{G}[a,b]$ a budeme-li mít k dispozici konvergenční větu, ze které by plynulo, že platí

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n^{\,\mathrm{B}}\,\mathrm{d}[g]=\int_a^b f^{\,\mathrm{B}}\,\mathrm{d}[g]$$

pro každou funkci $g\in\mathbb{G}[a,b]$. (Věta 5.15 a ani Věta 5.17 takový výsledek nezahrnují.)

Tyto úkoly splníme v následujících třech krocích.

Nejprve dokážeme tvrzení zaručující existenci integrálu $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ za předpokladů zahrnujících i případ $f\in\mathbb{BV}\cap\mathbb{C}$, $g\in\mathbb{G}[a,b]$.

5.18. Lemma. *Jestliže funkce $f\in\mathbb{BV}[a,b]$ je spojitá na intervalu $[a,b]$, pak integrál $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ existuje pro každou funkci $g\in\mathbb{G}[a,b]$.*

D ů k a z . Nechť $f\in\mathbb{BV}[a,b]$, $g\in\mathbb{G}[a,b]$ a f je spojitá na intervalu $[a,b]$. Podle Vět 5.10, 3.6, 4.10 a 4.15 stačí ukázat existenci integrálu $(\sigma)\int_a^b g\,\mathrm{d}[f]$ pro každou konečnou skokovou funkci g (t.j. $g\in\mathbb{S}[a,b]$). Navíc, protože

$$\mathbb{S}[a,b]=\operatorname{Lin}\Big(\chi_{[a,\tau]},\chi_{[a,\tau)},\tau\in(a,b],\chi_{[a]}\Big).$$

(viz Poznámka 3.9 (i)), podle Cvičení 4.9 se můžeme omezit na případy

$$g = \chi_{[a,\tau]}, \quad g = \chi_{[a,\tau)}, \ \tau \in (a,b], \quad g = \chi_{[a]}.$$

a) Nechť tedy $\tau \in (a,b]$ a $g = \chi_{[a,\tau]}$. Zřejmě je

$$(\sigma)\int_a^\tau g \,\mathrm{d}[f] = f(\tau) - f(a).$$

Pro každé rozšířené dělení $(D,\xi) \in \mathscr{P}[\tau,b]$, $D = \{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_m\}$, $\xi = (\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m)$ máme

$$S(D,\xi) = \begin{cases} 0 & \text{je-li } \xi_1 > \tau, \\ f(\alpha_1) - f(\tau) & \text{je-li } \xi_1 = \tau. \end{cases}$$

Díky spojitosti funkce f v bodě τ zprava můžeme tedy k danému $\varepsilon > 0$ vždy najít dělení D_ε takové, že bude

$$|S(D,\xi)| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } (D,\xi) \in \mathscr{P}[\tau,b] \quad \text{taková, že } D \supset D_\varepsilon,$$

tj.

$$(\sigma)\int_\tau^b \chi_{[a,\tau]} \,\mathrm{d}[f] = 0$$

a

$$(\sigma)\int_a^b \chi_{[a,\tau]} \,\mathrm{d}[f] = f(\tau) - f(a).$$

b) Nechť $\tau \in (a,b]$ a $g = \chi_{[a,\tau)}$. Potom

$$(\sigma)\int_\tau^b g \,\mathrm{d}[f] = 0.$$

Pro každé rozšířené dělení $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,\tau]$, $D = \{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_m\}$, $\xi = (\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m)$ máme

$$S(D,\xi) = \begin{cases} 0 & \text{je-li } \xi_{m-1} < \tau, \\ f(\tau) - f(\alpha_{m-1}) & \text{je-li } \xi_m = \tau. \end{cases}$$

Díky spojitosti funkce f v bodě τ zleva můžeme tedy k danému $\varepsilon > 0$ vždy najít dělení D_ε takové, že bude

$$|S(D,\xi)| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } (D,\xi) \in \mathscr{P}[\tau,b] \quad \text{taková, že } D \supset D_\varepsilon,$$

tj.

$$(\sigma)\int_\tau^b \chi_{[a,\tau]} \,\mathrm{d}[f] = 0$$

a

$$(\sigma)\int_a^b \chi_{[a,\tau]}\,\mathrm{d}[f] = f(\tau) - f(a).$$

c) Podobně bychom ukázali, že

$$(\sigma)\int_a^b \chi_{[a]}\,\mathrm{d}[f] = 0.$$ □

5.19 . Cvičení. Dokažte následující dvě jemné modifikace Lemmatu 5.18:

Jestliže funkce $f\in\mathbb{BV}[a,b]$ je zleva spojitá na intervalu $(a,b]$, pak integrál $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ existuje pro každou funkci $g\in\mathbb{G}[a,b]$ zprava spojitou na intervalu $[a,b)$.

Jestliže funkce $f\in\mathbb{BV}[a,b]$ je zprava spojitá na intervalu $[a,b)$, pak integrál $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ existuje pro každou funkci $g\in\mathbb{G}[a,b]$ zleva spojitou na intervalu $(a,b]$.

Následující věta poskytuje odhad symetrický k Větě 5.14.

5.20 . Věta. *Nechť funkce g ohraničená na $[a,b]$ a $f\in\mathbb{BV}[a,b]$ jsou takové, že existuje integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$. Potom platí*

$$\Big|\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]\Big| \le (|f(a)|+|f(b)|+\operatorname{var}_a^b f)\,\|g\|. \tag{5.24}$$

D ů k a z . Pro libovolné $(D,\xi)\in\mathscr{P}[a,b]$, $D=\{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_m\}$, $\xi=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m)$, máme

$$\begin{aligned} S(D,\xi) &= f(\xi_1)\,[g(\alpha_1)-g(a)] + f(\xi_2)\,[g(\alpha_2)-g(\alpha_1)]+\ldots+f(\xi_m)\,[g(b)-g(\alpha_{m-1})]\\ &= f(b)\,g(b)-f(a)\,g(a)\\ &\quad -[f(\xi_1)-f(a)]\,g(a)-[f(\xi_2)-f(\xi_1)]\,g(\alpha_1)-\ldots-[f(b)-f(\xi_m)]\,g(b)\\ &= f(b)\,g(b)-f(a)\,g(a)-\sum_{j=0}^m[f(\xi_{j+1})-f(\xi_j)]\,g(\alpha_j), \end{aligned}$$

kde $\xi_0=a$ a $\xi_{m+1}=b$. Odtud plyne, že pro každé $(D,\xi)\in\mathscr{P}[a,b]$ platí

$$|S(D,\xi)| \le \Big(|f(a)|+|f(b)|+\sum_{j=0}^m|f(\xi_{j+1})-f(\xi_j)|\Big)\,\|g\|,$$

neboli

$$|S(D,\xi)| \le (|f(a)|+|f(b)|+\operatorname{var}_a^b f)\,\|g\|$$

odkud už tvrzení Věty okamžitě plyne. □

Nyní dokážeme konvergenční větu která zaručí, že bude platit

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n^{\mathrm{B}}\,\mathrm{d}[g] = \int_a^b f^{\mathrm{B}}\,\mathrm{d}[g].$$

5.21. Věta. *Nechť funkce g je ohraničená na $[a,b]$, $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ a nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{BV}[a,b]$ je posloupnost taková, že*

$$\int_a^b f_n \,\mathrm{d}[g] \quad \textit{existuje pro každé} \quad n \in N \quad \textit{a platí} \quad \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\mathbb{BV}} = 0.$$

Potom existuje také integrál $\int_a^b f \,\mathrm{d}[g]$ *a platí*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \,\mathrm{d}[g] = \int_a^b f \,\mathrm{d}[g].$$

D ů k a z . Podle Věty 5.20 platí

$$\Big| \int_a^b (f_n - f_m) \,\mathrm{d}[g] \Big| \le 2\,\|g\|\,\|f_n - f_m\|_{\mathbb{BV}} \quad \text{pro libovolná } m, n \in N.$$

Posloupnost $\left\{ \int_a^b f_n \,\mathrm{d}[g] \right\}_{n=1}^{\infty}$ je tedy cauchyovská a existuje tudíž $I \in \mathbb{R}$ takové, že platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \,\mathrm{d}[g] = I.$$

Ukážeme, že $\int_a^b f \,\mathrm{d}[g] = I$. Budiž dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Zvolme $n_0 \in N$ tak, aby platilo

$$\Big| \int_a^b f_{n_0} \,\mathrm{d}[g] - I \Big| < \varepsilon \quad \text{a} \quad \|f_{n_0} - f\|_{\mathbb{BV}} < \varepsilon.$$

Dále, zvolme $\delta_\varepsilon \in \mathscr{G}$ tak, aby pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ platilo

$$\Big| S_{n_0}(D,\xi) - \int_a^b f_{n_0} \,\mathrm{d}[g] \Big| < \varepsilon,$$

kde značíme $S_{n_0}(D,\xi) = S_{f_{n_0}\Delta g}(D,\xi)$. Potom pro libovolné $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ máme

$$\begin{aligned}
&|S(D,\xi) - I| \\
&\quad \le |S(D,\xi) - S_{n_0}(D,\xi)| + \Big| S_{n_0}(D,\xi) - \int_a^b f_{n_0} \,\mathrm{d}[g] \Big| + \Big| \int_a^b f_{n_0} \,\mathrm{d}[g] - I \Big| \\
&\quad \le \varepsilon\,(\|g\| + 2)
\end{aligned}$$

odkud už snadno odvodíme, že platí

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}[g] = I = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \,\mathrm{d}[g].$$

□

Nyní už budeme umět dokázat kýžený existeční výsledek. Připomeňme ještě, že v následujících tvrzeních a jejich důkazech důsledně používáme konvenci z našich *Základních úmluv a označení* (viz (xiii)) pro funkce regulované na intervalu $[a,b]$ a klademe

$$g(a-)=g(a),\ g(b+)=g(b)$$
$$\text{(a tedy také } \Delta^- g(a)=\Delta^+ g(b)=0,\ \Delta g(a)=\Delta^+ g(a),\ \Delta g(b)=\Delta^- g(b))$$

pro každou funkci $g\in\mathbb{G}[a,b]$. V tomto smyslu je třeba i rozumět symbolům pro funkce $g(x-)$ resp. $g(x+)$ definované na $[a,b]$. Není těžké si rozmyslet, že např. pro $g\in\mathbb{G}[a,b]$ a $h(x)=g(x-)$ platí

$$h(x-)=h(x)=g(x),\quad h(x+)=g(x+)\quad \text{na } [a,b].$$

Analogicky, pro $g\in\mathbb{G}[a,b]$ a $h(x)=g(x+)$ máme

$$h(x+)=h(x)=g(x),\quad h(x-)=g(x-)\quad \text{na } [a,b].$$

5.22 . Věta. *Jestliže* $f\in\mathbb{BV}[a,b]$ *a* $g\in\mathbb{G}[a,b]$, *pak integrál* $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ *existuje a platí* (5.24).

D ů k a z . Nechť $f\in\mathbb{BV}[a,b]$ a $g\in\mathbb{G}[a,b]$ a nechť $W=\{w_k\}_{k\in K}$ je množina bodů nespojitosti funkce f v $[a,b]$. ($K\subset\mathbb{N}$ může být případně i konečná množina.) Nechť $f=f^{\mathrm{C}}+f^{\mathrm{B}}$ je Jordanův rozklad funkce f na spojitou část f^{C} a skokovou část f^{B} definovanou jako v (1.6). Definujme

$$f_n^{\mathrm{B}}(x)=\sum_{k\in K\cap[1,n]}\Delta^- f(w_k)\chi_{(w_k,b]}(x)+\sum_{k\in K\cap[1,n]}\Delta^+ f(w_k)\chi_{[w_k,b]}(x)\quad \text{pro } n\in\mathbb{N} \text{ a } x\in[a,b].$$

Zřejmě $f_n^{\mathrm{B}}\in\mathbb{S}[a,b]$ pro každé $n\in\mathbb{N}$ a podle Lemmatu 1.24 platí

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n^{\mathrm{B}}-f^{\mathrm{B}}\|_{\mathbb{BV}}=\lim_{n\to\infty}\operatorname{var}_a^b(f^{\mathrm{B}}-f_n^{\mathrm{B}})=0.$$

Dále, podle Důsledku 5.13 integrál $\int_a^b f_n^{\mathrm{B}}\,\mathrm{d}[g]$ existuje pro každé $n\in\mathbb{N}$. Speciálně, integrál $\int_a^b f^{\mathrm{B}}\,\mathrm{d}[g]$ existuje je-li množina K konečná, tj. když f má jenom konečný počet bodů nespojitosti. Není-li K konečná, pak integrál $\int_a^b f^{\mathrm{B}}\,\mathrm{d}[g]$ existuje podle Věty 5.21. Protože integrál $\int_a^b f^{\mathrm{C}}\,\mathrm{d}[g]$ existuje podle Lemmatu 5.18, existence integrálu $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ nyní plyne z Věty 5.6. Konečně, podle Věty 5.20 platí také (5.24). □

Přímým důsledkem Věty 5.22 je následující konvergenční tvrzení:

5.23 . Důsledek. *Jestliže* $g_n\in\mathbb{G}[a,b]$ *pro* $n\in\mathbb{N}$ *a* $g_n\rightrightarrows g$ *na* $[a,b]$ *pro* $n\to\infty$, *pak pro každou funkci* $f\in\mathbb{BV}[a,b]$ *platí*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f\,\mathrm{d}[g_n]=\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]. \tag{5.25}$$

□

Následující tvrzení navazuje na důkaz Věty 5.22 a dává návod k výpočtu integrálu $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$, je-li znám integrál $\int_a^b f^{\,\mathrm{C}}\,\mathrm{d}[g]$, kde $f^{\,\mathrm{C}}$ značí spojitou část funkce f.

5.24 . Důsledek. *Jestliže* $f \in BV[a,b]$, $g \in G[a,b]$, $K \subset \mathbb{N}$ *a* W *je množina bodů nespojitosti funkce* f *v* $[a,b]$ *a* $f^{\,\mathrm{C}}$ *je spojitá část funkce* f ($f^{\,\mathrm{C}}(a) = f(a)$), *pak*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] = \int_a^b f^{\,\mathrm{C}}\,\mathrm{d}[g] + \sum_{w\in W}\big[\Delta^- f(w)(g(b)-g(w-)) + \Delta^+ f(w)(g(b)-g(w+))\big]. \tag{5.26}$$

D ů k a z . Nechť, jako v důkazu Věty 5.22, $K \subset \mathbb{N}$, $W = \{w_k\}_{k\in K}$ a

$$f_n^{\mathrm{B}}(x) = \sum_{k\in K\cap[1,n]}\big[\Delta^- f(w_k)\,\chi_{(w_k,b]}(x) + \Delta^+ f(w_k)\,\chi_{[w_k,b]}(x)\big] \quad \text{pro } n\in\mathbb{N} \text{ a } x\in[a,b].$$

Podle Lemmatu 1.24 platí

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n^{\mathrm{B}} - f^{\,\mathrm{B}}\|_{\mathbb{BV}} = \lim_{n\to\infty}\operatorname{var}_a^b(f^{\,\mathrm{B}} - f_n^{\mathrm{B}}) = 0.$$

Dále, podle (5.14), (5.15) a Věty 5.6, máme

$$\int_a^b f_n^{\mathrm{B}}\,\mathrm{d}[g] = \sum_{k=1}^n\big[\Delta^- f(w_k)\,(g(b)-g(w_k-)) + \Delta^+ f(w_k)\,(g(b)-g(w_k+))\big] \tag{5.27}$$

pro každé $n\in\mathbb{N}$. Je-li K konečná, plyne odtud okamžitě, že platí (5.26).

