Kapitola 4

# Riemannův-Stieljesův integrál

Text této kapitoly se opírá zejména o kapitolu II Hildebrandtovy monografie [3].

**4.1. Definice.** Pro libovolné dvě funkce $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ a rozšířené dělení $(D, \xi) \in \mathscr{P}[a,b]$ intervalu $[a,b]$, $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)^{scriptsizeT} \in \mathbb{R}^m$, definujeme

$$S_{f\Delta g}(D,\xi) := \sum_{j=1}^{m} f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})].$$

(Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme psát zjednodušeně $S(D,\xi)$ místo $S_{f\Delta g}(D,\xi)$.)

**4.2. Definice.** Nechť $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Řekneme, že existuje *normový Riemannův-Stieltjesův integrál* ((n) RS-integrál)

$$(\mathrm{n})\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] = (\mathrm{n})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}[g(x)]$$

a má hodnotu $I \in \mathbb{R}$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že platí

$$\Big((D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b] \quad \wedge \quad |D| < \delta\Big) \implies |S(D,\xi) - I| < \varepsilon.$$

Řekneme, že existuje $\sigma$-*Riemannův-Stieltjesův integrál* (($\sigma$) RS-integrál)

$$(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] = (\sigma)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}[g(x)]$$

a má hodnotu $I \in \mathbb{R}$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení $D_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b]$ takové, že platí

$$\Big((D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b] \quad \wedge \quad D_\varepsilon \subset D\Big) \implies |S(D,\xi) - I| < \varepsilon.$$

Existuje-li integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ (v některém z výše uvedených smyslů), pak pro libovolné funkce $f,\ g : [a,b] \to \mathbb{R}$ definujeme:

$$\int_b^a f\,\mathrm{d}[g] = -\int_a^b f\,\mathrm{d}[g].$$

Dále, pro každé $c \in [a,b]$ a pro všechny funkce $f,\ g : [a,b] \to \mathbb{R}$ definujeme:

$$\int_c^c f\,\mathrm{d}[g] = 0.$$

**4.3. Cvičení.** *Jestliže funkce* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *a* $g\in\mathbb{BV}[a,b]$ *jsou takové, že existuje* RS-*integrál* $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ *(v normovém či zjemňovacím smyslu), pak platí:*

$$\Big|\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]\Big|\le\|f\|\operatorname{var}_a^b g.$$

Pro každá dvě dělení $D',\,D''\in\mathscr{D}[a,b]$ taková, že $D'\subset D''$ ($D''$ je zjemnění $D'$) platí $|D''|\le|D'|$. Snadno lze tedy dokázat následující tvrzení:

**4.4. Věta.** *Je-li* (n) $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]=I\in\mathbb{R}$, *pak platí také* $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]=I$. □

**4.5. Poznámka.** Nechť $f\in\mathbb{G}[a,b]$, $x_0\in(a,b)$, $c,d\in\mathbb{R}$, $c\,d>0$ a

$$g(x)=-c\,\chi_{[a,x_0)}(x)+d\,\chi_{(x_0,b]}(x)=\begin{cases}-c & \text{pro } x<x_0,\\ 0 & \text{pro } x=x_0,\\ d & \text{pro } x>x_0.\end{cases}$$

Pro libovolné rozšířené dělení

$$(D,\xi)=\Big(\{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_m\},(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m)\Big)\in\mathscr{P}[a,b]$$

intervalu $[a,b]$ máme

$$S(D,\xi)=\begin{cases}f(\xi')\,(c+d) & \text{je-li } x_0\in(\alpha_j,\alpha_{j+1}),\ \xi_j=\xi'\ne x_0,\\ f(x_0)\,(c+d) & \text{je-li } x_0\in(\alpha_j,\alpha_{j+1}),\ \xi_j=x_0,\\ f(\xi')\,c+f(\xi'')\,d & \text{je-li } x_0=\alpha_j,\ \xi_{j-1}=\xi'\ne x_0,\ \xi_j=\xi''\ne x_0,\\ f(x_0)\,c+f(\xi'')\,d & \text{je-li } x_0=\alpha_j,\ \xi_{j-1}=x_0,\ \xi_j=\xi''\ne x_0,\\ f(\xi')\,c+f(x_0)\,d & \text{je-li } x_0=\alpha_j,\ \xi_{j-1}=\xi'\ne x_0,\ \xi_j=x_0.\end{cases}$$

Odtud vidíme, že pokud je $-c=g(x_0-)\ne d=g(x_0+)$, pak k tomu, aby částečné součty $S(D,\xi)$ konvergovaly pro $|D|\to 0$ k nějaké konečné hodnotě $I$, je nutné, aby funkce $f$ byla v bodě $x_0$ spojitá ($\lim_{\xi\to x_0} f(\xi)=f(x_0)$). Lze tedy očekávat, že pro existenci normového integrálu (n) $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ bude nutné, aby funkce $f$ a $g$ neměly žádný společný bod nespojitosti.

Nyní, nechť $D_0\in\mathscr{D}[a,b]$ je libovolné dělení obsahující $x_0$. Pro každé jeho zjemnění $D$ potom máme

$$S(D,\xi)\in\{f(\xi')\,c+f(\xi'')\,d,\ f(x_0)\,c+f(\xi'')\,d,\ f(\xi')\,c+f(x_0)\,d\},$$

kde $\xi'<x_0$ a $\xi''>x_0$. Bude-li tedy funkce $f$ regulovaná na $[a,b]$, bude množina $\mathcal{Q}$ hromadných bodů množiny $\{S(D,\xi):(D,\xi)\in\mathscr{P}[a,b]\wedge D_0\subset D\}$ nejvýše tříbodová:

$$\mathcal{Q}=\{f(x_0-)\,c+f(x_0+)\,d,\ f(x_0)\,c+f(x_0+)\,d,\ f(x_0-)\,c+f(x_0)\,d\}$$

To naznačuje, že pro existenci integrálu $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ bude nutné (a mohlo by stačit (?)), aby pro funkce $f$ a $g$ a libovolné $x\in[a,b]$ platilo:

$$(\Delta^+ f(x)\,\Delta^+ g(x)=0)\quad\wedge\quad(\Delta^- f(x)\,\Delta^- g(x)=0).$$

Standardním způsobem lze dokázat následující tvrzení.

