TIN 086 Vybrané kapitoly z výpočetní složitosti II **léto 2010/2011**

2. domácí úlohy

do 22. dubna 2011

Nejprve připomene některé třídy jazyků a funkcí z přednášky.

- $L \in \Sigma_k$, pokud existuje jazyk $L' \in P$ a polynom q takový, že pro každé $x \in \{0,1\}^*$, $x \in L$ právě tehdy když $\exists w_1 \in \{0,1\}^{q(|x|)} \forall w_2 \in \{0,1\}^{q(|x|)} \cdots Q w_k \in \{0,1\}^{q(|x|)}$, $(x, w_1, w_2, \dots, w_k) \in L'$. Zde Q označuje buď $\exists$ nebo $\forall$ v závislosti na paritě k.
- Π_k je definováno podobně jako Σ_k, pouze místo počátečního kvantifikátoru $\exists$ začneme kvantifikátorem $\forall$ a kvantifikátory dále střídáme.
- $PH = \bigcup_{k \geq 1} \Sigma_k$.
- $L \in PP$, pokud existuje jazyk $L' \in P$ a polynom q takový, že pro každé $x \in \{0,1\}^*$, $x \in L$ právě tehdy když pro ostrou většinu $w \in \{0,1\}^{q(|x|)}$, $(x, w) \in L'$.
- Funkce $f : \{0,1\}^* \to \mathbb{N}$ je v $\#P$, pokud existuje jazyk $L' \in P$ a polynom q takový, že pro každé $x \in \{0,1\}^*$, $f(x) = |\{w \in \{0,1\}^{q(|x|)};\ (x, w) \in L'\}|$.
- Pro $f(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $L \in SIZE(f(n))$, pokud existuje nekonečná posloupnost obvodů $C_1, C_2, \dots$ taková, že velikost obvodu C_n je $O(f(n))$, obvod C_n pracuje na vstupech délky n a pro každý vstup x délky n, $x \in L$ iff $C_n(x) = 1$, tj. obvod C_n se na vstupu x vyhodnotí na jedničku.

Úloha 1. Dokažte, že pokud pro nějaké $k \geq 1$, $\Sigma_k = \Pi_k$, pak $PH = \Sigma_k$.

Úloha 2. Dokažte, že $PP = P$ právě tehdy, když hodnota každé funkce v $\#P$ se dá spočítat v polynomiálním čase.

Úloha 3. Nechť n je kladné číslo a $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ je n-tice obvodů, kde obvod C_i pracuje na vstupech délky $i \leq n$. Řekneme, že $(C_1, \dots, C_n)$ *řeší* SAT, právě když pro každou booleovskou formuli ϕ délky $i \leq n$, $C_i(\phi) = 1$ iff $\phi \in SAT$. Definujme si množinu $SAT\text{-}CKT = \{(C_1, \dots, C_n);\ n \in \mathbb{N}$, každý C_i je booleovský obvod velikosti alespoň i a $(C_1, \dots, C_n)$ řeší $SAT\}$.

a) Ukažte, že $SAT\text{-}CKT$ je v *co-NP*.

b) Ukažte, že pokud $SAT \in SIZE(n^k)$ pro nějaké k, pak $\Sigma_2 = \Pi_2$.

(*Hint pro a*: Uvažujte o formulích $\phi(x_1, \dots, x_m)$, $\phi(0, x_2, \dots, x_m)$ a $\phi(1, x_2, \dots, x_m)$.)

Úloha 4. Nechť k je přirozené číslo.

a) Ukažte, že existuje jazyk $L \in \Pi_3$ takový, že $L \notin SIZE(n^k)$.

b) Ukažte, že existuje jazyk $L \in \Sigma_3$ takový, že $L \notin SIZE(n^k)$.