Kapitola 3

# Regulované funkce.

**3.1 . Definice.** Funkce $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ se nazývá *regulovaná* na $[a,b]$, jestliže pro každé $t\in(a,b]$ a každé $s\in[a,b)$ existují konečné limity

$$f(t-)=\lim_{\tau\to t-}f(\tau)\quad\text{a}\quad f(s+)=\lim_{\tau\to s+}f(\tau),$$

tj. má-li na intervalu $[a,b]$ nespojitosti nejvýše *1. druhu*. Množinu funkcí regulovaných na $[a,b]$ značíme $\mathbb{G}[a,b]$.

**3.2 . Poznámka.** Zřejmě platí $\mathbb{BV}[a,b]\cup\mathbb{C}[a,b]\subset\mathbb{G}[a,b]$, přičemž $\mathbb{G}[a,b]\setminus\mathbb{C}[a,b]\neq\emptyset$ a $\mathbb{G}[a,b]\setminus\mathbb{BV}[a,b]\neq\emptyset$.

Podobně jako pro funkce s konečnou variací (viz Lemma z důkazu Věty 1.7) platí pro regulované funkce:

**3.3 . Věta.** *Každá funkce regulovaná na $[a,b]$ má na $[a,b]$ nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti.* $\square$

**3.4 . Věta.** *Jestliže pro posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{G}[a,b]$ a funkci $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ platí $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ stejnoměrně na $[a,b]$ (tj. $\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|=0$), pak $f\in\mathbb{G}[a,b]$.*

D ů k a z . Nechť $x\in[a,b)$, nechť $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset(x,b]$ je libovolná posloupnost taková, že $x_k>x$ pro všechna $k\in\mathbb{N}$ a $x_k\to x$ pro $k\to\infty$. Nechť je dáno libovolné $\varepsilon>0$. Zvolme $n_0\in\mathbb{N}$ a $k_0\in\mathbb{N}$ tak, aby platilo

$$\|f-f_{n_0}\|<\frac{\varepsilon}{3}\quad\text{a}\quad|f_{n_0}(x_k)-f_{n_0}(x_\ell)|<\frac{\varepsilon}{3}\quad\text{pro všechna } k,\ell\geq k_0.$$

Potom budeme mít pro všechna $k,\ell\geq k_0$

$$\begin{aligned}&|f(x_k)-f(x_\ell)|\\&\qquad\leq|f(x_k)-f_{n_0}(x_k)|+|f_{n_0}(x_k)-f_{n_0}(x_\ell)|+|f(x_\ell)-f_{n_0}(x_\ell)|<\varepsilon,\end{aligned}$$

tj. existuje konečná limita $f(x+)=\lim_{k\to\infty}f(x_k)$. Podobně bychom ukázali, že pro každé $x\in(a,b]$ existuje konečná limita $f(x-)$. $\square$

**3.5 . Definice.** Pro libovolnou funkci $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, podinterval $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ a dělení $D=\{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_m\}\in\mathscr{D}[a,b]$ definujeme

$$\omega_{(\alpha,\beta)}(f)=\sup_{x',x''\in(\alpha,\beta)}|f(x')-f(x'')|\quad\text{a}\quad\omega_D(f)=\max_{i=1,2,\dots,m}\omega_{(\alpha_{i-1},\alpha_i)}(f).$$

**3.6. Věta.** *Následující tři tvrzení jsou ekvivalentní*

(*i*) $f \in \mathbb{G}[a,b]$.

(*ii*) *Existuje posloupnost* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{S}[a,b]$ *taková, že platí* $f_n \rightrightarrows f$ *na* $[a,b]$ *pro* $n \to \infty$.

(*iii*) *Pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje dělení* $D \in \mathscr{D}[a,b]$ *takové, že* $\omega_D(f) < \varepsilon$.

D ů k a z . a) Implikace (ii) $\Longrightarrow$ (i) je dokázána Větou 3.4.

b) Předpokládejme, že platí (i) a nechť je dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Potom pro každé $x \in [a,b]$ existuje $\delta(x) > 0$ takové, že platí

$$x - \delta(x) > a \ \text{ pro všechna } \ x \in (a,b], \quad x + \delta(x) < b \ \text{ pro všechna } \ x \in [a,b)$$

a

$$\begin{cases} \omega_{(a,a+\delta(a))}(f) < \varepsilon, & \omega_{(b-\delta(b),b)}(f) < \varepsilon, \\ \omega_{(x-\delta(x),x)}(f) < \varepsilon \quad \text{a} & \omega_{(x,x+\delta(x))}(f) < \varepsilon \quad \text{pro všechna } x \in (a,b). \end{cases} \tag{3.1}$$

