Kapitola 9

Dodatky

9.1 Důkaz Věty 1.17

Pro důkaz Věty 1.17 je účelné zavést následující definice.

9.1. Definice. Funkce $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ je *shora (zdola) polospojitá v bodě* $x_0 \in [a, b]$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in [a, b] \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ platí

$$F(x) < F(x_0) + \varepsilon \qquad (F(x) > F(x_0) - \varepsilon).$$

Je-li funkce f shora resp. zdola polospojitá v každém bodě intervalu $[a, b]$, říkáme, že je *shora* resp. *zdola polospojitá na intervalu* $[a, b]$.

9.2. Poznámka. Je zřejmé, že funkce f je spojitá v bodě x_0 právě tehdy, když je v něm současně polospojitá shora i zdola.

9.3 . Cvičení. Každá funkce polospojitá shora (zdola) na ohraničeném a uzavřeném intervalu je na tomto intervalu ohraničená shora (zdola).

Další příjemnou vlastností funkcí shora polospojitých na intervalu $[a, b]$ je to, že tyto funkce nabývají na tomto intervalu svého maxima:

9.4 . Tvrzení. *Je-li funkce* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *shora polospojitá na intervalu* $[a, b]$, *potom existuje bod* $x_0 \in [a, b]$ *takový, že*

$$F(x) \le F(x_0) \quad \textit{pro každé } x \in [a, b].$$

D ů k a z . Označme

$$M = \sup_{x \in [a,b]} F(x).$$

Podle Cvičení 9.3 je $M < \infty$. Množina

$$Q_k = \{x \in [a, b] : F(x) \ge M - \frac{1}{k}\} \tag{9.1}$$

je pro každé $k \in \mathbb{N}$ neprázdná. Ukážeme, že je také uzavřená:
Nechť x^* je hromadný bod množiny Q_k. Zřejmě $x^* \in [a, b]$. Předpokládejme, že $x^* \notin Q_k$. Platí tedy $F(x^*) < M - \frac{1}{k}$. Dále, z polospojitosti shora funkce f plyne, že k danému $\varepsilon = M - \frac{1}{k} - F(x^*) > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že platí

$$F(x) < F(x^*) + \varepsilon = F(x^*) + M - \frac{1}{k} - F(x^*) = M - \frac{1}{k}$$

$$\text{pro všechna } x \in (x^* - \delta, x^* + \delta) \cap [a, b],$$

což je ovšem spor s tím, že x^* je hromadný bod množiny Q_k. Každá množina Q_k, $k \in \mathbb{N}$, je tedy uzavřená. Dále, vzhledem k tomu, že posloupnost $\left\{M - \frac{1}{k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí, plyne z (9.1), že platí

$$[a, b] \supset Q_1 \supset Q_2 \cdots \supset Q_k \supset Q_{k+1} \ldots .$$

Podle Cantorovy věty (viz např. [5, Věta 157]) je tudíž množina $\bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k$ neprázdná. Budiž x_0 její libovolný prvek. Potom

$$M - \frac{1}{k} \leq F(x_0) \leq M \quad \text{platí pro každé } k \in \mathbb{N},$$

což je možné pouze, když

$$F(x_0) = M = \sup_{x \in [a,b]} F(x).$$

□

9.5 . Cvičení. Je-li funkce $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ zdola polospojitá na intervalu $[a, b]$, potom existuje bod $x_0 \in [a, b]$ takový, že

$$F(x) \geq F(x_0) \quad \text{pro každé } x \in [a, b].$$

9.6. Tvrzení. *Nechť funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je taková, že pro každé $t \in [a, b)$ a každé $s \in (a, b]$ existují limity*

$$f(t+) = \lim_{\tau \to t+} f(\tau) \quad a \quad f(s-) = \lim_{\tau \to s-} f(\tau).$$

Definujme funkci $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ předpisem

$$F(x) = \max\{f(x-), f(x), f(x+)\} \quad \textit{pro } x \in (a, b), \quad F(a) = f(a+) \quad a \quad F(b) = f(b-).$$

Potom je funkce F shora polospojitá na intervalu $[a, b]$.

