Kapitola 5

Kurzweilův-Stieltjesův integrál

5.1 . Definice. Funkce $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}^+ = (0,\infty)$ se nazývají *kalibry* na intervalu $[a,b]$, množinu kalibrů na intervalu $[a,b]$ značíme $\mathscr{G} = \mathscr{G}[a,b]$.

Pro daný kalibr $\delta \in \mathscr{G}$, řekneme, že rozšířené dělení $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$ je δ-*jemné* (píšeme $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta) = \mathscr{A}(\delta;[a,b])$), jestliže platí

$$[\alpha_{j-1},\alpha_j] \subset (\xi_j - \delta(\xi_j), \xi_j + \delta(\xi_j)) \quad \text{pro všechna } j = 1,2,\dots,\nu(D).$$

Pro dané funkce $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ a rozšířené dělení $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$ definujeme (jako v kapitole 4)

$$S(D,\xi)(= S_{f\Delta g}(D,\xi)) : = \sum_{j=1}^{\nu(D)} f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})].$$

5.2 . Definice (Kurzweil). Nechť $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ a $I \in \mathbb{R}$. Řekneme, že existuje *Kurzweilův-Stieltjesův integrál* (KS-integrál)

$$(\mathrm{KS})\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] = (\mathrm{KS})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}[g(x)]$$

a má hodnotu $I \in \mathbb{R}$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje kalibr $\delta_\varepsilon \in \mathscr{G}$ takový, že

$$\Big| I - S(D,\xi) \Big| < \varepsilon \tag{5.1}$$

platí pro všechna δ_ε–jemná rozšířená dělení (D,ξ) (tj. pro všechna $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$).

Jestliže existuje integrál $(\mathrm{KS})\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$, definujeme $(\mathrm{KS})\int_b^a f\,\mathrm{d}[g] = -(\mathrm{KS})\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$. Dále, $(\mathrm{KS})\int_a^a f\,\mathrm{d}[g] = 0$.

Tato definice má smysl díky následujícímu lemmatu.

5.3 . Lemma (Cousin). *Pro každý kalibr $\delta \in \mathscr{G}$ je množina $\mathscr{A}(\delta)$ všech δ–jemných rozšířených dělení intervalu $[a,b]$ neprázdná.*

D ů k a z . Nechť je dáno $\delta \in \mathscr{G}$. Označme M množinu všech $c \in (a,b]$ pro něž je $\mathscr{A}(\delta;[a,c]) \neq \emptyset$. Protože je $\delta(a) > 0$, položíme-li $c = \min\{a + \delta(a), b\}$, $D = \{a,c\}$ a $\xi = a$, bude $c \in (a,b]$ a $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta;[a,c])$, tj. $c \in M$ a $M \neq \emptyset$. Položme $d = \sup M$. Protože je $\delta(d) > 0$, existuje $c \in (d - \delta(d), d] \cap M$. Je-li $c < d$, pak existuje $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta;[a,c])$. Definujme $\widetilde{D} = D \cup \{d\}$ a $\widetilde{\xi} = (\xi, d)$. Potom $(\widetilde{D},\widetilde{\xi}) \in \mathscr{P}[a,d]$ a protože je $[c,d] \in (d-\delta(d), d+\delta(d))$, znamená to, že $(\widetilde{D},\widetilde{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta;[a,d])$, tj. $d \in M$. Konečně, kdyby bylo $d < b$, pak bychom mohli zvolit $c \in (d, d + \delta(d)) \cap (d, b)$ a ukázat, že $c \in M$, což by znamenalo spor s definicí $d = \sup M$. To znamená, že platí $d = \sup M = b$ a důkaz je proveden. $\square$

Nebude-li uvedeno jinak, bude mít v následujícím textu symbol integrálu vždy smysl KS-integrálu.

Důkazy tvrzení uvedených v této kapitole byly jednak převzaty z monografické publikace [8], jednak jsou modifikacemi důkazů analogických tvrzení pro speciální případ $g(x) \equiv x$ ze Schwabikovy monografie [9].

5.4 . Poznámka. Jsou-li δ a $\delta_0 \in \mathscr{G}$ kalibry na intervalu $[a, b]$, pro které je $\delta(x) \le \delta_0(x)$ na $[a, b]$, pak každé rozšířené dělení intervalu $[a, b]$, které je δ–jemné je také δ_0–jemné, tj. platí $\mathscr{A}(\delta) \subset \mathscr{A}(\delta_0)$. Platí-li tedy nějaká vlastnost pro všechna $(D, \xi) \in \mathscr{A}(\delta_0)$ tím spíše platí i pro všechna $(D, \xi) \in \mathscr{A}(\delta)$. Speciálně, je-li δ_0 libovolný kalibr na intervalu $[a, b]$, stačí v Definici 5.2 požadovat existenci kalibru δ_ε, pro který kromě vlastností v definici požadovaných platí navíc i $\delta_\varepsilon(x) \le \delta_0(x)$ na $[a, b]$.

Pro existenci KS-integrálu platí podmínka Bolzanova-Cauchyova typu:

5.5 . Věta (Bolzanova-Cauchyova podmínka). *Nechť $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Potom integrál $\int_a^b f \, \mathrm{d}[g]$ existuje právě tehdy, když je splněna následující podmínka:*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon \in \mathscr{G} : \Big((D, \xi), (D', \xi') \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon) \Big) \implies \Big| S(D, \xi) - S(D', \xi') \Big| < \varepsilon. \tag{5.2}$$

D ů k a z . a) Existuje-li integrál $\int_a^b f \, \mathrm{d}[g] = I \in \mathbb{R}$, pak podle Definice 5.2 pro každé $\varepsilon > 0$ existuje kalibr $\delta_\varepsilon \in \mathscr{G}$ takový, že je $|S(D, \xi) - I| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro všechna $(D, \xi) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$. Pro všechny dvojice (D, ξ), $(D', \xi') \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ tedy máme

$$|S(D, \xi) - S(D', \xi')| \le |S(D, \xi) - I| + |S(D', \xi') - I| < \varepsilon,$$

tj. je splněna (B-C) podmínka (5.2).

b) Předpokládejme nyní, že je splněna (B-C) podmínka (5.2). Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Podle (5.2) můžeme zvolit kalibr δ_ε tak, aby

$$|S(D, \xi) - S(D', \xi')| < \frac{\varepsilon}{2}$$

platilo pro všechna (D, ξ), $(D', \xi') \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$. Označme nyní

$$M = \{ m \in \mathbb{R} : \exists \, \delta_m \in \mathscr{G} \text{ takové, že } \ (D, \xi) \in \mathscr{A}(\delta_m) \implies S(D, \xi) \ge m \}$$

Zvolíme-li libovolně $(D_0, \xi_0) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$, bude pro každé $(D, \xi) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ platit

$$S(D_0, \xi_0) - \frac{\varepsilon}{2} < S(D, \xi) < S(D_0, \xi_0) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.3}$$

Odtud plyne, že $(-\infty, S(D_0,\xi_0) - \frac{\varepsilon}{2}) \subset M$, a tudíž množina M není prázdná. Dále, pro každé $m \in M$ a každé $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\widetilde{\delta}_m)$, kde

$$\widetilde{\delta}_m(x) = \min\{\delta_m(x), \delta_\varepsilon(x)\} \quad \text{na } [a,b],$$

máme také $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ a tudíž

$$m \le S(D,\xi) < S(D_0,\xi_0) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{tj.} \quad M \subset (-\infty, S(D_0,\xi_0) + \frac{\varepsilon}{2}).$$

To ale znamená, že množina M je shora ohraničená, tj. $\sup M < \infty$, a platí

$$S(D_0,\xi_0) - \frac{\varepsilon}{2} \le \sup M \le S(D_0,\xi_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Toto spolu s nerovností (5.3) implikuje, že platí

$$|S(D,\xi) - \sup M| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } (D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$$

neboli

$$\sup M = \int_a^b f \,\mathrm{d}[g]. \qquad \square$$

KS-integrál má obvyklé lineární vlastnosti:

5.6. Věta. *Nechť* $f,\ f_1,\ f_2,\ g,\ g_1,\ g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$, *a nechť existují integrály:*

$$\int_a^b f_1 \,\mathrm{d}[g], \quad \int_a^b f_2 \,\mathrm{d}[g], \quad \int_a^b f \,\mathrm{d}[g_1] \quad a \quad \int_a^b f \,\mathrm{d}[g_2].$$

Potom pro libovolná $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *platí*

$$\int_a^b (c_1\, f_1 + c_2\, f_2) \,\mathrm{d}[g] = c_1 \int_a^b f_1 \,\mathrm{d}[g] + c_2 \int_a^b f_2 \,\mathrm{d}[g],$$

a

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}[c_1\, g_1 + c_2\, g_2] = c_1 \int_a^b f \,\mathrm{d}[g_1] + c_2 \int_a^b f \,\mathrm{d}[g_2].$$

D ů k a z . Ukažme si např. důkaz prvního tvrzení: Buď dáno $\varepsilon > 0$. Podle předpokladu existují kalibry $\delta_1 \in \mathscr{G}$ a $\delta_2 \in \mathscr{G}$ takové, že platí

$$(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta_i) \implies |S_{f_i\Delta g}(D,\xi)] - \int_a^b f_i \,\mathrm{d}[g]| < \varepsilon \quad \text{pro} \quad i = 1,2.$$

Pro $x \in [a,b]$ položme $\delta_\varepsilon(x) = \min\{\delta_1(x), \delta_2(x)\}$. Označme $h = c_1\, f_1 + c_2\, f_2$. Protože pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ platí

$$\begin{aligned} S_{h\Delta g}(D,\xi) &= \sum_{j=1}^{\nu(D)} (c_1\, f_1(\xi_j) + c_2\, f_2(\xi_j))\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] \\ &= c_1\, S_{f_1\Delta g}(D,\xi) + c_2\, S_{f_2\Delta g}(D,\xi), \end{aligned}$$

dostáváme

$$
\begin{aligned}
&\Big|S_{h\Delta g}(D,\xi) - c_1 \int_a^b f_1 \,\mathrm{d}[g] + c_2 \int_a^b f_2 \,\mathrm{d}[g]\Big| \\
&\qquad \le |c_1|\,\Big|S_{f_1\Delta g}(D,\xi) - \int_a^b f_1 \,\mathrm{d}[g]\Big| + |c_2|\,\Big|S_{f_2\Delta g}(D,\xi) - \int_a^b f_2 \,\mathrm{d}[g]\Big| \\
&\qquad < (|c_1| + |c_2|)\,\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Odtud už ovšem naše tvrzení bezprostředně plyne.

Druhé tvrzení věty by se dokazovalo obdobně a důkaz lze ponechat čtenáři jako cvičení. □

5.7 . Věta. *Jestliže existuje integrál* $\int_a^b f \,\mathrm{d}[g]$ *a jestliže* $[c,d] \subset [a,b]$, *pak existuje také integrál* $\int_c^d f \,\mathrm{d}[g]$.