Není-li K konečná, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat $K = \mathbb{N}$. Podle Věty 5.21 platí

$$\int_a^b f^{\,\mathrm{B}}\,\mathrm{d}[g] = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n^{\mathrm{B}}\,\mathrm{d}[g]. \tag{5.28}$$

Podle Věty 1.9 je

$$\sum_{k=1}^\infty\big|\Delta^- f(w_k)\,(g(b)-g(w_k-)) + \Delta^+ f(w_k)\,(g(b)-g(w_k+))\big|$$
$$\le 2\,\|g\|\sum_{k=1}^\infty\Big(|\Delta^- f(w_k)| + |\Delta^+ f(w_k)|\Big) \le 2\,\|g\|\,(\operatorname{var}_a^b f) < \infty.$$

Vzhledem k (5.27) a (5.28) tudíž máme

$$\int_a^b f^{\,\mathrm{B}}\,\mathrm{d}[g] = \sum_{k=1}^\infty\big[\Delta^- f(w_k)(g(b)-g(w_k-)) + \Delta^+ f(w_k)(g(b)-g(w_k+))\big]. \tag{5.29}$$

Platí tedy (5.26). $\square$

5.25 . Cvičení. Pomocí Lemmatu 1.24 a úvah analogických těm, které jsme použili v důkazu Důsledku 5.24, dokažte, že pro $f \in \mathbb{G}[a,b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a,b]$ platí

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] = \int_a^b f\,\mathrm{d}[g^{\mathrm{C}}] + \sum_{w \in W} f(w)\,\Delta g(w), \tag{5.30}$$

kde W je množina bodů nespojitosti funkce g v $[a,b]$ a g^{C} je její spojitá část. (Přirozeně, zde $\Delta g(a) = \Delta^+ g(a)$ a $\Delta g(b) = \Delta^- g(b)$.)

Při důkazu Důsledku 5.24 a ve Cvičení 5.25 jsme použili Příklady 5.11. Následující technická lemmata jsou potřebná pro důkaz Věty o integraci per-partes, která je našim dalším významnějším cílem. Také v jejich důkazech budou Příklady 5.11 využity.

5.26. Lemma. *Nechť* $h \in G[a,b]$, $c \in \mathbb{R}$, $K \subset \mathbb{N}$ *a* $W = \{w_k\}_{k \in K} \subset [a,b]$ *jsou takové, že*

$$h(x) = c \quad \textit{pro} \quad x \in [a,b] \setminus W, \tag{5.31}$$

Potom

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[h] = f(b)\,[h(b) - c] - f(a)\,[h(a) - c] \tag{5.32}$$

platí pro každou funkci $f \in \mathbb{BV}[a,b]$.

D ů k a z . a) Funkce h splňuje (5.31) právě tehdy, když

$$h(x) = c + \sum_{k \in K} (h(w_k) - c)\,\chi_{[w_k]}(x) \quad \text{pro } n \in \mathbb{N} \text{ a } x \in [a,b].$$

Definujme $K_n = K \cap [1,n]$, $W_n = \{w_k\}_{k \in K_n}$ a

$$h_n(x) = c + \sum_{k \in K_n} (h(w_k) - c)\,\chi_{[w_k]}(x) \quad \text{pro } n \in \mathbb{N} \text{ a } x \in [a,b]$$

pro $n \in \mathbb{N}$. Dokážeme, že platí

$$\lim_{n \to \infty} \|h_n - h\| = 0. \tag{5.33}$$

Nechť je tedy dáno $\varepsilon > 0$ a nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ je takové, že

$$|h(w_k) - c| < \varepsilon \quad \text{pro každé } k > n_0. \tag{5.34}$$

Takové n_0 existuje, protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ je

$$|h(w_k) - c| = \begin{cases} |\Delta^- h(w_k)| & \text{když } w_k \in (a,b), \\ |\Delta^+ h(a)| & \text{když } w_k = a, \\ |\Delta^- h(b)| & \text{když } w_k = b \end{cases}$$

a množina těch $k\in\mathbb{N}$, pro něž $|h(w_k)-c|\ge\varepsilon$, může mít podle Důsledku 3.7 (ii) jenom nejvýše konečný počet (n_0) prvků. Tudíž,

$$|h_n(x)-h(x)| = \left\{\begin{array}{ll} |c-h(x)| & \text{když } x\in W_n, \\ 0 & \text{když } x\in[a,b]\setminus W_n \end{array}\right\} < \varepsilon \quad \text{pro } n\ge n_0 \text{ a } x\in[a,b].$$

Platí tedy (5.33).

b) Podle Příkladu 5.12 (i), formule (5.12) a Věty 5.6 platí

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[h_n] = f(b)\,[h_n(b)-c]-f(a)\,[h_n(a)-c\,] \tag{5.35}$$

pro každou funkci $f\in\mathbb{BV}[a,b]$ a každé $n\in\mathbb{N}$. Podle (5.33) a podle Důsledku 5.23 tedy máme

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[h] = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f\,\mathrm{d}[h_n] = f(b)\,[h(b)-c]-f(a)\,[h(a)-c].$$

□

5.27. Lemma. *Nechť* $h\in\mathbb{BV}[a,b]$, $c\in\mathbb{R}$, $K\subset\mathbb{N}$ *a* $W=\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset[a,b]$ *jsou takové, že platí* (5.31). *Potom*

$$\int_a^b h\,\mathrm{d}[g] = c\,[g(b)-g(a)\,]+\sum_{k=1}^{\infty}[h(w_k)-c\,]\,\Delta g(w_k) \text{ pro každou } g\in\mathbb{G}[a,b]. \tag{5.36}$$

D ů k a z . Vzhledem k (5.31) můžeme položit $h^{\mathrm{C}}(x)=c$ a $h^{\mathrm{B}}(x)=h(x)-c$ na $[a,b]$. W je množina bodů nespojitosti funkce h na intervalu $[a,b]$. Dále, $h(x-)=h(x+)=h(a+)=h(b-)=c$ pro každé $x\in(a,b)$. Tudíž

$$\Delta^- h(x) = h(x)-c = -\Delta^+ h(x) \quad \text{pro každé } x\in(a,b).$$

Podle (5.26) (kde $f=h$) tedy máme

$$\begin{aligned}\int_a^b h\,\mathrm{d}[g] &= c\,[g(b)-g(a)] + \sum_{w\in W}(h(w)-c)\,[g(b)-g(w-)-g(b)+g(w+)\,] \\ &= c\,[g(b)-g(a)\,]+\sum_{w\in W}[h(w)-c\,]\,\Delta g(w),\end{aligned}$$

tj. platí (5.36). (Připomeňme znovu, že $\Delta g(a)=\Delta^+g(a)$ a $\Delta g(b)=\Delta^-g(b)$.) □

5.28. Věta (VĚTA O INTEGRACI PER-PARTES). *Jestliže* $f\in\mathbb{G}[a,b]$ *a* $g\in\mathbb{BV}[a,b]$, *pak existují oba integrály*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] \quad a \quad \int_a^b g\,\mathrm{d}[f]$$

a platí

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]+\int_a^b g\,\mathrm{d}[f]=f(b)\,g(b)-f(a)\,g(a) \tag{5.37}$$
$$+\sum_{x\in[a,b]}\Big(\Delta^- f(x)\,\Delta^- g(x)-\Delta^+ f(x)\,\Delta^+ g(x)\Big).$$

D ů k a z . Integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ existuje podle Věty 5.16 a integrál $\int_a^b g\,\mathrm{d}[f]$ existuje podle Věty 5.22. Dále,

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]+\int_a^b g\,\mathrm{d}[f]$$
$$=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}[g(x)+\Delta^+ g(x)]+\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}[f(x)-\Delta^- f(x)]$$
$$-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}[\Delta^+ g(x)]+\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}[\Delta^- f(x)].$$

Není obtížné ověřit, že funkce $h(x)=\Delta^+ g(x)$ splňuje (5.31) s $c=0$ a $h(b)=0$. Dále, $\Delta h(x)=0$ pro $x\in(a,b)$. Podle Lemmatu 5.26 tedy máme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}[\Delta^+ g(x)]=-f(a)\,\Delta^+ g(a).$$

Analogicky,

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}[\Delta^- f(x)]=g(b)\,\Delta^- f(b),$$

čili

$$\left\{\begin{aligned}&\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}[g(x)]+\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}[f(x)]\\ &\quad=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}[g(x+)]+\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}[f(x-)]+f(a)\,\Delta^+ g(a)+\Delta^- f(b)\,g(b).\end{aligned}\right. \tag{5.38}$$

První integrál na pravé straně můžeme upravit na

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}[g(x+)]=\int_a^b f(x-)\,\mathrm{d}[g(x+)]+\int_a^b \Delta^- f(x)\,\mathrm{d}[g(x+)]. \tag{5.39}$$

Pro funkci $h(x)=g(x+)$ máme $h(x+)=h(x)=g(x+)$ a $h(x-)=g(x-)$ na $[a,b]$, tj. $\Delta h(x)=\Delta g(x)$ na $[a,b]$. Podle Lemmatu 5.27 tedy platí

$$\int_a^b \Delta^- f(x)\,\mathrm{d}[g(x+)]=\sum_{x\in[a,b]}\Delta^- f(x)\,\Delta g(x). \tag{5.40}$$

Analogicky,

$$\begin{cases} \displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}[f(x-)] = \int_a^b g(x+)\,\mathrm{d}[f(x-)] - \int_a^b \Delta^+ g(x)\,\mathrm{d}[f(x-)] \\ \displaystyle\qquad = \int_a^b g(x+)\,\mathrm{d}[f(x-)] - \sum_{x\in[a,b]} \Delta^+ g(x)\,\Delta f(x). \end{cases} \tag{5.41}$$

Funkce $f(x-)$ je spojitá zleva na $(a,b]$ a $g(x+)$ je spojitá zprava na $[a,b)$. Podle Cvičení 5.19 to znamená, že oba integrály

$$\int_a^b f(x-)\,\mathrm{d}[g(x+)] \quad \text{a} \quad \int_a^b g(x+)\,\mathrm{d}[f(x-)]$$

existují jako σ-Riemannovy-Stieltjesovy (RS) integrály. Pomocí Věty 4.15 o integraci per-partes pro RS-integrály dostáváme

$$\int_a^b f(x-)\,\mathrm{d}[g(x+)] + \int_a^b g(x+)\,\mathrm{d}[f(x-)] = f(b-)\,g(b) - f(a)\,g(a+). \tag{5.42}$$

Dosazením (5.39)-(5.42) do (5.38) dostaneme

$$\begin{aligned} &\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] + \int_a^b g\,\mathrm{d}[f] \\ &\quad = f(b-)\,g(b) - f(a)\,g(a+) + f(a)\,\Delta^+ g(a) + \Delta^- f(b)\,g(b) \\ &\qquad + \sum_{x\in[a,b]} \Big(\Delta^- f(x)\,[\Delta^- g(x) + \Delta^+ g(x)] - [\Delta^- f(x) + \Delta^+ f(x)]\,\Delta^+ g(x)\Big) \\ &\quad = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) + \sum_{x\in[a,b]} \big[\Delta^- f(x)\,\Delta^- g(t) - \Delta^+ f(x)\,\Delta^+ g(x)\big]. \end{aligned}$$

Dokázali jsme, že (5.37) platí. □

5.29. Lemma (SAKS-HENSTOCK). *Nechť $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jsou takové, že integrál*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$$

má konečnou hodnotu. Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno a nechť $\delta \in \mathscr{G}[a,b]$ je kalibr na $[a,b]$ takový, že platí

$$\Big|S(D,\xi) - \int_a^b f\,\mathrm{d}[g]\Big| < \varepsilon \quad \textit{pro všechna} \quad (D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta).$$

Potom pro libovolný systém $\{([s_j,t_j],\tau_j),\ j=1,2,\dots,k\}$ *takový, že*

$$\begin{cases} a \le s_1 \le \tau_1 \le t_1 \le s_2 \le \dots \le s_k \le \tau_k \le t_k \le b, \\ [s_j,t_j] \subset [\tau_j - \delta(\tau_j), \tau_j + \delta(\tau_j)], \quad j=1,2,\dots,k, \end{cases} \tag{5.43}$$

platí nerovnost

$$\Big|\sum_{j=1}^{k}\Big[f(\tau_j)\,[g(t_j)-g(s_j)] - \int_{s_j}^{t_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big]\Big| < \varepsilon. \tag{5.44}$$

D ů k a z . Buď dáno $\eta > 0$. Označme $t_0 = a$, $s_{k+1} = b$. Je-li $j \in \{1,2,\dots,k\}$ a $t_j < s_{j+1}$, pak můžeme najít kalibr δ^j a rozšířené dělení $(D^j,\xi^j) \in \mathscr{A}(\delta^j;[t_j,s_{j+1}])$ takové, že $\delta^j(x) \le \delta(x)$ pro každé $x \in [a,b]$ a

$$\big|S(D^j,\xi^j) - \int_{t_j}^{s_{j+1}} f\,\mathrm{d}[g]\big| < \frac{\eta}{k+1}. \tag{5.45}$$

Nyní sestavme δ–jemné rozšířené dělení $(\widetilde{D},\widetilde{\xi})$ intervalu $[a,b]$ tak, aby platilo

$$\sum_{j=1}^{k} f(\tau_j)\,[g(t_j)-g(s_j)] + \sum_{j=0}^{k} S(D^j,\xi^j) = S(\widetilde{D},\widetilde{\xi}).$$

(Je-li $t_j = s_{j+1}$, klademe $S(D^j,\xi^j) = 0$.) Vzhledem k předpokladům lemmatu tedy máme

$$\begin{aligned} &\Big|\sum_{j=1}^{k}\Big(f(\tau_j)\,[g(t_j)-g(s_j)] - \int_{s_j}^{t_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big) + \sum_{j=0}^{k}\Big(S(D^j,\xi^j) - \int_{t_j}^{s_{j+1}} f\,\mathrm{d}[g]\Big)\Big| \\ &\qquad = \Big|S(\widetilde{D},\widetilde{\xi}) - \int_a^b f\,\mathrm{d}[g]\Big| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Odtud a z (5.45) dostáváme pro libovolné $\eta > 0$

$$\begin{aligned} &\Big|\sum_{j=1}^{k} f(\tau_j)\,[g(t_j)-g(s_j)] - \int_{s_j}^{t_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big| \\ &\qquad \le \Big|S(\widetilde{D},\widetilde{\xi}) - \int_a^b f\,\mathrm{d}[g]\Big| + \Big|\sum_{j=0}^{k}\Big(S(D^j,\xi^j) - \int_{t_j}^{s_{j+1}} f\,\mathrm{d}[g]\Big)\Big| < \varepsilon + \eta, \end{aligned}$$

tj. platí (5.44). □

5.30. Věta. *Nechť* $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ *existuje a* $c \in [a,b]$. *Potom platí*

$$\lim_{x\to c,\, x\in[a,b]} \Big(\int_a^x f\,\mathrm{d}[g] + f(c)\,[g(c)-g(x)]\Big) = \int_a^c f\,\mathrm{d}[g]. \tag{5.46}$$

D ů k a z . Buď dáno $\varepsilon > 0$ a nechť $\delta_\varepsilon \in \mathscr{G}[a,b]$ je takový kalibr, že

$$\Big|S(D,\xi) - \int_a^b f\,\mathrm{d}[g]\Big| < \varepsilon$$

platí všechna $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$. Pro každé $x \in (c, c+\delta_\varepsilon(c)) \cap [a,b]$ systém $\{[s_1,t_1],\tau_1\}$, kde $s_1 = \tau_1 = c$ a $t_1 = x$, vyhovuje podmínkám (5.43). Podle Saks-Henstockova lemmatu (Lemma 5.29) tedy máme

$$\Big|f(c)\,[g(x)-g(c)] - \int_c^x f\,\mathrm{d}[g]\Big| < \varepsilon. \tag{5.47}$$