D ů k a z . Budiž dán libovolný bod $x_0 \in (a, b)$. Potom platí $f(x_0) \leq F(x_0)$. Dále, vzhledem k předpokladu o existenci limit $f(x_0-)$ a $f(x_0+)$, pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že platí

$$f(x) < f(x_0-) + \varepsilon \leq F(x_0) + \varepsilon \quad \text{pro všechna } x \in (x_0 - \delta, x_0),$$

$$f(x) < f(x_0+) + \varepsilon \leq F(x_0) + \varepsilon \quad \text{pro všechna } x \in (x_0, x_0 + \delta).$$

Máme tedy

$$f(x) < F(x_0) + \varepsilon \qquad \text{pro všechna } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Odtud plyne dále, že platí

$$f(x-) \leq F(x_0) + \varepsilon \quad \text{a} \quad f(x+) < F(x_0) + \varepsilon \quad \text{pro všechna } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

čili

$$F(x) \leq F(x_0) + \varepsilon \quad \text{pro všechna } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

T. zn., že f je polospojitá shora v bodě x_0. Podobně bychom postupovali také v případech $x_0 = a$ resp. $x_0 = b$. □

9.7. Lemma (RIESZ). *Nechť funkce f a $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ splňují předpoklady Tvrzení* 9.6. *Potom je množina*

$$E=\{x\in(a,b):\textit{existuje } \xi>x \textit{ tak, že } f(\xi)>F(x)\}$$

otevřená. Když je $E\neq\emptyset$, pak E sestává z nejvýše spočetného systému po dvou disjunktních otevřených intervalů (a_k,b_k) a pro každý z nich platí

$$f(a_k+)\le F(b_k).$$

D ů k a z . Je-li $E=\emptyset$, není co dokazovat. Nechť tedy $x_0\in E$. Potom existuje $\xi\in(x_0,b]$ takové, že platí

$$\varepsilon:=f(\xi)-F(x_0)>0.$$

Vzhledem k polospojitosti funkce F v bodě x_0 existuje $\delta>0$ takové, že $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset[a,b]$ a

$$x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\implies F(x)<F(x_0)+\varepsilon=f(\xi).$$

To ovšem také znamená, že je

$$(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset E,$$

tj. množina E je otevřená.

Je známo (viz [5, Věta 69]), že každá neprázdná otevřená množina je sjednocením nejvýše spočetného systému po dvou disjunktních otevřených intervalů. Tedy také množina E je sjednocením takového systému $\{(a_k,b_k)\}$. Zvolme libovolný interval (a_k,b_k) z tohoto systému a v něm libovolný bod x_0. Podle Tvrzení 9.4 existuje $x_1\in[x_0,b]$ takové, že

$$F(x_1)=\max_{x\in[x_0,b]}F(x). \tag{9.2}$$

Kdyby bylo $x_1<b_k$ pak by také bylo $x_1\in E$ a tudíž by pro nějaké $\xi\in(x_1,b]$ bylo

$$F(\xi)\ge f(\xi)>F(x_1),$$

což je ovšem spor s (9.2). Máme tedy

$$x_1\ge b_k.$$

Vzhledem k (9.2) máme také $F(b_k)\le F(x_1)$. Předpokládejme, že je

$$F(b_k)<F(x_1)=\max\{f(x_1-),f(x_1),f(x_1+)\}.$$

Potom také musí být $x_1>b_k$ a musí existovat $\xi\in(b_k,b)$ takové, že je $f(\xi)>F(b_k)$ čili $b_k\in E$, což ovšem není možné. Je tedy

$$F(b_k)=F(x_1)=\max_{x\in[x_0,b]}F(x)\ge F(x_0)\ge f(x_0)$$

pro každé $x_0 \in (a_k, b_k)$. Limitním přechodem $x_0 \to a_k+$ dostaneme konečně

$$F(b_k) \geq f(a_k+),$$

což uzavírá důkaz lemmatu. □

9.8 . Poznámka. Funkce splňující předpoklady Tvrzení 9.6 a Lemmatu 9.7 nazýváme *regulované funkce.* Podrobněji o nich pojednáme v kapitole 3.