Intervaly

$$[a, a+\delta(a)), \ (x-\delta(x), x+\delta(x)), \ x \in (a,b), (b-\delta(b), b]$$

tvoří otevřené pokrytí intervalu $[a,b]$, ze kterého lze podle Vitaliovy věty (viz např. [5, Věta 81]) vybrat pokrytí konečné:

$$[a, a+\delta(a)), \ (x_i-\delta(x_i), x_i+\delta(x_i)), \ i = 1,2,\dots,m-1, (b-\delta(b), b],$$

přičemž vzhledem k (3.1) platí

$$\omega_{(x_i-\delta(x_i),x_i)}(f) < \varepsilon \quad \text{a} \quad \omega_{(x_i,x_i+\delta(x_i))}(f) < \varepsilon \text{ pro všechna } i = 1,2,\dots m-1.$$

Označme $x_0 := a$ a $x_m := b$ a nechť

$$D = \{x_0, \alpha_1, x_1, \dots \alpha_{m-1}, x_{m-1}, \alpha_m, x_m\},$$

kde

$$\alpha_i \in (x_i - \delta(x_i), x_{i-1} + \delta(x_{i-1})) \cap (x_{i-1}, x_i), \quad i = 1,2,\dots,m-1.$$

Potom

$$\omega_{(a,\alpha_1)}(f) \le \omega_{(a,a+\delta(a))}(f) < \varepsilon, \qquad \omega_{(\alpha_m,b)}(f) \le \omega_{(b-\delta(b),b)}(f) < \varepsilon$$

a

$$\omega_{(\alpha_i,x_i)}(f) \le \omega_{(x_i-\delta(x_i),x_i)}(f) < \varepsilon \quad \text{a} \quad \omega_{(x_i,\alpha_{i+1})}(f) \le \omega_{(x_i,x_i+\delta(x_i))}(f) < \varepsilon$$

pro každé $i = 1,2,\dots,m-1$, tj.

$$\omega_D(f) < \varepsilon.$$

c) Předpokládejme, že platí (iii). Nechť je dáno $\varepsilon > 0$ a nechť

$$D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \in \mathscr{D}[a,b]$$

je dělení $[a,b]$ takové, že $\omega_D(f) < \varepsilon$. Pro každé $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ zvolme $\xi_i \in (\alpha_{i-1}, \alpha_i)$ a definujme

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} f(\alpha_i) & \text{pro} \quad x = \alpha_i, \\ f(\xi_i) & \text{pro} \quad x \in (\alpha_{i-1}, \alpha_i). \end{cases}$$

Pro každé $x \in [a,b]$ máme $|f(x) - g_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ a tudíž také $\|f - g_\varepsilon\| < \varepsilon$. Jestliže tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme $f_n = g_{1/n}$, bude $f_n \in \mathbb{S}[a,b]$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$ pro $n \to \infty$. $\square$

**3.7. Důsledky.**

(i) *Každá funkce regulovaná na $[a,b]$ je na $[a,b]$ ohraničená. Tudíž také $G[a,b] \subset \mathbb{L}^1[a,b]$.*

(ii) *Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje nejvýše konečně mnoho $x \in [a,b]$ takových, že platí*

$$|\Delta^+ f(x)| \ge \varepsilon \quad \textit{nebo} \quad |\Delta^- f(x)| \ge \varepsilon.$$

D ů k a z . Obě tvrzení plynou z vlastnosti (iii) z Věty 3.6. $\square$

**3.8. Věta.** $\mathbb{G}[a,b]$ *je Banachův prostor vzhledem k normě*

$$\|f\|_{\mathbb{G}} = \|f\| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

D ů k a z . Předpokládejme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{G}[a,b]$ je cauchyovská v $\mathbb{G}[a,b]$. Jako v částech a) a b) důkazu Věty 1.11 dokážeme, že existuje funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ takové, že platí $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$. Podle Věty 3.4 ovšem platí $f \in \mathbb{G}[a,b]$ a tím je věta dokázána. $\square$

**3.9. Poznámky.**

(i) $f \in \mathbb{S}[a,b] \iff f$ je konečná lineární kombinace charakteristických funkcí intervalů $[a,\tau]$, $[a,\tau)$, $\tau \in (a,b]$, a charakteristické funkce jednobodového intervalu $[a]$, tj.

$$\mathbb{S}[a,b] = \mathrm{Lin}\Big(\chi_{[a,\tau]}, \chi_{[a,\tau)}, \tau \in (a,b], \chi_{[a]}\Big).$$

(Lin$(M)$ značí lineární obal množiny $M$.)