**4.6 . Věta** (Bolzano - Cauchyova podmínka). *Pro dané funkce $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ existuje normový integrál $(n)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ právě tehdy, když je splněna podmínka:*

$$\left\{\begin{array}{l}\forall\,\varepsilon>0\,\exists\,\delta>0:\Big((D',\xi'),(D'',\xi'')\in\mathscr{P}[a,b]\wedge|D'|<\delta\wedge|D''|<\delta\Big)\\ \Longrightarrow\ |S(D',\xi')-S(D'',\xi'')|<\varepsilon.\end{array}\right.\tag{4.1}$$

*Podobně, $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]\in\mathbb{R}$ právě tehdy, když platí*

$$\left\{\begin{array}{l}\forall\,\varepsilon>0\,\exists\,D_\varepsilon\in\mathscr{D}[a,b]:\Big((D',\xi'),(D'',\xi'')\in\mathscr{P}[a,b]\wedge D'\supset D_\varepsilon\wedge D''\supset D_\varepsilon\Big)\\ \Longrightarrow\ |S(D',\xi')-S(D'',\xi'')|<\varepsilon.\end{array}\right.\tag{4.2}$$

D ů k a z . Nutnost splnění uvedených podmínek pro existenci příslušných integrálů je zřejmá z Definice 4.2.

Předpokládejme, že je splněna podmínka (4.2). Potom můžeme vybrat posloupnost rozšířených dělení $\{(D^{[k]},\xi^k)\}_{k=1}^\infty$ intervalu $[a,b]$ takovým způsobem, že bude platit

$$|S(D,\xi)-S(D^{[k]},\xi^k)|<\tfrac{1}{k}\quad\text{pro každé } D\supset D_k\quad\text{a}\quad(D,\xi)\in\mathscr{P}[a,b]\tag{4.3}$$

a přitom současně

$$D_k\subset D_\ell\quad\text{a}\quad|S(D_k,\xi^k)-S(D_\ell,\xi^\ell)|<\tfrac{1}{k}\quad\text{pro každé } k\in N\quad\text{a}\quad\ell\ge k.\tag{4.4}$$

Posloupnost $\{S(D_k,\xi^k)\}_{k=1}^\infty$ je cauchyovská posloupnost reálných čísel a existuje tedy reálné číslo $I\in\mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{k\to\infty}S(D_k,\xi^k)=I.$$

Nyní, nechť je dáno $\varepsilon>0$. Zvolíme-li $k_\varepsilon$ tak, aby bylo současně

$$\frac{1}{k_\varepsilon}<\frac{\varepsilon}{2}\quad\text{a}\quad|S(D_{k_\varepsilon},\xi_{k_\varepsilon})-I|<\frac{\varepsilon}{2},\tag{4.5}$$

bude, vzhledem k (4.3) a (4.5), pro každé $D\supset D_{k_\varepsilon}$ a každé $(D,\xi)\in\mathscr{P}[a,b]$ platit

$$|S(D,\xi)-I|\le|S(D,\xi)-S(D_{k_\varepsilon},\xi_{k_\varepsilon})|+|S(D_{k_\varepsilon},\xi_{k_\varepsilon})-I|<\varepsilon,$$

neboli

$$I=(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g].$$

Implikace (4.1) $\implies$ $(\mathrm{n})\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] \in \mathbb{R}$ by se dokazovala podobně a ponechává se čtenáři jako cvičení. $\square$

Pokud nebude v následujících tvrzeních explicitně zmíněno, zda se jedná o normový integrál či o $(\sigma)$-integrál, bude to znamenat, že tvrzení platí pro oba typy integrálu.

**4.7. Věta.** *Jestliže existuje integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ a $c \in (a,b)$, pak existují také integrály*

$$\int_a^c f\,\mathrm{d}[g] \quad \text{a} \quad \int_c^b f\,\mathrm{d}[g]$$

*a platí*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] = \int_a^c f\,\mathrm{d}[g] + \int_c^b f\,\mathrm{d}[g].$$

Důkaz. a) Existenci integrálů

$$\int_a^c f\,\mathrm{d}[g] \quad \text{a} \quad \int_c^b f\,\mathrm{d}[g]$$

dokážeme snadno pomocí Věty 4.6.

b) Dále, nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme rozšířená dělení $(D',\xi') \in \mathscr{P}[a,c]$ a $(D'',\xi'') \in \mathscr{P}[c,b]$ tak, aby platilo

$$\Big|S(D',\xi') - \int_a^c f\,\mathrm{d}[g]\Big| + \Big|S(D'',\xi'') - \int_c^b f\,\mathrm{d}[g]\Big| + \Big|S(D,\xi) - \int_a^b f\,\mathrm{d}[g]\Big| < \varepsilon, \tag{4.6}$$

kde

$$(D,\xi) = (D' \cup D'', (\xi',\xi'')) \in \mathscr{P}[a,b].$$

Potom bude $S(D,\xi) = S(D',\xi') + S(D'',\xi'')$ a tudíž

$$\begin{aligned} &\Big|\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] - \int_a^c f\,\mathrm{d}[g] - \int_c^b f\,\mathrm{d}[g]\Big| \\ &\quad \le \Big|\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] - S(D,\xi)\Big| + \big|S(D,\xi) - S(D',\xi') - S(D'',\xi'')\big| \\ &\qquad + \Big|S(D',\xi') - \int_a^c f\,\mathrm{d}[g]\Big| + \Big|S(D,\xi) - \int_a^b f\,\mathrm{d}[g]\Big| < \varepsilon. \end{aligned}$$

$\square$

**4.8. Cvičení.** Pro oba integrály (normový i zjemňovací) proveďte podrobně část a) důkazu předchozí věty. Dále podrobně zdůvodněte proč z existence integrálů

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g], \quad \int_a^c f\,\mathrm{d}[g], \quad \int_c^b f\,\mathrm{d}[g]$$

opravdu plyne existence rozšířených dělení $(D',\xi') \in \mathscr{P}[a,c]$ a $(D'',\xi'') \in \mathscr{P}[c,b]$ takových, že platí (4.6).

Další tvrzení plyne přímo z Definice 4.2.