9.9 . Definice. Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je daná funkce. Pro $x \in (a, b]$ definujeme *horní resp. dolní Diniho derivovaná čísla zleva* $D^- f(x)$ resp. $D_- f(x)$ takto:

$$D^- f(x) = \limsup_{t \to x-} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \quad \text{a} \quad D_- f(x) = \liminf_{t \to x-} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Podobně se definují *horní resp. dolní Diniho derivovaná čísla zprava* v bodech $x \in [a, b)$:

$$D^+ f(x) = \limsup_{\xi \to x+} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \quad \text{a} \quad D_+ f(x) = \liminf_{\xi \to x+} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}.$$

9.10. Poznámka. Pro libovolnou funkci $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ a body $x \in (a, b]$ a $y \in [a, b)$ jsou její derivovaná čísla $D^- f(x)$, $D_- f(x)$, $D^+ f(y)$, $D_+ f(y)$ jednoznačně určena. Mohou ovšem nabývat také hodnot ∞ resp. $-\infty$. Funkce f má v bodě x vlastní derivaci zleva právě tehdy, když $D^- f(x) = D_- f(x) \in \mathbb{R}$. Podobně, f má v bodě x vlastní derivaci zprava právě tehdy, když $D^+ f(x) = D_+ f(x) \in \mathbb{R}$, a vlastní derivaci právě tehdy, když $D^- f(x) = D_- f(x) = D^+ f(x) = D_+ f(x) \in \mathbb{R}$.

Z Definice 9.9 ihned plyne, že pro $x \in (a, b]$ a $y \in [a, b)$ platí

$$-\infty \leq D_- f(x) \leq D^- f(x) \leq +\infty \quad \text{a} \quad -\infty \leq D_+ f(y) \leq D^+ f(y) \leq +\infty.$$

Podle Důsledku 1.6 a Lemmatu obsaženém v důkazu Věty 1.7 již víme, že každá monotonní funkce na intervalu $[a, b]$ má na tomto intervalu nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti. Nyní si ukážeme, že každá monotonní funkce má vlastní derivaci "téměř všude" na definičním intervalu.

9.11. Věta. *Každá funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monotonní na $[a, b]$ má pro s.v. $x \in [a, b]$ konečnou derivaci $f'(x)$.*

D ů k a z . Předpokládejme např., že f je neklesající. Potom pro všechna $x, \xi \in [a, b]$, $x \neq \xi$, máme

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \geq 0$$

a vzhledem k Definici 9.9 tedy také

$$0 \leq D_- f(x) \leq D_+ f(x) \leq \infty \quad \text{a} \quad 0 \leq D_+ f(x) \leq D^+ f(x) \leq \infty \tag{9.3}$$

pro všechna $x, \in (a,b)$.

Důkaz věty bude rozdělen na 3 kroky:

• I. Nejprve ukážeme, že platí:

$$D^+ f(x) < \infty \quad \text{pro s.v. } x \in (a,b). \tag{9.4}$$

• II. Poté ukážeme, že platí

$$D^+ f(x) \le D_- f(x) \quad \text{pro s.v. } x \in (a,b). \tag{9.5}$$

• III. Konečně, ukážeme, že důkaz věty je už snadným důsledkem tvrzení (9.4) a (9.5).

► I. Nejprve tedy dokážeme platnost tvrzení (9.4). Označme symbolem S množinu bodů nespojitosti funkce f v (a,b) a

$$E_\infty = \{x \in (a,b) \setminus S : D^+ f(x) = \infty\}.$$

Podle Věty 1.7 je množina S nanejvýše spočetná a tedy (viz Cvičení 1.16 a)) má nulovou míru ($\mu(S) = 0$). Je-li $E_\infty = \emptyset$, není co dokazovat. Předpokládejme tedy, že je $E_\infty \ne \emptyset$. Nechť je dáno libovolné $c > 0$. Máme

$$E_\infty \subset E_c = \{x \in (a,b) \setminus S : D^+ f(x) > c\}. \tag{9.6}$$

Jestliže $x \in E_c$, pak podle Definice 9.9 existuje $\xi \in (x,b)$ takové, že platí

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} > c,$$

tj.

$$\text{pro každé } x \in E_c \text{existuje } \xi \in (a,b) \text{takové, že } g(\xi) > G(x), \tag{9.7}$$

kde

$$g(x) := f(x) - c\,x \quad \text{pro} \quad x \in [a,b], \tag{9.8}$$

a

$$G(x) := \begin{cases} g(a+) & \text{pro} \quad x = a, \\ \max\{g(x-), g(x), g(x+)\} & \text{pro} \quad x \in (a,b), \\ g(b-) & \text{pro} \quad x = b. \end{cases} \tag{9.9}$$