D ů k a z . Předpokládejme, že je $a < c < d < b$. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Podle (B-C) podmínky (viz Věta 5.5) můžeme zvolit kalibr $\delta_\varepsilon \in \mathscr{G}$ tak, aby platilo

$$
|S(\widetilde{D},\widetilde{\xi}) - S(\widetilde{D}',\widetilde{\xi}')| < \varepsilon \tag{5.4}
$$

pro všechna δ_ε–jemná rozšířená dělení $(\widetilde{D},\widetilde{\xi})$ a $(\widetilde{D}',\widetilde{\xi}')$ intervalu $[a,b]$. Mějme nyní libovolnou dvojici (D,ξ), $(D',\xi') \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon;[c,d])$. Dále, zvolme libovolně $(D^-,\xi^-) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon;[a,c])$, $(D^+,\xi^+) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon;[d,b])$ a doplňme jimi (D,ξ) a (D',ξ') na rozšířená dělení intervalu $[a,b]$, tj. položme

$$
\widetilde{D} = D^- \cup D \cup D^+, \quad \widetilde{\xi} = (\xi^-,\xi,\xi^+),
$$

a

$$
\widetilde{D}' = D^- \cup D' \cup D^+, \quad \widetilde{\xi}' = (\xi^-,\xi',\xi^+).
$$

Zřejmě je $(\widetilde{D},\widetilde{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon;[a,b])$ a $(\widetilde{D}',\widetilde{\xi}') \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon;[a,b])$ a vzhledem k (5.4) platí

$$
|S(D,\xi) - S(D',\xi')| = |S(\widetilde{D},\widetilde{\xi}) - S(\widetilde{D}',\widetilde{\xi}')| < \varepsilon.
$$

Odtud, vzhledem ke Větě 5.5, již existence integrálu $\int_c^d f \,\mathrm{d}[g]$ bezprostředně plyne. Modifikace důkazu pro případ, že $c = a$ resp. $d = b$ je zřejmá. □

5.8. Věta. *Nechť* $f,g\colon[a,b] \to \mathbb{R}$ *a* $c \in [a,b]$. *Integrál* $\int_a^b f \,\mathrm{d}[g]$ *existuje právě tehdy když existují oba integrály* $\int_a^c f \,\mathrm{d}[g]$ *a* $\int_c^b f \,\mathrm{d}[g]$. *Potom navíc platí také rovnost*

$$
\int_a^b f \,\mathrm{d}[g] = \int_a^c f \,\mathrm{d}[g] + \int_c^b f \,\mathrm{d}[g].
$$

D ů k a z . a) Existuje-li integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$, pak podle Věty 5.7 existují také oba integrály $\int_a^c f\,\mathrm{d}[g]$ a $\int_c^b f\,\mathrm{d}[g]$.

b) Nechť

$$\int_a^c f\,\mathrm{d}[g] = I_1 \quad \text{a} \quad \int_c^b f\,\mathrm{d}[g] = I_2.$$

Budiž dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme kalibry $\delta'_\varepsilon \in \mathscr{G}[a,c]$ a $\delta''_\varepsilon \in \mathscr{G}[c,b]$ tak, aby pro všechna $(D',\xi') \in \mathscr{A}(\delta'_\varepsilon;[a,c])$ a $(D'',\xi'') \in \mathscr{A}(\delta''_\varepsilon;[c,b])$ platilo

$$|S(D',\xi') - I_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad |S(D'',\xi'') - I_2| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.5}$$

Definujme nyní kalibr δ_ε na $[a,b]$ předpisem

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \min\left\{\delta'_\varepsilon(x), \frac{1}{4}(c-x)\right\} & \text{když } x \in [a,c), \\ \min\left\{\delta'_\varepsilon(c), \delta''_\varepsilon(c)\right\} & \text{když } x = c, \\ \min\left\{\delta''_\varepsilon(x), \frac{1}{4}(x-c)\right\} & \text{když } x \in (c,b]. \end{cases}$$

Potom,

$$x + \delta(x) \le x + \frac{1}{4}(c-x) < c \quad \text{je-li } x < c,$$

a

$$x - \delta(x) \ge x - \frac{1}{4}(c-x) > c \quad \text{je-li } x > c.$$

Pro žádné $x \neq c$ tedy nemůže platit $|c-x| < \delta(x)$. T.zn., že pro každé δ_ε–jemné rozšířené dělení (D,ξ) intervalu $[a,b]$ musí existovat index $k \in \{1,2,\dots,\nu(D)\}$ takový, že $\xi_k = c$. Navíc, bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že platí

$$\alpha_{k-1} < \alpha_k = \xi_k = \xi_{k+1} = c < \alpha_{k+1}.$$

(Kdyby bylo $\alpha_{k-1} < c = \xi_k < \alpha_k$, upravili bychom příslušný člen v součtu $S(D,\xi)$ následujícím způsobem :

$$f(c)\,[g(\alpha_k) - g(\alpha_{k-1})] = f(c)\,[g(\alpha_k) - g(c)] + f(c)\,[g(c) - g(\alpha_{k-1})].)$$

To znamená, že každé rozšířené dělení $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon;[a,b])$ intervalu $[a,b]$ můžeme rozdělit : $D = D' \cup D''$, $\xi = (\xi',\xi'')$ tak, že bude

$$(D',\xi') \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon;[a,c]) \subset \mathscr{A}(\delta'_\varepsilon;[a,c]), \quad (D'',\xi'') \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon;[c,b]) \subset \mathscr{A}(\delta''_\varepsilon;[c,b])$$

a

$$S(D,\xi) = S(D',\xi') + S(D'',\xi'').$$

Tudíž, vzhledem k (5.5),

$$\begin{aligned}|S(D,\xi)-(I_1+I_2)| &= |S(D',\xi')+S(D'',\xi'')-(I_1+I_2)|\\ &\le |S(D',\xi')-I_1|+|S(D'',\xi'')-I_2|<\varepsilon,\end{aligned}$$

tj. $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]=I_1+I_2$. □

5.9 . Poznámka (Srovnání s normovým RS-integrálem)**.** Jestliže existuje normový RS-integrál $(\mathrm{n})\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$, pak také existuje KS-integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ a má tutéž hodnotu. Je-li totiž $(\mathrm{n})\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]=I\in\mathbb{R}$, pak pro každé $\varepsilon>0$ existuje $\Delta_\varepsilon>0$ takové, že $|S(D,\xi)-I|<\varepsilon$ platí pro všechna rozšířená dělení (D,ξ) intervalu $[a,b]$ taková, že $|D|<\Delta_\varepsilon$. Definujeme-li pak $\delta_\varepsilon(x)\equiv\Delta_\varepsilon$, získáme evidentně kalibr s vlastnostmi zaručujícími existenci příslušného KS-integrálu $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]=I$.

Na druhou stranu, jestliže existuje KS-integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]=I$, přičemž pro každé $\varepsilon>0$ lze najít kalibr $\delta_\varepsilon\in\mathscr{G}[a,b]$ takový, že platí $\inf\{\delta_\varepsilon(x)\,;x\in[a,b]\}>0$ a

$$|S(D,\xi)-I|<\varepsilon\quad\text{pro každé } (D,\xi)\in\mathscr{A}(\delta),$$

pak existuje také $(\mathrm{n})\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ a platí rovnost $(\mathrm{n})\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]=I$. Položíme-li totiž pro dané $\varepsilon>0$ $\Delta_\varepsilon=\inf\{\delta_\varepsilon(x)\,;x\in[a,b]\}$, bude platit také

$$|S(D,\xi)-I|<\varepsilon\quad\text{pro každé } (D,\xi)\in\mathscr{P}([a,b])\quad\text{takové, že}\ \ |D|<\Delta_\varepsilon.$$

Následující věta popisuje vztah (σ)RS-integrálu a KS-integrálu.

5.10 . Věta. *Jestliže existuje* (σ)RS-*integrál* $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$, *pak existuje také* KS-*integrál* $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ *a platí*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]=(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g].$$

D ů k a z . Označme $I=(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$. Buď dáno libovolné $\varepsilon>0$. Z předpokladu o existenci (σ)RS-integrálu plyne, že existuje dělení $D_\varepsilon=\{s_0,s_1,\dots,s_m\}\in\mathscr{D}[a,b]$ takové, že pro každé rozšířené dělení $(D,\xi)\in\mathscr{P}[a,b]$, kde D je zjemněním D_ε platí (5.1). Položme nyní

$$\delta_\varepsilon(x)=\begin{cases}\frac14\min\{|x-s_j|;j=0,1,\dots,m\} & \text{když}\ \ x\notin D_\varepsilon\,,\\[2ex] 1 & \text{když}\ \ x\in D_\varepsilon.\end{cases}$$

Potom $(D,\xi)\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ pouze tehdy, když

$$D_\varepsilon\subset\{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_{\nu(D)}\}. \tag{5.6}$$

Navíc máme ještě

$$S(D,\xi) = \sum_{j=1}^{\nu(D)} \Big[f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\xi_j)] + f(\xi_j)\,[g(\xi_j) - g(\alpha_{j-1})] \Big] = S(D',\xi'), \tag{5.7}$$

kde $D' = \{\alpha_0, \xi_1, \alpha_1, \xi_2, \dots, \xi_{\nu(D)}, \alpha_{\nu(D)}\}$ a $\xi' = (\xi_1, \xi_1, \xi_2, \xi_2, \dots, \xi_{\nu(D)}, \xi_{\nu(D)})^{\mathrm{T}}$. Podle (5.6) je

$$D_\varepsilon \subset \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{\nu(D)}\} \subset D'$$

a vzhledem k (5.7) odtud plyne

$$|S(D,\xi) - I| = |S(D',\xi') - I| < \varepsilon, \quad \text{t.j.} \quad \int_a^b f\,\mathrm{d}[g] = I.$$

$\square$

5.11 . Příklad. V případě $g(x) \equiv x$ budeme místo o KS-integrálu mluvit o K-integrálu (Kurzweilův integrál). K-integrál je zřejmě zobecněním klasického Riemannova integrálu.

(i) Nechť $f(x) = 0$ na $[a,b] \setminus W$, kde W je spočetná podmnožina $[a,b]$, $W = \{w_k\}_{k=1}^{\infty}$. Buď dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Definujme

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{když} \quad x \notin W, \\[2ex] \dfrac{\varepsilon}{2^{k+1}(1+|f(w_k)|)} & \text{když} \quad x = w_k \in W. \end{cases}$$

Pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b]$ se v příslušném integrálním součtu $S(D,\xi)$,

$$S(D,\xi) = \sum_{j=1}^{m} f(\xi_j)\,[\alpha_j - \alpha_{j-1}],$$

uplatní pouze takové sčítance, pro které existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že platí $\xi_j = w_k \in W$. Pro každé δ_ε–jemné rozšířené dělení (D,ξ) intervalu $[a,b]$, (tj. $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$, kde $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \in \mathscr{D}[a,b]$ a $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m$) a každý takový index j ovšem musí platit

$$\alpha_j - \alpha_{j-1} \le \frac{\varepsilon}{2^k(1+|f(w_k)|)}$$

a tudíž je

$$|S(D,\xi)| \le \sum_{k=1}^{\infty} |f(w_k)|\,|\frac{\varepsilon}{2^k(1+|f(w_k)|)} \le \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \varepsilon.$$

Podle Definice 5.2 je tedy $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

(ii) Nechť existuje Newtonův integrál $(\mathrm{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, kde funkce F je spojitá na $[a,b]$ a platí

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pro každé } x \in (a,b), \quad F'(a+) = f(a), \quad F'(b-) = f(b).$$

Ukážeme, že pak existuje také K-integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a rovná se také $F(b) - F(a)$.

Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Pro každé $\xi \in [a,b]$ zvolme $\delta_\varepsilon(\xi) > 0$ tak, aby platilo

$$|F(x) - F(\xi) - f(\xi)(x-\xi)| < \frac{\varepsilon}{b-a}\,|x-\xi|$$
$$\text{pro všechna } x \in [a,b] \cap (\xi - \delta_\varepsilon(\xi), \xi + \delta_\varepsilon(\xi)).$$

Pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ ($D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m$) a každé $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ tedy platí

$$\begin{aligned}
&|F(\alpha_j) - F(\alpha_{j-1}) - f(\xi_j)\,[\alpha_j - \alpha_{j-1}]| \\
&\quad \le |F(\alpha_j) - F(\xi_j) - f(\xi_j)\,[\alpha_j - \xi_j]| + |F(\xi_j) - F(\alpha_{j-1}) - f(\xi_j)\,[\xi_j - \alpha_{j-1}]| \\
&\quad \le \frac{\varepsilon}{b-a}\,(|\alpha_j - \xi_j| + |\xi_j - \alpha_{j-1}|) = \frac{\varepsilon}{b-a}\,[\alpha_j - \alpha_{j-1}]
\end{aligned}$$

a tudíž

$$\begin{aligned}
|S(D,\xi) - [F(b) - F(a)]| &= \Big|\sum_{j=1}^m (F(\alpha_j) - F(\alpha_{j-1}) - f(\xi_j)\,[\alpha_j - \alpha_{j-1}])\Big| \\
&\le \sum_{j=1}^m |F(\alpha_j) - F(\alpha_{j-1}) - f(\xi_j)\,[\alpha_j - \alpha_{j-1})| \le \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{j=1}^m [\alpha_j - \alpha_{j-1}] = \varepsilon,
\end{aligned}$$

tj.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Platí dokonce, že K-integrál je ekvivalentní s Perronovým integrálem. Zahrnuje tedy současně integrály nejen Riemannův či Newtonův, ale i Lebesgueův. Tím se rozumí, že je-li na nějakém intervalu daná funkce integrovatelná ve smyslu Lebesgueově, pak má na tomto intervalu i K-intergrál a oba integrály jsou si rovny. Navíc, má-li funkce f K-integrál, pak f je Lebesgueovsky integrovatelná právě tehdy když také její absolutní hodnota $|f|$ má K-integrál.

Ukážeme si nyní, jak lze v některých jednoduchých příkladech určit hodnotu integrálu přímo z definice.

5.12 . Příklady.

(i) Z Definice 5.2 je zřejmé, že je-li $f(t) \equiv f(a)$ na $[a,b]$, pak

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] = f(a)\,[g(b)-g(a)] \quad \text{a} \quad \int_a^b g\,\mathrm{d}[f] = 0$$

pro každou funkci $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

(ii) Pro libovolnou funkci $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ platí

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[\chi_{(\tau,b]}] = f(\tau) \qquad \text{pro} \;\; \tau \in [a,b), \tag{5.8}$$

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[\chi_{[\tau,b]}] = f(\tau) \qquad \text{pro} \;\; \tau \in (a,b), \tag{5.9}$$

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[\chi_{[a,\tau]}] = -f(\tau) \quad \text{pro} \;\; \tau \in (a,b), \tag{5.10}$$

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[\chi_{[a,\tau)}] = -f(\tau) \quad \text{pro} \;\; \tau \in (a,b], \tag{5.11}$$

a

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[\chi_{[\tau]}] = \begin{cases} -f(a) & \text{když} \;\; \tau = a, \\ 0 & \text{když} \;\; \tau \in (a,b), \\ f(b) & \text{když} \;\; \tau = b. \end{cases} \tag{5.12}$$

Ukažme si odvození vztahů (5.8) a (5.9). Všechny ostatní se z nich už snadno odvodí použitím Věty 5.8. Nechť $g(x) = \chi_{(\tau,b]}(x)$ na $[a,b]$. Potom je

$$\int_a^\tau f\,\mathrm{d}[g] = 0.$$

Dále, položme

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{když} \;\; x = \tau, \\ \frac{1}{4}(x-\tau) & \text{když} \;\; x \in (\tau,b]. \end{cases}$$

Pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta;[\tau,b])$ $(D = \{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_m\}$, $\xi = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_m))$ pak platí $\tau = \alpha_0 = \xi_1$, $g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1} = 0$ pro $j = 2,3,\ldots,m$. Tudíž

$$S(D,\xi) = f(\tau)\,[g(\alpha_1) - g(\tau)] = f(\tau)$$

a

$$\int_\tau^b f\,\mathrm{d}[g] = f(\tau).$$

Důkaz vztahu (5.8) teď už snadno dokončíme použitím Věty 5.8.

Vztah (5.9) se dokazuje podobně. Tentokrát ovšem máme $g(x) = \chi_{[\tau,b]}(x)$ na $[a,b]$, $\int_\tau^b f\,\mathrm{d}[g] = 0$ a položíme

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{když} \;\; x = \tau, \\ \frac{1}{4}(\tau - x) & \text{když} \;\; x \in [a,\tau). \end{cases}$$

Pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta;[a,\tau])$ pak máme $\alpha_m = \xi_m = \tau$ a tedy

$$S(D,\xi) = f(\tau)\,[g(\tau) - g(\alpha_{m-1})] = f(\tau) \quad \text{a} \quad \int_a^\tau f\,\mathrm{d}[g] = f(\tau).$$

(iii) Pro libovolnou funkci $g \in \mathbb{G}[a,b]$ platí

$$\int_a^b \chi_{(\tau,b]}\,\mathrm{d}[g] = g(b) - g(\tau+) \quad \text{pro} \;\; \tau \in [a,b), \tag{5.13}$$

$$\int_a^b \chi_{[\tau,b]}\,\mathrm{d}[g] = g(b) - g(\tau-) \quad \text{pro} \;\; \tau \in (a,b), \tag{5.14}$$

$$\int_a^b \chi_{[a,\tau]}\,\mathrm{d}[g] = g(\tau+) - g(a) \quad \text{pro} \;\; \tau \in (a,b), \tag{5.15}$$

$$\int_a^b \chi_{[a,\tau)}\,\mathrm{d}[g] = g(\tau-) - g(a) \quad \text{pro} \;\; \tau \in (a,b] \tag{5.16}$$

a

$$\int_a^b \chi_{[\tau]}\,\mathrm{d}[g] = \begin{cases} g(a+) - g(a) & \text{když} \;\; \tau = a, \\ g(\tau+) - g(\tau-) & \text{když} \;\; \tau \in (a,b), \\ g(b) - g(b-) & \text{když} \;\; \tau = b. \end{cases} \tag{5.17}$$

Opět provedeme důkaz pouze prvních dvou z uvedených vztahů. Nechť tedy $f(x) = \chi_{(\tau,b]}(x)$ na $[a,b]$. Potom je

$$\int_a^\tau f\,\mathrm{d}[g] = 0.$$

Buď dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme nyní $\eta > 0$ tak, aby platilo $|g(\tau+) - g(x)| < \varepsilon$ pro každé $x \in (\tau, \tau + \eta)$ a definujme

$$\delta(x) = \begin{cases} \eta & \text{když } \; x = \tau \\ \frac{1}{4}(x - \tau) & \text{když } \; x \in (\tau, b]. \end{cases}$$

Pro každé $(D, \xi) \in \mathscr{A}(\delta; [\tau, b])$ musí platit $\tau = \alpha_0 = \xi_1$ a tedy

$$\begin{aligned} &|S(D,\xi) - [g(b) - g(\tau+)]| \\ &\quad = |[g(b) - g(\alpha_{m-1})] + [g(\alpha_{m-1}) - g(\alpha_{m-2}] \\ &\qquad + \cdots + [g(\alpha_2) - g(\alpha_1)] - [g(b) - g(\tau+)]| \\ &\quad = |g(\tau+) - g(\alpha_1)|. \end{aligned}$$

Protože $\tau < \alpha_1 < \tau + \delta(\tau) = \tau + \eta$, plyne odtud a z definice η, že

$$|S(D,\xi) - [g(b) - g(\tau+)]| < \varepsilon \quad \text{pro každé } \; (D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta; [\tau, b]).$$

Tudíž

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}[g] = \int_a^\tau f \,\mathrm{d}[g] + \int_\tau^b f \,\mathrm{d}[g] = g(b) - g(\tau+),$$

tj. platí (5.13).

V druhém případě, $f(x) = \chi_{[\tau,b]}(x)$ na $[a, b]$, máme

$$\int_\tau^b f \,\mathrm{d}[g] = g(b) - g(\tau).$$

Zvolme $\eta > 0$ tak, aby platilo $|g(\tau-) - g(x)| < \varepsilon$ pro každé $x \in (\tau - \eta, \tau)$, a definujme

$$\delta(x) = \begin{cases} \eta & \text{když } \; x = \tau, \\ \frac{1}{4}(\tau - x) & \text{když } \; x \in [a, \tau). \end{cases}$$

Tím si opět vynutíme, že pro každé $(D, \xi) \in \mathscr{A}(\delta; [a, \tau])$ musí být $\tau = \alpha_m = \xi_m$ a tudíž

$$S(D,\xi) = [g(\tau) - g(\alpha_{m-1})],$$

kde $\alpha_{m-1} \in (\tau - \eta, \tau)$. Jako v předchozím případě, odtud plyne, že platí

$$\int_a^\tau f \,\mathrm{d}[g] = g(\tau) - g(\tau-), \text{tj. } \int_a^b f \,\mathrm{d}[g] = \int_a^\tau f \,\mathrm{d}[g] + \int_\tau^b f \,\mathrm{d}[g] = g(b) - g(\tau-).$$

Výše uvedené příklady můžeme podle Cvičení 1.19 (i) shrnout do následujícího tvrzení:

5.13. Důsledek. *Jestliže* $g\in\mathbb{G}[a,b]$ *a* $f\in\mathbb{S}[a,b]$, *pak oba integrály*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] \quad a \quad \int_a^b g\,\mathrm{d}[f]$$

existují.

Následující věta poskytuje základní odhad pro integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ za předpokladu, že $\operatorname{var}_a^b g<\infty$. Na funkci f přitom žádné zásadní omezení neklademe.

