Kapitola 2

Absolutně spojité funkce.

2.1 . Definice. Funkce $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ je *absolutně spojitá* na intervalu $[a,b]$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\sum_{j=1}^{m} |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| < \varepsilon$$

platí pro každý systém intervalů $[\alpha_j, \beta_j]$, $j = 1, 2, , \dots, m$, splňující

$$a \le \alpha_1 \le \beta_1 \le \alpha_2 \le \beta_2 \cdots \le \beta_{m-1} \le \alpha_m \le \beta_m \le b \quad \text{a} \quad \sum_{j=1}^{m} (\beta_j - \alpha_j) < \delta. \tag{2.1}$$

Množinu funkcí absolutně spojitých na $[a,b]$ značíme $\mathbb{AC}[a,b]$ resp. $\mathbb{AC}$ (je-li ze souvislostí jasné, o jaký interval se jedná).

2.2 . Cvičení. (i) Každá funkce absolutně spojitá na intervalu $[a,b]$ je na tomto intervalu stejnoměrně spojitá.

(ii) Nechť funkce $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ splňuje Lipschitzovu podmínku na intervalu $[a,b]$, tj. existuje $L \in \mathbb{R}$ takové, že

$$|f(x) - f(y)| \le L|x - y| \quad \text{platí pro všechna } x, y \in [a,b].$$

Potom $f \in \mathbb{AC}[a,b]$.

2.3 . Věta. *Každá funkce absolutně spojitá na intervalu $[a,b]$ má na tomto intervalu konečnou variaci.*

D ů k a z . Nechť $f \in \mathbb{AC}$. Zvolme $\delta > 0$ tak, aby platilo

$$\sum_{j=1}^{m} |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| < 1$$

pro každý systém intervalů $[\alpha_j, \beta_j]$, $j = 1, 2, , \dots, k$, splňující (2.1). Dále, zvolme dělení $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ intervalu $[a,b]$ tak, aby platilo

$$0 < x_i - x_{i-1} < \delta \quad \text{pro každé } i = 1, 2, \dots, k.$$

Potom pro každé $i = 1, 2, \dots, k$ a každé dělení $D^i = \{\alpha_0^i, \alpha_1^i, \dots, \alpha_{m_i}^i\}$ intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ máme

$$\sum_{j=1}^{m_i} (\alpha_j^i - \alpha_{j-1}^i) = x_i - x_{i-1} < \delta$$

a tudíž (podle Věty 1.3)

$$\operatorname{var}_a^b f = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{var}_{x_{i-1}}^{x_i} f = \sum_{i=1}^{k} \sup_{D^i \in \mathscr{D}[x_{i-1},x_i]} \sum_{j=1}^{m_i} |f(\alpha_j^i) - f(\alpha_{j-1}^i| \le k < \infty.$$

$\square$

2.4 . Věta. *Jestliže* $f,\, g \in \mathbb{AC}[a,b]$, *pak* $|f|,\ f+g,\ f\,g,\ \max\{f,g\},\ \min\{f,g\} \in \mathbb{AC}[a,b]$. *Je-li navíc* $|f(x)| > 0$ *na* $[a,b]$, *pak také* $f^{-1} \in \mathbb{AC}[a,b]$.

D ů k a z . Nechť $f,\, g \in \mathbb{AC}[a,b]$.

a) Pro libovolná $x,\, y \in [a,b]$ platí $|f(x)| \le |f(x) - f(y)| + |f(y)|$. Tudíž

$$|f(x) - f(y)| \ge \big||f(x)| - f(y)|\big|$$

a

$$\sum_{j=1}^{m} \big||f(\beta_j)| - |f(\alpha_j)|\big| \le \sum_{j=1}^{m} |f(\beta_j) - f(\alpha_j)|.$$

Odtud už ovšem okamžitě plyne, že také $|f| \in \mathbb{AC}[a,b]$.

b) Druhé a třetí tvrzení, tj. $f + g \in \mathbb{AC}[a,b]$ a $f\,g \in \mathbb{AC}[a,b]$, plynou z nerovností

$$|(f(x) + g(x)) - (f(y) + g(y))| \le |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)|$$

a

$$|f(x)\,g(x) - f(y)\,g(y)| \le \|f\|\,|g(x) - g(y)| + \|g\|\,|f(x) - f(y)|.$$

c) Protože pro libovolné $x \in [a,b]$ máme

$$\max\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}\big(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|\big)$$

a

$$\min\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}\big(f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|\big),$$

platí v důsledku a) a b) také

$$\max\{f,g\} \in \mathbb{AC}[a,b] \quad \text{a} \quad \min\{f,g\} \in \mathbb{AC}[a,b].$$

d) Konečně, je-li navíc $|f(x)| > 0$ na $[a,b]$, pak existuje $\mu > 0$ takové, že platí $|f(x)| \ge \mu$ na $[a,b]$ a tudíž také

$$\Big|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)}\Big| \le \frac{|f(x) - f(y)|}{\mu^2}.$$