(Zde jsme využili toho, že $E_c \cap S = \emptyset$ a tudíž $G(x) = g(x)$ pro každé $x \in E_c$.) Podle (9.7) máme dále

$$E_c \subset E := \{x \in (a,b) : \text{existuje } \xi > x \text{ tak, že } g(\xi) > G(x)\}. \tag{9.10}$$

Protože funkce f je neklesající na $[a,b]$, je také g na tomto intervalu neklesající a tudíž také regulovaná (viz Důsledek 1.6). Podle Tvrzení 9.6 je G polospojitá shora na $[a,b]$ a tudíž podle Lemmatu 9.7 je množina E z (9.10) sjednocením nejvýše spočetného systému po dvou disjunktních otevřených intervalů(a_k, b_k), $k \in K \subset \mathbb{N}$ a pro každý z nich platí $g(a_k+) \le G(b_k)$. Vzhledem k (9.8) a (9.9) a vzhledem k tomu, že funkce f je neklesající na $[a, b]$, tedy máme

$$f(a_k+) - c\,a_k \le G(b_k) = \max\{f(b_k-), f(b_k), f(b_k+)\} - c\,b_k \le f(b_k+),$$

neboli

$$c\,(b_k - a_k) \le f(b_k+) - f(a_k+).$$

Sečtením přes všechna k odtud dostaneme

$$c \sum_{k \in K} (b_k - a_k) \le \sum_{k \in K} [f(b_k+) - f(a_k+)] \le f(b) - f(a),$$

neboli

$$\sum_{k \in K} (b_k - a_k) \le \frac{f(b) - f(a)}{c}.$$

Pokud tedy k danému $\varepsilon > 0$ zvolíme $c > 0$ tak velké, aby platilo

$$\frac{f(b) - f(a)}{c} < \varepsilon,$$

docílíme toho, že bude

$$\sum_{k \in K} (b_k - a_k) < \varepsilon,$$

což ovšem znamená, že množina E a tudíž také množina $E_\infty \cup S \cup [a] \cup [b]$ mají nulovou míru (viz (9.6), (9.10) a Cvičení 1.16b)). Tvrzení (9.4) je tedy dokázáno.

► II. Pro daná čísla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\alpha \ge 0 \quad \text{a} \quad \beta \ge \alpha, \tag{9.11}$$

definujme

$$E_{\alpha\,\beta} = \{x \in (a, b) \setminus S : D^+ f(x) \alpha \quad \text{a} \quad D_- f(x) < \beta\}$$

a

$$E_\beta = \{x \in (a, b) : D_f(x) < \beta\}.$$

Nechť $y \in E_\beta$. Pak existuje $\eta \in (a, x)$ takové, že

$$f(\eta) - \beta\,\eta > f(y) - \beta\,y.$$

Pro $x \in [-b, -a]$ definujme

$$g(x) = f(-x) + \beta\,x.$$

Je-li $y = -x \in (a, b) \cap E_\beta$, pak podle výše uvedeného existuje $\xi > x$ ($\xi = -\eta$) takové, že je

$$g(\xi) > G(x) = g(x),$$

kde funkce G je přiřazena k g opět relací (9.9). (Jelikož je $S \cap E_\beta = \emptyset$ a $x \in E_\beta$, je $G(x) = g(x)$.) Použitím Lemmatu 9.7 pro funkci g na intervalu $(-b, -a)$ dostaneme, že existuje nejvýše spočetně mnoho otevřených a navzájem disjunktních intervalů $(-b_k, -a_k)$, které obsahují ty body $x \in (-b, -a)$, pro které je $-x \in E_\beta$ a platí

$$g(-b_k+) \le G(-a_k).$$

Protože f je neklesající na $[a, b]$, funkce g je nerostoucí na $[-b, -a]$. To má za následek, že $g(x-) \ge g(x) \ge g(x+)$ pro každé $x \in (a, b)$. Máme tedy

$$G(-a_k) = g(-a_k-) \quad \text{a tudíž } f(b_k-) - \beta\, b_k \le f(a_k+) = \beta\, a_k,$$

tj.

$$f(b_k-) - f(a_k+) \le \beta\,(b_k - a_k) \quad \text{pro každé } k.$$

(a) Nyní, pro $\alpha \ge 0$ označme

$$\widetilde{E}_\alpha = \{x \in [a, b] \setminus S : D^+ f(x) > \alpha\}.$$

Podobně jako v analogické situaci výše, pro každé $y \in \widetilde{E}_\alpha$ můžeme najít $\eta \in (a, y)$ takové, že je

$$\frac{f(\eta) - f(y)}{\eta - y} < \alpha, \tag{9.12}$$

tj.