Podobně, je-li $x \in (c-\delta_\varepsilon(c), c) \cap [a,b]$, pak použitím Lemmatu 5.29 na systém $\{[x,c],c\}$ dostaneme nerovnost

$$\Big|f(c)\,[g(c)-g(x)] - \int_x^c f\,\mathrm{d}[g]\Big| < \varepsilon$$

Pro každé $x \in (c-\delta_\varepsilon(c), c+\delta_\varepsilon(c)) \cap [a,b]$ tedy platí nerovnost (5.47) a tudíž také nerovnost

$$\Big|\int_a^c f\,\mathrm{d}[g] - \int_a^x f\,\mathrm{d}[g] - f(c)\,[g(c)-g(x)]\Big| = \Big|\int_c^x f\,\mathrm{d}[g] - f(c)\,[g(x)-g(c)]\Big| < \varepsilon,$$

tj. platí (5.46). □

5.31 . Důsledek. *Nechť $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ existuje, $g \in \mathbb{G}[a,b]$ a nechť funkce $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je definována předpisem*

$$h(x) = \int_a^x f\,\mathrm{d}[g], \quad x \in [a,b].$$

Potom $h \in \mathbb{G}[a,b]$ *a*

$$h(t+) = h(t) + f(t)\Delta^+ g(t) \quad a \quad h(s-) = h(s) - f(s)\Delta^- g(s) \ \ \textit{pro} \ \ t \in [a,b),\ s \in (a,b].$$

□

5.32 . Věta (HAKE). (*i*) *Nechť $\int_a^x f\,\mathrm{d}[g]$ existuje pro každé $x \in [a,b)$ a nechť*

$$\lim_{x\to b-}\Big(\int_a^x f\,\mathrm{d}[g] + f(b)\,[g(b)-g(x)]\Big) = I \in \mathbb{R}.$$

Potom také

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] = I.$$

(*ii*) *Nechť* $\int_x^b f\,\mathrm{d}[g]$ *existuje pro každé* $x \in (a,b]$ *a nechť*

$$\lim_{x\to a+}\Big(\int_x^b f\,\mathrm{d}[g] + f(a)\,[g(x)-g(a)]\Big) = I \in \mathbb{R}.$$

Potom také

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] = I.$$

D ů k a z . (i) Buď dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme $\Delta > 0$ tak, aby platilo

$$\Big|\int_a^x f\,\mathrm{d}[g] + f(b)\,[g(b)-g(x)] - I\Big| < \varepsilon \quad \text{pro každé } x \in [b-\Delta, b). \tag{5.48}$$

Položme $x_k = b - \dfrac{b-a}{k+1}$ pro $k \in \mathbb{N}$. Posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí a $\lim_{k\to\infty} x_k = b$ a

$$\forall\, k \in \mathbb{N}\ \exists\, \delta_k \in \mathscr{G}[a,x_k] : (D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta_k,[a,x_k]) \Longrightarrow \Big|S(D,\xi) - \int_a^{x_k} f\,\mathrm{d}[g]\Big| < \frac{\varepsilon}{2^k} \tag{5.49}$$

Pro každé $\tau \in [a,b)$ označme symbolem $\kappa(\tau)$ jednoznačně určené přirozené číslo k takové, že $\tau \in [x_{k-1}, x_k)$. Dále, definujme kalibr δ_0 na $[a,b)$ tak, aby platilo

$$\delta_0(\tau) \le \delta_k(\tau) \quad \text{a} \quad [\tau-\delta_0(\tau), \tau+\delta_0(\tau)] \subset [a,x_k] \quad \text{pro každé } k \in \mathbb{N} \text{ a každé } \tau \in [x_{k-1}, x_k).$$

Nyní, nechť je dáno $x \in [a,b)$ a nechť $p \in N$ je takové, že $x \in [x_{p-1}, x_p)$ (tj. $p = \kappa(x)$) a nechť

$$(B,\eta) = \big(\{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m\}, (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)\big)$$

je libovolné δ_0–jemné dělení intervalu $[a,x]$. Pro každé $k \in \mathbb{N} \cap [1,p]$ a každé $j \in \mathbb{N} \cap [1,m]$ takové, že $\kappa(\eta_j) = k$ pak máme

$$\eta_j - \delta_k(\eta_j) \le \eta_j - \delta_0(\eta_j) \le \beta_{j-1} < \beta_j \le \eta_j + \delta_0(\eta_j) \le \eta_j + \delta_k(\eta_j).$$

Vzhledem k (5.49) a definici kalibru δ_0, tedy vidíme, že pro každé $k \in \{1,2,\dots,p\}$ systém

$$\{\{[\beta_{j-1}, \beta_j], \eta_j\},\ j = 1,2,\dots,m,\ \kappa(\eta_j) = k\}$$

splňuje předpoklady Saks-Henstockova lemmatu 5.29). Pro každé $k \in \{1,2,\dots,p\}$ tedy platí nerovnost

$$\Big|\sum_{\kappa(\eta_j)=k} f(\eta_j)\,[g(\beta_j) - g(\beta_{j-1})] - \int_{\beta_{j-1}}^{\beta_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big| < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Tudíž

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{j=1}^{m}\Big(f(\eta_j)\,[g(\beta_j)-g(\beta_{j-1})]-\int_a^x f\,\mathrm{d}[g]\Big)\Big|\\
&\quad=\Big|\sum_{k=1}^{p}\Big(\sum_{\kappa(\eta_j)=k} f(\eta_j)\,[g(\beta_j)-g(\beta_{j-1})]-\int_{\beta_{j-1}}^{\beta_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big)\Big|\\
&\quad\le\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\sum_{\kappa(\eta_j)=k}\Big(f(\eta_j)\,[g(\beta_j)-g(\beta_{j-1})]-\int_{\beta_{j-1}}^{\beta_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big)\Big|<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k}=\varepsilon,
\end{aligned}$$

tj.

$$|S(B,\eta)-\int_a^x f\,\mathrm{d}[g]\Big)|<\varepsilon\quad\text{pro všechna }\ x\in[a,b)\ \text{a všechna }\ (B,\eta)\in\mathscr{A}(\delta_0,[a,x])\tag{5.50}$$

Nyní, položme

$$\delta^*(x)=\begin{cases}\min\{b-x,\,\delta^0(x)\}\quad\text{pro}\ \ x\in[a,b),\\ \dfrac{\Delta}{2}\quad\text{pro}\ \ x=b.\end{cases}$$

Pak pro každé δ^*-jemné dělení

$$(\widetilde{D},\widetilde{\xi})=\big(\{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_m\},(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m)\big)$$

intervalu $[a,b]$ musí platit $\xi_m=\alpha_m=b$, $\alpha_{m-1}\in(b-\Delta,b)$ a tudíž, vzhledem k (5.48) a (5.50),

$$\begin{aligned}
\Big|S(D,\xi)-I\Big|&=\Big|\sum_{j=1}^{m-1} f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]+f(b)\,[g(b)-g(\alpha_{m-1})]-I\Big|\\
&\le\Big|\sum_{j=1}^{m-1} f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-\int_a^{\alpha_{m-1}} f\,\mathrm{d}[g]\Big|\\
&\qquad+\Big|\int_a^{\alpha_{m-1}} f\,\mathrm{d}[g]+f(b)\,[g(b)-g(\alpha_{m-1})]-I\Big|<2\,\varepsilon,
\end{aligned}$$

t.j. $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]=I$.

Důkaz tvrzení (ii) se provede analogicky a ponechávám ho čtenáři jako cvičení. □

5.33. Příklady. Pomocí Hakeovy věty můžeme snadno a universálním způsobem odvodit vzorce, které jsme v Příkladech 5.12 odvodili přímo z definice pomocí vhodné volby kalibru. Např. formuli (5.9) dostaneme takto:

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[\chi_{[\tau,b]}]=\int_a^\tau f\,\mathrm{d}[\chi_{[\tau,b]}]=\lim_{t\to\tau+}\Big(\int_a^t f\,\mathrm{d}[\chi_{[\tau,b]}]+f(\tau)\,[\chi_{[\tau,b]}(t)-\chi_{[\tau,b]}(\tau)]\Big)=f(\tau)$$

pro libovolnou funkci f a $\tau \in (a,b)$. Podobně, pro $\tau \in (a,b)$ a $g \in \mathbb{G}[a,b]$ dostaneme pomocí Hakeovy věty

$$\int_a^b \chi_{[a,\tau]}\,\mathrm{d}[g] = \int_a^\tau 1\,\mathrm{d}[g] + \int_\tau^b \chi_{[a,\tau]}\,\mathrm{d}[g]$$
$$= g(\tau) - g(a) + \lim_{t\to\tau+}\Big(\int_a^t \chi_{[\tau]}]\,\mathrm{d}[g] + 1\,[g(t) - g(\tau)]\Big) = g(\tau+) - g(a),$$

tj. (5.15).

5.34. Cvičení. Pomocí Hakeovy věty dokažte i zbývající formule z Příkladů 5.12.

5.35. Lemma. *Nechť $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ existuje. Potom pro každé $\varepsilon > 0$ existuje kalibr $\delta \in \mathscr{G}[a,b]$ takový, že platí*

$$\sum_{j=1}^m \Big| f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big| < \varepsilon \tag{5.51}$$

pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta)$, $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$.

D ů k a z . Buď dáno $\varepsilon > 0$ a nechť $\delta \in \mathscr{G}([a,b])$ je kalibr takový, že

$$\Big| S(D,\xi) - \int_a^b f\,\mathrm{d}[g]\Big| < \frac{\varepsilon}{2}$$

platí pro všechna $\delta-$jemná rozšířená dělení (D,ξ) intervalu $[a,b]$. Nyní, nechť

$$(D,\xi) = \big(\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, m)\big) \in \mathscr{A}(\delta).$$

Označme

$$J^+ = \Big\{ j \in \{1,2,\dots,m\} : f(\xi_j)\,[g(\alpha_j - g(\alpha_{j-1}) - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g] \ge 0 \Big\}$$

a

$$J^- = \{1,2,\dots,m\} \setminus J^+.$$

Systém $\{([\alpha_{j-1}, \alpha_j], \xi_j),\ j \in J^+\}$ splňuje předpoklady (5.43) z Lemmatu 5.29 na místě $\{([s_j, t_j], \tau_j)\}$. Podle Lemmatu 5.29 tedy platí

$$\Big| \sum_{j\,\in\, J^+} \Big(f(\xi_j)[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big)\Big|$$
$$= \sum_{j\,\in\, J^+} \Big| f(\xi_j)[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Podobně

$$\left|\sum_{j\,\in\,J^-}\Big(f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big)\right|$$
$$=\sum_{j\,\in\,J^-}\Big|f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Odtud už nerovnost (5.51) okamžitě vyplývá. □

5.36 . Věta (VĚTA O SUBSTITUCI). *Je-li funkce $h\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ ohraničená a integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ existuje, pak oba integrály*

$$\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}\Big[\int_a^x f\,\mathrm{d}[g]\Big],\qquad \int_a^b h(x)\,f(x)\,\mathrm{d}[g(x)]$$

existují jakmile existuje alespoň jeden z nich a v takovém případě pak platí:

$$\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}\Big[\int_a^x f\,\mathrm{d}[g]\Big]=\int_a^b h(x)\,f(x)\,\mathrm{d}[g(x)].$$

D ů k a z . Podle Věty 5.7 je funkce

$$k(x)=\int_a^x f\,\mathrm{d}[g]$$

definovaná pro každé $x\in[a,b]$.

a) Předpokládejme, že existuje integrál

$$\int_a^b h\,f\,\mathrm{d}[g].$$

Nechť je dáno $\varepsilon>0$ a nechť δ_ε je kalibr na $[a,b]$ takový, že pro každé $\delta_\varepsilon-$jemné dělení $(D,\xi)=\big(\{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_m\},(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m)\big)$ intervalu $[a,b]$ platí

$$\sum_{j=1}^m\Big|h(\xi_j)\,f(\xi_j)\,[g(\alpha_j-g(\alpha_{j-1})]-\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} h\,f\,\mathrm{d}[g]\Big|<\varepsilon$$

a

$$\sum_{j=1}^m\Big|f(\xi_j)\,[g(\alpha_j-g(\alpha_{j-1})]-\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big|<\varepsilon.$$

(Takový kalibr existuje podle Lemmatu 5.35.) Pro každé $\delta_\varepsilon-$jemné dělení

$$(D,\xi)=\big(\{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_m\},(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m)\big)$$

intervalu $[a,b]$ tedy máme:

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{j=1}^{m} h(\xi_j)\,[k(\alpha_j)-k(\alpha_{j-1})] - \int_a^b h\,f\,\mathrm{d}[g]\Big|\\
&\quad\le \sum_{j=1}^{m}\Big|h(\xi_j)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g] - h(\xi_j)\,f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]\Big|\\
&\qquad + \sum_{j=1}^{m}\Big|h(\xi_j)\,f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} h\,f\,\mathrm{d}[g]\Big|\\
&\quad\le \|h\|\sum_{j=1}^{m}\Big|\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g] - f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]\Big|\\
&\qquad + \sum_{j=1}^{m}\Big|h(\xi_j)\,f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} h\,f\,\mathrm{d}[g]\Big|\\
&\quad\le (\|h\|+1)\,\varepsilon,
\end{aligned}$$

tj. existuje integrál $\int_a^b h\,\mathrm{d}[k]$ a platí

$$\int_a^b h\,\mathrm{d}[k] = \int_a^b h\,f\,\mathrm{d}[g].$$

b) Obrácená implikace by se dokazovala podobně – opět za vydatné pomoci Lemmatu 5.35. □

5.37. Věta (Věta o dominované konvergenci)**.** *Nechť* $f, f_n \in \mathbb{G}[a,b]$,

$$\|f_n\| \le C < \infty \ \textit{pro}\ \ n\in N \quad \textit{a} \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\ \textit{pro všechna}\ \ t\in[a,b].$$

Potom

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,\mathrm{d}[g] = \int_a^b f\,\mathrm{d}[g] \quad \textit{pro každou funkci}\ \ g\in\mathbb{BV}[a,b].$$

5.38. Důsledek. *Nechť* $A\in\mathbb{BV}[a,b]$. *Potom operátor*

$$x\in\mathbb{BV}[a,b] \to L\,x\in\mathbb{BV}[a,b],$$

$$\textit{kde}\ \ (L\,x)(t) = \int_a^t \mathrm{d}[A(s)]\,x(s) \quad \textit{pro}\ \ t\in[a,b]$$

je kompaktní (totálně spojitý) lineární operátor.

Důkaz. L je zřejmě lineární ohraničené zobrazení $\mathbb{BV}[a,b]$ do $\mathbb{BV}[a,b]$. Zbývá tedy dokázat, že pro každou posloupnost $\{x_n\}$ ohraničenou v $\mathbb{BV}[a,b]$, její obraz $\{L\,x_n\}\subset\mathbb{BV}[a,b]$ obsahuje podposloupnost, která konverguje v $\mathbb{BV}[a,b]$.