(ii) Množina $\mathbb{S}[a,b]$ je podle tvrzení (ii) Věty 3.6 hustá v $\mathbb{G}[a,b]$, tj. $\overline{\mathbb{S}[a,b]} = \mathbb{G}[a,b]$, kde $\overline{\mathbb{S}[a,b]}$ značí uzávěr $\mathbb{S}[a,b]$ v $\mathbb{G}[a,b]$.

**3.10. Lemma.** *Nechť* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{G}[a,b]$ *a* $f_n \rightrightarrows f$ *na* $[a,b]$. *Potom platí též*

$$f_n(x-) \rightrightarrows f(x-) \quad a \quad f_n(x+) \rightrightarrows f(x+) \quad na\ [a,b],$$

*kde* $f(a-) = f(a)$, $f(b+) = f(b)$ *a* $f_k(a-) = f_k(a)$ *a* $f_k(b+) = f_k(b)$ *pro* $k \in \mathbb{N}$.

D ů k a z . Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$\widetilde{f}_n(x) = \begin{cases} f_n(x+) & \text{když } x \in [a,b), \\ f_n(b) & \text{když } x = b \end{cases}$$

a

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x+) & \text{když } x \in [a,b), \\ f(b) & \text{když } x = b. \end{cases}$$

Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Existuje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takové, že je $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$ pro každé $n \geq n_\varepsilon$ a každé $t \in [a,b]$. Odtud ovšem limitním přechodem $t \to x+$ dostaneme, že také pro každé $x \in [a,b)$ a každé $n \geq n_\varepsilon$ platí

$$|\widetilde{f}_n(x) - \widetilde{f}(x)| = \lim_{t \to x+} |f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon,$$

tj.

$$\lim_{n \to \infty} \|\widetilde{f}_n - \widetilde{f}\| = 0$$

neboli

$$f_n(x+) \rightrightarrows f(x+).$$

Podobně bychom ukázali, že platí i $f_n(x-) \rightrightarrows f(x-)$ na $[a,b]$. □

Ve zbývající části kapitoly uvedeme několik tvrzení, které budou později (zejména v kapitole 6) užitečné. Nejprve shrneme důsledky Lemmatu 3.10 pro některé důležité podmnožiny prostoru $\mathbb{G}[a,b]$.

**3.11. Důsledky.** *Množiny*

$$\begin{cases} \mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b] = \{f \in \mathbb{G}[a,b] : f(x-) = f(x) \ na\ (a,b)\}, \\ \widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{L}}[a,b] = \{f \in \mathbb{G}[a,b] : f(x-) = f(x) \ na\ (a,b]\}, \\ \mathbb{G}_{\mathrm{R}}[a,b] = \{f \in \mathbb{G}[a,b] : f(x+) = f(x) \ na\ (a,b)\}, \\ \widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{R}}[a,b] = \{f \in \mathbb{G}[a,b] : f(x-) = f(x) \ na\ [a,b)\}, \\ \mathbb{G}_{reg}[a,b] = \{f \in \mathbb{G}[a,b] : f(x-) + f(x+) = 2\,f(x) \ na\ (a,b)\} \end{cases} \tag{3.2}$$

*jsou uzavřené v* $\mathbb{G}[a,b]$ *a tudíž jsou to také Banachovy prostory vzhledem k operacím a normě indukovaným z* $\mathbb{G}[a,b]$.

□

**3.12. Lemma.**

$$\overline{\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]}=\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b],\qquad \overline{\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{L}}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]}=\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{L}}[a,b],$$

$$\overline{\mathbb{G}_{\mathrm{R}}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]}=\mathbb{G}_{\mathrm{R}}[a,b],\qquad \overline{\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{R}}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]}=\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{R}}[a,b],$$

$$\overline{\mathbb{G}_{reg}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]}=\mathbb{G}_{reg}[a,b].$$

D ů k a z . Dokážeme pouze první a poslední tvrzení. Zbývající vztahy se dokážou analogicky.