5.14. Věta. *Jestliže* $g\in\mathbb{BV}[a,b]$ *a* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *je taková, že integrály*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] \quad a \quad \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}[\operatorname{var}_a^x g]$$

existují, pak platí

$$\Big|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}[g(x)]\Big| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}[\operatorname{var}_a^x g] \le \|f\|\operatorname{var}_a^b g. \tag{5.18}$$

D ů k a z . Pro každé rozšířené dělení (D,ξ) intervalu $[a,b]$ platí

$$\begin{aligned}|S(D,\xi)| &\le \sum_{j=1}^{\nu(D)} |f(\xi_j)|\,|g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})|\\ &\le \sum_{j=1}^{\nu(D)} |f(\xi_j)|\operatorname{var}_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} g \le \|f\|\operatorname{var}_a^b g.\end{aligned}$$

□

Další věta poskytuje nejjednodušší konvergenční tvrzení:

5.15. Věta. *Nechť* $g\in\mathbb{BV}[a,b]$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *je funkce ohraničená na* $[a,b]$ *a* $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ *je posloupnost funkcí definovaných na intervalu* $[a,b]$ *taková, že platí*

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0 \tag{5.19}$$

a existují všechny integrály $\int_a^b f_n\,\mathrm{d}[g]$, $n\in N$. *Potom existuje také integrál* $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ *a platí*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,\mathrm{d}[g]=\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]. \tag{5.20}$$

D ů k a z . a) Protože f je ohraničená, z předpokladu (5.19) plyne, že existuje $n_0 \in N$ takové, že platí

$$\|f_n\| \leq \|f\| + 1 < \infty \quad \text{pro všechna } n \geq n_0.$$

Podle Věty 5.14 tedy máme

$$\Big| \int_a^b f_n \, \mathrm{d}[g] \Big| \leq (\|f\| + 1) \operatorname{var}_a^b < \infty \quad \text{pro všechna } n \geq n_0$$

a podle Bolzanovy-Weierstraßovy věty tedy existuje podposloupnost $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ v $\mathbb{N}$ a $I \in \mathbb{R}$ takové, že platí $n_1 \geq n_0$ a

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_{n_k} \, \mathrm{d}[g] = I. \tag{5.21}$$

Označme

$$\begin{cases} I_k : = \displaystyle\int_a^b f_{n_k} \, \mathrm{d}[g] & \text{pro } k \in N, \\ S_k(D,\xi) : = S_{f_{n_k}\Delta g}(D,\xi) & \text{pro } \; k \in N, \ (D,\xi) \in \mathscr{D}[a,b], \\ S(D,\xi) : = S_{f\Delta g}(D,\xi), & \text{pro } \; (D,\xi) \in \mathscr{D}[a,b]. \end{cases} \tag{5.22}$$

b) Buď dáno $\varepsilon > 0$. Vzhledem k (5.19) a (5.21) můžeme zvolit $k_0 \in N$ tak, že platí

$$|I_k - I| < \varepsilon \quad \text{a} \qquad \|f_{n_k} - f\| < \varepsilon \quad \text{pro } \; k \geq k_0.$$

Potom bude také

$$|S(D,\xi) - S_{k_0}(D,\xi)| < \varepsilon \operatorname{var}_a^b g \quad \text{pro všechna } \; (D,\xi) \in \mathscr{P}[a,b].$$

Dále, nechť $\delta_0 \in \mathscr{G}[a,b]$ je kalibr na $[a,b]$ takový, že pro všechna δ_0-jemná rozšířená dělení (D,ξ) intervalu $[a,b]$ platí

$$|S_{k_0}(D,\xi)] - I_{k_0}| < \varepsilon.$$

Pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta_0)$ tedy máme

$$|S(D,\xi) - I| \leq |S(D,\xi) - S_{k_0}(D,\xi)| + |S_{k_0}(D,\xi) - I_{k_0}| + |I_{k_0} - I| < \varepsilon \,(\operatorname{var}_a^b g + 2).$$

Odtud

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}[g] = I = \lim_{k\to\infty} \int_a^b f_{n_k} \, \mathrm{d}[g].$$

c) Konečně, opětným použitím Věty 5.14,

$$\Big| \int_a^b f_n \, \mathrm{d}[g] - \int_a^b f \, \mathrm{d}[g] \Big| \leq \|f_n - f\| \operatorname{var}_a^b g \quad \text{pro každé } \; n \in N.$$

Platí tedy i (5.20). □

Nyní můžeme formulovat první významnější existenční výsledek:

5.16. Věta. *Nechť* $f \in \mathbb{G}[a,b]$ *a* $g \in \mathbb{BV}[a,b]$. *Potom* $\int_a^b f\, \mathrm{d}[g]$ *existuje.*

D ů k a z . Podle Věty 3.6 (ii) existuje posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konečných skokových funkcí, která konverguje stejnoměrně na $[a,b]$ k funkci f. Podle Věty 5.6 a Příkladů 5.12(iii) integrál $\int_a^b f_n\, \mathrm{d}[g]$ existuje pro každé $n \in N$. To znamená, že podle Věty 5.15 existuje také integrál $\int_a^b f\, \mathrm{d}[g]$ a platí (5.20). □

Následující konvergenční výsledek je tak trochu symetrický k Větě 5.15.

5.17. Věta. *Nechť* $g \in \mathbb{BV}[a,b]$, $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ *je funkce ohraničená na* $[a,b]$ *a* $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost funkcí definovaných na intervalu* $[a,b]$ *taková, že platí*

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{var}_a^b (g_n - g) = 0$$

a existují všechny integrály $\int_a^b f\, \mathrm{d}[g_n]$, $n \in N$. *Potom existuje také integrál* $\int_a^b f\, \mathrm{d}[g]$ *a platí*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f\, \mathrm{d}[g_n] = \int_a^b f\, \mathrm{d}[g]. \tag{5.23}$$

D ů k a z . Zaveďme opět značení (5.22). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat

$$g_n(a) = g(a) = 0 \quad \text{pro všechna } n \in N.$$

Dále je důkaz podobný důkazu Věty 5.15. Existuje $n_0 \in N$ takové, že platí

$$\operatorname{var}_a^b g_n \le \operatorname{var}_a^b g + 1 \quad \text{pro všechna } n \ge n_0.$$

Podle Věty 5.14 tedy máme

$$\Big| \int_a^b f\, \mathrm{d}[g_n] \Big| \le \|f\|\, (\operatorname{var}_a^b g + 1) \quad \text{pro všechna } n \ge n_0$$

a podle Bolzanovy-Weierstraßovy věty tedy existuje podposloupnost $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ v $\mathbb{N}$ a $I \in \mathbb{R}$ takové, že platí $n_1 \ge n_0$ a

$$\lim_{k\to\infty} I_k = \lim_{k\to\infty} \int_a^b f\, \mathrm{d}[g_{n_k}] = I.$$

Použijeme značení analogické značení zavedenému v (5.22). Buď dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme $k_0 \in N$ tak, aby platilo

$$|I_k - I| < \varepsilon \quad \text{a} \quad \operatorname{var}_a^b (g_{n_k} - g) < \varepsilon \quad \text{pro } k \ge k_0.$$

Dále, nechť $\delta_0 \in \mathscr{G}[a,b]$ je kalibr na $[a,b]$ takový, že pro všechna δ_0–jemná rozšířená dělení (D,ξ) intervalu $[a,b]$ platí

$$|S_{k_0}(D,\xi)] - I_{k_0}| < \varepsilon.$$

Pro každé $(D,\xi)\in\mathscr{A}(\delta_0)$ tedy máme

$$|S(D,\xi)-I|\le|S(D,\xi)-S_{k_0}(D,\xi)|+|S_{k_0}(D,\xi)-I_{k_0}|+|I_{k_0}-I|<\varepsilon\,(\|f\|+2).$$

Odtud

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]=I=\lim_{k\to\infty}\int_a^b f\,\mathrm{d}[g_{n_k}].$$

Konečně, opětným použitím Věty 5.14,

$$\Big|\int_a^b f\,\mathrm{d}[g_n]-\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]\Big|\le\|f\|\operatorname{var}_a^b(g_n-g)\quad\text{pro každé } n\in N.$$

Platí tedy (5.23). □

Podle Věty 5.16 integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ existuje pro všechny $f\in\mathbb{G}[a,b]$ a $g\in\mathbb{BV}[a,b]$. Chtěli bychom ukázat, že tento integrál vždy existuje i v symetrické situaci: $f\in\mathbb{BV}[a,b]$ a $g\in\mathbb{G}[a,b]$. Rozložíme-li funkci f na součet spojité části $f^{\,\mathrm{C}}$ a skokové části $f^{\,\mathrm{B}}$ (viz Lemma 1.22 a Definice 9.9) a vzpomeneme-li si na Lemma 1.25, podle kterého existuje posloupnost konečných skokových funkcí $f_n^{\mathrm{B}}\in\mathbb{S}[a,b]$ taková, že platí

$$\lim_{n\to\infty}\|f^{\,\mathrm{B}}-f_n^{\mathrm{B}}\|_{\mathbb{BV}}=0,$$

zjistíme, že ke svému cíli dospějeme, budeme-li umět dokázat existenci integrálu $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ pro každou funkci $f\in\mathbb{BV}\cap\mathbb{C}$ a každou $g\in\mathbb{G}[a,b]$ a budeme-li mít k dispozici konvergenční větu, ze které by plynulo, že platí

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n^{\mathrm{B}}\,\mathrm{d}[g]=\int_a^b f^{\,\mathrm{B}}\,\mathrm{d}[g]$$

pro každou funkci $g\in\mathbb{G}[a,b]$. (Věta 5.15 a ani Věta 5.17 takový výsledek nezahrnují.)

Tyto úkoly splníme v následujících třech krocích.

Nejprve dokážeme tvrzení zaručující existenci integrálu $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ za předpokladů zahrnujících i případ $f\in\mathbb{BV}\cap\mathbb{C}$, $g\in\mathbb{G}[a,b]$.

5.18. Lemma. *Jestliže funkce $f\in\mathbb{BV}[a,b]$ je spojitá na intervalu $[a,b]$, pak integrál $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ existuje pro každou funkci $g\in\mathbb{G}[a,b]$.*

D ů k a z . Nechť $f\in\mathbb{BV}[a,b]$, $g\in\mathbb{G}[a,b]$ a f je spojitá na intervalu $[a,b]$. Podle Vět 5.10, 3.6, 4.10 a 4.15 stačí ukázat existenci integrálu $(\sigma)\int_a^b g\,\mathrm{d}[f]$ pro každou konečnou skokovou funkci g (t.j. $g\in\mathbb{S}[a,b]$). Navíc, protože

$$\mathbb{S}[a,b]=\operatorname{Lin}\Big(\chi_{[a,\tau]},\chi_{[a,\tau)},\tau\in(a,b],\chi_{[a]}\Big).$$

(viz Poznámka 3.9 (i)), podle Cvičení 4.9 se můžeme omezit na případy

$$g = \chi_{[a,\tau]}, \quad g = \chi_{[a,\tau)}, \ \tau \in (a,b], \quad g = \chi_{[a]}.$$

a) Nechť tedy $\tau \in (a,b]$ a $g = \chi_{[a,\tau]}$. Zřejmě je

$$(\sigma) \int_a^\tau g \, \mathrm{d}[f] = f(\tau) - f(a).$$

Pro každé rozšířené dělení $(D,\xi) \in \mathscr{P}[\tau,b]$, $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ máme

$$S(D,\xi) = \begin{cases} 0 & \text{je-li } \xi_1 > \tau, \\ f(\alpha_1) - f(\tau) & \text{je-li } \xi_1 = \tau. \end{cases}$$

Díky spojitosti funkce f v bodě τ zprava můžeme tedy k danému $\varepsilon > 0$ vždy najít dělení D_ε takové, že bude

$$|S(D,\xi)| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } (D,\xi) \in \mathscr{P}[\tau,b] \quad \text{taková, že } D \supset D_\varepsilon,$$

tj.

$$(\sigma) \int_\tau^b \chi_{[a,\tau]} \, \mathrm{d}[f] = 0$$

a

$$(\sigma) \int_a^b \chi_{[a,\tau]} \, \mathrm{d}[f] = f(\tau) - f(a).$$

b) Nechť $\tau \in (a,b]$ a $g = \chi_{[a,\tau)}$. Potom

$$(\sigma) \int_\tau^b g \, \mathrm{d}[f] = 0.$$

Pro každé rozšířené dělení $(D,\xi) \in \mathscr{P}[a,\tau]$, $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ máme

$$S(D,\xi) = \begin{cases} 0 & \text{je-li } \xi_{m-1} < \tau, \\ f(\tau) - f(\alpha_{m-1}) & \text{je-li } \xi_m = \tau. \end{cases}$$

Díky spojitosti funkce f v bodě τ zleva můžeme tedy k danému $\varepsilon > 0$ vždy najít dělení D_ε takové, že bude

$$|S(D,\xi)| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } (D,\xi) \in \mathscr{P}[\tau,b] \quad \text{taková, že } D \supset D_\varepsilon,$$

tj.

$$(\sigma) \int_\tau^b \chi_{[a,\tau]} \, \mathrm{d}[f] = 0$$

a

$$(\sigma)\int_a^b \chi_{[a,\tau]}\,\mathrm{d}[f] = f(\tau) - f(a).$$

c) Podobně bychom ukázali, že

$$(\sigma)\int_a^b \chi_{[a]}\,\mathrm{d}[f] = 0. \qquad \square$$

5.19. Cvičení. Dokažte následující dvě jemné modifikace Lemmatu 5.18:

Jestliže $f\in\mathbb{BV}[a,b]$ je zleva spojitá na intervalu $(a,b]$, pak integrál $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ existuje pro každou funkci $g\in\mathbb{G}[a,b]$ zprava spojitou na intervalu $[a,b)$.