Nechť je tedy $\{x_n\} \subset \mathbb{BV}[a,b]$ posloupnost taková, že $\|x_n\|_{\mathbb{BV}} \le C < \infty$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Podle Hellyovy věty (Věta 1.25) pak existuje podposloupost $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ a funkce $x \in \mathbb{BV}[a,b]$ takové, že

$$\|x\|_{\mathbb{BV}} \le C \quad \text{and} \quad \lim_{k\to\infty} x_{n_k}(t) = x(t) \quad \text{pro každé } \ t \in [a,b].$$

Označme $z_k(t) = x_{n_k}(t) - x(t)$ pro $k \in \mathbb{N}$ a $t \in [a,b]$. Potom

$$|z_k(t)| \le 2\,C \quad \text{pro} \quad k \in \mathbb{N} \quad \text{a} \quad t \in [a,b].$$

Pro libovolnou funkci $u \in \mathbb{BV}[a,b]$ a libovolnou dvojici t_1, t_2 bodů z $[a,b]$ takových, že $a \le t_1 < t_2 \le b$ máme podle Věty 5.14

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}[A]\,u\right| \le \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}[\operatorname{var}_{t_1}^{s} A]\,|u(s)| = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}[\operatorname{var}_{a}^{s} A]\,|u(s)|\,.$$

Pro libovolné $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \in \mathscr{D}[a,b]$ a každé $k \in \mathbb{N}$ tedy platí

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m} |(L\,z_k)(\alpha_j) - (L\,z_k)(\alpha_{j-1})| &= \sum_{j=1}^{m} \left|\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} \mathrm{d}[A(s)]\,z_k(s)\right| \\ &\le \sum_{j=1}^{m} \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} \mathrm{d}[\operatorname{var}_{a}^{s} A]\,|z_k(s)| \le \int_a^b \mathrm{d}[\operatorname{var}_{a}^{s} A]\,|z_k(s)|\,,\end{aligned}$$

neboli

$$\|L\,z_k\|_{\mathbb{BV}} = \operatorname{var}_a^b (L\,z_k) \le \int_a^b \mathrm{d}[\operatorname{var}_{a}^{s} A]\,|z_k(s)|\,.$$

Použitím Věty 5.37 dostaneme konečně

$$\lim_{k\to\infty} \|L\,x_{n_k} - L\,x\|_{\mathbb{BV}} = \lim_{k\to\infty} \|L\,z_k\|_{\mathbb{BV}} \le \lim_{k\to\infty} \int_a^b \mathrm{d}[\operatorname{var}_{a}^{s} A]\,|z_k(s)| = 0.$$

□

Kapitola 6

Spojité lineární funkcionály na prostorech regulovaných funkcí

Úvodem připomeňme několi kzákladních pojmů.

Nechť $\mathbb{X}$ a $\mathbb{Y}$ jsou lineární (vektorové) prostory. O zobrazení

$$\beta\colon x\in\mathbb{X},\ y\in\mathbb{Y}\to\beta(x,y)\in\mathbb{R}$$

řekneme, že je *bilineární*, jestliže platí

$$\begin{aligned}
&\beta(x_1+x_2,y)=\beta(x_1,y)+\beta(x_2,y) && \text{pro všechna}\ \ x_1,x_2\in\mathbb{X},\ \ y\in\mathbb{Y},\\
&\beta(\lambda\,x,y)=\lambda\,\beta(x,y) && \text{pro všechna}\ \ x\in\mathbb{X},\ \ y\in\mathbb{Y},\ \ \lambda\in\mathbb{R},\\
&\beta(x,y_1+y_2)=\beta(x,y_1)+\beta(x,y_2) && \text{pro všechna}\ \ x\in\mathbb{X},\ \ y_1,y_2\in\mathbb{Y},\\
&\beta(x,\lambda\,y)=\lambda\,\beta(x,y) && \text{pro všechna}\ \ x\in\mathbb{X},\ \ y\in\mathbb{Y},\ \ \lambda\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Prostory $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ tvoří *duální pár vzhledem k bilineárnímu zobrazení* β, jestliže platí

$$\begin{aligned}
&\beta(x,y)=0\ \ \text{pro všechna}\ \ x\in\mathbb{X}\ \implies\ y=0,\\
&\beta(x,y)=0\ \ \text{pro všechna}\ \ y\in\mathbb{X}\ \implies\ x=0.
\end{aligned}$$

Lineárním zobrazením lineárního prostoru $\mathbb{X}$ do $\mathbb{R}$ říkáme *lineární funkcionály na* $\mathbb{X}$. Pro libovolné lineární funkcionály Φ, Ψ na $\mathbb{X}$, $\lambda\in\mathbb{R}$ a $x\in\mathbb{X}$ definujeme

$$(\Phi+\Psi)(x)=\Phi(x)+\Psi(x)\quad\text{a}\quad(\lambda\,\Phi)(x)=\lambda\,\Phi(x).$$

Množina lineárních funkcionálů na prostoru $\mathbb{X}$ je zřejmě vzhledem k takto zavedeným operacím také lineární prostor. (Nulovým prvkem množiny lineárních funkcionálů na prostoru $\mathbb{X}$ je přirozeně funkcionál $O\colon x\in\mathbb{X}\to 0\in\mathbb{R}$.)

Je-li $\mathbb{X}$ Banachův prostor s normou $x\in\mathbb{X}\to\|x\|_{\mathbb{X}}$, pak lineární funkcionál Φ na $\mathbb{X}$ je spojitý (vzhledem k topologii indukované normou $\|.\|_{\mathbb{X}}$) právě tehdy, když je ohraničený, tj.

$$\sup\{|\Phi(x)|: x\in\mathbb{X}, \|x\|_{\mathbb{X}}\le 1\}<\infty.$$

Prostor spojitých lineárních funkcionálů na Banachově prostoru $\mathbb{X}$ značíme $\mathbb{X}^*$ a nazýváme *duální* (nebo též *adjungovaný prostor*) k $\mathbb{X}$. Předpisem

$$\Phi\in\mathbb{X}^*\to\|\Phi\|_{\mathbb{X}^*}=\sup\{|\Phi\,x|: x\in\mathbb{X}, \|x\|_{\mathbb{X}}\le 1\}<\infty.$$

je přirozeně definována norma na $\mathbb{X}^*$ a $\mathbb{X}^*$ je vzhledem k této normě také Banachův prostor. Je známým důsledkem Hahn-Banachovy věty, že dvojice tvořená Banachovým prostorem $\mathbb{X}$ a jeho duálním prostorem $\mathbb{X}^*$ tvoří duální pár vzhledem k bilineárnímu zobrazení

$$x \in \mathbb{X},\ \Phi \in \mathbb{X}^* \to \Phi(x) \in \mathbb{R}.$$

Mezi významné výsledky funkcionální analýzy patří representace spojitých lineárních funkcionálů na některých často používaných prostorech funkcí. Je dobře známo např., že Φ je spojitý lineární funkcionál na $\mathbb{C}[a,b]$ ($\Phi \in (\mathbb{C}[a,b])^*$) právě tehdy, když existuje funkce $p \in \mathbb{BV}[a,b]$ zprava spojitá na $[a,b)$ a taková, že $p(a) = 0$ a

$$\Phi(x) = \int_a^b \mathrm{d}[p]\, x \quad \text{pro všechny funkce } x \in \mathbb{C}[a,b].$$

Funkce $p \in \mathbb{BV}[a,b]$ zprava spojité na $(a,b]$ a takové, že $p(a) = 0$, se nazývají *normalizované* funkce s konečnou variací a tvoří podprostor v $\mathbb{BV}[a,b]$, který budeme značit $NBV[a,b]$. Prostory $(\mathbb{C}[a,b])^*$ a $NBV[a,b]$ jsou isometricky isomorfní. (To by neplatilo, kdybychom $NBV[a,b]$ nahradili prostorem $\mathbb{BV}[a,b]$ všech funkcí s konečnou variací na $[a,b]$. Pochopitelně, $NBV[a,b]$ lze ale nahradit např. podprostorem $\mathbb{BV}[a,b]$ tvořeným funkcemi spojitými zleva na $(a,b]$, které se anulují v nějakém pevně daném bodě $c \in [a,b]$.) Vzhledem k tomu, se jedná o integraci spojitých funkcí, integrál, který se ve výše uvedené representaci objevuje, je klasický (normový) Riemannův-Stieltjesův integrál. Další dobře známé representace spojitých lineárních prostorů využívají Lebesgueova integrálu:

$$\Phi \in (\mathbb{L}^\alpha[a,b])^* \iff \text{existuje } p \in \mathbb{L}^{\alpha^*}[a,b], \quad \text{takové, že}$$
$$\Phi(x) = \int_a^b p\, x\, \mathrm{d}t \quad \text{pro } x \in \mathbb{L}^\alpha[a,b],$$

$$\Phi \in (AC[a,b])^* \iff \text{existují } q \in \mathbb{R},\ p \in \mathbb{L}^\infty[a,b] \text{ takové, že}$$
$$\Phi(x) = q\, x(a) + \int_a^b p\, x'\, \mathrm{d}t \quad \text{pro } x \in \mathbb{AC}[a,b].$$

Zde, jak je obvyklé, $\mathbb{L}^\alpha[a,b]$ pro $\alpha \in [1,\infty)$, značí prostor funkcí x měřitelných na $[a,b]$ a takových, že

$$\int_a^b |x|^\alpha\, \mathrm{d}t < \infty,$$

přičemž norma na $\mathbb{L}^\alpha[a,b]$ je definována předpisem

$$x \in \mathbb{L}^\alpha[a,b] \to \|x\|_\alpha = \left(\int_a^b |x|^\alpha\, \mathrm{d}t\right)^{1/\alpha}$$

a

$$\alpha^* = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha-1} & \text{jestliže} \quad \alpha > 1, \\ \infty & \text{jestliže} \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

(O tvaru spojitých lineárních funkcionálů na $\mathbb{AC}[a,b]$ jsme se již zmínili v Poznámce 2.5.) Důkazy výše uvedených tvrzení a další podrobnosti lze nalézti ve většině standardních učebnic funkcionální analýzy. Všeobecně dostupná je také on-line verse plzeňských skript [1].

V této kapitole odvodíme obecný tvar spojitých lineárních funkcionálů na některých podprostorech prostoru $\mathbb{G}[a,b]$. Pro začátek si připomeňme, že podle Věty 5.22 je výraz

$$\Phi_\eta(x) = q\,x(a) + \int_a^b p\,\mathrm{d}[x] \tag{6.1}$$

definován pro každou funkci $x \in \mathbb{G}[a,b]$ a každou dvojici $\eta = (p,q) \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$. Navíc, pro každé $\eta \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$, předpis (6.1) definuje ohraničený (a tedy spojitý) lineární funkcionál na $\mathbb{G}[a,b]$.

Snadno ověříme, že předpisem $\eta = (p,q) \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R} \to \|\eta\|_{\mathbb{BV}\times\mathbb{R}} = |q| + \|p\|_{\mathbb{BV}}$ je definována norma na prostoru $\mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ a $\mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ je Banachův prostor vzhledem k této normě. Z formulí uvedených v Příkladech 5.12 (viz též Příklady 5.33 resp. Cvičení 5.34) také snadno odvodíme následující tvrzení.

6.1 . Lemma.

(i) *Pro libovolnou dvojici* $\eta = (p,q) \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ *platí*

$$\begin{cases} \Phi_\eta(1) &= q, \\ \Phi_\eta(\chi_{(\tau,b]}) &= p(\tau) \qquad \textit{když} \quad \tau \in [a,b), \\ \Phi_\eta(\chi_{[\tau]}) &= 0 \qquad\quad\; \textit{když} \quad \tau \in (a,b), \\ \Phi_\eta(\chi_{[b]}) &= p(b). \end{cases} \tag{6.2}$$

(i) *Pro libovolnou funkci* $x \in \mathbb{G}[a,b]$ *platí*

$$\begin{cases} \Phi_\eta(x) = x(a) & \textit{když} \;\; p \equiv 0 \quad \textit{na} \;\; [a,b] \quad \textit{a} \quad q = 1, \\ \Phi_\eta(x) = x(b) & \textit{když} \;\; p \equiv 1 \quad \textit{na} \;\; [a,b] \quad \textit{a} \quad q = 1, \\ \Phi_\eta(x) = x(\tau-) & \textit{když} \;\; p = \chi_{[a,\tau)} \quad \textit{na} \;\; [a,b],\; \tau \in (a,b] \quad \textit{a} \quad q = 1, \\ \Phi_\eta(x) = x(\tau+) & \textit{když} \;\; p = \chi_{[a,\tau]} \quad \textit{na} \;\; [a,b],\; \tau \in [a,b) \quad \textit{a} \quad q = 1. \end{cases} \tag{6.3}$$

□

Přímým důsledkem vztahů (6.2), (6.3) a Lemmatu 3.13 je následující tvrzení, kde symboly $\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$ a $\mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b]$ byly definovány v (3.2).

6.2. Lemma.

(i) *Jestliže* $\eta = (p,q) \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ *a* $\Phi_\eta(x) = 0$ *pro každé* $x \in \mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$ *(resp.* $x \in \mathbb{G}_{reg}[a,b]$*), pak* $p(t) \equiv 0$ *na* $[a,b]$ *a* $q = 0$.

(ii) *Jestliže* $x \in \mathbb{G}[a,b]$ *a* $\Phi_\eta(x) = 0$ *pro všechny dvojice* $\eta = (p,q) \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$, *pak*

$$x(a) = x(a+) = x(\tau-) = x(\tau+) = x(b-) = x(b) \tag{6.4}$$

platí pro $\tau \in (a,b)$. □

6.3. Věta. *Dvojice prostorů* $\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$ *a* $\mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ *resp.* $\mathbb{G}_{reg}[a,b]$ *a* $\mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ *tvoří duální páry vzhledem k bilineární formě*

$$x \in \mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b],\ \eta \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R} \to \Phi_\eta(x). \tag{6.5}$$

D ů k a z plyne z Lemmatu 6.2. □

Na druhou stranu, máme také

6.4. Lemma. *Jestliže* Φ *je lineární ohraničený funkcionál na* $\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$ *a*

$$p(t) = \begin{cases} \Phi(\chi_{(t,b]}) & \textit{když } \ t \in [a,b), \\ \Phi(\chi_{[b]}) & \textit{když } \ t = b, \end{cases} \tag{6.6}$$

pak $p \in \mathbb{BV}[a,b]$ *a*

$$\begin{cases} |p(a)| + |p(b)| + \operatorname{var}_a^b p \le 2\, \|\Phi\|_{\mathbb{G}^*_{\mathrm{L}}[a,b]}, \\ \textit{kde } \ \|\Phi\|_{\mathbb{G}^*_{\mathrm{L}}[a,b]} = \sup\{|\Phi(x)| : x \in \mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b],\ \|x\| \le 1\}. \end{cases} \tag{6.7}$$

D ů k a z . Pro libovolné dělení $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ intervalu $[a,b]$ a libovolný vektor $(c_0, c_1, \dots, c_m . c_{m+1})^T \in \mathbb{R}^{m+2}$ máme

$$\begin{aligned} &\Big| c_0\, p(a) + c_{m+1}\, p(b) + \sum_{j=1}^{m} c_j \left[p(\alpha_j) - p(\alpha_{j-1}) \right] \Big| \\ &\quad = \Big| \Phi\Big(c_0\, \chi_{(a,b]} + c_{m+1}\, \chi_{[b]} - \sum_{j=1}^{m-1} c_j\, \chi_{(\alpha_{j-1},\alpha_j]} + c_m\, \chi_{(\alpha_{m-1},b)} \Big) \Big| = |\Phi(h)|, \end{aligned}$$

kde $h = c_0\, \chi_{(a,b]} + c_{m+1}\, \chi_{[b]} - \sum_{j=1}^{m-1} c_j\, \chi_{(\alpha_{j-1},\alpha_j]} + c_m\, \chi_{(\alpha_{m-1},b)}$. Snadno ověříme, že platí $\|h\| \le 2$. Nyní, položíme-li $c_0 = \operatorname{sgn} p(a)$, $c_{m+1} = \operatorname{sgn} p(b)$ a $c_j = \operatorname{sgn}(p(\alpha_j) - p(\alpha_{j-1}))$ pro $j = 1, 2, \dots, m$, získáme vztah

$$|p(a)| + |p(b)| + V(p,D) \le 2\, \|\Phi\|_{\mathbb{G}^*_{\mathrm{L}}[a,b]} \quad \text{pro každé } \ D \in \mathscr{D}[a,b].$$

Odtud už plyne, že platí i (6.7). □

Analogicky předchozímu Lemmatu máme také

6.5. Lemma. *Nechť* Φ *je libovolný lineární ohraničený funkcionál na* $\mathbb{G}_{reg}[a,b]$. *Položme*

$$p(t) = \begin{cases} \Phi(\chi_{(a,b]}) & \textit{když} \;\; t = a, \\ \Phi(\frac{1}{2}\chi_{[t]} + \chi_{(t,b]}) & \textit{když} \;\; t \in (a,b), \\ \Phi(\chi_{[b]}) & \textit{když} \;\; t = b. \end{cases} \tag{6.8}$$

Potom

$$\operatorname{var}_a^b p \le \sup\{|\Phi(x)| : x \in \mathbb{G}_{reg}[a,b],\ \|x\| \le 1\} < \infty,$$

tj. $p \in \mathbb{BV}[a,b]$).