(i) Nechť $f\in\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$ a $\varepsilon>0$. Podle Věty 3.6 (ii) existuje $\varphi\in\mathbb{S}[a,b]$ takové, že

$$|f(x)-\varphi(x)|\le\|f-\varphi\|<\varepsilon\quad\text{pro všechna } x\in[a,b]. \tag{3.3}$$

Dále, pro každé $x\in(a,b)$ existuje $\delta(x)>0$ takové, že $x-\delta(x)>a$ a

$$|f(x)-f(t)|=|f(x-)-f(t)|<\varepsilon\quad\text{pro všechna } t\in(x-\delta(x),x).$$

Pro každé $x\in(a,b)$ a $t\in(x-\delta(x),x]$ tedy máme

$$|\varphi(x)-\varphi(t)|\le|\varphi(x)-f(x)|+|f(x)-f(t)|+|f(t)-\varphi(t)|<3\,\varepsilon,$$

tj.

$$|\varphi(x)-\varphi(x-)|<3\,\varepsilon.$$

Položme

$$\widetilde{\varphi}(x)=\begin{cases}\varphi(x) & \text{pro } x=a \text{ nebo } x=b.\\ \varphi(x-) & \text{pro } x\in(a,b),\end{cases}$$

Potom $\varphi\in\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]$,

$$|f(x)-\widetilde{\varphi}(x)|=|f(x)-\varphi(x)|<\varepsilon \text{ když } x=a \text{ nebo } x=b$$

a

$$|f(x)-\widetilde{\varphi}(x)|\le|f(x)-\varphi(x)|+|\varphi(x)-\varphi(x-)|<4\,\varepsilon \text{ když } x\in(a,b).$$

Odtud už plyne, že množina $\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]$ je hustá v $\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$.

(ii) Nechť $f\in\mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b]$. Nechť je dáno $\varepsilon>0$ a funkce $\varphi\in\mathbb{S}[a,b]$ je taková, že platí (3.3). Potom musí být také

$$|f(x-)-\varphi(x-)|\le\varepsilon\quad\text{pro } x\in[a,b)\quad\text{a}\quad|f(x+)-\varphi(x+)|\le\varepsilon\quad\text{pro } x\in(a,b]. \tag{3.4}$$

Položme

$$\widetilde{\varphi}(x)=\begin{cases}\varphi(a) & \text{když } x=a,\\ \tfrac{1}{2}\Big(\varphi(x+)+\varphi(x-)\Big) & \text{když } x\in(a,b)\\ \varphi(b) & \text{když } x=b.\end{cases} \tag{3.5}$$

Potom $\widetilde{\varphi} \in \mathbb{S}[a,b] \cap \mathbb{G}_{\rm reg}[a,b]$. Dále, vzhledem k (3.4) a (3.5),

$$|f(x) - \widetilde{\varphi}(x)| = \left|\tfrac{1}{2}\,[f(x+) + f(x-)] - \tfrac{1}{2}\,[\varphi(x+) + \varphi(x-)]\right|$$

$$\le \tfrac{1}{2}\Big(\big|f(x+) - \varphi(x+)\big| + \big|f(x-) - \varphi(x-)\big|\Big) \le \varepsilon \quad \text{když} \;\; x \in (a,b).$$

Konečně, podle (3.3) a (3.5) máme

$$|f(x) - \widetilde{\varphi}(x)| = |f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon \text{ když } \; x = a \text{ nebo } x = b.$$

Odtud už plyne, že platí $\overline{\mathbb{G}_{\rm reg}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b]} = \mathbb{G}_{\rm reg}[a,b]$. □

**3.13. Lemma.**

$$\mathbb{G}_{\rm L}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b] = \mathrm{Lin}\Big(1, \chi_{(\tau,b]}, \tau \in [a,b), \chi_{[b]}\Big),$$

$$\widetilde{\mathbb{G}}_{\rm L}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b] = \mathrm{Lin}\Big(1, \chi_{(\tau,b]}, \tau \in (a,b)\Big),$$

$$\mathbb{G}_{\rm R}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b] = \mathrm{Lin}\Big(1, \chi_{[a]}, \chi_{[\tau,b]}, \tau \in [a,b)\Big),$$

$$\widetilde{\mathbb{G}}_{\rm R}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b] = \mathrm{Lin}\Big(1, \chi_{[\tau,b]}, \tau \in (a,b)\Big),$$

$$\mathbb{G}_{reg}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b] = \mathrm{Lin}\Big(1, \chi_{(a,b]}, \frac{1}{2}\,\chi_{[\tau]} + \chi_{(\tau,b]}, \tau \in (a,b), \chi_{[b]}\Big),$$

$$\widetilde{\mathbb{G}}_{reg}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b] = \mathrm{Lin}\Big(1, \frac{1}{2}\,\chi_{[\tau]} + \chi_{(\tau,b]}, \tau \in (a,b)\Big),$$