Jestliže $f\in\mathbb{BV}[a,b]$ je zprava spojitá na intervalu $[a,b)$, pak integrál $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ existuje pro každou funkci $g\in\mathbb{G}[a,b]$ zleva spojitou na intervalu $(a,b]$.

Následující věta poskytuje odhad symetrický k Větě 5.14.

5.20. Věta. *Nechť funkce g ohraničená na $[a,b]$ a $f\in\mathbb{BV}[a,b]$ jsou takové, že existuje integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$. Potom platí*

$$\Big|\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]\Big| \le (|f(a)| + |f(b)| + \operatorname{var}_a^b f)\,\|g\|. \tag{5.24}$$

D ů k a z . Pro libovolné $(D,\xi)\in\mathscr{P}[a,b]$, $D=\{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_m\}$, $\xi=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m)$, máme

$$\begin{aligned}
S(D,\xi) &= f(\xi_1)\,[g(\alpha_1)-g(a)] + f(\xi_2)\,[g(\alpha_2)-g(\alpha_1)] + \dots + f(\xi_m)\,[g(b)-g(\alpha_{m-1})]\\
&= f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a)\\
&\quad -[f(\xi_1)-f(a)]\,g(a) - [f(\xi_2)-f(\xi_1)]\,g(\alpha_1) - \dots - [f(b)-f(\xi_m)]\,g(b)\\
&= f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - \sum_{j=0}^{m}[f(\xi_{j+1})-f(\xi_j)]\,g(\alpha_j),
\end{aligned}$$

kde $\xi_0=a$ a $\xi_{m+1}=b$. Odtud plyne, že pro každé $(D,\xi)\in\mathscr{P}[a,b]$ platí

$$|S(D,\xi)| \le \Big(|f(a)| + |f(b)| + \sum_{j=0}^{m} |f(\xi_{j+1}) - f(\xi_j)|\Big)\,\|g\|,$$

neboli

$$|S(D,\xi)| \le (|f(a)| + |f(b)| + \operatorname{var}_a^b f)\,\|g\|$$

odkud už tvrzení Věty okamžitě plyne. $\square$

Nyní dokážeme konvergenční větu která zaručí, že bude platit

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n^{\mathrm{B}}\,\mathrm{d}[g] = \int_a^b f^{\mathrm{B}}\,\mathrm{d}[g].$$

5.21. Věta. *Nechť funkce g je ohraničená na $[a,b]$, $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ a nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{BV}[a,b]$ je posloupnost taková, že*

$$\int_a^b f_n \,\mathrm{d}[g] \quad \textit{existuje pro každé} \quad n \in N \quad \textit{a platí} \quad \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\mathbb{BV}} = 0.$$

Potom existuje také integrál $\int_a^b f \,\mathrm{d}[g]$ *a platí*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \,\mathrm{d}[g] = \int_a^b f \,\mathrm{d}[g].$$

D ů k a z . Podle Věty 5.20 platí

$$\Big|\int_a^b (f_n - f_m) \,\mathrm{d}[g]\Big| \le 2\,\|g\|\,\|f_n - f_m\|_{\mathbb{BV}} \quad \text{pro libovolná } m, n \in N.$$

Posloupnost $\left\{\int_a^b f_n \,\mathrm{d}[g]\right\}_{n=1}^{\infty}$ je tedy cauchyovská a existuje tudíž $I \in \mathbb{R}$ takové, že platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \,\mathrm{d}[g] = I.$$

Ukážeme, že $\int_a^b f \,\mathrm{d}[g] = I$. Budiž dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Zvolme $n_0 \in N$ tak, aby platilo

$$\Big|\int_a^b f_{n_0} \,\mathrm{d}[g] - I\Big| < \varepsilon \quad \text{a} \quad \|f_{n_0} - f\|_{\mathbb{BV}} < \varepsilon.$$

Dále, zvolme $\delta_\varepsilon \in \mathscr{G}$ tak, aby pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ platilo

$$\Big|S_{n_0}(D,\xi) - \int_a^b f_{n_0} \,\mathrm{d}[g]\Big| < \varepsilon,$$

kde značíme $S_{n_0}(D,\xi) = S_{f_{n_0}\Delta g}(D,\xi)$. Potom pro libovolné $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ máme

$$\begin{aligned}
&|S(D,\xi) - I| \\
&\quad \le |S(D,\xi) - S_{n_0}(D,\xi)| + \Big|S_{n_0}(D,\xi) - \int_a^b f_{n_0} \,\mathrm{d}[g]\Big| + \Big|\int_a^b f_{n_0} \,\mathrm{d}[g] - I\Big| \\
&\quad \le \varepsilon\,(\|g\| + 2)
\end{aligned}$$

odkud už snadno odvodíme, že platí

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}[g] = I = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \,\mathrm{d}[g].$$

□

Nyní už budeme umět dokázat kýžený existeční výsledek. Připomeňme ještě, že v následujících tvrzeních a jejich důkazech důsledně používáme konvenci z našich *Základních úmluv a označení* (viz (xiii)) pro funkce regulované na intervalu $[a,b]$ a klademe

$$g(a-)=g(a),\ g(b+)=g(b)$$
$$\text{(a tedy také } \Delta^- g(a)=\Delta^+ g(b)=0,\ \Delta g(a)=\Delta^+ g(a),\ \Delta g(b)=\Delta^- g(b))$$

pro každou funkci $g\in\mathbb{G}[a,b]$. V tomto smyslu je třeba i rozumět symbolům pro funkce $g(x-)$ resp. $g(x+)$ definované na $[a,b]$. Není těžké si rozmyslet, že např. pro $g\in\mathbb{G}[a,b]$ a $h(x)=g(x-)$ platí

$$h(x-)=h(x)=g(x),\quad h(x+)=g(x+)\quad \text{na } [a,b].$$

Analogicky, pro $g\in\mathbb{G}[a,b]$ a $h(x)=g(x+)$ máme

$$h(x+)=h(x)=g(x),\quad h(x-)=g(x-)\quad \text{na } [a,b].$$

5.22 . Věta. *Jestliže $f\in\mathbb{BV}[a,b]$ a $g\in\mathbb{G}[a,b]$, pak integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ existuje a platí* (5.24).

D ů k a z . Nechť $f\in\mathbb{BV}[a,b]$ a $g\in\mathbb{G}[a,b]$ a nechť $W=\{w_k\}_{k\in K}$ je množina bodů nespojitosti funkce f v $[a,b]$. ($K\subset\mathbb{N}$ může být případně i konečná množina.) Nechť $f=f^{\,\mathrm{C}}+f^{\,\mathrm{B}}$ je Jordanův rozklad funkce f na spojitou část $f^{\,\mathrm{C}}$ a skokovou část $f^{\,\mathrm{B}}$ definovanou jako v (1.7). Definujme

$$f_n^{\mathrm{B}}(x)=\sum_{k\in K\cap[1,n]}\Delta^- f(w_k)\chi_{(w_k,b]}(x)+\sum_{k\in K\cap[1,n]}\Delta^+ f(w_k)\chi_{[w_k,b]}(x)\quad \text{pro } n\in\mathbb{N} \text{ a } x\in[a,b].$$

Zřejmě $f_n^{\mathrm{B}}\in\mathbb{S}[a,b]$ pro každé $n\in\mathbb{N}$ a podle Lemmatu 1.25 platí

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n^{\mathrm{B}}-f^{\,\mathrm{B}}\|_{\mathbb{BV}}=\lim_{n\to\infty}\operatorname{var}_a^b(f^{\,\mathrm{B}}-f_n^{\mathrm{B}})=0.$$

Dále, podle Důsledku 5.13 integrál $\int_a^b f_n^{\mathrm{B}}\,\mathrm{d}[g]$ existuje pro každé $n\in\mathbb{N}$. Speciálně, integrál $\int_a^b f^{\,\mathrm{B}}\,\mathrm{d}[g]$ existuje je-li množina K konečná, tj. když f má jenom konečný počet bodů nespojitosti. Není-li K konečná, pak integrál $\int_a^b f^{\,\mathrm{B}}\,\mathrm{d}[g]$ existuje podle Věty 5.21. Protože integrál $\int_a^b f^{\,\mathrm{C}}\,\mathrm{d}[g]$ existuje podle Lemmatu 5.18, existence integrálu $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ nyní plyne z Věty 5.6. Konečně, podle Věty 5.20 platí také (5.24). □

Přímým důsledkem Věty 5.22 je následující konvergenční tvrzení:

5.23 . Důsledek. *Jestliže $g_n\in\mathbb{G}[a,b]$ pro $n\in\mathbb{N}$ a $g_n\rightrightarrows g$ na $[a,b]$ pro $n\to\infty$, pak pro každou funkci $f\in\mathbb{BV}[a,b]$ platí*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f\,\mathrm{d}[g_n]=\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]. \tag{5.25}$$

□

Následující tvrzení navazuje na důkaz Věty 5.22 a dává návod k výpočtu integrálu $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$, je-li znám integrál $\int_a^b f^{\,\mathrm{C}}\,\mathrm{d}[g]$, kde $f^{\,\mathrm{C}}$ značí spojitou část funkce f.

5.24 . Důsledek. *Jestliže $f\in BV[a,b]$, $g\in G[a,b]$, $K\subset\mathbb{N}$ a W je množina bodů nespojitosti funkce f v $[a,b]$ a $f^{\,\mathrm{C}}$ je spojitá část funkce f ($f^{\,\mathrm{C}}(a)=f(a)$), pak*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]=\int_a^b f^{\,\mathrm{C}}\,\mathrm{d}[g]+\sum_{w\in W}\big[\Delta^- f(w)(g(b)-g(w-))+\Delta^+ f(w)(g(b)-g(w+))\big]. \tag{5.26}$$

D ů k a z . Nechť, jako v důkazu Věty 5.22, $K\subset\mathbb{N}$, $W=\{w_k\}_{k\in K}$ a

$$f_n^{\,\mathrm{B}}(x)=\sum_{k\in K\cap[1,n]}\big[\Delta^- f(w_k)\,\chi_{(w_k,b]}(x)+\Delta^+ f(w_k)\,\chi_{[w_k,b]}(x)\big]\quad\text{pro } n\in\mathbb{N} \text{ a } x\in[a,b].$$

Podle Lemmatu 1.25 platí

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n^{\,\mathrm{B}}-f^{\,\mathrm{B}}\|_{\mathbb{BV}}=\lim_{n\to\infty}\operatorname{var}_a^b(f^{\,\mathrm{B}}-f_n^{\,\mathrm{B}})=0.$$

Dále, podle (5.14), (5.15) a Věty 5.6, máme

$$\int_a^b f_n^{\,\mathrm{B}}\,\mathrm{d}[g]=\sum_{k=1}^{n}\big[\Delta^- f(w_k)\,(g(b)-g(w_k-))+\Delta^+ f(w_k)\,(g(b)-g(w_k+))\big] \tag{5.27}$$

pro každé $n\in\mathbb{N}$. Je-li K konečná, plyne odtud okamžitě, že platí (5.26).