**4.9. Cvičení.** Nechť $f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$, a nechť existují integrály:

$$\int_a^b f_1 \,\mathrm{d}[g], \ \int_a^b f_2 \,\mathrm{d}[g], \ \int_a^b f \,\mathrm{d}[g_1] \quad \text{a} \quad \int_a^b f_2 \,\mathrm{d}[g_2].$$

Potom pro libovolná $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ platí

$$\int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2) \,\mathrm{d}[g] = c_1 \int_a^b f_1 \,\mathrm{d}[g] + c_2 \int_a^b f_2 \,\mathrm{d}[g],$$

a

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}[c_1 g_1 + c_2 g_2] = c_1 \int_a^b f \,\mathrm{d}[g_1] + c_2 \int_a^b f \,\mathrm{d}[g_2].$$

**4.10. Věta.** *Nechť* $g \in \mathbb{BV}[a,b]$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *je ohraničená a funkce* $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in N$, *jsou takové, že*

$$\int_a^b f_n \,\mathrm{d}[g] \in \mathbb{R} \quad \textit{pro všechna } n \in N \tag{4.7}$$

*a*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0. \tag{4.8}$$

*Potom existuje také integrál* $\int_a^b f \,\mathrm{d}[g]$ *a platí*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \,\mathrm{d}[g] = \int_a^b f \,\mathrm{d}[g]. \tag{4.9}$$

D ů k a z provedeme pro $\sigma$ integrál:

Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Vzhledem k předpokladu (4.8) můžeme zvolit $n_\varepsilon \in N$ tak, aby platilo

$$n \ge n_\varepsilon \implies \Big(\|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{\operatorname{var}_a^b g}\Big) \wedge \Big(\|f_n\| < \|f\| + 1\Big). \tag{4.10}$$

Dále, za našich předpokladů (viz Cvičení 4.3) je pro $n \ge n_\varepsilon$

$$\Big|\int_a^b f_n \,\mathrm{d}[g]\Big| \le \|f_n\| \operatorname{var}_a^b g \le (\|f\| + 1) \operatorname{var}_a^b g.$$

Můžeme tedy vybrat podposloupnost $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ v $\mathbb{N}$ a $I \in \mathbb{R}$ tak, že bude platit

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_{n_k} \,\mathrm{d}[g] = I.$$

Speciálně, existuje $k_\varepsilon \in N$ takové, že

$$n_{k_\varepsilon} \ge n_\varepsilon \quad \text{a} \quad \Big(k \ge k_\varepsilon \implies \Big|\int_a^b f_{n_k} \,\mathrm{d}[g] - I\Big| < \varepsilon\Big). \tag{4.11}$$

Dále, nechť $D_\varepsilon = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \in \mathscr{D}$ je takové dělení intervalu $[a,b]$, že

$$\Big((D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]\Big) \wedge \Big(D_\varepsilon \subset D\Big) \implies \Big|S_{k_\varepsilon}(D,\xi) - \int_a^b f_{n_{k_\varepsilon}}\,\mathrm{d}[g]\Big| < \varepsilon, \tag{4.12}$$

kde

$$S_{k_\varepsilon}(D,\xi) = \sum_{j=1}^m f_{n_{k_\varepsilon}}(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})].$$

Protože je $n_{k_\varepsilon} \ge n_\varepsilon$ (viz (4.11)), znamená (4.10), že pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$ splňující $D_\varepsilon \subset D$ je

$$\big|S(D,\xi) - S_{k_\varepsilon}(D,\xi)\big| \le \|f - f_{n_{k_\varepsilon}}\| \operatorname{var}_a^b g < \varepsilon.$$

Vzhledem k (4.11)-(4.12) tedy dostáváme

$$|S(D,\xi) - I| \le |S(D,\xi) - S_{k_\varepsilon}(D,\xi)| + \Big|S_{k_\varepsilon}(D,\xi) - \int_a^b f_{n_{k_\varepsilon}}\,\mathrm{d}[g]\Big| + \Big|\int_a^b f_{n_{k_\varepsilon}}\,\mathrm{d}[g] - I\Big| < 3\,\varepsilon.$$

Odtud okamžitě plyne, že platí

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] = I.$$

Konečně, protože podle Cvičení 4.3 máme

$$\Big|\int_a^b f_n\,\mathrm{d}[g] - \int_a^b f\,\mathrm{d}[g]\Big| \le \|f_n - f\| \operatorname{var}_a^b g,$$

tvrzení (4.9) plyne nyní snadno z předpokladu (4.8). □

**4.11 . Poznámka.** Všimněme si, že že z existence integrálu $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] \in \mathbb{R}$ plyne, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení $D_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b]$ takové, že:

$$\Big((D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b] \;\wedge\; D \supset D_\varepsilon\Big) \implies \Big|\sum_{j=1}^{\nu(D)} \Big(f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big)\Big| < \varepsilon.$$

**4.12 . Lemma.** *Nechť $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ a nechť existuje $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$. Buď dáno $\varepsilon > 0$ a nechť $D_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b]$ je takové, že*

$$\Big|S(D,\xi) - (\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]\Big| < \varepsilon$$

*platí pro každé rozšířené dělení $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$ takové, že $D \supset D_\varepsilon$.*

*Potom pro každé rozšířené dělení $(D,\xi)$, $D = \{\alpha_0, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$, takové, že $D \supset D_\varepsilon$ platí*

$$\sum_{j=1}^m \Big|f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big| < 6\,\varepsilon. \tag{4.13}$$

D ů k a z . a) Pro každou dvojici $(D',\xi')$, $(D'',\xi')\in\mathscr{P}[a,b]$ takovou, že je $D'\supset D_\varepsilon$ a $D''\supset D_\varepsilon$ máme

$$|S(D',\xi')-S(D'',\xi'')|<2\,\varepsilon. \tag{4.14}$$

Nechť $(D,\xi)\in\mathscr{P}[a,b]$, $D=\{\alpha_0,\alpha_2,\dots,\alpha_m\}$, $\xi=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m)$ a $D\supset D_\varepsilon$. Pro každé $j\in\{1,2,\dots,m\}$ můžeme zvolit $D_\varepsilon^{(j)}\in\mathscr{D}[\alpha_{j-1},\alpha_j]$ a $\xi_\varepsilon^{(j)}\in\mathbb{R}^m$ tak, aby platilo

$$(D_\varepsilon^{(j)},\xi_\varepsilon^{(j)})\in\mathscr{P}[\alpha_{j-1},\alpha_j]$$

a

$$\Big|S(D_\varepsilon^{(j)},\xi_\varepsilon^{(j)})-(\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big|<\frac{\varepsilon}{m}. \tag{4.15}$$

Nechť

$$U=\{j_1,j_2,\dots,j_k\}\subset\{1,2,\dots,m\},\quad 1\le j_1<j_2<\dots<j_k\le m,$$

je daná podmnožina indexů. Potom pro každý vektor $\xi=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m)$ takový, že $(D,\xi)\in\mathscr{P}[a,b]$, máme