D ů k a z . Nechť $\Phi \in \mathbb{G}^*_{\rm reg}[a,b]$, $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ je dělení intervalu $[a,b]$ a nechť reálná čísla c_j, $j = 1,2,\ldots,m$, jsou taková, že je $|c_j| \le 1$ pro všechna $j = 1,2,\ldots,m$. Potom

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m c_j\,[p(\alpha_j) - p(\alpha_{j-1})] \\ = \quad c_1 \Big[\Phi(\frac{1}{2}\chi_{[\alpha_1]} + \chi_{(\alpha_1,b]}) - \Phi(\chi_{(a,b]})\Big] \\ \qquad + \displaystyle\sum_{j=2}^{m-1} c_j \Big[\Phi(\tfrac{1}{2}\chi_{[\alpha_j]} + \chi_{(\alpha_j,b]}) - \Phi(\tfrac{1}{2}\chi_{[\alpha_{j-1}]} + \chi_{(\alpha_{j-1},b]})\Big] \\ \qquad + c_m \Big[\Phi(\chi_{[b]}) - \Phi(\tfrac{1}{2}\chi_{[\alpha_{m-1}]} + \chi_{(\alpha_{m-1},b]})\Big] = \Phi(h), \end{cases} \tag{6.9}$$

kde

$$\begin{aligned} h = \quad & c_1 \Big[\tfrac{1}{2}\chi_{[\alpha_1]} + \chi_{(\alpha_1,b]} - \chi_{(a,b]}\Big] + c_m \Big[\chi_{[b]} - \tfrac{1}{2}\chi_{[\alpha_{m-1}]} - \chi_{(\alpha_{m-1},b]}\Big] \\ & \quad + \sum_{j=2}^{m-1} c_j \Big[\tfrac{1}{2}\chi_{[\alpha_j]} + \chi_{(\alpha_j,b]} - \tfrac{1}{2}\chi_{[\alpha_{j-1}]} - \chi_{(\alpha_{j-1},b]}\Big] \\ = \quad & c_1 \Big[\tfrac{1}{2}\chi_{[\alpha_1]} - \chi_{(a,\alpha_1]}\Big] - c_m \Big[\tfrac{1}{2}\chi_{[\alpha_{m-1}]} + \chi_{(\alpha_{m-1},b)}\Big] \\ & \quad + \sum_{j=2}^{m-1} c_j \Big[\tfrac{1}{2}\chi_{[\alpha_j]} - \chi_{(\alpha_{j-1},\alpha_j]} - \tfrac{1}{2}\chi_{[\alpha_{j-1}]}\Big] \\ = \quad & - c_1 \Big[\tfrac{1}{2}\chi_{[\alpha_1]} + \chi_{(a,\alpha_1)}\Big] - c_m \Big[\tfrac{1}{2}\chi_{[\alpha_{m-1}]} + \chi_{(\alpha_{m-1},b)}\Big] \\ & \quad - \tfrac{1}{2}\sum_{j=2}^{m-1} c_j\,\chi_{[\alpha_j]} - \tfrac{1}{2}\sum_{j=2}^{m-1} c_j\,\chi_{[\alpha_{j-1}]} - \sum_{j=2}^{m-1} c_j\,\chi_{(\alpha_{j-1},\alpha_j)} \\ = \quad & - \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1} c_j\,\chi_{[\alpha_j]} - \tfrac{1}{2}\sum_{j=2}^{m} c_j\,\chi_{[\alpha_{j-1}]} - \sum_{j=1}^{m} c_j\,\chi_{(\alpha_{j-1},\alpha_j)} \\ = \quad & - \sum_{j=1}^{m-1} \tfrac{c_j + c_{j+1}}{2}\chi_{[\alpha_j]} - \sum_{j=1}^{m} c_j\,\chi_{(\alpha_{j-1},\alpha_j)} \end{aligned}$$

$$= \quad -c_1\,\chi_{(a,\alpha_1)} - \sum_{j=2}^{m-1}\left(\tfrac{c_j+c_{j+1}}{2}\,\chi_{[\alpha_j]} + c_j\,\chi_{(\alpha_{j-1},\alpha_j)}\right) - c_m\,\chi_{(\alpha_{m-1},b)}.$$

Z tohoto vyjádření snadno nahlédneme, že

$$h(\alpha_j-) = -c_j,\ \ h(\alpha_j+) = -c_{j+1},\ \ h(\alpha_j) = -\tfrac{1}{2}(c_j + c_{j+1}) \quad \text{pro} \ \ j = 1, 2, \ldots, m.$$

Tedy $h \in \mathbb{S}[a,b] \cap \mathbb{G}_{\text{reg}}[a,b]$ a $|h(t)| \le 1$ pro všechna $t \in [a,b]$. Vzhledem k (6.9) tedy dostáváme, že nerovnost

$$\begin{aligned}\sup\Big\{\Big|\sum_{j=1}^{m} c_j\,\big[p\,(\alpha_j) - p\,(\alpha_{j-1})\big]\Big| : |c_j| \le 1, j = 1, 2, \ldots, m\Big\}\\ \le \sup\{|\Phi(x)| : x \in \mathbb{G}_{\text{reg}}[a,b], \|x\| \le 1\}\end{aligned}$$

platí pro každé dělení $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ intervalu $[a,b]$. Zvolíme-li nyní

$$c_j = \operatorname{sgn}\big[p(\alpha_j) - p(\alpha_{j-1})\big] \quad \text{pro} \ \ j = 1, 2, \ldots, m,$$

zjistíme,že platí

$$V(p,D) \le \sup\{|\Phi(x)| : x \in \mathbb{G}_{\text{reg}}[a,b], \|x\| \le 1\} < \infty \quad \text{pro každé} \ \ D \in \mathscr{D}[a,b],$$

tj. $\operatorname{var}_a^b p \le \|\Phi\|_{\mathbb{G}^*_{\text{reg}}[a,b]} < \infty.$ □

Prvním hlavním výsledkem této kapitoly je následující věta.

6.6. Věta. Φ *je lineární ohraničený funkcionál na* $\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$ ($\Phi \in \mathbb{G}^*_{\mathrm{L}}[a,b]$) *právě tehdy, když existuje dvojice* $\eta = (p,q) \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ *taková, že*

$$\Phi(x) = q\,x(a) + \int_a^b p\,\mathrm{d}x \quad \textit{pro} \ \ x \in \mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]. \tag{6.10}$$

Navíc, zobrazení

$$\eta \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R} \to \Phi_\eta \in \mathbb{G}^*_{\mathrm{L}}[a,b] \tag{6.11}$$

je isomorfismus.

D ů k a z . Nechť Φ je spojitý lineární funkcionál na $\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$ a nechť Φ_η je funkcionál definovaný předpisem (6.1), kde $\eta = (p,q)$, $q = \Phi(1)$ a funkce p je definovaná v (6.6). Podle Lemmatu 6.4 $\eta = (p,q) \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ a podle (6.2) a (6.6) máme

$$\Phi(1) \quad = q \quad = \Phi_\eta(1),$$

$$\Phi(\chi_{(\tau,b]}) = p(\tau) = \Phi_\eta(\chi_{(\tau,b]}) \quad \text{pro každé} \ \ \tau \in [a,b)$$

a

$$\Phi(\chi_{[b]}) \ = p(b) = \Phi_\eta(\chi_{[b]}).$$

Protože podle Lemmatu 3.13 je každá funkce z $\mathbb{S}[a,b] \cap \mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$ lineární kombinací funkcí

$$1, \ \chi_{(\tau,b]}, \ \tau \in [a,b), \ \chi_{[b]},$$

plyne odtud, že $\Phi(x) = \Phi_\eta(x)$ pro každé $x \in \mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b]$. Konečně, protože podle Lemmatu 3.12 je množina $\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b]$ hustá v $\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$, plyne odtud, že platí

$$\Phi(x) = \Phi_\eta(x) \quad \text{pro všechny} \ \ x \in \mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b].$$

Podle Věty 6.3 je (6.11) vzájemně jednoznačné zobrazení $\mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ na $\mathbb{G}^*_{\mathrm{L}}[a,b]$. Dále, podle Věty 5.22 máme

$$|\Phi_\eta(x)| \le \big(|p(a)| + |p(b)| + \operatorname{var}_a^b p + |q|\big)\, \|x\| \quad \text{pro každé} \ \ x \in \mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$$

a tudíž

$$\|\Phi_\eta\|_{\mathbb{G}^*_{\mathrm{L}}[a,b]} \le |p(a)| + |p(b)| + \operatorname{var}_a^b p + |q| \le 2\,\big(\|p\|_{\mathbb{BV}} + |q|\big) = 2\,\|\eta\|_{\mathbb{BV}\times\mathbb{R}}.$$

Na druhou stranu, podle (6.8) a podle Lemmatu 6.4 je

$$|q| = |\Phi(1)| \le \|\Phi_\eta\|_{\mathbb{G}^*_{\mathrm{L}}[a,b]} \quad \text{a} \quad \|p\|_{\mathbb{BV}} \le \big(|p(a)| + |p(b)| + \operatorname{var}_a^b p\big) \le 2\,\|\Phi_\eta\|_{\mathbb{G}^*_{\mathrm{L}}[a,b]}.$$

Souhrnem máme

$$\tfrac{1}{2}\|\Phi_\eta\|_{\mathbb{G}^*_{\mathrm{L}}[a,b]} \le \|\eta\|_{\mathbb{BV}\times\mathbb{R}} \le 3\,\|\Phi_\eta\|_{\mathbb{G}^*_{\mathrm{L}}[a,b]},$$

čili, zobrazení

$$\eta \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R} \to \Phi_\eta \in \mathbb{G}^*_{\mathrm{L}}[a,b]$$

je isomorfismus. □

6.7. Věta. Φ *je lineární ohraničený funkcionál na* $\mathbb{G}_{reg}[a,b]$ ($\Phi \in \mathbb{G}^*_{reg}[a,b]$) *právě tehdy, když existuje dvojice* $\eta = (p,q) \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ *taková, že*

$$\Phi(x) = q\,x(a) + \int_a^b p\,\mathrm{d}x \quad \textit{pro} \ \ x \in \mathbb{G}_{reg}[a,b]. \tag{6.12}$$

Navíc, zobrazení

$$\eta \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R} \to \Phi_\eta \in \mathbb{G}^*_{reg}[a,b] \tag{6.13}$$

je isomorfismus.

D ů k a z . Nechť $\Phi \in \mathbb{G}^*_{\mathrm{reg}}[a,b]$, a nechť Φ_η je funkcionál definovný předpisem (6.1), kde $\eta = (p,q)$, $q = \Phi(1)$ a p je dáno předpisem (6.8). Podle Lemmatu 6.5 $\eta = (p,q) \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ a podle (6.2) a (6.8) máme

$$\Phi(1) = q = \Phi_\eta(1),$$

$$\Phi(\tfrac{1}{2}\chi_{[\tau]} + \chi_{(\tau,b]}) = p(\tau) = \Phi_\eta(\tfrac{1}{2}\chi_{[\tau]} + \chi_{(\tau,b]}) \quad \text{pro každé} \quad \tau \in [a,b)$$

a

$$\Phi(\chi_{[b]}) = p(b) = \Phi_\eta(\chi_{[b]}).$$

Podle Lemmatu 3.13 odtud plyne, že $\Phi(x) = \Phi_\eta(x)$ pro každé $x \in \mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b]$. Konečně, protože podle Lemmatu 3.12 je množina $\mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b]$ hustá v $\mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b]$ a tudíž

$$\Phi(x) = \Phi_\eta(x) \quad \text{pro všechny} \quad x \in \mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b].$$

Podobně jako jsme dokázali analogickou nerovnost v závěru důkazu Věty 6.6 dokázali bychom nyní, že platí také

$$\tfrac{1}{2}\|\Phi_\eta\|_{\mathbb{G}^*_{\mathrm{reg}}[a,b]} \le \|\eta\|_{\mathbb{BV}\times\mathbb{R}} \le 3\,\|\Phi_\eta\|_{\mathbb{G}^*_{\mathrm{reg}}[a,b]}.$$

6.8. Cvičení. Postupem použitým v důkazech Vět 6.6 a 6.7 ukažte, že také platí

(i) Φ *je lineární ohraničený funkcionál na*

$$\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{L}}[a,b] = \{f \in \mathbb{G} : f(x-) = f(x) \ \textit{na}\ (a,b]\},$$

(viz (3.2)) *právě tehdy, když existuje funkce* $p \in \mathbb{BV}[a,b]$ *taková, že*

$$\Phi(x) = p(b)\,x(b) - \int_a^b p\,\mathrm{d}x \quad \textit{pro} \quad x \in \widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{L}}[a,b].$$

(ii) Φ *je lineární ohraničený funkcionál na*

$$\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{R}}[a,b] = \{f \in \mathbb{G} : f(x+) = f(x) \ \textit{na}\ [a,b)\},$$

(viz (3.2)) *právě tehdy, když existuje funkce* $p \in \mathbb{BV}[a,b]$ *taková, že*

$$\Phi(x) = p(a)\,x(a) + \int_a^b p\,\mathrm{d}x \quad \textit{pro} \quad x \in \widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{R}}[a,b].$$

Kapitola 7

Zobecněné diferenciální rovnice

"V rekonstrukci."

Kapitola 8

Aplikace Stieltjesova integrálu v teorii distribucí

V této kapitole naznačíme možnosti použití KS integrálu v teorii distribucí. Distribuce zde budeme chápat ve smyslu Laurenta Schwartze. Připomeňme si nejprve několik základních pojmů a definic.