$$f(\eta) - \alpha\,\eta > f(y) - \alpha\, y. \tag{9.13}$$

Definujme

$$g(x) = f(-x) - \alpha\,(-x) \quad \text{pro } \ x \in [-b, -a]$$

a

$$G(x) = \begin{cases} g(-b+) & \text{pro } \ x = -b, \\ \max\{g(x-), g(x), g(x+)\} & \text{pro } \ x \in (-b, -a), \\ g(-a-) & \text{pro } \ x = -a. \end{cases}$$

Vzhledem k (9.13), pro každé $x \in (a, b)$ takové, že $-x \in \widetilde{E}_\alpha$ existuje $\xi \in (x, -a)$, pro které platí $g(\xi) > G(x)$. (Stačí najít k $y = -x$ $\eta \in (a, y)$ splňující (9.12) a pak položit $\xi = -\eta$.) Použitím Lemmatu 9.7 tedy můžeme ukázat, že existuje nejvýše spočetný systém po dvou disjunktních otevřených intervalů(a_k, b_k), $k \in K \subset \mathbb{N}$, takový, že platí

$$\widetilde{E}_\alpha \subset \bigcup_{k \in K} (-b_k, -a_k)$$

a

$$g(-b_k+) = f(b_k-) - \alpha\, b_k \le G(-a_k) \le f(a_k+) - \alpha\, a_k.$$

Poslední nerovnost ovšem znamená, že pro každé $k \in K$ platí

$$f(b_k-) - f(a_k+) \le \alpha\,(b_k - a_k). \tag{9.14}$$

.

(b) Nechť $k \in K$ a $x \in E_\beta \cap (a_k, b_k)$. Potom máme $D^+ f(x) > \beta$ a tudíž existuje $\xi \in (x, b_k)$ takové, že platí

$$f(\xi) - \beta\,\xi > f(x) - \beta\, x.$$

Použijeme-li opět Rieszovo lemma (Lemma 9.7), dostaneme odtud existenci nejvýše spočetného systému po dvou disjunktních otevřených intervalů $(a_{k\,\ell}, b_{k\,\ell})$, $\ell \in L \subset \mathbb{N}$, takového, že platí

$$E_\beta \cap (a_k, b_k) \subset \bigcup_{\ell \in L} (a_{k\,\ell}, b_{k\,\ell})$$

a

$$f(a_{k\,\ell}+) - \beta\, a_{k\,\ell} \le f(b_{k\,\ell}+) - \beta\, b_{k\,\ell},$$

tj.

$$\beta\,(b_{k\,\ell} - a_{k\,\ell}) \le f(b_{k\,\ell}+) - f(a_{k\,\ell}+) \quad \text{pro každé } \ell \in L.$$

Po sečtení přes všechna $\ell \in L$ odtud a z (9.14) získáme vztahy

$$\beta \sum_{\ell \in L} (b_{k\,\ell} - a_{k\,\ell}) \le \sum_{\ell \in L} \big(f(b_{k\,\ell}+) - f(a_{k\,\ell}+)\big) \le f(b_k-) - f(a_k+) \le \alpha\,(b_k - a_k)$$

a (sečtením přes všechna $k \in K$)

$$\beta \sum_{k \in K\, \ell \in L} (b_{k\,\ell} - a_{k\,\ell}) \le \alpha \sum_{k \in K} (b_k - a_k). \tag{9.15}$$

Označíme-li tedy

$$|\mathfrak{L}_1| = \sum_{k \in K} (b_k - a_k) \quad \text{a} \quad |\mathfrak{L}_2| = \sum_{k \in K\, \ell \in L} (b_{k\,\ell} - a_{k\,\ell}),$$

budeme moci nerovnost (9.15) přepsat ve tvaru

$$|\mathfrak{L}_1| \le \frac{\alpha}{\beta}\, |\mathfrak{L}_2|.$$

Když výše uvedené procedury (a) i (b) budeme provádět střídavě v postupně vznikajících intervalech, dostaneme posloupnost systémůintervalů $\mathfrak{L}_1 \supset \mathfrak{L}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{L}_n \supset \ldots$, z nichž každý obsahuje $E_{\alpha\,\beta} = E_\beta \cap \widetilde{E}_\alpha$, přičemž

$$|\mathfrak{L}_{2n}| \le \frac{\alpha}{\beta}\, |\mathfrak{L}_{2n-1}| \le \frac{\alpha}{\beta}\, |\mathfrak{L}_{2n-2}|$$

platí pro každé $n \in \mathbb{N}$. Odtud pak dále odvodíme, že je

$$|\mathfrak{L}_{2n}| \leq \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n |\mathfrak{L}_1| \leq \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n (b-a).$$