Nyní už je snadné ukázat, že $f^{-1} \in \mathbb{AC}[a,b]$. $\square$

2.5. Poznámka. Podle vět 1.15 a 2.3 každá funkce f absolutně spojitá na intervalu $[a,b]$ má konečnou derivaci $f'(x)$ pro s.v. $x\in[a,b]$. Lze dokázat (viz [6, Věty 93 a 94]), že funkce $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ je absolutně spojitá na $[a,b]$ právě tehdy, když

$$f(x)-f(a)=\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{na } [a,b]$$

pro nějakou funkci $g\in\mathbb{L}^1[a,b]$. (Potom je $f'(x)=g(x)$ pro s.v. $x\in[a,b]$.) Speciálně, platí, že je-li $f\in\mathbb{AC}[a,b]$ a $f'(x)=0$ pro s.v. $x\in[a,b]$, pak je f konstantní na $[a,b]$. Dále, zobrazení

$$f\in\mathbb{AC}[a,b]\to(f(a),f')\in\mathbb{R}\times\mathbb{L}^1[a,b]$$

a

$$(c,g)\in\mathbb{R}\times\mathbb{L}^1[a,b]\to f(x):=c+\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\in\mathbb{AC}[a,b]$$

představují vzájemně jednoznačný vztah mezi $\mathbb{AC}[a,b]$ a $\mathbb{R}\times\mathbb{L}^1[a,b]$. Na $\mathbb{AC}[a,b]$ definujeme normu předpisem

$$\|f\|_{\mathbb{AC}}=|f(a)|+\|f'\|_1 \quad \text{pro} \quad f\in\mathbb{AC}[a,b]$$

a $\mathbb{AC}[a,b]$ je pak Banachův prostor. Obecný spojitý lineární funkcionál na $\mathbb{AC}[a,b]$ má tvar:

$$f\in\mathbb{AC}[a,b]\to q\,f(a)+\int_a^b p\,f'\,\mathrm{d}t,$$

kde $q\in\mathbb{R}$ a $p\in\mathbb{L}^\infty[a,b]$. ($\mathbb{L}^\infty[a,b]$ značí prostor funkcí "v podstatě" ohraničených na $[a,b]$.)

Další podrobnosti o funkcích absolutně spojitých lze nalézti v monografiích V. Jarníka *Diferenciální počet II* [5, V.9] a *Integrální počet II* [6, V.5] a Š. Schwabika *Integrace v* $\mathbb{R}$ *(Kurzweilova teorie)* [9, XIII.4].

Víme již (viz Lemma 1.22 a Poznámka 1.24), že každou funkci s konečnou variací na $[a,b]$ můžeme rozložit na součet funkce spojité a funkce skokové resp. na rozdíl dvou funkcí neklesajících na $[a,b]$ (viz Věta 1.4). Funkce s konečnou variací lze také rozložit na součet funkce absolutně spojité a funkce singulární. Důkaz následujícího tvrzení je uveden např. v [6, Věta 125].

2.6. Věta (Lebesgueův rozklad funkce s konečnou variací)**.** *Pro každou funkci* $f\in\mathbb{BV}[a,b]$ *existuje singulární funkce* $f^{\,\mathrm{SING}}$ *taková, že* $f-f^{\,\mathrm{SING}}$ *je absolutně spojitá na* $[a,b]$. *Funkce* $f^{\,\mathrm{SING}}$ *je určena jednoznačně až na konstantu.*

2.7 . Definice. Jestliže $f\in\mathbb{BV}[a,b]$, pak funkci $f^{\,\mathrm{SING}}$ přiřazenou k f podle Věty 2.6 nazýváme *singulární část* funkce f. Dále, rozdíl $f-f^{\,\mathrm{SING}}$ nazýváme *absolutně spojitá část* funkce f a značíme $f^{\,\mathrm{AC}}$. Konečně, $f^{\,\mathrm{SC}}:=f-f^{\,\mathrm{B}}-f^{\,\mathrm{AC}}=f^{\,\mathrm{C}}-f^{\,\mathrm{AC}}$ je *spojitá singulární část* funkce f.