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{j\in U}\Big(f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-(\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big)\right|\\
&\le\left|\sum_{j\in U}\Big(f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-S(D_\varepsilon^{(j)},\xi_\varepsilon^{(j)})\Big)\right|\\
&\qquad+\left|\sum_{j\in U}\Big(S(D_\varepsilon^{(j)},\xi_\varepsilon^{(j)})-(\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big)\right|\\
&=\left|S(D,\xi)-\sum_{j\notin U}f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-\sum_{j\in U}S(D_\varepsilon^{(j)},\xi_\varepsilon^{(j)})\right|\\
&\qquad+\left|\sum_{j\in U}\Big(S(D_\varepsilon^{(j)},\xi_\varepsilon^{(j)})-(\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big)\right|\\
&=\big|S(D,\xi)-S(D',\xi')\big|+\left|\sum_{j\in U}\Big(S(D_\varepsilon^{(j)},\xi_\varepsilon^{(j)})-(\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big)\right|,
\end{aligned}$$

kde $(D',\xi')\in\mathscr{P}[a,b]$, $D'=D\cup\bigcup_{j\in U}D_\varepsilon^{(j)}$. Odtud, vzhledem k (4.14) a (4.15), plyne

$$\Big|\sum_{j\in U}\Big(f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-(\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big)\Big|<2\,\varepsilon+k\,\frac{\varepsilon}{m}\le 3\,\varepsilon. \tag{4.16}$$

b) Označme

$$U^+ = \{j \in \{1,2,\dots,m\} : f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g] \geq 0\}.$$

Po dosazení $U = U^+$ do (4.16) získáme nerovnost

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j\in U^+} \Big|f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big| \\ \quad \displaystyle = \sum_{j\in U^+} \Big(f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big) < 3\,\varepsilon. \end{cases} \tag{4.17}$$

Podobně, pro $U = U^-$,

$$U^- = \{j \in \{1,2,\dots,m\} : f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g] < 0\},$$

dostaneme

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j\in U^-} \Big|f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big| \\ \quad \displaystyle = -\sum_{j\in U^-} \Big(f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big) < 3\,\varepsilon. \end{cases} \tag{4.18}$$

Odtud a z (4.17) plyne

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{m} |f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]| \\ &\quad = \sum_{j\in U^+} f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g] \\ &\qquad - \sum_{j\in U^-} f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g] \\ &\quad = |\sum_{j\in U^+} f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]| \\ &\qquad + |\sum_{j\in U^-} f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]| < 6\,\varepsilon, \end{aligned}$$

tj. platí (4.13). $\square$

**4.13. Poznámka.** Povšimněme si, že důkaz Lemmatu 4.12 obsahuje také důkaz následujícího tvrzení:
*Nechť* $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *a nechť existuje* $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$*. Buď dáno* $\varepsilon > 0$ *a nechť* $D_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b]$ *je takové, že*

$$\Big|S(D,\xi) - (\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]\Big| < \varepsilon$$

*platí pro každé rozšířené dělení* $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$ *takové, že* $D \supset D_\varepsilon$*. Dále, nechť*

$$U = \{j_1, j_2, \dots, j_k\} \subset \{1, 2, \dots, m\}, \quad 1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_k \le m,$$

*je daná podmnožina indexů.*

*Potom pro každé rozšířené dělení* $(D,\xi)$*,* $D = \{\alpha_0, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$*,* $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$*, takové, že* $D \supset D_\varepsilon$ *platí*

$$\Big|\sum_{j\in U} f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big| < 3\,\varepsilon.$$

Tvrzení tohoto typu se zpravidla nazývá Saksovo-Henstockovo lemma a hraje důležitou roli v teorii integrálu.

Důležitým důsledkem Lemmatu 4.12 je následující tvrzení:

**4.14. Věta** (Substituce). *Nechť* $f, g, h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$*, přičemž* $f$ *je ohraničená na intervalu* $[a,b]$ *a* $\int_a^b g\,\mathrm{d}[h] \in \mathbb{R}$*. Potom existuje jeden z integrálů*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\Big[\int_a^x g\,\mathrm{d}[h]\Big] \quad a \quad \int_a^b f\,g\,\mathrm{d}[h] \tag{4.19}$$

*právě tehdy když existuje i ten druhý. V takovém případě pak platí*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\Big[\int_a^x g\,\mathrm{d}[h]\Big] = \int_a^b f\,g\,\mathrm{d}[h]. \tag{4.20}$$

D ů k a z provedeme opět pouze pro $\sigma$ integrál:

Nejprve si povšimněme, že z existence integrálu $\int_a^b g\,\mathrm{d}[h] \in \mathbb{R}$ plyne, že pro libovolné $x \in [a,b]$ je definovaná funkce

$$w(x) = \int_a^x g\,\mathrm{d}[h]$$

(viz Věta 4.7). Dále, pro každé rozšířené dělení

$$(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b], \quad D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$$

máme:

$$\Big|\sum_{j=1}^{m} f(\xi_j)\,g(\xi_j)\,[h(\alpha_j)-h(\alpha_{j-1})]-\sum_{j=1}^{m} f(\xi_j)\,[w(\alpha_j)-w(\alpha_{j-1})]\Big|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m} |f(\xi_j)|\,\Big|g(\xi_j)\,[h(\alpha_j)-h(\alpha_{j-1})]-\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} g\,\mathrm{d}[h]\Big|$$

$$\leq \|f\|\,\Big(\sum_{j=1}^{m}\Big|g(\xi_j)\,[h(\alpha_j)-h(\alpha_{j-1})]-\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} g\,\mathrm{d}[h]\Big|\Big)$$

Buď dáno libovolné $\varepsilon>0$. Zvolme $D_\varepsilon\in\mathscr{D}[a,b]$ tak aby platilo

$$\Big|S(D,\xi)-(\sigma)\int_a^b g\,\mathrm{d}[h]\Big|<\varepsilon$$

pro každé rozšířené dělení $(D,\xi)\in\mathscr{P}[a,b]$ takové, že $D\supset D_\varepsilon$. Potom podle Saks-Henstockova lemmatu (Lemma 4.12) máme

$$\sum_{j=1}^{m}\Big|g(\xi_j)\,[h(\alpha_j)-h(\alpha_{j-1})]-\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} g\,\mathrm{d}[h]\Big|<6\,\varepsilon$$

pro každé $(D,\xi)\in\mathscr{P}[a,b]$ takové, že $D\supset D_\varepsilon$. To ovšem znamená, že pro integrální součty příslušné k integrálům (4.19) platí:

$$\Big|\sum_{j=1}^{m} f(\xi_j)\,g(\xi_j)\,[h(\alpha_j)-h(\alpha_{j-1})]-\sum_{j=1}^{m} f(\xi_j)\,[w(\alpha_{j-1})-w(\alpha_j)]\Big|<\|f\|\,6\,\varepsilon.$$

Odtud už důkaz našeho tvrzení snadno plyne. □

**4.15. Věta** (INTEGRACE PER-PARTES)**.** *Existuje-li jeden z integrálů*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g],\qquad \int_a^b g\,\mathrm{d}[f],$$