Protože máme $0 \leq \frac{\alpha}{\beta} < 1$, plyne odtud, že je $|\mathfrak{L}_{2n}| \to 0$ pro $n \to \infty$.

Nyní, k danému $\varepsilon > 0$ zvolíme $n \in \mathbb{N}$ tak, aby bylo

$$(\frac{\alpha}{\beta})^n (b-a) < \varepsilon.$$

Potom bude $E_{\alpha\,\beta} \subset \mathfrak{L}_{2n}$ a přitom také $|\mathfrak{L}_{2n}| \leq \varepsilon$, což podle Definice 1.15 znamená, že $\mu(E_{\alpha\,\beta}) = 0$ pro libovolnou dvojici $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ splňující (9.11).

Označme

$$E_* = \{x \in (a,b) \setminus S : D_- f(x) < D^+ f(x)\}$$

Potom pro každé $x \in E_*$ existují racionální čísla $\alpha, \beta \in \mathbb{P}$ splňující (9.11) a

$$D_- f(x) < \alpha < \beta < D^+ f(x).$$

To znamená, že je E_* obsažena v množině

$$\widetilde{E} := \bigcup_{\substack{0 \leq \alpha < \beta \\ \alpha,\beta \in \mathbb{P}}} E_{\alpha,\beta},$$

která je sjednocením spočetně mnoha množin nulové míry a tudíž má také nulovou míru (viz Cvičení 1.16b). Tím spíše je $\mu(E_*) = 0$ a tedy také

$$\mu(E_* \cup S \cup [a] \cup [b]) = 0,$$

což dokazuje platnost tvrzení (9.5).

▶ III. Funkce

$$\widetilde{f} : x \in [-b, -a] \to -f(-x)$$

je zřejmě neklesající na $[-b, -a]$ a platí

$$D_- \widetilde{f}(-x) = D_+ f(x) \quad \text{a} \quad D^+ \widetilde{f}(-y) = D^- f(y)$$

pro všechna $x \in [a, b)]$ a $y \in (a, b]$. Použijeme-li tedy (9.5) na funkci $\widetilde{f}$, dostaneme

$$D^- f(x) = D^+ \widetilde{f}(-x) \leq D_- \widetilde{f}(-x) = D_+ f(x) \quad \text{pro s.v. } x \in [a, b].$$

Vzhledem k (9.3) a (9.4) tedy pro s.v. $x \in [a, b]$ budeme mít

$$0 \leq D^+ f(x) \leq D_- f(x) \leq D^- f(x) \leq D_+ f(x) \leq D^+ f(x) < \infty,$$

tj.

$$0 \leq D^+ f(x) = D_- f(x) = D^- f(x) = D_- f(x) = f'(x) < \infty.$$

$\square$

Věta 1.17 je přímým důsledkem vět 9.11 a 1.4.

9.2 Alternativní důkaz Věty 5.28 (per-partes)

Důkaz bude současně alternativním důkazem existenčního tvrzení z Věty 5.22.

Nechť je tedy $f \in \mathbb{G}[a,b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a,b]$ a nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Podle Věty 5.16 existuje integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}[g]$ a můžeme tedy zvolit kalibr δ_1 tak, aby pro každé $(D,\xi) \in \mathscr{A}(\delta_1)$ platilo

$$\Big|S(D,\xi) - \int_a^b f\,\mathrm{d}[g]\Big| < \varepsilon. \tag{9.16}$$

Dále, pro každé $x \in [a,b]$ můžeme zvolit $\delta_2(x) > 0$ tak, aby platilo

$$\begin{cases} s \in (x-\delta_2(x), x) \cap [a,b] \implies |f(s) - f(x-)| < \varepsilon \quad \text{a} \quad |g(s) - g(x-)| < \varepsilon, \\ s \in (x, x+\delta_2(x)) \cap [a,b] \implies |f(s) - f(x+)| < \varepsilon \quad \text{a} \quad |g(s) - g(x+)| < \varepsilon. \end{cases} \tag{9.17}$$