Není-li K konečná, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat $K=\mathbb{N}$. Potom podle Věty 5.21 platí

$$\int_a^b f^{\,\mathrm{B}}\,\mathrm{d}[g]=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n^{\,\mathrm{B}}\,\mathrm{d}[g]. \tag{5.28}$$

Podle Cvičení 1.10 je

$$\sum_{k=1}^{\infty}\big|\Delta^- f(w_k)\,(g(b)-g(w_k-))+\Delta^+ f(w_k)\,(g(b)-g(w_k+))\big|$$

$$\le 2\,\|g\|\sum_{k=1}^{\infty}\Big(|\Delta^- f(w_k)|+|\Delta^+ f(w_k)|\Big)\le 2\,\|g\|\,(\operatorname{var}_a^b f)<\infty.$$

Vzhledem k (5.27) a (5.28) tudíž máme

$$\int_a^b f^{\,\mathrm{B}}\,\mathrm{d}[g]=\sum_{k=1}^{\infty}\big[\Delta^- f(w_k)(g(b)-g(w_k-))+\Delta^+ f(w_k)(g(b)-g(w_k+))\big]. \tag{5.29}$$

Platí tedy (5.26). $\square$

5.25 . Cvičení. Pomocí Lemmatu 1.25 a úvah analogických těm, které jsme použili v důkazu Důsledku 5.24, dokažte, že pro $f \in \mathbb{G}[a,b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a,b]$ platí

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] = \int_a^b f\,\mathrm{d}[g^{\mathrm{C}}] + \sum_{w \in W} f(w)\,\Delta g(w), \tag{5.30}$$

kde W je množina bodů nespojitosti funkce g v $[a,b]$ a g^{C} je její spojitá část. (Přirozeně, zde $\Delta g(a) = \Delta^+ g(a)$ a $\Delta g(b) = \Delta^- g(b)$.)

Při důkazu Důsledku 5.24 a ve Cvičení 5.25 jsme použili Příklady 5.11. Následující technická lemmata jsou potřebná pro důkaz Věty o integraci per-partes, která je našim dalším významnějším cílem. Také v jejich důkazech budou Příklady 5.11 využity.

5.26 . Lemma. *Nechť $h \in G[a,b]$, $c \in \mathbb{R}$, $K \subset \mathbb{N}$ a $W = \{w_k\}_{k \in K} \subset [a,b]$ jsou takové, že*

$$h(x) = c \quad \textit{pro} \quad x \in [a,b] \setminus W, \tag{5.31}$$

Potom

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[h] = f(b)\,[h(b) - c] - f(a)\,[h(a) - c] \tag{5.32}$$

platí pro každou funkci $f \in \mathbb{BV}[a,b]$.

D ů k a z . a) Funkce h splňuje (5.31) právě tehdy, když

$$h(x) = c + \sum_{k \in K} (h(w_k) - c)\,\chi_{[w_k]}(x) \quad \text{pro } n \in \mathbb{N} \text{ a } x \in [a,b].$$

Definujme $K_n = K \cap [1,n]$, $W_n = \{w_k\}_{k \in K_n}$ a

$$h_n(x) = c + \sum_{k \in K_n} (h(w_k) - c)\,\chi_{[w_k]}(x) \quad \text{pro } n \in \mathbb{N} \text{ a } x \in [a,b]$$

pro $n \in \mathbb{N}$. Dokážeme, že platí

$$\lim_{n \to \infty} \|h_n - h\| = 0. \tag{5.33}$$

Nechť je tedy dáno $\varepsilon > 0$ a nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ je takové, že

$$|h(w_k) - c| < \varepsilon \quad \text{pro každé} \quad k > n_0. \tag{5.34}$$

Takové n_0 existuje, protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ je

$$|h(w_k) - c| = \begin{cases} |\Delta^- h(w_k)| & \text{když } w_k \in (a,b), \\ |\Delta^+ h(a)| & \text{když } w_k = a, \\ |\Delta^- h(b)| & \text{když } w_k = b \end{cases}$$

a množina těch $k\in\mathbb{N}$, pro něž $|h(w_k)-c|\geq\varepsilon$, může mít podle Důsledku 3.7 (ii) jenom nejvýše konečný počet (n_0) prvků. Tudíž,

$$|h_n(x)-h(x)| = \left\{\begin{array}{lll} |c-h(x)| & \text{když} & x\in W_n, \\ 0 & \text{když} & x\in[a,b]\setminus W_n \end{array}\right\} < \varepsilon \quad \text{pro } n\geq n_0 \text{ a } x\in[a,b].$$

Platí tedy (5.33).

b) Podle Příkladu 5.12 (i), formule (5.12) a Věty 5.6 platí

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[h_n] = f(b)\,[h_n(b)-c] - f(a)\,[h_n(a)-c] \tag{5.35}$$

pro každou funkci $f\in\mathbb{BV}[a,b]$ a každé $n\in\mathbb{N}$. Podle (5.33) a podle Důsledku 5.23 tedy máme

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[h] = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f\,\mathrm{d}[h_n] = f(b)\,[h(b)-c] - f(a)\,[h(a)-c].$$

□

5.27. Lemma. *Nechť* $h\in\mathbb{BV}[a,b]$, $c\in\mathbb{R}$, $K\subset\mathbb{N}$ *a* $W=\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset[a,b]$ *jsou takové, že platí* (5.31). *Potom*

$$\int_a^b h\,\mathrm{d}[g] = c\,[g(b)-g(a)\,] + \sum_{k=1}^{\infty}[h(w_k)-c\,]\,\Delta g(w_k) \text{ pro každou } g\in\mathbb{G}[a,b]. \tag{5.36}$$

D ů k a z . Vzhledem k (5.31) můžeme položit $h^{\mathrm{C}}(x)=c$ a $h^{\mathrm{B}}(x)=h(x)-c$ na $[a,b]$. W je množina bodů nespojitosti funkce h na intervalu $[a,b]$. Dále, $h(x-)=h(x+)=h(a+)=h(b-)=c$ pro každé $x\in(a,b)$. Tudíž

$$\Delta^-h(x) = h(x)-c = -\Delta^+h(x) \quad \text{pro každé } x\in(a,b).$$

Podle (5.26) (kde $f=h$) tedy máme

$$\begin{aligned}\int_a^b h\,\mathrm{d}[g] &= c\,[g(b)-g(a)] + \sum_{w\in W}(h(w)-c)\,[g(b)-g(w-)-g(b)+g(w+)\,] \\ &= c\,[g(b)-g(a)\,] + \sum_{w\in W}[h(w)-c\,]\,\Delta g(w),\end{aligned}$$

tj. platí (5.36). (Připomeňme znovu, že $\Delta g(a)=\Delta^+g(a)$ a $\Delta g(b)=\Delta^-g(b)$.) □

5.28. Věta (VĚTA O INTEGRACI PER-PARTES)**.** *Jestliže* $f\in\mathbb{G}[a,b]$ *a* $g\in\mathbb{BV}[a,b]$, *pak existují oba integrály*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] \quad a \quad \int_a^b g\,\mathrm{d}[f]$$

a platí

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] + \int_a^b g\,\mathrm{d}[f] = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) \tag{5.37}$$
$$+ \sum_{x\in[a,b]} \Big(\Delta^- f(x)\,\Delta^- g(x) - \Delta^+ f(x)\,\Delta^+ g(x)\Big).$$

D ů k a z . Integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ existuje podle Věty 5.16 a integrál $\int_a^b g\,\mathrm{d}[f]$ existuje podle Věty 5.22. Dále,

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] + \int_a^b g\,\mathrm{d}[f]$$
$$= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}[g(x) + \Delta^+ g(x)] + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}[f(x) - \Delta^- f(x)]$$
$$- \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}[\Delta^+ g(x)] + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}[\Delta^- f(x)].$$

Není obtížné ověřit, že funkce $h(x) = \Delta^+ g(x)$ splňuje (5.31) s $c = 0$ a $h(b) = 0$. Dále, $\Delta h(x) = 0$ pro $x \in (a,b)$. Podle Lemmatu 5.26 tedy máme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}[\Delta^+ g(x)] = -f(a)\,\Delta^+ g(a).$$

Analogicky,

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}[\Delta^- f(x)] = g(b)\,\Delta^- f(b),$$

čili

$$\left\{\begin{aligned} &\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}[g(x)] + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}[f(x)] \\ &\quad = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}[g(x+)] + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}[f(x-)] + f(a)\,\Delta^+ g(a) + \Delta^- f(b)\,g(b). \end{aligned}\right. \tag{5.38}$$

První integrál na pravé straně můžeme upravit na

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}[g(x+)] = \int_a^b f(x-)\,\mathrm{d}[g(x+)] + \int_a^b \Delta^- f(x)\,\mathrm{d}[g(x+)]. \tag{5.39}$$

Pro funkci $h(x) = g(x+)$ máme $h(x+) = h(x) = g(x+)$ a $h(x-) = g(x-)$ na $[a,b]$, tj. $\Delta h(x) = \Delta g(x)$ na $[a,b]$. Podle Lemmatu 5.27 tedy platí

$$\int_a^b \Delta^- f(x)\,\mathrm{d}[g(x+)] = \sum_{x\in[a,b]} \Delta^- f(x)\,\Delta g(x). \tag{5.40}$$

Analogicky,

$$\begin{cases} \displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}[f(x-)] = \int_a^b g(x+)\,\mathrm{d}[f(x-)] - \int_a^b \Delta^+ g(x)\,\mathrm{d}[f(x-)] \\ \displaystyle\qquad = \int_a^b g(x+)\,\mathrm{d}[f(x-)] - \sum_{x\in[a,b]} \Delta^+ g(x)\,\Delta f(x). \end{cases} \tag{5.41}$$

Funkce $f(x-)$ je spojitá zleva na $(a,b]$ a $g(x+)$ je spojitá zprava na $[a,b)$. Podle Cvičení 5.19 to znamená, že oba integrály

$$\int_a^b f(x-)\,\mathrm{d}[g(x+)] \quad \text{a} \quad \int_a^b g(x+)\,\mathrm{d}[f(x-)]$$

existují jako σ-Riemannovy-Stieltjesovy (RS) integrály. Pomocí Věty 4.15 o integraci per-partes pro RS-integrály dostáváme

$$\int_a^b f(x-)\,\mathrm{d}[g(x+)] + \int_a^b g(x+)\,\mathrm{d}[f(x-)] = f(b-)\,g(b) - f(a)\,g(a+). \tag{5.42}$$

Dosazením (5.39)-(5.42) do (5.38) dostaneme

$$\begin{aligned} &\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] + \int_a^b g\,\mathrm{d}[f] \\ &\quad = f(b-)\,g(b) - f(a)\,g(a+) + f(a)\,\Delta^+ g(a) + \Delta^- f(b)\,g(b) \\ &\qquad + \sum_{x\in[a,b]} \Big(\Delta^- f(x)\,[\Delta^- g(x) + \Delta^+ g(x)] - [\Delta^- f(x) + \Delta^+ f(x)]\,\Delta^+ g(x)\Big) \\ &\quad = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) + \sum_{x\in[a,b]} \big[\Delta^- f(x)\,\Delta^- g(t) - \Delta^+ f(x)\,\Delta^+ g(x)\big]. \end{aligned}$$