*existuje i druhý a platí*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]+\int_a^b g\,\mathrm{d}[f]=f(b)\,g(b)-f(a)\,g(a). \tag{4.21}$$

D ů k a z . Pro libovolné rozšířené dělení

$$(D,\xi)=\{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_m\},(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m)\}\in\mathscr{P}[a,b]$$

platí

$$
\begin{aligned}
&S_{f\Delta g}(D,\xi)\\
&\quad = f(\xi_1)\,[g(\alpha_1)-g(a)] + f(\xi_2)\,[g(\alpha_2)-g(\alpha_1)] + \cdots + f(\xi_m)\,[g(b)-g(\alpha_{m-1})]\\
&\quad = -f(a)\,g(a) - [f(\xi_1)-f(a)]\,g(a) - [f(\xi_2)-f(\alpha_1)]\,g(\alpha_1)\\
&\qquad -[f(\alpha_1)-f(\xi_1)]\,g(\alpha_1) - \cdots - [f(\xi_m)-f(\alpha_{m-1})]\,g(\alpha_{m-1})\\
&\qquad -[f(\alpha_{m-1})-f(\xi_{m-1})]\,g(\alpha_{m-1}) - [f(b)-f(\xi_m)]\,g(b) + f(b)\,g(b)\\
&\quad = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - S_{g\Delta f}(D',\xi'),
\end{aligned}
$$

kde

$$\xi' = (a,\alpha_1,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2,\dots,\alpha_{m-1},\alpha_{m-1},b) \quad \text{a} \quad D' = \{a,\xi_1,\alpha_1,\xi_2,\alpha_2,\dots\alpha_{m-1},\xi_m,b\}$$

je zjemněním $D$. (Stane-li se, že $\xi_j = \alpha_{j-1}$ resp. $\xi_j = \alpha_j$ pro nějaké $j$, musíme ovšem tyto body $\xi_j$ z $D'$ i z $\xi'$ vynechat.)

Nechť je dáno $\varepsilon > 0$ a nechť existuje integrál $\int_a^b g\,\mathrm{d}[f]$. Zvolme dělení $D_\varepsilon$ intervalu $[a,b]$ tak, aby pro každé jeho zjemnění $D'$ a každé $(D',\xi') \in \mathscr{P}\,[a,b]$ platilo

$$\left| S_{g\Delta f}(D',\xi') - \int_a^b g\,\mathrm{d}[f] \right| < \varepsilon.$$

Vzhledem k výše uvedenému máme tedy pro každé $D \supset D_\varepsilon$ a každé příslušné rozšířené dělení $(D,\xi)$

$$S_{f\Delta g}(D,\xi) - f(b)\,g(b) + f(a)\,g(a) + \int_a^b g\,\mathrm{d}[f] = \int_a^b g\,\mathrm{d}[f] - S_{g\Delta f}(D',\xi'),$$

kde $D' \supset D \supset D_\varepsilon$ a tudíž

$$\left| S_{f\Delta g}(D,\xi) - f(b)\,g(b) + f(a)\,g(a) + \int_a^b g\,\mathrm{d}[f] \right| = \left| \int_a^b g\,\mathrm{d}[f] - S_{g\Delta f}(D',\xi') \right| < \varepsilon.$$

Odtud už snadno plyne existence integrálu $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ a platnost vztahu (4.21).

Druhá implikace by se dokazovala symetricky. □

**4.16. Věta.** *Jestliže $c \in [a,b]$ a jestliže existují integrály*

$$I_1 = (\sigma)\int_a^c f\,\mathrm{d}[g] \quad \text{a} \quad I_2 = (\sigma)\int_c^b f\,\mathrm{d}[g],$$

*pak existuje také integrál $I = (\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ a platí $I = I_1 + I_2$.*

D ů k a z . Buď dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme dělení $D'_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,c]$ a $D''_\varepsilon \in \mathscr{D}[c,b]$ tak, aby platilo

$$\left|S(D',\xi') - I_1\right| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } (D',\xi') \in \mathscr{P}[a,c] \quad \text{taková, že } D' \supset D'_\varepsilon$$

a

$$\left|S(D'',\xi'') - I_2\right| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } (D'',\xi'') \in \mathscr{P}[c,b] \quad \text{taková, že } D'' \supset D''_\varepsilon.$$

Nyní, nechť $D_\varepsilon = D'_\varepsilon \cup D''_\varepsilon$. Protože je $c \in D_\varepsilon$, každé rozšířené dělení $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$ splňující $D \supset D_\varepsilon$ můžeme rozdělit:

$$D = D' \cup D'' \quad \text{a} \quad \xi = (\xi', \xi'')$$

tak, že bude platit $(D',\xi') \in \mathscr{P}[a,c]$, $(D'',\xi'') \in \mathscr{P}[c,b]$, $D' \supset D'_\varepsilon$ a $D'' \supset D''_\varepsilon$. Navíc, je

$$S(D,\xi) = S(D',\xi') + S(D'',\xi'').$$

Vzhledem k definici $D'_\varepsilon$ a $D''_\varepsilon$ tedy pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$ splňující $D \supset D_\varepsilon$ máme

$$\left|S(D,\xi) - (I_1 + I_2)\right| \le \left|S(D',\xi') - I_1\right| + \left|S(D'',\xi'') - I_2\right| < 2\,\varepsilon,$$

tj. dokázali jsme tvrzení věty. □

**4.17. Věta.** *Nechť $f \in \mathbb{C}[a,b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a,b]$. Potom existují oba integrály*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] \quad i \quad \int_a^b g\,\mathrm{d}[f].$$

D ů k a z . Vzhledem k Větám 1.4, 4.4 a 4.15 stačí dokázat existenci normového integrálu $(n)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$, pro případ, že $f$ je spojitá na $[a,b]$ a $g$ neklesající na $[a,b]$.

Nechť tedy $f$ je spojitá na $[a,b]$, $g$ neklesající na $[a,b]$ a buď dáno $\varepsilon > 0$. Jestliže $g(b) = g(a)$, pak funkce $g$ je nutně konstantní na $[a,b]$ a tudíž $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] = 0$. Bez újmy na obecnosti můžeme tedy předpokládat, že $g(b) - g(a) > 0$. Dále využijeme toho, že každá funkce spojitá na kompaktním intervalu je na tomto intervalu také stejnoměrně spojitá. Existuje tedy $\delta_\varepsilon > 0$ takové, že

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2\,[g(b) - g(a)]} \text{ pro všechna } x, y \in [a,b] \text{ taková, že } |x - y| < \delta_\varepsilon\,. \quad (4.22)$$

Dokážeme, že pro libovolná dvě rozšířená dělení $(D,\xi)\,, (D',\xi')$ intervalu $[a,b]$ taková, že $|D| < \delta_\varepsilon$ a $|D'| < \delta_\varepsilon$ platí $|S(D,\xi) - S(D',\xi')| < \varepsilon$. Podle Věty 4.6 to už bude znamenat, že existuje $(n)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$.