Množinu funkcí $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které mají pro každé $k \in N \cup \{0\}$ derivaci $\varphi^{(k)}$ k-tého řádu spojitou na $\mathbb{R}$ a takovou, že $\varphi^{(k)}(t) = 0$ pro $t \in \mathbb{R} \setminus (a,b)$ označíme symbolem $\mathscr{D}[a,b]$. Množina $\mathscr{D}[a,b]$ je lineární prostor vzhledem k přirozeným operacím sčítání a násobení skalárem. Množina $\mathscr{D}[a,b]$ se stane topologickým vektorovým prostorem, zavedeme-li na ní topologii, ve které posloupnost $\{\varphi_k\} \subset \mathscr{D}[a,b]$ konverguje k $\varphi_0 \in \mathscr{D}[a,b]$ tehdy a jen tehdy, když

$$\lim_k \|\varphi_k^{(j)} - \varphi_0^{(j)}\| = 0 \quad \text{for každé} \ \ j \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Typickými příklady funkcí z prostoru $\mathscr{D}[a,b]$ jsou funkce tvaru

$$\varphi_{c,d}(t) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{t-c} + \frac{1}{d-t}\right) & \text{pro} \ \ t \in (c,d), \\[2ex] 0 & \text{pro} \ \ t \in \mathbb{R} \setminus (c,d), \end{cases}$$

kde $[c,d]$ může být libovolný podinterval v (a,b).

Spojité lineární funkcionály na topologickém vektorovém prostoru $\mathscr{D}[a,b]$ se nazývají *distribuce* na $[a,b]$. Množina všech distribucí na $[a,b]$ je tedy duálním prostorem k $\mathscr{D}[a,b]$. Značíme ji symbolem $\mathscr{D}^*[a,b]$. Funkcím z $\mathscr{D}[a,b]$ říkáme *testovací funkce* na $[a,b]$. Pro danou distribuci $f \in \mathscr{D}^*[a,b]$ a testovací funkci $\varphi \in \mathscr{D}[a,b]$, hodnotu funkcionálu f na φ značíme symbolem $\langle f, \varphi \rangle$.

Je-li $f \in \mathbb{L}^1[a,b]$, pak předpisem

$$\varphi \in \mathscr{D}[a,b] \to \int_a^b f(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

je definována distribuce

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_a^b f(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{pro všechny} \ \ \varphi \in \mathscr{D}[a,b]$$

na $[a,b]$, kterou budeme opět značit symbolem f. Říkáme, že distribuce f je určena (či representována) funkcí f.

Nulový prvek prostoru $\mathscr{D}^*[a,b]$ je určen libovolnou měřitelnou funkcí, která se anuluje s.v. na intervalu $[a,b]$. Speciálně, je-li $f \in \mathbb{G}[a,b]$, pak $f = 0 \in \mathscr{D}^*[a,b]$ tehdy a jen tehdy, když $f(t-) = f(s+) = 0$ pro všechna $t \in (a,b]$ a všechna $s \in [a,b)$. Tudíž, je-li $f \in \mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b]$, pak $f = 0 \in \mathscr{D}^*[a,b]$ tehdy a jen tehdy, když $f(t) = 0$ pro všechna $t \in [a,b]$. Jestliže $f,\, g \in \mathscr{D}^*[a,b]$, pak $f = g$ znamená, že $f - g = 0 \in \mathscr{D}^*[a,b]$. Z výše uvedeného plyne, že pro je-li $g \in \mathbb{L}^1[a,b]$, pak existuje nejvýše jedna funkce $f \in \mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b]$ taková, že $f = g$ s.v. na $[a,b]$. Dále, jsou-li $f,\, g$ funkce definované na $[a,b]$, $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, pak je $f = g$ v $\mathscr{D}^*[a,b]$ tehdy a jen tehdy, když $f = g$ s.v. na $[a,b]$.

Pro danou distribuci $f \in \mathscr{D}^*[a,b]$, definujeme její (*distributivní*) *derivaci* f' předpisem

$$f'\colon \varphi \in \mathscr{D}[a,b] \to \langle f', \varphi\rangle = -\langle f, \varphi'\rangle.$$

Podobně, pro každé $k \in \mathbb{N}$,

$$f^{(k)}\colon \varphi \in \mathscr{D}[a,b] \to \langle f^{(k)}, \varphi\rangle = (-1)^k \langle f, \varphi^{(k)}\rangle.$$

Distributivní derivace absolutně spojitých funkcí jsou zřejmě určeny jejich klasickými derivacemi.

Nechť

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \ t < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{pro } \ t = 0, \\ 1 & \text{pro } \ t > 0, \end{cases} \qquad \tau \in (a,b) \quad \text{a} \quad h_\tau(t) = H(t-\tau) \quad \text{pro } \ t \in [a,b].$$

Potom použitím Věty 5.28 a s přihlédnutím k (5.8) a (5.12) dostaneme

$$\langle h'_\tau, \varphi\rangle = -\langle h_\tau, \varphi'\rangle = -\int_a^b h_\tau \, \mathrm{d}[\varphi] = \int_a^b \mathrm{d}[h_\tau]\, \varphi = \varphi(\tau).$$

Funkce h_τ se nazývá *Heavisideova funkce* (se středem v bodě τ) a její distributivní derivace h'_τ se značí δ_τ a nazývá se *Diracova δ-distribuce* (se středem v bodě τ).

Nechť je dána libovolná funkce $\varphi \in \mathscr{D}[a,b]$ a nechť $\Theta \in \mathscr{D}[a,b]$ je taková, že

$$\int_a^b \Theta(s)\, \mathrm{d}s = 1 \qquad \text{(např. } \ \Theta(t) = \frac{\varphi_{a,b}(t)}{\int_a^b \varphi_{a,b}(s)\, \mathrm{d}s} \text{).}$$

Položme

$$a_0 = \int_a^b \varphi(s)\, \mathrm{d}s \quad \text{a} \quad \rho = \int_a^t (\varphi(s) - a_0\, \Theta(s))\, \mathrm{d}s \quad \text{pro } \ t \in [a,b].$$

Potom $\rho(b) = 0$ a tudíž $\rho \in \mathscr{D}[a,b]$. Dále,

$$\varphi(t) = a_0\, \Theta(t) - \rho'(t) \quad \text{pro } \ t \in [a,b].$$

Pro každou $\varphi \in \mathscr{D}[a,b]$ tedy existuje funkce $\rho \in \mathscr{D}[a,b]$ taková, že platí

$$\varphi(t) = \left(\int_a^b \varphi(s)\,\mathrm{d}s\right)\Theta(t) - \rho'(t) \quad \text{pro} \quad t \in [a,b]. \tag{8.1}$$

Nyní, jestliže $f \in \mathscr{D}^*[a,b]$ je distribuce taková, že platí

$$\langle f, \rho' \rangle = 0 \quad \text{pro všechna} \quad \rho \in \mathscr{D}[a,b]$$

a pro φ, $\rho \in \mathscr{D}[a,b]$ platí (8.1), pak

$$\langle f, \varphi \rangle = \left(\int_a^b \varphi(s)\,\mathrm{d}s\right)\langle f, \Theta \rangle - \langle f, \rho' \rangle = \left(\int_a^b \varphi(s)\,\mathrm{d}s\right)\langle f, \Theta \rangle = \int_a^b c_0\,\varphi(s)\,\mathrm{d}s,$$

kde $c_0 = \langle f, \Theta \rangle \in \mathbb{R}$ je konstanta. To znamená, že daná distribuce $f \in \mathscr{D}^*[a,b]$ má nulovou derivaci ($f' = 0$) tehdy a jen tehdy, když existuje $c_0 \in \mathbb{R}$ takové, že $f(t) = c_0$ pro s.v. $t \in [a,b]$. Odtud se dále snadno indukcí odvodí, že je-li $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pak $f^{(k)} = 0 \in \mathscr{D}^*[a,b]$ tehdy a jen tehdy, když existují $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1} \in \mathbb{R}$ takové, že

$$f(t) = c_0 + c_1\,t + \cdots + c_{k-1}\,t^{k-1} \quad \text{pro s.v.} \ t \in [a,b].$$

Všimněme si, že jsou-li u, $v \in \mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b]$ takové, že $u' = v$, pak $u \in \mathbb{AC}[a,b]$. Vskutku, položme

$$w(t) = u(0) + \int_a^b v(s)\,\mathrm{d}s.$$

Potom $(w-u)' = 0$ a $w(0) = u(0)$ a tudíž, protože $w - u \in \mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b]$, je nutně $w = u$ na $[a,b]$.

8.1 . Definice. Pro libovolné funkce $f \in \mathbb{G}[a,b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a,b]$ takové, že

$$\Delta^+ f(t)\,\Delta^+ g(t) = \Delta^- f(t)\,\Delta^- g(t) \quad \text{pro všechny} \quad t \in (a,b), \tag{8.2}$$

definujeme

$$f'g : \varphi \in \mathscr{D}[a,b] \to \langle f'\,g, \varphi \rangle = \int_a^b g(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}[f(t)] \tag{8.3}$$

a

$$f\,g' : \varphi \in \mathscr{D}[a,b] \to \langle f\,g', \varphi \rangle = \int_a^b f(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}[g(t)]. \tag{8.4}$$

8.2 . Poznámka. Nechť $f \in \mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b]$ a $g \in \mathbb{BV}_{\mathrm{reg}}[a,b]$. Podmínka (8.2) je pak zřejmě splněna např. v následujících případech:

(i) obě funkce jsou regulární,

(ii) alespoň jedna z nich je spojitá na (a,b),

(iii) jedna z nich zleva spojitá na (a,b) a druhá je zprava spojitá na (a,b).

Nechť $f \in \mathbb{L}^1[a,b]$ a $g \in \mathbb{G}[a,b]$. Potom z (8.3) plyne, že součin $f\,g$ je definován následujícím předpisem

$$f\,g : \varphi \in \mathscr{D}[a,b] \to \langle f\,g, \varphi\rangle = \int_a^b f(t)\,g(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t,$$

t.j. (distributivní) součin funkcí f a g je v tomto případě representován funkcí

$$f\,g : t \in [a,b] \to f(t)\,g(t).$$

8.3. Lemma. *Nechť $f \in \mathbb{G}[a,b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a,b]$ splňují* (8.2). *Potom $f'\,g$ i $f\,g'$ jsou bodové funkce definované pro $t \in [a,b]$ předpisy:*

$$(f'\,g)(t) = \Big(\int_a^t \mathrm{d}[f(s)]\,g(s)\Big)' \tag{8.5}$$

a

$$(f\,g')(t) = \Big(\int_a^t \mathrm{d}[g(s)]\,f(s)\Big)'. \tag{8.6}$$

Důkaz. Použitím Věty o substituci (Věta 5.36) a Věty o integraci per-partes (Věta 5.28) pro libovolné $\varphi \in \mathscr{D}[a,b]$ dostaneme

$$\begin{aligned}\langle f'\,g, \varphi\rangle &= \int_a^b \mathrm{d}\Big[\int_a^t \mathrm{d}[f(s)]\,g(s)\Big]\,\varphi(t) = -\int_a^b \Big(\int_a^t \mathrm{d}[f(s)]\,g(s)\Big)\,\varphi'(t)\\ &= \langle\Big(\int_a^t \mathrm{d}[f(s)]\,g(s)\Big)', \varphi\rangle,\end{aligned}$$

t.j. platí (8.5). Vztah (8.6) se dokazuje analogicky. □

8.4. Důsledek. Jestliže funkce $f \in \mathbb{G}[a,b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a,b]$ splňují podmínku (8.2), pak

$$(f\,g)' = f\,g' + f'\,g.$$

D ů k a z plyne přímo z Definice 8.1, Věty 5.28 (o integraci per-partes) a Lemmatu 8.3. □

8.5 . Příklad. Snadno ověříme, že jestliže $\tau \in (a,b)$ a h_τ resp. δ_τ jsou Heavisideova funkce resp. Diracova distribuce se středem v τ, pak $h_\tau\,\delta_\tau = \frac{1}{2}\,\delta_\tau$.

Kapitola 9

Dodatky

9.1 Důkaz Věty 1.14

Pro důkaz Věty 1.14 je účelné zavést následující definice.

9.1. Definice. Funkce $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ je *shora (zdola) polospojitá v bodě* $x_0\in[a,b]$, jestliže pro každé $\varepsilon>0$ existuje $\delta>0$ takové, že pro všechna $x\in[a,b]\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$ platí

$$F(x)<F(x_0)+\varepsilon \qquad (F(x)>F(x_0)-\varepsilon).$$

Je-li funkce f shora resp. zdola polospojitá v každém bodě intervalu $[a,b]$, říkáme, že je *shora* resp. *zdola polospojitá na intervalu* $[a,b]$.

9.2. Poznámka. Je zřejmé, že funkce f je spojitá v bodě x_0 právě tehdy, když je v něm současně polospojitá shora i zdola.

9.3 . Cvičení. Každá funkce polospojitá shora (zdola) na ohraničeném a uzavřeném intervalu je na tomto intervalu ohraničená shora (zdola).

Další příjemnou vlastností funkcí shora polospojitých na intervalu $[a,b]$ je to, že tyto funkce nabývají na tomto intervalu svého maxima:

9.4 . Tvrzení. *Je-li funkce* $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ *shora polospojitá na intervalu* $[a,b]$, *potom existuje bod* $x_0\in[a,b]$ *takový, že*

$$F(x)\le F(x_0) \quad \textit{pro každé } x\in[a,b].$$

D ů k a z . Označme

$$M=\sup_{x\in[a,b]} F(x).$$

Podle Cvičení 9.3 je $M<\infty$. Množina

$$Q_k=\{x\in[a,b]:F(x)\ge M-\frac{1}{k}\} \tag{9.1}$$

je pro každé $k\in\mathbb{N}$ neprázdná. Ukážeme, že je také uzavřená:
Nechť x^* je hromadný bod množiny Q_k. Zřejmě $x^*\in[a,b]$. Předpokládejme, že $x^*\notin Q_k$. Platí tedy $F(x^*)<M-\frac{1}{k}$. Dále, z polospojitosti shora funkce f plyne, že k danému $\varepsilon=M-\frac{1}{k}-F(x^*)>0$ existuje $\delta>0$ takové, že platí

$$F(x)<F(x^*)+\varepsilon=F(x^*)+M-\frac{1}{k}-F(x^*)=M-\frac{1}{k}$$

$$\text{pro všechna } x\in(x^*-\delta,x^*+\delta)\cap[a,b],$$

což je ovšem spor s tím, že x^* je hromadný bod množiny Q_k. Každá množina Q_k, $k \in \mathbb{N}$, je tedy uzavřená. Dále, vzhledem k tomu, že posloupnost $\left\{M - \frac{1}{k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí, plyne z (9.1), že platí

$$[a,b] \supset Q_1 \supset Q_2 \cdots \supset Q_k \supset Q_{k+1} \ldots .$$

Podle Cantorovy věty (viz např. [5, Věta 157]) je tudíž množina $\bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k$ neprázdná. Budiž x_0 její libovolný prvek. Potom

$$M - \frac{1}{k} \le F(x_0) \le M \quad \text{platí pro každé } k \in \mathbb{N},$$

což je možné pouze, když

$$F(x_0) = M = \sup_{x \in [a,b]} F(x).$$

□

9.5 . Cvičení. Je-li funkce $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ zdola polospojitá na intervalu $[a,b]$, potom existuje bod $x_0 \in [a,b]$ takový, že

$$F(x) \ge F(x_0) \quad \text{pro každé } x \in [a,b].$$

9.6. Tvrzení. *Nechť funkce $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ je taková, že pro každé $t \in [a,b)$ a každé $s \in (a,b]$ existují limity*

$$f(t+) = \lim_{\tau \to t+} f(\tau) \quad a \quad f(s-) = \lim_{\tau \to s-} f(\tau).$$

Definujme funkci $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ předpisem

$$F(x) = \max\{f(x-), f(x), f(x+)\} \quad \textit{pro } x \in (a,b), \quad F(a) = f(a+) \quad a \quad F(b) = f(b-).$$

Potom je funkce F shora polospojitá na intervalu $[a,b]$.