Dokázali jsme, že (5.37) platí. $\square$

5.29. Lemma (SAKS-HENSTOCK). *Nechť $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ jsou takové, že integrál*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$$

má konečnou hodnotu. Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno a nechť $\delta \in \mathscr{G}[a,b]$ je kalibr na $[a,b]$ takový, že platí

$$\left|S(D,\xi) - \int_a^b f\,\mathrm{d}[g]\right| < \varepsilon \quad \textit{pro všechna} \;\; (D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta).$$

Potom pro libovolný systém $\{([s_j,t_j],\tau_j),\ j=1,2,\dots,k\}$ *takový, že*

$$\begin{cases} a\le s_1\le\tau_1\le t_1\le s_2\le\dots\le s_k\le\tau_k\le t_k\le b,\\ [s_j,t_j]\subset[\tau_j-\delta(\tau_j),\tau_j+\delta(\tau_j)],\qquad j=1,2,\dots,k,\end{cases}\tag{5.43}$$

platí nerovnost

$$\Big|\sum_{j=1}^k\Big[f(\tau_j)\,[g(t_j)-g(s_j)]-\int_{s_j}^{t_j}f\,\mathrm{d}[g]\Big]\Big|\le\varepsilon.\tag{5.44}$$

D ů k a z . Buď dáno $\eta>0$. Označme $t_0=a$, $s_{k+1}=b$. Je-li $j\in\{1,2,\dots,k\}$ a $t_j<s_{j+1}$, pak můžeme najít kalibr δ^j a rozšířené dělení $(D^j,\xi^j)\in\mathscr{A}(\delta^j;[t_j,s_{j+1}])$ takové, že $\delta^j(x)\le\delta(x)$ pro každé $x\in[a,b]$ a

$$\big|S(D^j,\xi^j)-\int_{t_j}^{s_{j+1}}f\,\mathrm{d}[g]\big|<\frac{\eta}{k+1}.\tag{5.45}$$

Nyní sestavme δ–jemné rozšířené dělení $(\widetilde{D},\widetilde{\xi})$ intervalu $[a,b]$ tak, aby platilo

$$\sum_{j=1}^k f(\tau_j)\,[g(t_j)-g(s_j)]+\sum_{j=0}^k S(D^j,\xi^j)=S(\widetilde{D},\widetilde{\xi}).$$

(Je-li $t_j=s_{j+1}$, klademe $S(D^j,\xi^j)=0$.) Vzhledem k předpokladům lemmatu tedy máme

$$\begin{aligned}&\Big|\sum_{j=1}^k\Big(f(\tau_j)\,[g(t_j)-g(s_j)]-\int_{s_j}^{t_j}f\,\mathrm{d}[g]\Big)+\sum_{j=0}^k\Big(S(D^j,\xi^j)-\int_{t_j}^{s_{j+1}}f\,\mathrm{d}[g]\Big)\Big|\\ &\qquad=\Big|S(\widetilde{D},\widetilde{\xi})-\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]\Big|<\varepsilon.\end{aligned}$$

Odtud a z (5.45) dostáváme pro libovolné $\eta>0$

$$\begin{aligned}&\Big|\sum_{j=1}^k f(\tau_j)\,[g(t_j)-g(s_j)]-\int_{s_j}^{t_j}f\,\mathrm{d}[g]\Big|\\ &\qquad\le\Big|S(\widetilde{D},\widetilde{\xi})-\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]\Big|+\Big|\sum_{j=0}^k\Big(S(D^j,\xi^j)-\int_{t_j}^{s_{j+1}}f\,\mathrm{d}[g]\Big)\Big|<\varepsilon+\eta,\end{aligned}$$

tj. platí (5.44). □

5.30. Věta. *Nechť* $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ *existuje a* $c\in[a,b]$. *Potom platí*

$$\lim_{x\to c,\,x\in[a,b]}\Big(\int_a^x f\,\mathrm{d}[g]+f(c)\,[g(c)-g(x)]\Big)=\int_a^c f\,\mathrm{d}[g].\tag{5.46}$$

D ů k a z . Buď dáno $\varepsilon > 0$ a nechť $\delta_\varepsilon \in \mathscr{G}[a,b]$ je takový kalibr, že

$$\Big|S(D,\xi) - \int_a^b f\,\mathrm{d}[g]\Big| < \varepsilon$$

platí všechna $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$. Pro každé $x \in (c, c+\delta_\varepsilon(c)) \cap [a,b]$ systém $\{([s_1,t_1],\tau_1)\}$, kde $s_1 = \tau_1 = c$ a $t_1 = x$, vyhovuje podmínkám (5.43). Podle Saks-Henstockova lemmatu (Lemma 5.29) tedy máme

$$\Big|f(c)\,[g(x)-g(c)] - \int_c^x f\,\mathrm{d}[g]\Big| < \varepsilon. \tag{5.47}$$

Podobně, je-li $x \in (c-\delta_\varepsilon(c), c) \cap [a,b]$, pak použitím Lemmatu 5.29 na systém $\{[x,c],c\}$ dostaneme nerovnost

$$\Big|f(c)\,[g(c)-g(x)] - \int_x^c f\,\mathrm{d}[g]\Big| < \varepsilon$$

Pro každé $x \in (c-\delta_\varepsilon(c), c+\delta_\varepsilon(c)) \cap [a,b]$ tedy platí nerovnost (5.47) a tudíž také nerovnost

$$\Big|\int_a^c f\,\mathrm{d}[g] - \int_a^x f\,\mathrm{d}[g] - f(c)\,[g(c)-g(x)]\Big| = \Big|\int_c^x f\,\mathrm{d}[g] - f(c)\,[g(x)-g(c)]\Big| < \varepsilon,$$

tj. platí (5.46). □

5.31 . Důsledek. *Nechť* $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ *existuje,* $g \in \mathbb{G}[a,b]$ *a nechť funkce* $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *je definována předpisem*

$$h(x) = \int_a^x f\,\mathrm{d}[g], \quad x \in [a,b].$$

Potom $h \in \mathbb{G}[a,b]$ *a*

$$h(t+) = h(t) + f(t)\Delta^+ g(t) \quad a \quad h(s-) = h(s) - f(s)\Delta^- g(s) \ \ pro \ \ t \in [a,b),\ s \in (a,b].$$

□

5.32 . Věta (HAKE). (*i*) *Nechť* $\int_a^x f\,\mathrm{d}[g]$ *existuje pro každé* $x \in [a,b)$ *a nechť*

$$\lim_{x\to b-}\Big(\int_a^x f\,\mathrm{d}[g] + f(b)\,[g(b)-g(x)]\Big) = I \in \mathbb{R}.$$

Potom také

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] = I.$$

(*ii*) *Nechť* $\int_x^b f\,\mathrm{d}[g]$ *existuje pro každé* $x \in (a,b]$ *a nechť*

$$\lim_{x\to a+}\Big(\int_x^b f\,\mathrm{d}[g] + f(a)\,[g(x)-g(a)]\Big) = I \in \mathbb{R}.$$

Potom také

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] = I.$$

D ů k a z . (i) Buď dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme $\Delta > 0$ tak, aby platilo

$$\Big|\int_a^x f\,\mathrm{d}[g] + f(b)\,[g(b)-g(x)] - I\Big| < \varepsilon \quad \text{pro každé } \ x \in [b-\Delta, b). \tag{5.48}$$

Položme $x_k = b - \dfrac{b-a}{k+1}$ pro $k \in \mathbb{N}$. Posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí a $\lim_{k\to\infty} x_k = b$ a

$$\forall\, k \in \mathbb{N}\ \exists\, \delta_k \in \mathscr{G}[a,x_k] : (D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta_k,[a,x_k]) \Longrightarrow \Big|S(D,\xi) - \int_a^{x_k} f\,\mathrm{d}[g]\Big| < \frac{\varepsilon}{2^k} \tag{5.49}$$

Pro každé $\tau \in [a,b)$ označme symbolem $\kappa(\tau)$ jednoznačně určené přirozené číslo k takové, že $\tau \in [x_{k-1}, x_k)$. Dále, definujme kalibr δ_0 na $[a,b)$ tak, aby platilo

$$\delta_0(\tau) \le \delta_k(\tau) \quad \text{a} \quad [\tau-\delta_0(\tau), \tau+\delta_0(\tau)] \subset [a, x_k] \quad \text{pro každé } \ k \in \mathbb{N} \text{ a každé } \ \tau \in [x_{k-1}, x_k).$$

Nyní, nechť je dáno $x \in [a,b)$ a nechť $p \in N$ je takové, že $x \in [x_{p-1}, x_p)$ (tj. $p = \kappa(x)$) a nechť

$$(B,\eta) = \big(\{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m\}, (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)\big)$$

je libovolné δ_0–jemné dělení intervalu $[a,x]$. Pro každé $k \in \mathbb{N}\cap[1,p]$ a každé $j \in \mathbb{N}\cap[1,m]$ takové, že $\kappa(\eta_j) = k$ pak máme

$$\eta_j - \delta_k(\eta_j) \le \eta_j - \delta_0(\eta_j) \le \beta_{j-1} < \beta_j \le \eta_j + \delta_0(\eta_j) \le \eta_j + \delta_k(\eta_j).$$

Vzhledem k (5.49) a definici kalibru δ_0, tedy vidíme, že pro každé $k \in \{1,2,\dots,p\}$ systém

$$\{([\beta_{j-1}, \beta_j], \eta_j),\ j = 1,2,\dots,m,\ \kappa(\eta_j) = k\}$$

splňuje předpoklady Saks-Henstockova lemmatu 5.29). Pro každé $k \in \{1,2,\dots,p\}$ tedy platí nerovnost

$$\Big|\sum_{\kappa(\eta_j)=k} f(\eta_j)\,[g(\beta_j) - g(\beta_{j-1})] - \int_{\beta_{j-1}}^{\beta_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big| < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Tudíž

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{j=1}^{m}\Big(f(\eta_j)\,[g(\beta_j)-g(\beta_{j-1})]-\int_a^x f\,\mathrm{d}[g]\Big)\Big|\\
&\quad=\Big|\sum_{k=1}^{p}\Big(\sum_{\kappa(\eta_j)=k} f(\eta_j)\,[g(\beta_j)-g(\beta_{j-1})]-\int_{\beta_{j-1}}^{\beta_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big)\Big|\\
&\quad\le\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\sum_{\kappa(\eta_j)=k}\Big(f(\eta_j)\,[g(\beta_j)-g(\beta_{j-1})]-\int_{\beta_{j-1}}^{\beta_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big)\Big|<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k}=\varepsilon,
\end{aligned}$$

tj.

$$|S(B,\eta)-\int_a^x f\,\mathrm{d}[g]\Big)|<\varepsilon\quad\text{pro všechna}\ \ x\in[a,b)\ \text{a všechna}\ \ (B,\eta)\in\mathscr{A}(\delta_0,[a,x])\tag{5.50}$$

Nyní, položme

$$\delta^*(x)=\begin{cases}\min\{b-x,\ \delta_0(x)\} & \text{pro}\ \ x\in[a,b),\\ \dfrac{\Delta}{2} & \text{pro}\ \ x=b.\end{cases}$$

Pak pro každé δ^*-jemné dělení

$$(\widetilde{D},\widetilde{\xi})=\big(\{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_m\},(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m)\big)$$

intervalu $[a,b]$ musí platit $\xi_m=\alpha_m=b$, $\alpha_{m-1}\in(b-\Delta,b)$ a tudíž, vzhledem k (5.48) a (5.50),

$$\begin{aligned}
\Big|S(D,\xi)-I\Big|&=\Big|\sum_{j=1}^{m-1} f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]+f(b)\,[g(b)-g(\alpha_{m-1})]-I\Big|\\
&\le\Big|\sum_{j=1}^{m-1} f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-\int_a^{\alpha_{m-1}} f\,\mathrm{d}[g]\Big|\\
&\qquad+\Big|\int_a^{\alpha_{m-1}} f\,\mathrm{d}[g]+f(b)\,[g(b)-g(\alpha_{m-1})]-I\Big|<2\,\varepsilon,
\end{aligned}$$

t.j. $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]=I$.