Nechť $(D^*,\xi^*)$ je rozšířené dělení intervalu $[a,b]$ takové, že současně platí $D \subset D^*$ a $D' \subset D^*$. Jestliže $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$, pak prvky dělení $D^*$ a složky vektoru $\xi^*$ označme tak, že bude

$$D^* = \{\alpha_0, \alpha_1^1, \dots, \alpha_{n_1-1}^1, \alpha_1, \alpha_1^2, \dots, \alpha_{n_2-1}^2, \alpha_2, \dots \alpha_{m-1}, \alpha_1^m, \dots, \alpha_{n_m-1}^m, \alpha_m\}$$

$$\xi^* = (\xi_1^1, \quad \dots, \quad \xi_{n_1}^1, \xi_1^2, \quad \dots, \quad \xi_{n_2}^2, \quad \dots, \quad \xi_1^m, \quad \dots, \quad \xi_{n_m}^m).$$

Potom

$$S(D,\xi) = \sum_{j=1}^{m} f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] = \sum_{j=1}^{m} f(\xi_j) \sum_{i=1}^{n_j} [g(\alpha_i^j) - g(\alpha_{i-1}^j)]$$

a

$$|S(D,\xi) - S(D^*,\xi^*)| \le \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n_j} |[f(\xi_j) - f(\xi_i^j)]|\,[g(\alpha_i^j) - g(\alpha_{i-1}^j)].$$

Pro každé $j = 1,2,\dots,m$ a každé $j = 1,2,\dots,n_i$ je $|\xi_j - \xi_i^j| < |D| < \delta_\varepsilon$. Můžeme tedy použít (4.22) a poté dostaneme

$$\begin{aligned} |S(D,\xi) - S(D^*,\xi^*)| &\le \frac{\varepsilon}{2\,(g(b) - g(a))} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n_j} [g(\alpha_i^j) - g(\alpha_{i-1}^j)] \\ &= \frac{\varepsilon}{2\,[g(b) - g(a)]}\,[g(b) - g(a)] = \tfrac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Stejně bychom dokázali, že platí také

$$|S(D',\xi') - S(D^*,\xi^*)| < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Odtud okamžitě plyne, že

$$|S(D,\xi) - S(D',\xi')| \le |S(D,\xi) - S(D^*,\xi^*)| + |S(D',\xi') - S(D^*,\xi^*)| < \varepsilon.$$

Tím je důkaz hotov. □

**4.18 . Věta.** *Je-li $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ regulovaná na $[a,b]$, pak integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ existuje pro každou funkci $f$ spojitou na $[a,b]$ pouze tehdy, když $g$ má konečnou variaci na $[a,b]$.*

D ů k a z . a) Je-li $f \in \mathbb{C}[a,b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a,b]$, pak podle Věty 4.17 existuje $(n)\ \int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$. Podle Věty 4.4 tedy existuje i $(\sigma)\ \int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$.

b)Důkaz obrácené implikace se opírá o následující tři pomocná tvrzení.

**Tvrzení 1.** *Je-li $a_n \ge 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, pak existuje posloupnost $\{c_n\}_{n\in N}$ taková, že platí*

$$c_n > 0 \quad \textit{pro všechna } n \in N, \qquad \lim_{n\to\infty} c_n = 0 \quad \textit{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, a_n = \infty. \tag{4.23}$$

D ů k a z . Označíme-li $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ pro $n \in \mathbb{N}$, bude posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ neklesající a

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty. \tag{4.24}$$

Speciálně, pro dostatečně velká $n$ $(n \geq n_0)$ bude $s_n > 0$. Můžeme tudíž definovat

$$c_n = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad n < n_0, \\ \dfrac{1}{s_n} & \text{pro} \quad n \geq n_0. \end{cases}$$

Zřejmě je $c_n > 0$ pro každé $n \in N$ a $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. Na druhou stranu, pro libovolná $m, n \in N$, $m > n \geq n_0$ máme

$$\sum_{k=n}^{m} c_k\, a_k = \sum_{k=n}^{m} \frac{a_k}{s_k} \geq \frac{\sum_{k=n}^{m} a_k}{s_m} = 1 - \frac{s_{n-1}}{s_m}.$$

Vzhledem k (4.24), pro každé $n \in N$ existuje $m_n > n$ takové, že je $\dfrac{s_{n-1}}{s_{m_n}} < \dfrac{1}{2}$, tj.

$$\sum_{k=n}^{m_n} c_k\, a_k > \frac{1}{2}.$$

To ovšem znamená, že musí platit (4.23). $\square$

Druhé tvrzení je snadným důsledkem Vitaliovy věty o konečném pokrytí a Věty 1.3.

**Tvrzení 2.** *Funkce $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ má konečnou variaci na $[a,b]$ právě tehdy, když platí*

$$\begin{cases} \textit{pro každé } x \in (a,b] \textit{ existuje } \delta_1 \in (0, x-a) \textit{ takové, že } \operatorname{var}_{x-\delta_1}^{x} g < \infty \\ a \\ \textit{pro každé } x \in [a,b) \textit{ existuje } \delta_2 \in (0, b-x) \textit{ takové, že } \operatorname{var}_{x}^{x+\delta_2} g < \infty. \end{cases} \tag{4.25}$$

**Tvrzení 3.** *Nechť $g \in G[a,b]$, $x_0 \in (a,b]$ a*

$$\operatorname{var}_{x}^{x_0} g = \infty \quad \textit{pro každé} \;\; x \in [a, x_0). \tag{4.26}$$

*Potom existuje rostoucí posloupnost $\{x_k\}$ bodů v $(0, x_0)$ taková, že*

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x_0 \quad a \quad \sum_{k=1}^{\infty} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| = \infty. \tag{4.27}$$

D ů k a z rozdělíme na dvě části: podle toho, zda platí

$$\sup\{|g(x)|\,; x \in [y, x_0]\} = \infty \quad \text{pro všechna} \;\; y \in [a, x_0) \tag{4.28}$$

či nikoliv.