D ů k a z . Budiž dán libovolný bod $x_0 \in (a,b)$. Potom platí $f(x_0) \le F(x_0)$. Dále, vzhledem k předpokladu o existenci limit $f(x_0-)$ a $f(x_0+)$, pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že platí

$$f(x) < f(x_0-) + \varepsilon \le F(x_0) + \varepsilon \quad \text{pro všechna } x \in (x_0 - \delta, x_0),$$

$$f(x) < f(x_0+) + \varepsilon \le F(x_0) + \varepsilon \quad \text{pro všechna } x \in (x_0, x_0 + \delta).$$

Máme tedy

$$f(x) < F(x_0) + \varepsilon \qquad \text{pro všechna } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Odtud plyne dále, že platí

$$f(x-) \le F(x_0) + \varepsilon \quad \text{a} \quad f(x+) < F(x_0) + \varepsilon \quad \text{pro všechna } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

čili

$$F(x) \le F(x_0) + \varepsilon \quad \text{pro všechna } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

T. zn., že f je polospojitá shora v bodě x_0. Podobně bychom postupovali také v případech $x_0 = a$ resp. $x_0 = b$. □

9.7. Lemma (RIESZ). *Nechť funkce f a $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ splňují předpoklady Tvrzení* 9.6. *Potom je množina*

$$E = \{x \in (a,b) : \textit{existuje } \xi > x \textit{ tak, že } f(\xi) > F(x)\}$$

otevřená. Když je $E \neq \emptyset$, pak E sestává z nejvýše spočetného systému po dvou disjunktních otevřených intervalů (a_k, b_k) a pro každý z nich platí

$$f(a_k+) \le F(b_k).$$

D ů k a z . Je-li $E = \emptyset$, není co dokazovat. Nechť tedy $x_0 \in E$. Potom existuje $\xi \in (x_0, b]$ takové, že platí

$$\varepsilon : = f(\xi) - F(x_0) > 0.$$

Vzhledem k polospojitosti funkce F v bodě x_0 existuje $\delta > 0$ takové, že $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [a,b]$ a

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \implies F(x) < F(x_0) + \varepsilon = f(\xi).$$

To ovšem také znamená, že je

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset E,$$

tj. množina E je otevřená.

Je známo (viz [5, Věta 69]), že každá neprázdná otevřená množina je sjednocením nejvýše spočetného systému po dvou disjunktních otevřených intervalů. Tedy také množina E je sjednocením takového systému $\{(a_k, b_k)\}$. Zvolme libovolný interval (a_k, b_k) z tohoto systému a v něm libovolný bod x_0. Podle Tvrzení 9.4 existuje $x_1 \in [x_0, b]$ takové, že

$$F(x_1) = \max_{x \in [x_0, b]} F(x). \tag{9.2}$$

Kdyby bylo $x_1 < b_k$ pak by také bylo $x_1 \in E$ a tudíž by pro nějaké $\xi \in (x_1, b]$ bylo

$$F(\xi) \ge f(\xi) > F(x_1),$$

což je ovšem spor s (9.2). Máme tedy

$$x_1 \ge b_k.$$

Vzhledem k (9.2) máme také $F(b_k) \le F(x_1)$. Předpokládejme, že je

$$F(b_k) < F(x_1) = \max\{f(x_1-), f(x_1), f(x_1+)\}.$$

Potom také musí být $x_1 > b_k$ a musí existovat $\xi \in (b_k, b)$ takové, že je $f(\xi) > F(b_k)$ čili $b_k \in E$, což ovšem není možné. Je tedy

$$F(b_k) = F(x_1) = \max_{x \in [x_0, b]} F(x) \ge F(x_0) \ge f(x_0)$$

pro každé $x_0 \in (a_k, b_k)$. Limitním přechodem $x_0 \to a_k+$ dostaneme konečně

$$F(b_k) \geq f(a_k+),$$

což uzavírá důkaz lemmatu. □

9.8 . Poznámka. Funkce splňující předpoklady Tvrzení 9.6 a Lemmatu 9.7 nazýváme *regulované funkce.* Podrobněji o nich pojednáme v kapitole 3.

9.9 . Definice. Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je daná funkce. Pro $x \in (a, b]$ definujeme *horní resp. dolní Diniho derivovaná čísla zleva* $D^- f(x)$ resp. $D_- f(x)$ takto:

$$D^- f(x) = \limsup_{t \to x-} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \quad \text{a} \quad D_- f(x) = \liminf_{t \to x-} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Podobně se definují *horní resp. dolní Diniho derivovaná čísla zprava* v bodech $x \in [a, b)$:

$$D^+ f(x) = \limsup_{\xi \to x+} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \quad \text{a} \quad D_+ f(x) = \liminf_{\xi \to x+} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}.$$

9.10. Poznámka. Pro libovolnou funkci $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ a body $x \in (a, b]$ a $y \in [a, b)$ jsou její derivovaná čísla $D^- f(x)$, $D_- f(x)$, $D^+ f(y)$, $D_+ f(y)$ jednoznačně určena. Mohou ovšem nabývat také hodnot ∞ resp. $-\infty$. Funkce f má v bodě x vlastní derivaci zleva právě tehdy, když $D^- f(x) = D_- f(x) \in \mathbb{R}$. Podobně, f má v bodě x vlastní derivaci zprava právě tehdy, když $D^+ f(x) = D_+ f(x) \in \mathbb{R}$, a vlastní derivaci právě tehdy, když $D^- f(x) = D_- f(x) = D^+ f(x) = D_+ f(x) \in \mathbb{R}$.

Z Definice 9.9 ihned plyne, že pro $x \in (a, b]$ a $y \in [a, b)$ platí

$$-\infty \leq D_- f(x) \leq D^- f(x) \leq +\infty \quad \text{a} \quad -\infty \leq D_+ f(y) \leq D^+ f(y) \leq +\infty.$$

Podle Důsledku 1.6 a Lemmatu obsaženém v důkazu Věty 1.7 již víme, že každá monotonní funkce na intervalu $[a, b]$ má na tomto intervalu nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti. Nyní si ukážeme, že každá monotonní funkce má vlastní derivaci "téměř všude" na definičním intervalu.

9.11. Věta. *Každá funkce* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *monotonní na* $[a, b]$ *má pro s.v.* $x \in [a, b]$ *konečnou derivaci* $f'(x)$.

D ů k a z . Předpokládejme např., že f je neklesající. Potom pro všechna $x, \xi \in [a, b]$, $x \neq \xi$, máme

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \geq 0$$

a vzhledem k Definici 9.9 tedy také

$$0 \leq D_- f(x) \leq D_+ f(x) \leq \infty \quad \text{a} \quad 0 \leq D_+ f(x) \leq D^+ f(x) \leq \infty \tag{9.3}$$

pro všechna $x, \in (a,b)$.

Důkaz věty bude rozdělen na 3 kroky:

• I. Nejprve ukážeme, že platí:

$$D^+f(x) < \infty \quad \text{pro s.v. } x \in (a,b). \tag{9.4}$$

• II. Poté ukážeme, že platí

$$D^+f(x) \le D_-f(x) \quad \text{pro s.v. } x \in (a,b). \tag{9.5}$$

• III. Konečně, ukážeme, že důkaz věty je už snadným důsledkem tvrzení (9.4) a (9.5).

▶ I. Nejprve tedy dokážeme platnost tvrzení (9.4). Označme symbolem S množinu bodů nespojitosti funkce f v (a,b) a

$$E_\infty = \{x \in (a,b) \setminus S : D^+f(x) = \infty\}.$$

Podle Věty 1.7 je množina S nanejvýše spočetná a tedy (viz Cvičení 1.13 a)) má nulovou míru ($\mu(S) = 0$). Je-li $E_\infty = \emptyset$, není co dokazovat. Předpokládejme tedy, že je $E_\infty \ne \emptyset$. Nechť je dáno libovolné $c > 0$. Máme

$$E_\infty \subset E_c = \{x \in (a,b) \setminus S : D^+f(x) > c\}. \tag{9.6}$$

Jestliže $x \in E_c$, pak podle Definice 9.9 existuje $\xi \in (x,b)$ takové, že platí

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} > c,$$

tj.

$$\text{pro každé } x \in E_c \text{existuje } \xi \in (a,b) \text{takové, že } g(\xi) > G(x), \tag{9.7}$$

kde

$$g(x) := f(x) - c\,x \quad \text{pro } \ x \in [a,b], \tag{9.8}$$

a

$$G(x) := \begin{cases} g(a+) & \text{pro } \ x = a, \\ \max\{g(x-), g(x), g(x+)\} & \text{pro } \ x \in (a,b), \\ g(b-) & \text{pro } \ x = b. \end{cases} \tag{9.9}$$

(Zde jsme využili toho, že $E_c \cap S = \emptyset$ a tudíž $G(x) = g(x)$ pro každé $x \in E_c$.) Podle (9.7) máme dále

$$E_c \subset E := \{x \in (a,b) : \text{existuje } \xi > x \text{ tak, že } g(\xi) > G(x)\}. \tag{9.10}$$

Protože funkce f je neklesající na $[a,b]$, je také g na tomto intervalu neklesající a tudíž také regulovaná (viz Důsledek 1.6). Podle Tvrzení 9.6 je G polospojitá shora na $[a,b]$ a tudíž podle Lemmatu 9.7 je množina E z (9.10) sjednocením nejvýše spočetného systému po dvou disjunktních otevřených intervalů(a_k, b_k), $k \in K \subset \mathbb{N}$ a pro každý z nich platí $g(a_k+) \le G(b_k)$. Vzhledem k (9.8) a (9.9) a vzhledem k tomu, že funkce f je neklesající na $[a, b]$, tedy máme

$$f(a_k+) - c\,a_k \le G(b_k) = \max\{f(b_k-), f(b_k), f(b_k+)\} - c\,b_k \le f(b_k+),$$

neboli

$$c\,(b_k - a_k) \le f(b_k+) - f(a_k+).$$

Sečtením přes všechna k odtud dostaneme

$$c \sum_{k \in K} (b_k - a_k) \le \sum_{k \in K} [f(b_k+) - f(a_k+)] \le f(b) - f(a),$$

neboli

$$\sum_{k \in K} (b_k - a_k) \le \frac{f(b) - f(a)}{c}.$$

Pokud tedy k danému $\varepsilon > 0$ zvolíme $c > 0$ tak velké, aby platilo

$$\frac{f(b) - f(a)}{c} < \varepsilon,$$

docílíme toho, že bude

$$\sum_{k \in K} (b_k - a_k) < \varepsilon,$$

což ovšem znamená, že množina E a tudíž také množina $E_\infty \cup S \cup [a] \cup [b]$ mají nulovou míru (viz (9.6), (9.10) a Cvičení 1.13b)). Tvrzení (9.4) je tedy dokázáno.

► II. Pro daná čísla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\alpha \ge 0 \quad \text{a} \quad \beta \ge \alpha, \tag{9.11}$$

definujme

$$E_{\alpha\beta} = \{x \in (a, b) \setminus S : D^+ f(x)\alpha \quad \text{a} \quad D_- f(x) < \beta\}$$

a

$$E_\beta = \{x \in (a, b) : D_f(x) < \beta\}.$$

Nechť $y \in E_\beta$. Pak existuje $\eta \in (a, x)$ takové, že

$$f(\eta) - \beta\,\eta > f(y) - \beta\,y.$$

Pro $x \in [-b, -a]$ definujme

$$g(x) = f(-x) + \beta\,x.$$

Je-li $y = -x \in (a,b) \cap E_\beta$, pak podle výše uvedeného existuje $\xi > x$ ($\xi = -\eta$) takové, že je

$$g(\xi) > G(x) = g(x),$$

kde funkce G je přiřazena k g opět relací (9.9). (Jelikož je $S \cap E_\beta = \emptyset$ a $x \in E_\beta$, je $G(x) = g(x)$.) Použitím Lemmatu 9.7 pro funkci g na intervalu $(-b,-a)$ dostaneme, že existuje nejvýše spočetně mnoho otevřených a navzájem disjunktních intervalů $(-b_k, -a_k)$, které obsahují ty body $x \in (-b,-a)$, pro které je $-x \in E_\beta$ a platí

$$g(-b_k+) \le G(-a_k).$$

Protože f je neklesající na $[a,b]$, funkce g je nerostoucí na $[-b,-a]$. To má za následek, že $g(x-) \ge g(x) \ge g(x+)$ pro každé $x \in (a,b)$. Máme tedy

$$G(-a_k) = g(-a_k-) \quad \text{a tudíž } f(b_k-) - \beta\, b_k \le f(a_k+) = \beta\, a_k,$$

tj.

$$f(b_k-) - f(a_k+) \le \beta\,(b_k - a_k) \quad \text{pro každé } k.$$

(a) Nyní, pro $\alpha \ge 0$ označme

$$\widetilde{E}_\alpha = \{x \in [a,b] \setminus S : D^+ f(x) > \alpha\}.$$

Podobně jako v analogické situaci výše, pro každé $y \in \widetilde{E}_\alpha$ můžeme najít $\eta \in (a,y)$ takové, že je

$$\frac{f(\eta) - f(y)}{\eta - y} < \alpha, \tag{9.12}$$

tj.

$$f(\eta) - \alpha\,\eta > f(y) - \alpha\, y. \tag{9.13}$$

Definujme

$$g(x) = f(-x) - \alpha\,(-x) \quad \text{pro} \;\; x \in [-b,-a]$$

a

$$G(x) = \begin{cases} g(-b+) & \text{pro} \;\; x = -b, \\ \max\{g(x-), g(x), g(x+)\} & \text{pro} \;\; x \in (-b,-a), \\ g(-a-) & \text{pro} \;\; x = -a. \end{cases}$$

Vzhledem k (9.13), pro každé $x \in (a,b)$ takové, že $-x \in \widetilde{E}_\alpha$ existuje $\xi \in (x,-a)$, pro které platí $g(\xi) > G(x)$. (Stačí najít k $y = -x$ $\eta \in (a,y)$ splňující (9.12) a pak položit $\xi = -\eta$.) Použitím Lemmatu 9.7 tedy můžeme ukázat, že existuje nejvýše spočetný systém po dvou disjunktních otevřených intervalů(a_k, b_k), $k \in K \subset \mathbb{N}$, takový, že platí

$$\widetilde{E}_\alpha \subset \bigcup_{k \in K} (-b_k, -a_k)$$

a

$$g(-b_k+) = f(b_k-) - \alpha\, b_k \le G(-a_k) \le f(a_k+) - \alpha\, a_k.$$

Poslední nerovnost ovšem znamená, že pro každé $k \in K$ platí

$$f(b_k-) - f(a_k+) \le \alpha\,(b_k - a_k). \tag{9.14}$$

.