Důkaz tvrzení (ii) se provede analogicky a ponechávám ho čtenáři jako cvičení. □

5.33. Příklady. Pomocí Hakeovy věty můžeme snadno a universálním způsobem odvodit vzorce, které jsme v Příkladech 5.12 odvodili přímo z definice pomocí vhodné volby kalibru. Např. formuli (5.9) dostaneme takto:

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[\chi_{[\tau,b]}]=\int_a^\tau f\,\mathrm{d}[\chi_{[\tau,b]}]=\lim_{t\to\tau-}\Big(\int_a^t f\,\mathrm{d}[\chi_{[\tau,b]}]+f(\tau)\,[\chi_{[\tau,b]}(\tau)-\chi_{[\tau,b]}(t)]\Big)=f(\tau)$$

pro libovolnou funkci f a $\tau \in (a,b)$. Podobně, pro $\tau \in (a,b)$ a $g \in \mathbb{G}[a,b]$ dostaneme pomocí Hakeovy věty

$$\int_a^b \chi_{[a,\tau]}\,\mathrm{d}[g] = \int_a^\tau 1\,\mathrm{d}[g] + \int_\tau^b \chi_{[a,\tau]}\,\mathrm{d}[g]$$
$$= g(\tau) - g(a) + \lim_{t\to\tau+}\Big(\int_t^b \chi_{[a,\tau]}\,\mathrm{d}[g] + 1\,[g(t)-g(\tau)]\Big) = g(\tau+) - g(a),$$

tj. (5.15).

5.34. Cvičení. Pomocí Hakeovy věty dokažte i zbývající formule z Příkladů 5.12.

5.35. Lemma. *Nechť $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ existuje. Potom pro každé $\varepsilon > 0$ existuje kalibr $\delta \in \mathscr{G}[a,b]$ takový, že platí*

$$\sum_{j=1}^m \Big| f(\xi_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big| < \varepsilon \tag{5.51}$$

pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta)$, $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$.

D ů k a z . Buď dáno $\varepsilon > 0$ a nechť $\delta \in \mathscr{G}([a,b])$ je kalibr takový, že

$$\Big|S(D,\xi) - \int_a^b f\,\mathrm{d}[g]\Big| < \frac{\varepsilon}{2}$$

platí pro všechna δ–jemná rozšířená dělení (D,ξ) intervalu $[a,b]$. Nyní, nechť

$$(D,\xi) = \big(\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, m)\big) \in \mathscr{A}(\delta).$$

Označme

$$J^+ = \Big\{j \in \{1,2,\dots,m\} : f(\xi_j)\,[g(\alpha_j - g(\alpha_{j-1}) - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g] \ge 0\Big\}$$

a

$$J^- = \{1,2,\dots,m\} \setminus J^+.$$

Systém $\{([\alpha_{j-1},\alpha_j],\xi_j),\ j \in J^+\}$ splňuje předpoklady (5.43) z Lemmatu 5.29 na místě $\{([s_j,t_j],\tau_j)\}$. Podle Lemmatu 5.29 tedy platí

$$\Bigg|\sum_{j\,\in\,J^+}\Big(f(\xi_j)[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big)\Bigg|$$
$$= \sum_{j\,\in\,J^+}\Big|f(\xi_j)[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Podobně

$$\left|\sum_{j\,\in\,J^-}\Big(f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\Big)\right|$$
$$=\sum_{j\,\in\,J^-}\left|f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Odtud už nerovnost (5.51) okamžitě vyplývá. □

5.36 . Věta (VĚTA O SUBSTITUCI). *Je-li funkce* $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ *ohraničená a integrál* $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ *existuje, pak oba integrály*

$$\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}\Big[\int_a^x f\,\mathrm{d}[g]\Big],\qquad \int_a^b h(x)\,f(x)\,\mathrm{d}[g(x)]$$

existují jakmile existuje alespoň jeden z nich a v takovém případě pak platí:

$$\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}\Big[\int_a^x f\,\mathrm{d}[g]\Big]=\int_a^b h(x)\,f(x)\,\mathrm{d}[g(x)].$$

D ů k a z . Podle Věty 5.7 je funkce

$$k(x)=\int_a^x f\,\mathrm{d}[g]$$

definovaná pro každé $x\in[a,b]$.

a) Předpokládejme, že existuje integrál

$$\int_a^b h\,f\,\mathrm{d}[g].$$

Nechť je dáno $\varepsilon>0$ a nechť δ_ε je kalibr na $[a,b]$ takový, že pro každé $\delta_\varepsilon-$jemné dělení $(D,\xi)=\big(\{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_m\},(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m)\big)$ intervalu $[a,b]$ platí

$$\sum_{j=1}^m\left|h(\xi_j)\,f(\xi_j)\,[g(\alpha_j-g(\alpha_{j-1})]-\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} h\,f\,\mathrm{d}[g]\right|<\varepsilon$$

a

$$\sum_{j=1}^m\left|f(\xi_j)\,[g(\alpha_j-g(\alpha_{j-1})]-\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]\right|<\varepsilon.$$

(Takový kalibr existuje podle Lemmatu 5.35.) Pro každé $\delta_\varepsilon-$jemné dělení

$$(D,\xi)=\big(\{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_m\},(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m)\big)$$

intervalu $[a,b]$ tedy máme:

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{j=1}^{m} h(\xi_j)\,[k(\alpha_j)-k(\alpha_{j-1})]-\int_a^b h\,f\,\mathrm{d}[g]\Big|\\
&\quad\le \sum_{j=1}^{m}\Big|h(\xi_j)\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]-h(\xi_j)\,f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]\Big|\\
&\qquad+\sum_{j=1}^{m}\Big|h(\xi_j)\,f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} h\,f\,\mathrm{d}[g]\Big|\\
&\quad\le \|h\|\sum_{j=1}^{m}\Big|\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f\,\mathrm{d}[g]-f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]\Big|\\
&\qquad+\sum_{j=1}^{m}\Big|h(\xi_j)\,f(\xi_j)\,[g(\alpha_j)-g(\alpha_{j-1})]-\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} h\,f\,\mathrm{d}[g]\Big|\\
&\quad\le (\|h\|+1)\,\varepsilon,
\end{aligned}$$

tj. existuje integrál $\int_a^b h\,\mathrm{d}[k]$ a platí

$$\int_a^b h\,\mathrm{d}[k]=\int_a^b h\,f\,\mathrm{d}[g].$$

b) Obrácená implikace by se dokazovala podobně – opět za vydatné pomoci Lemmatu 5.35. □

5.37. Věta (Věta o dominované konvergenci). *Nechť* $f, f_n \in \mathbb{G}[a,b]$,

$$\|f_n\|\le C<\infty \ \textit{pro}\ \ n\in N \quad \textit{a} \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)\ \textit{pro všechna}\ \ t\in[a,b].$$

Potom

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,\mathrm{d}[g]=\int_a^b f\,\mathrm{d}[g] \quad \textit{pro každou funkci}\ \ g\in\mathbb{BV}[a,b].$$

5.38. Důsledek. *Nechť* $A\in\mathbb{BV}[a,b]$. *Potom operátor*

$$x\in\mathbb{BV}[a,b]\to L\,x\in\mathbb{BV}[a,b],$$

$$\textit{kde}\ \ (L\,x)(t)=\int_a^t \mathrm{d}[A(s)]\,x(s) \quad \textit{pro}\ \ t\in[a,b]$$

je kompaktní (totálně spojitý) lineární operátor.

Důkaz. L je zřejmě lineární ohraničené zobrazení $\mathbb{BV}[a,b]$ do $\mathbb{BV}[a,b]$. Zbývá tedy dokázat, že pro každou posloupnost $\{x_n\}$ ohraničenou v $\mathbb{BV}[a,b]$, její obraz $\{L\,x_n\}\subset\mathbb{BV}[a,b]$ obsahuje podposloupnost, která konverguje v $\mathbb{BV}[a,b]$.

Nechť je tedy $\{x_n\}\subset\mathbb{BV}[a,b]$ posloupnost taková, že $\|x_n\|_{\mathbb{BV}}\le C<\infty$ pro všechna $n\in\mathbb{N}$. Podle Hellyovy věty (Věta 1.26) pak existuje podposloupost $\{n_k\}\subset\mathbb{N}$ a funkce $x\in\mathbb{BV}[a,b]$ takové, že

$$\|x\|_{\mathbb{BV}}\le C \quad \text{and} \quad \lim_{k\to\infty} x_{n_k}(t)=x(t) \quad \text{pro každé} \ \ t\in[a,b].$$

Označme $z_k(t)=x_{n_k}(t)-x(t)$ pro $k\in\mathbb{N}$ a $t\in[a,b]$. Potom

$$|z_k(t)|\le 2\,C \quad \text{pro} \ \ k\in\mathbb{N} \quad \text{a} \quad t\in[a,b].$$

Pro libovolnou funkci $u\in\mathbb{BV}[a,b]$ a libovolnou dvojici t_1, t_2 bodů z $[a,b]$ takových, že $a\le t_1<t_2\le b$ máme podle Věty 5.14

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}[A]\,u\right| \le \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}[\operatorname{var}_{t_1}^{s} A]\,|u(s)| = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}[\operatorname{var}_{a}^{s} A]\,|u(s)|\,.$$

Pro libovolné $D=\{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_m\}\in\mathscr{D}[a,b]$ a každé $k\in\mathbb{N}$ tedy platí

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m}|(L\,z_k)(\alpha_j)-(L\,z_k)(\alpha_{j-1})| &= \sum_{j=1}^{m}\left|\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j}\mathrm{d}[A(s)]\,z_k(s)\right|\\ &\le \sum_{j=1}^{m}\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j}\mathrm{d}[\operatorname{var}_{a}^{s} A]\,|z_k(s)| \le \int_a^b \mathrm{d}[\operatorname{var}_{a}^{s} A]\,|z_k(s)|\,,\end{aligned}$$

neboli

$$\|L\,z_k\|_{\mathbb{BV}} = \operatorname{var}_a^b(L\,z_k) \le \int_a^b \mathrm{d}[\operatorname{var}_{a}^{s} A]\,|z_k(s)|\,.$$

Použitím Věty 5.37 dostaneme konečně

$$\lim_{k\to\infty}\|L\,x_{n_k}-L\,x\|_{\mathbb{BV}} = \lim_{k\to\infty}\|L\,z_k\|_{\mathbb{BV}} \le \lim_{k\to\infty}\int_a^b \mathrm{d}[\operatorname{var}_{a}^{s} A]\,|z_k(s)| = 0.$$

□