a) Předpokládejme nejprve, že (4.28) neplatí. To znamená, že existuje $y_1 \in [a, x_0)$ takové, že

$$g^* := \sup\{|g(x)|\,; x \in [y_1, x_0]\} \in [0, \infty). \tag{4.29}$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $y_1 > x_0 - 1$. Podle našeho předpokladu je $\operatorname{var}_{y_1}^{x_0} g = \infty$. Existuje tedy dělení $D^1 = \{\alpha_0^1, \alpha_1^1, \dots, \alpha_{m_1}^1\}$ intervalu $[y_1, x_0]$ takové, že $V(g, D^1) \geq 1 + 2\, g^*$. Vzhledem k (4.29) tedy máme

$$\sum_{j=1}^{m_1-1} |g(\alpha_j^1) - g(\alpha_{j-1}^1)| \geq 1 + 2\, g^* - |g(x_0)| - |g(\alpha_{m_1-1}^1)| \geq 1 + 2\, g^* - 2\, g^* = 1.$$

Položme $x_1 = y_1$, $x_k = \alpha_{k-1}^1$ pro $k = 2, \dots, m_1$, $y_2 = \max\{x_{m_1-1}, x_0 - \frac{1}{2}\}$ a $r_1 = m_1 - 1$. Máme opět $\operatorname{var}_{y_2}^{x_0} g = \infty$. Existuje tedy dělení $D^2 = \{\alpha_0^2, \alpha_1^2, \dots, \alpha_{m_2}^2\}$ intervalu $[y_2, x_0]$ takové, že $V(g, D^2) \geq 1 + 2\, g^*$. Tudíž, podle (4.29),

$$\sum_{j=1}^{m_2-1} |g(\alpha_j^2) - g(\alpha_{j-1}^2)| \geq 1 + 2\, g^* - |g(x_0)| - |g(\alpha_{m_2-1}^2)| \geq 1.$$

Položme

$$r_2 = m_1 + m_2 - 1,\ \ x_k = \alpha_{k-r_1}^2 \text{ pro } k = r_1 + 1, r_1 + 2, \dots, r_2 \quad \text{a} \quad y_3 = \max\{x_{r_2}, x_0 - \tfrac{1}{3}\}.$$

(Všimněme si, že $x_{r_1+1} = y_2 = \alpha_0^2$.)

Nyní, nechť $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$ a nechť $r_i$, $y_i$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, a $x_k$, $k = 1, 2, \dots r_{n-1}$, jsou takové, že

$$x_{r_{i-1}+1} = y_{i-1},\ \ x_k \in (y_{i-1}, y_i] \ \text{ pro } k = r_{i-1}{+}2, \dots, r_i$$

a

$$y_i = \max\{x_{r_{i-1}}, x_0 - \tfrac{1}{i}\}, \qquad \sum_{k=r_{i-1}}^{r_i-1} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| \geq 1$$

platí pro $i = 1, 2, \dots, n-1$. Položme $y_n = \max\{x_{r_{n-1}}, x_0 - \frac{1}{n}\}$. Máme opět $\operatorname{var}_{y_n}^{x_0} g = \infty$. Vzhledem k (4.29) tedy existuje dělení $D^n = \{\alpha_0^n, \alpha_1^n, \dots, \alpha_{m_n}^n\}$ intervalu $[y_n, x_0]$ takové, že

$$\sum_{j=1}^{m_n-1} |g(\alpha_j^n) - g(\alpha_{j-1}^n)| \geq 1.$$

Položíme-li

$$r_n = r_{n-1} + m_n - 1 \quad x_k = \alpha_{k-r_{n-1}}^n \text{ pro } k = r_{n-1} + 1, \dots, r_n,$$

bude platit

$$\sum_{k=r_{n-1}}^{r_n-1} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| \geq 1 \quad \text{a} \quad x_k \geq y_n \geq x_0 - \tfrac{1}{n} \ \text{ pro } k = r_{n-1}, \dots, r_n.$$

*Shrnutí*: indukcí jsme zkonstruovali rostoucí posloupnosti $\{r_n\}$, $\{y_n\}$ a $\{x_k\}$ takové, že

$$y_n \in (x_0 - \tfrac{1}{n}, x_0), \qquad \sum_{k=r_{n-1}}^{r_n-1} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| \geq 1 \ \text{ pro } \ n \in \mathbb{N}$$

a $x_k \geq y_n \geq x_0 - \frac{1}{n}$ pro $k \geq r_{n-1}$. Odtud plyne, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| = \sum_{n=1}^{\infty} \Big( \sum_{j=r_{n-1}}^{r_n-1} |g(x_{j+1}) - g(x_j)| \Big) \geq \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$$

a $\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} y_n = x_0$. Dokázali jsme tedy, že naše posloupnost $\{x_k\}$ je rostoucí a splňuje (4.27).

b) Předpokládejme, že (4.28) platí. Nejprve si povšimněme, že pro libovolné $y \in [a, x_0)$ platí

$$\sup\{|g(x)|\,; x \in [y, x_0]\} = \infty \quad \text{tehdy a jen tehdy když} \quad \sup\{|g(x)|\,; x \in (y, x_0)\} = \infty.$$

Vskutku, je-li $\sup\{|g(x)|\,; x \in [y, x_0]\} = \infty$, pak musí v intervalu $(y, x_0)$ existovat bod $x$ takový, že $|g(x)| \geq \max\{|g(y)|, |g(x_0)|\}$. (Připomeňme si, že funkce $g$ je definována na celém intervalu $[a, b]$ a zobrazuje tento interval do $\mathbb{R}$.) Vzhledem k (4.28) můžeme vybrat $x_k \in (y, x_0)$, $k \in \mathbb{N}$, tak, aby platilo $|g(x_1)| > 1$ a

$$x_k > \max\{x_{k-1}, x_0 - \tfrac{1}{k}\} \quad \text{a} \quad |g(x_k)| > |g(x_{k-1})| + 1 \quad \text{pro} \quad k = 2, 3, \dots.$$

Zřejmě $\{x_k\}$ je rostoucí, $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ a

$$\sum_{k=1}^{n} |g(x_k + 1) - g(x_k)| \geq \sum_{k=1}^{n} \big( |g(x_k + 1)| - |g(x_k)| \big) > \sum_{k=1}^{n} 1 = \infty.$$

Naše posloupnost $\{x_k\}$ je neklesající a splňuje (4.27). □

**Pokračování D ů k a z u Věty 4.18**:

Vzhledem k Větě 4.4 se můžeme omezit na $\sigma$ integrál. Nechť $\operatorname{var}_a^b g = \infty$. Podle Tvrzení 2 existuje $x_0 \in [a, b]$ pro které není splněna jedna z podmínek (4.25). Nechť tedy např. $x_0 \in (a, b]$ a nechť pro každé $x \in [a, x_0)$ platí (4.26). Podle Tvrzení 3 tedy existuje rostoucí posloupnost $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ bodů v $(0, x_0)$ taková, že