D ů k a z . Dokážeme např. předposlední z uvedených relací. Nechť tedy $f \in \mathbb{S}[a,b] \cap \mathbb{G}_{\rm reg}[a,b]$. Potom existují $m \in \mathbb{N}$, $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{m+1} \in \mathbb{R}$ a dělení $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ intervalu $[a,b]$ takové, že

$$f(x) = \begin{cases} c_0 & \text{když} \;\; x = a, \\ c_j & \text{když} \;\; x \in (\alpha_{j-1}, \alpha_j) \text{ pro nějaké } \; j = 1,2,\dots,m, \\ \frac{c_j + c_{j+1}}{2} & \text{když} \;\; x = \alpha_j \text{ pro nějaké } \; j = 1,2,\dots,m-1, \\ c_{m+1} & \text{když} \;\; x = b, \end{cases}$$

tj.

$$\left\{ \begin{aligned} f(x) &= c_0\,\chi_{[a]}(x) + \textstyle\sum_{j=1}^m c_j\,\chi_{(\alpha_{j-1},\alpha_j)}(x) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\Big(\textstyle\sum_{j=1}^{m-1}\big(c_j + c_{j+1}\big)\chi_{[\alpha_j]}(x)\Big) + c_{m+1}\chi_{[b]}(x) \text{ pro } \; x \in [a,b]. \end{aligned} \right. \tag{3.6}$$

Pravou stranu vztahu (3.6) můžeme upravit takto

$$\begin{aligned} f = \;& c_0\,\chi_{[a,b]} - c_0\,\chi_{(a,b]} + \sum_{j=1}^{m} c_j\,\chi_{(\alpha_{j-1},b]} - \sum_{j=1}^{m-1} c_j\,\chi_{[\alpha_j,b]} - c_m\,\chi_{[b]} \\ + \;& \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1} c_j\,\chi_{[\alpha_j]} + \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1} c_{j+1}\,\chi_{[\alpha_j]} + c_{m+1}\,\chi_{[b]} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= c_0\,\chi_{[a,b]} - c_0\,\chi_{(a,b]} + \sum_{j=1}^{m} c_j\,\chi_{(\alpha_{j-1},b]} - \sum_{j=1}^{m-1} c_j\left(\chi_{(\alpha_j,b]} + \chi_{[\alpha_j]}\right)\\
&\quad + \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1} c_j\,\chi_{[\alpha_j]} + \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1} c_{j+1}\,\chi_{[\alpha_j]} + (c_{m+1} - c_m)\,\chi_{[b]}\\
&= c_0\,\chi_{[a,b]} - c_0\,\chi_{(a,b]} + \sum_{j=0}^{m-1} c_{j+1}\,\chi_{(\alpha_j,b]} - \sum_{j=1}^{m-1} c_j\,\chi_{(\alpha_j,b]}\\
&\quad - \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1} c_j\,\chi_{[\alpha_j]} + \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1} c_{j+1}\,\chi_{[\alpha_j]} + (c_{m+1} - c_m)\,\chi_{[b]}\\
&= c_0\chi_{[a,b]} + (c_1 - c_0)\,\chi_{(a,b]} + \sum_{j=1}^{m-1}(c_{j+1} - c_j)\left(\chi_{(\alpha_j,b]} + \tfrac{1}{2}\chi_{[\alpha_j]}\right)\\
&\quad + (c_{m+1} - c_m)\,\chi_{[b]}\\
&= d_0\chi_{[a,b]} + d_1\,\chi_{(a,b]} + \sum_{j=2}^{m} d_j\left(\chi_{(\alpha_j,b]} + \tfrac{1}{2}\chi_{[\alpha_j]}\right) + d_{m+1}\,\chi_{[b]},
\end{aligned}
$$

kde

$$d_0 = c_0,\ d_j = c_j - c_{j-1} \text{ pro } \ j = 1, 2, \dots, m+1, \tag{3.7}$$

Dokázali jsme tedy, že

$$f \in \mathrm{Lin}\Big(1, \chi_{(a,b]}, \frac{1}{2}\,\chi_{[\tau]} + \chi_{[\tau,b]}, \tau \in (a,b), \chi_{[b]}\Big).$$

Protože vztahy (3.7) definují vzájemně jednoznačnou korespondenci mezi vektory

$$(c_0, c_1, \dots, c_m, c_{m+1}) \quad \text{a} \quad (d_0, d_1, \dots, d_m, d_{m+1}),$$

znamená to, že platí

$$\mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b] = \mathrm{Lin}\Big(1, \chi_{(a,b]}, \chi_{[\tau]}, \chi_{[\tau,b]}, \tau \in (a,b), \chi_{[b]}\Big).$$

□

Další podrobnosti týkající se regulovaných funkcí lze nalézti zejména v monografii Ch. Hönig : *Volterra Stieltjes-Integral Equations*[4, sec.3].