Podle tvrzení (ii) Důsledku 3.7 má množina

$$M_\varepsilon = \big\{x \in [a,b] : |\Delta^+ f(x)| \ge \varepsilon \ \vee |\Delta^- f(x)| \ge \varepsilon\big\}$$

nejvýše konečný počet prvků. Pro každý bod $x \in [a,b] \setminus M_\varepsilon$ je tedy kladná jeho vzdálenost

$$\operatorname{dist}(x, M_\varepsilon) = \min\{|x-y| : y \in M_\varepsilon\}$$

od množiny M_ε. Definujme

$$\delta_3(x) = \begin{cases} \operatorname{dist}(x, M_\varepsilon) & \text{když } \ x \in [a,b] \setminus M_\varepsilon, \\ \delta_2(x) & \text{když } \ x \in M_\varepsilon \end{cases} \tag{9.18}$$

a

$$\delta_\varepsilon(x) = \min\{\delta_1(x), \delta_2(x), \delta_3(x)\} \quad \text{pro} \ \ x \in [a,b]. \tag{9.19}$$

Nechť

$$(D,\xi) = (\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}, (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon).$$

Potom, vzhledem k (9.18) a (9.19), musí být $M_\varepsilon \subset \Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m\}$. Jednoduchými úpravami zjistíme, že platí

$$\begin{aligned} &S_{f\Delta g}(D,\xi) + S_{g\Delta f}(D,\xi) \\ &\quad = \sum_{j=1}^m \big(f(\xi_j)\,g(\alpha_j) - f(\xi_j)\,g(\alpha_{j-1}) + f(\alpha_j)\,g(\xi_j) - f(\alpha_{j-1})\,g(\xi_j)\big) \\ &\quad = f(b)\,g(b) + \sum_{j=1}^m \big(f(\xi_j)\,g(\alpha_j) + f(\alpha_j)\,g(\xi_j) - f(\xi_j)\,g(\xi_j) - f(\alpha_j)\,g(\alpha_j)\big) \\ &\qquad - f(a)\,g(a) - \sum_{j=1}^m \big(f(\xi_j)\,g(\alpha_{j-1}) + f(\alpha_{j-1})\,g(\xi_j) - f(\xi_j)\,g(\xi_j) - f(\alpha_{j-1})\,g(\alpha_{j-1})\big) \end{aligned}$$

$$= f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - \sum_{j=1}^{m} (f(\alpha_j) - f(\xi_j))\,(g(\alpha_j) - g(\xi_j))$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} (f(\xi_j) - f(\alpha_{j-1}))\,(g(\xi_j) - g(\alpha_{j-1})).$$

Dále,

$$\Big| \sum_{a<x\le b} \Delta^+ f(x)\,\Delta^+ g(x) - \sum_{a\le x<b} \Delta^- f(x)\,\Delta^- g(x) \Big|$$

$$\le \sum_{x\,\in\, M_\varepsilon \cap [a,b)} |\Delta^+ f(x)|\,|\Delta^+ g(x)| + \sum_{x\,\in\,[a,b)\setminus M_\varepsilon} |\Delta^+ f(x)|\,|\Delta^+ g(x)|$$

$$+ \sum_{x\,\in\, M_\varepsilon \cap\, (a,b]} |\Delta^- f(x)|\,|\Delta^- g(x)| + \sum_{x\,\in\,(a,b]\setminus M_\varepsilon} |\Delta^- f(x)|\,|\Delta^- g(x)|$$

$$\le \Big(\sum_{x\,\in\, M_\varepsilon \cap [a,b)} |\Delta^+ f(x)| + \sum_{x\,\in\, M_\varepsilon \cap\, (a,b]} |\Delta^- f(x)| + 2\,\varepsilon \Big) \operatorname{var}_a^b g < \infty.$$