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x_0 \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |g(x_k) - g(x_{k-1})| = \infty.$$

Dále, podle Tvrzení 1 existuje posloupnost $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ kladných čísel taková, že platí

$$\lim_{k\to\infty} c_k = \infty \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k \, |g(\alpha_k) - g(\alpha_{k-1})| = \infty.$$

Položme

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \;\; x \le \alpha_0 \text{ resp. } x \ge x_0 \text{ resp. } x \in \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}, \\[1ex] c_k \,\operatorname{sign}(g(\alpha_k) - g(\alpha_{k-1})) & \text{pro} \;\; x = \xi_k : = \dfrac{\alpha_k + \alpha_{k-1}}{2} \end{cases}$$

a ve zbývajících bodech intervalu $[a,b]$ dodefinujme funkci $f$ lineárně. Takto definovaná funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bude zřejmě spojitá na $[a,b]$ a přitom pro ní bude platit

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(\xi_k)\,[g(\alpha_k) - g(\alpha_{k-1})] = \infty.$$

Speciálně, pro každé $M > 0$ existuje $N_M \in N$ takové, že

$$\sum_{k=1}^{N_M} f(\xi_k)\,[g(\alpha_k) - g(\alpha_{k-1})] > M.$$

Pro dané $M > 0$, označme $D_M = \{a, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{N_M}, x_0, b\}$ a $\xi_M = (a, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{N_M}, x_0, b)$. Potom je $(D_M, \xi_M) \in \mathscr{P}$ a $S(D_M, \xi_M) > M$. To ale znamená, že integrál $(\sigma)\int_a^b f \,\mathrm{d}[g]$ nemůže existovat.

Není-li splněna druhá z podmínek v (4.25), tj. jestliže existuje $x_0 \in [a,b)$ a $\operatorname{var}_{x_0}^{x} g = \infty$ pro každé $x \in [x_0, b)$, je třeba místo Tvrzení 3 použít jeho vhodnou úpravu. $\square$

**4.19. Cvičení.** Zformulujte a dokažte analogii Tvrzení 3 potřebnou k dokončení důkazu Věty 4.18.

**4.20 . Věta.** *Integrál $\int_a^b f \,\mathrm{d}[g]$ existuje pro každou konečnou skokovou funkci $g$ pouze tehdy, když $f$ je spojitá na $[a,b]$.*

D ů k a z . Stejně jako v důkazu předešlé věty, můžeme se omezit na $\sigma$-integrál. Nechť $x_0 \in (a,b)$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c\,d > 0$ a nechť funkce $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ je definována podobně jako v Poznámce 4.5:

$$g(x) = -c\,\chi_{[a,x_0)}(x) + d\,\chi_{(x_0,b]}(x) \quad \text{pro} \;\; x \in [a,b].$$

Podle Poznámky 4.5 může integrál $(\sigma)\int_a^b f \,\mathrm{d}[g]$ existovat pouze tehdy, bude-li platit

$$c\,\Delta^- f(x_0) = 0 \quad \text{a} \quad d\,\Delta^+ f(x_0) = 0,$$

tj. $\Delta^- f(x_0) = \Delta^+ f(x_0) = 0$. Existuje-li tedy integrál $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$, musí být $f$ spojitá v každém bodě $x_0 \in (a,b)$. Podobně bychom dokázali, že pak musí být $f$ spojitá i v bodě $a$ zprava a v bodě $b$ zleva. $\square$

Kapitola věnovaná RS-integrálům bude zakončena uvedením několika dalších důležitých tvrzení. Pro důkazy zatím odkazuju čtenáře na kapitolu II již zmíněné Hildebrandtovy monografie [3].

**4.21 . Definice.** Řekneme, že funkce $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ splňují v bodě $x \in (a,b)$ podmínku (PA) (*podmínku pseudoaditivity*), jestliže

$$\begin{cases} \text{Pro každé } \varepsilon > 0 \text{ existuje } \delta_0 > 0 \text{ takové, že pro všechna} \\ \quad \delta' \in (0,\delta_0),\ \delta'' \in (0,\delta_0),\ \xi \in [x-\delta', x+\delta''],\ \xi' \in [x-\delta', x] \text{ a } \ \xi'' \in [x, x+\delta''] \\ \text{platí:} \\ \quad \big| f(\xi)\,[g(x+\delta'') - g(x-\delta')] \\ \qquad\quad - f(\xi')\,[g(x) - g(x-\delta')] - f(\xi'')\,[g(x+\delta'') - g(x)] \big| < \varepsilon. \end{cases}$$

Následující tvrzení plyne z [3, Theorem II.3.10]), kde je ovšem třeba intervalovou funkci $f(I)$ nahradit mnohoznačnou intervalovou funkcí

$$F : [c,d] \to f(\xi)\,[g(d) - g(c)], \quad \xi \in [c,d].$$

**4.22. Věta.** *Normový integrál* $(n)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ *existuje právě tehdy, když existuje* $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ *a je splněna podmínka* (PA) *v každém bodě* $x \in (a,b)$.

**4.23 . Věta.** *Nechť* $x \in (a,b)$. *Funkce* $f,\ g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *splňují podmínku (PA) v bodě* $x \in (a,b)$ *právě tehdy, když alespoň jedna z nich je v bodě* $x$ *spojitá.*

**4.24 . Poznámka.** Je-li $f$ ohraničená v okolí bodu $x \in (a,b)$ a $g$ spojitá v bodě $x$, pak funkce $f$, $g$ splňují podmínku (PA) v bodě $x$.

**4.25 . Důsledek.** ([3, Corollary II,10,6]) (n) $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ *existuje pouze tehdy, když funkce* $f$ *a* $g$ *nemají společný bod nespojitosti v* $(a,b)$.

**4.26 . Důsledek.** *Nechť* $c \in (a,b)$ *a nechť funkce* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *splňují* (PA) *v bodě* $c$. *Potom, jestliže existují integrály:*

$$(\mathrm{n})\int_a^c f\,\mathrm{d}[g] = I_1 \quad a \quad (\mathrm{n})\int_c^b f\,\mathrm{d}[g] = I_2,$$

*pak existuje také integrál* $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ *a platí*

$$(\mathrm{n})\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] = I_1 + I_2.$$

**4.27. Věta.** *Jestliže existuje* $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$, *pak platí obě následující tvrzení:*

(*i*) *Pro každé* $x \in [a,b)$ *je alespoň jedna z funkcí* $f$, $g$ *spojitá v* $x$ *zprava,*

(*ii*) *Pro každé* $x \in (a,b]$ *je alespoň jedna z funkcí* $f$, $g$ *spojitá v* $x$ *zleva.*