(b) Nechť $k \in K$ a $x \in E_\beta \cap (a_k, b_k)$. Potom máme $D^+ f(x) > \beta$ a tudíž existuje $\xi \in (x, b_k)$ takové, že platí

$$f(\xi) - \beta\,\xi > f(x) - \beta\, x.$$

Použijeme-li opět Rieszovo lemma (Lemma 9.7), dostaneme odtud existenci nejvýše spočetného systému po dvou disjunktních otevřených intervalů $(a_{k\,\ell}, b_{k\,\ell})$, $\ell \in L \subset \mathbb{N}$, takového, že platí

$$E_\beta \cap (a_k, b_k) \subset \bigcup_{\ell \in L} (a_{k\,\ell}, b_{k\,\ell})$$

a

$$f(a_{k\,\ell}+) - \beta\, a_{k\,\ell} \le f(b_{k\,\ell}+) - \beta\, b_{k\,\ell},$$

tj.

$$\beta\,(b_{k\,\ell} - a_{k\,\ell}) \le f(b_{k\,\ell}+) - f(a_{k\,\ell}+) \quad \text{pro každé } \ell \in L.$$

Po sečtení přes všechna $\ell \in L$ odtud a z (9.14) získáme vztahy

$$\beta \sum_{\ell \in L} (b_{k\,\ell} - a_{k\,\ell}) \le \sum_{\ell \in L} (f(b_{k\,\ell}+) - f(a_{k\,\ell}+)) \le f(b_k-) - f(a_k+) \le \alpha\,(b_k - a_k)$$

a (sečtením přes všechna $k \in K$)

$$\beta \sum_{k \in K\, \ell \in L} (b_{k\,\ell} - a_{k\,\ell}) \le \alpha \sum_{k \in K} (b_k - a_k). \tag{9.15}$$

Označíme-li tedy

$$|\mathfrak{L}_1| = \sum_{k \in K} (b_k - a_k) \quad \text{a} \quad |\mathfrak{L}_2| = \sum_{k \in K\, \ell \in L} (b_{k\,\ell} - a_{k\,\ell}),$$

budeme moci nerovnost (9.15) přepsat ve tvaru

$$|\mathfrak{L}_1| \le \frac{\alpha}{\beta}\, |\mathfrak{L}_2|.$$

Když výše uvedené procedury (a) i (b) budeme provádět střídavě v postupně vznikajících intervalech, dostaneme posloupnost systémůintervalů $\mathfrak{L}_1 \supset \mathfrak{L}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{L}_n \supset \ldots$, z nichž každý obsahuje $E_{\alpha\,\beta} = E_\beta \cap \widetilde{E}_\alpha$, přičemž

$$|\mathfrak{L}_{2n}| \le \frac{\alpha}{\beta}\, |\mathfrak{L}_{2n-1}| \le \frac{\alpha}{\beta}\, |\mathfrak{L}_{2n-2}|$$

platí pro každé $n \in \mathbb{N}$. Odtud pak dále odvodíme, že je

$$|\mathfrak{L}_{2n}| \leq \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n |\mathfrak{L}_1| \leq \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n (b-a).$$

Protože máme $0 \leq \frac{\alpha}{\beta} < 1$, plyne odtud, že je $|\mathfrak{L}_{2n}| \to 0$ pro $n \to \infty$.

Nyní, k danému $\varepsilon > 0$ zvolíme $n \in \mathbb{N}$ tak, aby bylo

$$(\frac{\alpha}{\beta})^n (b-a) < \varepsilon.$$

Potom bude $E_{\alpha\beta} \subset \mathfrak{L}_{2n}$ a přitom také $|\mathfrak{L}_{2n}| \leq \varepsilon$, což podle Definice 1.12 znamená, že $\mu(E_{\alpha\beta}) = 0$ pro libovolnou dvojici $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ splňující (9.11).

Označme

$$E_* = \{x \in (a,b) \setminus S : D_- f(x) < D^+ f(x)\}$$

Potom pro každé $x \in E_*$ existují racionální čísla $\alpha, \beta \in \mathbb{P}$ splňující (9.11) a

$$D_- f(x) < \alpha < \beta < D^+ f(x).$$

To znamená, že je E_* obsažena v množině

$$\widetilde{E} : = \bigcup_{\substack{0 \leq \alpha < \beta \\ \alpha, \beta \in \mathbb{P}}} E_{\alpha,\beta},$$

která je sjednocením spočetně mnoha množin nulové míry a tudíž má také nulovou míru (viz Cvičení 1.13b). Tím spíše je $\mu(E_*) = 0$ a tedy také

$$\mu(E_* \cup S \cup [a] \cup [b]) = 0,$$

což dokazuje platnost tvrzení (9.5).

► III. Funkce

$$\widetilde{f} : x \in [-b, -a] \to -f(-x)$$

je zřejmě neklesající na $[-b, -a]$ a platí

$$D_- \widetilde{f}(-x) = D_+ f(x) \quad \text{a} \quad D^+ \widetilde{f}(-y) = D^- f(y)$$

pro všechna $x \in [a, b)]$ a $y \in (a, b]$. Použijeme-li tedy (9.5) na funkci $\widetilde{f}$, dostaneme

$$D^- f(x) = D^+ \widetilde{f}(-x) \leq D_- \widetilde{f}(-x) = D_+ f(x) \quad \text{pro s.v. } x \in [a, b].$$

Vzhledem k (9.3) a (9.4) tedy pro s.v. $x \in [a, b]$ budeme mít

$$0 \leq D^+ f(x) \leq D_- f(x) \leq D^- f(x) \leq D_+ f(x) \leq D^+ f(x) < \infty,$$

tj.

$$0 \leq D^+ f(x) = D_- f(x) = D^- f(x) = D_- f(x) = f'(x) < \infty.$$

□

Věta 1.14 je přímým důsledkem vět 9.11 a 1.4.

9.2 Alternativní důkaz Věty 5.28 (per-partes)

Důkaz bude současně alternativním důkazem existenčního tvrzení z Věty 5.22.

Nechť je tedy $f \in \mathbb{G}[a,b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a,b]$ a nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Podle Věty 5.16 existuje integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ a můžeme tedy zvolit kalibr δ_1 tak, aby pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta_1)$ platilo

$$\Big|S(D,\xi) - \int_a^b f\,\mathrm{d}[g]\Big| < \varepsilon. \tag{9.16}$$

Dále, pro každé $x \in [a,b]$ můžeme zvolit $\delta_2(x) > 0$ tak, aby platilo

$$\begin{cases} s \in (x - \delta_2(x), x) \cap [a,b] \implies |f(s) - f(x-)| < \varepsilon \quad \text{a} \quad |g(s) - g(x-)| < \varepsilon, \\ s \in (x, x + \delta_2(x)) \cap [a,b] \implies |f(s) - f(x+)| < \varepsilon \quad \text{a} \quad |g(s) - g(x+)| < \varepsilon. \end{cases} \tag{9.17}$$

Podle tvrzení (ii) Důsledku 3.7 má množina

$$M_\varepsilon = \big\{x \in [a,b] : |\Delta^+ f(x)| \geq \varepsilon \ \vee |\Delta^- f(x)| \geq \varepsilon\big\}$$

nejvýše konečný počet prvků. Pro každý bod $x \in [a,b] \setminus M_\varepsilon$ je tedy kladná jeho vzdálenost

$$\operatorname{dist}(x, M_\varepsilon) = \min\{|x - y| : y \in M_\varepsilon\}$$

od množiny M_ε. Definujme

$$\delta_3(x) = \begin{cases} \operatorname{dist}(x, M_\varepsilon) & \text{když} \ \ x \in [a,b] \setminus M_\varepsilon, \\ \delta_2(x) & \text{když} \ \ x \in M_\varepsilon \end{cases} \tag{9.18}$$

a

$$\delta_\varepsilon(x) = \min\{\delta_1(x), \delta_2(x), \delta_3(x)\} \quad \text{pro} \ \ x \in [a,b]. \tag{9.19}$$

Nechť

$$(D,\xi) = (\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m\}, (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon).$$

Potom, vzhledem k (9.18) a (9.19), musí být $M_\varepsilon \subset \Xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m\}$. Jednoduchými úpravami zjistíme, že platí

$$\begin{aligned} &S_{f\Delta g}(D,\xi) + S_{g\Delta f}(D,\xi) \\ &\quad = \sum_{j=1}^m \big(f(\xi_j)\,g(\alpha_j) - f(\xi_j)\,g(\alpha_{j-1}) + f(\alpha_j)\,g(\xi_j) - f(\alpha_{j-1})\,g(\xi_j)\big) \\ &\quad = f(b)\,g(b) + \sum_{j=1}^m \big(f(\xi_j)\,g(\alpha_j) + f(\alpha_j)\,g(\xi_j) - f(\xi_j)\,g(\xi_j) - f(\alpha_j)\,g(\alpha_j)\big) \\ &\qquad - f(a)\,g(a) - \sum_{j=1}^m \big(f(\xi_j)\,g(\alpha_{j-1}) + f(\alpha_{j-1})\,g(\xi_j) - f(\xi_j)\,g(\xi_j) - f(\alpha_{j-1})\,g(\alpha_{j-1})\big) \end{aligned}$$

$$= f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - \sum_{j=1}^{m}(f(\alpha_j) - f(\xi_j))\,(g(\alpha_j) - g(\xi_j))$$

$$+ \sum_{j=1}^{m}(f(\xi_j) - f(\alpha_{j-1}))\,(g(\xi_j) - g(\alpha_{j-1})).$$

Dále,

$$\Big|\sum_{a<x\le b} \Delta^+ f(x)\,\Delta^+ g(x) - \sum_{a\le x<b} \Delta^- f(x)\,\Delta^- g(x)\Big|$$

$$\le \sum_{x\,\in\, M_\varepsilon\cap[a,b)} |\Delta^+ f(x)|\,|\Delta^+ g(x)| + \sum_{x\,\in\,[a,b)\setminus M_\varepsilon} |\Delta^+ f(x)|\,|\Delta^+ g(x)|$$

$$+ \sum_{x\,\in\, M_\varepsilon\cap(a,b]} |\Delta^- f(x)|\,|\Delta^- g(x)| + \sum_{x\,\in\,(a,b]\setminus M_\varepsilon} |\Delta^- f(x)|\,|\Delta^- g(x)|$$

$$\le \Big(\sum_{x\,\in\, M_\varepsilon\cap[a,b)} |\Delta^+ f(x)| + \sum_{x\,\in\, M_\varepsilon\cap(a,b]} |\Delta^- f(x)| + 2\,\varepsilon\Big)\,\mathrm{var}_a^b\, g < \infty.$$

Máme tedy

$$\Big|S_{g\Delta f}(D,\xi) - f(b)\,g(b) + f(a)\,g(a) + \int_a^b f\,\mathrm{d}[g] \tag{9.20}$$

$$+ \sum_{a<x\le b} \Delta^+ f(x)\,\Delta^+ g(x) - \sum_{a\le x<b} \Delta^- f(x)\,\Delta^- g(x)\Big|$$

$$\le \Big|\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] - S_{f\Delta g}(D,\xi)\Big|$$

$$+ \Big|\sum_{j=1}^{m}(f(\xi_j) - f(\alpha_{j-1}))\,(g(\xi_j) - g(\alpha_{j-1})) - \sum_{a<x\le b} \Delta^- f(x)\,\Delta^- g(x)\Big|$$

$$+ \Big|\sum_{j=1}^{m}(f(\alpha_j) - f(\xi_j))\,(g(\alpha_j) - g(\xi_j)) - \sum_{a\le x<b} \Delta^+ f(x)\,\Delta^+ g(x)\Big|.$$

Dále,

$$\Big|\sum_{j=1}^{m}(f(\alpha_j) - f(\xi_j))\,(g(\alpha_j) - g(\xi_j)) - \sum_{a\le x<b} \Delta^+ f(x)\,\Delta^+ g(x)\Big|$$

$$= \Big|\sum_{j=1}^{m}(f(\alpha_j) - f(\xi_j+) + \Delta^+ f(\xi_j))\,(g(\alpha_j) - g(\xi_j+) + \Delta^+ g(\xi_j))$$

$$
- \sum_{j=1}^{m} \Delta^+ f(\xi_j)\, \Delta^+ g(\xi_j) - \sum_{x \in [a,b) \setminus \Xi} \Delta^+ f(x)\, \Delta^+ g(x) \Big|
$$

$$
= \Big| \sum_{j=1}^{m} (f(\alpha_j) - f(\xi_j+))\, (g(\alpha_j) - g(\xi_j+)) + \sum_{j=1}^{m} (f(\alpha_j) - f(\xi_j+))\, \Delta^+ g(\xi_j)
$$

$$
+ \sum_{j=1}^{m} \Delta^+ f(\xi_j)\, (g(\alpha_j) - g(\xi_j+)) - \sum_{x \in [a,b) \setminus \Xi} \Delta^+ f(x)\, \Delta^+ g(x) \Big|
$$

Předposlední součet přitom můžeme rozdělit do dvou součtů: jeden, ve kterém se sčítá přes ta j, pro která je $t_j \in M_\varepsilon$ a druhý, který obsahuje všechny ostatní sčítance. Odtud, vzhledem k (9.17) a vzhledem k definici množiny M_ε, plyne, že je

$$
\Big| \sum_{j=1}^{m} (f(\alpha_j) - f(\xi_j))\, (g(\alpha_j) - g(\xi_j)) - \sum_{a \le x < b} \Delta^+ f(x)\, \Delta^+ g(x) \Big|
$$

$$
\le \Big(2 \sum_{j=1}^{m} |g(\alpha_j) - g(\xi_j+)| + 2 \sum_{j=1}^{m} |\Delta^+ g(\xi_j)| + \sum_{x \in M_\varepsilon} |\Delta^+ f(x)| \Big)\, \varepsilon \le K^+\, \varepsilon,
$$

kde

$$
K^+ = 4 \operatorname{var}_a^b g + \sum_{x \in M_\varepsilon \cap (a,b]} |\Delta^+ f(x)| < \infty.
$$

Podobně bychom ověřili, že platí

$$
\Big| \sum_{j=1}^{m} (f(\xi_j) - f(\alpha_{j-1}))\, (g(\xi_j) - g(\alpha_{j-1})) - \sum_{a < x \le b} \Delta^- f(x)\, \Delta^- g(x) \Big| \le K^-\, \varepsilon,
$$

kde

$$
K^- = 4 \operatorname{var}_a^b g + \sum_{x \in M_\varepsilon \cap (a,b]} |\Delta^- f(x)| < \infty.
$$

Dosazením do (9.20) a využitím (9.16) získáme odhad

$$
\Big| S_{g\Delta f}(D,\xi) - f(b)\, g(b) + f(a)\, g(a) + \int_a^b f \,\mathrm{d}[g]
$$

$$
+ \sum_{a < x \le b} \Delta^+ f(x)\, \Delta^+ g(x) - \sum_{a \le x < b} \Delta^- f(x)\, \Delta^- g(x) \Big| \le \big(1 + K^+ K^-\big)\, \varepsilon.
$$

Protože (D,ξ) bylo libovolné δ_ε–jemné dělení, plyne odtud už, že existuje integrál $\int_a^b g \,\mathrm{d}[f]$ a platí (5.37). □

Literatura

[1] P. Drábek, A. Kufner. *Úvod do funkcionální analýzy.* (Učební text, ZČU Plzeň, 1993)
[dostupné z : http://www.kma.zcu.cz/0000_DATA/eBOOKs/Drabek/UFA.pdf].

[2] I. Halperin. *Introduction to the Theory of Distributions.* (University of Toronto Press, Toronto, 1952).

[3] T. H. Hildebrandt. *Theory of Integration.* (Academic Press, New York-London, 1963).

[4] Ch. S. Hönig. *Volterra Stieltjes-Integral Equations*, (North Holland and American Elsevier, Mathematics Studies 16, Amsterdam and New York, 1975).

[5] V. Jarník. *Diferenciální počet II.*

[6] V. Jarník. *Integrální počet II.*

[7] W. Rudin. *Functional Analysis.* (McGraw-Hill Series in Higher Mathematics, New York, 1973).

[8] M. Tvrdý. *Differential and integral equations in the space of regulated functions.* Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics vol.25 (2002), pp. 1–104.

[9] Š. Schwabik. *Integrace v R (Kurzweilova teorie).* (Karolinum, Universita Karlova v Praze, 1999)