Máme tedy

$$\Big| S_{g\Delta f}(D,\xi) - f(b)\,g(b) + f(a)\,g(a) + \int_a^b f\,\mathrm{d}[g] \tag{9.20}$$

$$+ \sum_{a<x\le b} \Delta^+ f(x)\,\Delta^+ g(x) - \sum_{a\le x<b} \Delta^- f(x)\,\Delta^- g(x) \Big|$$

$$\le \Big| \int_a^b f\,\mathrm{d}[g] - S_{f\Delta g}(D,\xi) \Big|$$

$$+ \Big| \sum_{j=1}^{m} (f(\xi_j) - f(\alpha_{j-1}))\,(g(\xi_j) - g(\alpha_{j-1})) - \sum_{a<x\le b} \Delta^- f(x)\,\Delta^- g(x) \Big|$$

$$+ \Big| \sum_{j=1}^{m} (f(\alpha_j) - f(\xi_j))\,(g(\alpha_j) - g(\xi_j)) - \sum_{a\le x<b} \Delta^+ f(x)\,\Delta^+ g(x) \Big|.$$

Dále,

$$\Big| \sum_{j=1}^{m} (f(\alpha_j) - f(\xi_j))\,(g(\alpha_j) - g(\xi_j)) - \sum_{a\le x<b} \Delta^+ f(x)\,\Delta^+ g(x) \Big|$$

$$= \Big| \sum_{j=1}^{m} (f(\alpha_j) - f(\xi_j+) + \Delta^+ f(\xi_j))\,(g(\alpha_j) - g(\xi_j+) + \Delta^+ g(\xi_j))$$

$$
- \sum_{j=1}^{m} \Delta^+ f(\xi_j)\, \Delta^+ g(\xi_j) - \sum_{x \in [a,b) \setminus \Xi} \Delta^+ f(x)\, \Delta^+ g(x) \Big|
$$

$$
= \Big| \sum_{j=1}^{m} (f(\alpha_j) - f(\xi_j+))\,(g(\alpha_j) - g(\xi_j+)) + \sum_{j=1}^{m} (f(\alpha_j) - f(\xi_j+))\, \Delta^+ g(\xi_j)
$$

$$
+ \sum_{j=1}^{m} \Delta^+ f(\xi_j)\,(g(\alpha_j) - g(\xi_j+)) - \sum_{x \in [a,b) \setminus \Xi} \Delta^+ f(x)\, \Delta^+ g(x) \Big|
$$

Předposlední součet přitom můžeme rozdělit do dvou součtů: jeden, ve kterém se sčítá přes ta j, pro která je $t_j \in M_\varepsilon$ a druhý, který obsahuje všechny ostatní sčítance. Odtud, vzhledem k (9.17) a vzhledem k definici množiny M_ε, plyne, že je

$$
\Big| \sum_{j=1}^{m} (f(\alpha_j) - f(\xi_j))\,(g(\alpha_j) - g(\xi_j)) - \sum_{a \le x < b} \Delta^+ f(x)\, \Delta^+ g(x) \Big|
$$

$$
\le \Big(2 \sum_{j=1}^{m} |g(\alpha_j) - g(\xi_j+)| + 2 \sum_{j=1}^{m} |\Delta^+ g(\xi_j)| + \sum_{x \in M_\varepsilon} |\Delta^+ f(x)| \Big)\, \varepsilon \le K^+ \varepsilon,
$$

kde

$$
K^+ = 4 \operatorname{var}_a^b g + \sum_{x \in M_\varepsilon \cap (a,b]} |\Delta^+ f(x)| < \infty.
$$

Podobně bychom ověřili, že platí

$$
\Big| \sum_{j=1}^{m} (f(\xi_j) - f(\alpha_{j-1}))\,(g(\xi_j) - g(\alpha_{j-1})) - \sum_{a < x \le b} \Delta^- f(x)\, \Delta^- g(x) \Big| \le K^- \varepsilon,
$$

kde

$$
K^- = 4 \operatorname{var}_a^b g + \sum_{x \in M_\varepsilon \cap (a,b]} |\Delta^- f(x)| < \infty.
$$

Dosazením do (9.20) a využitím (9.16) získáme odhad

$$
\Big| S_{g\Delta f}(D, \xi) - f(b)\, g(b) + f(a)\, g(a) + \int_a^b f \, \mathrm{d}[g]
$$

$$
+ \sum_{a < x \le b} \Delta^+ f(x)\, \Delta^+ g(x) - \sum_{a \le x < b} \Delta^- f(x)\, \Delta^- g(x) \Big| \le \big(1 + K^+ K^-\big)\, \varepsilon.
$$

Protože (D, ξ) bylo libovolné δ_ε–jemné dělení, plyne odtud už, že existuje integrál $\int_a^b g \, \mathrm{d}[f]$ a platí (5.37). $\square$