Kapitola 1

Funkce s konečnou variací.

Výklad v této kapitole se opírá zejména o monografie V. Jarníka *Diferenciální počet II* [5, Kapitola V] a *Integrální počet II* [6, Kapitola V] a dále o odstavec II.6 v monografii T.H.Hildebrandta *Theory of Integration* [3] a kapitolu XIII v monografii Š. Schwabika *Integrace v R (Kurzweilova teorie)* [9].

1.1. Definice. Pro danou funkci $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ a dělení D intervalu $[a,b]$,

$$D=\{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_m\}\in\mathscr{D}[a,b],$$

definujeme

$$V(f,D)=\sum_{j=1}^{\nu(d)}|f(\alpha_j)-f(\alpha_{j-1})| \tag{1.1}$$

a

$$\operatorname{var}_a^b f=\sup_{D\in\mathscr{D}[a,b]} V(f,D). \tag{1.2}$$

Je-li $a=b$, definujeme $\operatorname{var}_a^b f=\operatorname{var}_a^a f=0$. Veličinu $\operatorname{var}_a^b f$ nazýváme *variace funkce* f na intervalu $[a,b]$. Je-li $\operatorname{var}_a^b f<\infty$, říkáme, že funkce f má *konečnou variaci na* $[a,b]$. Množinu funkcí s konečnou variací na $[a,b]$ značíme $\mathbb{BV}[a,b]$.

1.2. Cvičení. Dokažte následující vlastnosti variace a funkcí s konečnou variací.

(i) Pro každou funkci $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ je $\operatorname{var}_a^b f\ge 0$.

(ii) Pro libovolné dvě funkce $f_1,\ f_2:[a,b]\to\mathbb{R}$ a reálné číslo c platí

$$\operatorname{var}_a^b(f_1+f_2)\le\operatorname{var}_a^b f_1+\operatorname{var}_a^b f_2 \quad\text{a}\quad \operatorname{var}_a^b(c\,f_1)=|c|\operatorname{var}_a^b f_1.$$

(iii) Je-li $[c,d]\subset[a,b]$, pak pro každou funkci $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ platí

$$|f(d)-f(c)|\le\operatorname{var}_c^d f\le\operatorname{var}_a^b f.$$

(iv) Pro každou funkci $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ platí

$$|f(x)|\le\|f\|\le|f(a)|+\operatorname{var}_a^b f \quad\text{pro}\quad x\in[a,b].$$

Každá funkce $f\in\mathbb{BV}[a,b]$ je tedy ohraničená na $[a,b]$.

(v) $\operatorname{var}_a^b f = 0 \iff f(x) \equiv f(a)$ na $[a,b]$.

(vi) Zavedeme-li pro funkce z množiny $\mathbb{BV}[a,b]$ obvyklým způsobem operace sčítání a násobení skalárem (viz 0.(vi)), stane se lineárním normovaným prostorem vzhledem k těmto operacím a vzhledem k normě $\|.\|_{\mathbb{BV}}$ definované předpisem

$$f \in \mathbb{BV}[a,b] \to \|f\|_{\mathbb{BV}} = |f(a)| + \operatorname{var}_a^b f.$$

(vii) Pro každou funkci f monotonní na $[a,b]$ platí $\operatorname{var}_a^b f = |f(b) - f(a)|$.

(viii) Pro libovolná dělení D' a D'' intervalu $[a,b]$ taková, že $D'' \subset D'$ a libovolnou funkci $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ je $V(f,D'') \le V(f,D')$.

(ix) $\operatorname{var}_a^b f = d \in \mathbb{R} \iff (\forall \varepsilon > 0\ \exists\, D_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b] : D_\varepsilon \subset D \implies d - \varepsilon \le V(f,D) \le d)$.

(x) $\operatorname{var}_a^b f = \infty \iff (\forall\, K > 0\, \exists\, D_K \in \mathscr{D}[a,b] : V(f,D_K) \ge K)$.

(xi) Pro libovolné dělení $D_0 \in \mathscr{D}[a,b]$ platí $\operatorname{var}_a^b f = \sup_{D \supset D_0} V(f,D)$.

(xii) Dokažte Větu 1.3.

1.3. Věta. *Pro každé $c \in (a,b)$ a každou funkci $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ platí:*

$$\operatorname{var}_a^b f = \operatorname{var}_a^c f + \operatorname{var}_c^b f.$$

$\square$

1.4. Věta. *$f \in \mathbb{BV}[a,b]$ tehdy a jen tehdy, když existují funkce f_1 a f_2 neklesající na $[a,b]$ a takové, že platí $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ pro každé $x \in [a,b]$.*

D ů k a z . Stačí dokázat, že pro každou funkci $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ existují funkce f_1 a f_2 neklesající na $[a,b]$ a takové, že platí

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) \quad \text{na } [a,b].$$

Nechť tedy $f \in \mathbb{BV}[a,b]$. Položme

$$f_1(x) = \operatorname{var}_a^x f \quad \text{a} \quad f_2(x) = f_1(x) - f(x) \quad \text{pro } x \in [a,b].$$

Potom f_1 je evidentně neklesající na $[a,b]$. Dále, pro $x_2 \ge x_1$ máme vzhledem ke Větě 1.3

$$f_2(x_2) = f_1(x_1) + \operatorname{var}_{x_1}^{x_2} f - f(x_2)$$

a

$$f_2(x_2) - f_2(x_1) = \operatorname{var}_{x_1}^{x_2} f - (f(x_2) - f(x_1)) \ge 0,$$

t.zn., že f_2 je také neklesající na $[a,b]$. $\square$

1.5. Cvičení. Nechť $f \in \mathbb{BV}[a,b]$. Dokažte, že funkce

$$p(x) = \sup_{D \in \mathscr{D}[a,x]} \sum_{j=1}^{\nu(d)} (f(\alpha_j) - f(\alpha_{j-1}))^+$$

a

$$n(x) = \sup_{D \in \mathscr{D}[a,x]} \sum_{j=1}^{\nu(d)} (f(\alpha_j) - f(\alpha_{j-1}))^-$$

jsou obě neklesající a nezáporné na $[a,b]$ a platí

$$f(x) = f(a) + p(x) - n(x) \quad \text{a} \quad \operatorname{var}_a^x f = p(x) + n(x) \quad \text{pro každé } \ x \in [a,b].$$

1.6. Důsledek. *Pro každou funkci $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ a pro všechna $t \in [a,b)$ a $s \in (a,b]$ existují konečné limity*

$$f(t+) = \lim_{\tau \to t+} f(\tau) \quad a \quad f(s-) = \lim_{\tau \to s-} f(\tau)$$

(tj. f může mít v $[a,b]$ pouze nespojitosti 1.druhu).

D ů k a z plyne z Věty 1.4 a z toho, že uvedené limity existují pro každou funkci monotonní na $[a,b]$. Např. je-li f neklesající na $[a,b]$, $t \in (a,b]$, a $t_n \searrow t$ (tj. $\{t_n\}$ je nerostoucí posloupnost bodů z $(t,b]$ konvergující k t), pak

$$\lim_{n \to \infty} f(t_n) = \inf_{n \in \mathbb{N}} f(t_n).$$

□

1.7. Věta. *Každá funkce $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ má nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti na intervalu $[a,b]$.*

D ů k a z plyne z Důsledku 1.6 a z následujícího Lemmatu. □

Lemma. *Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval, $f : J \to \mathbb{R}$ a M je množina bodů nespojitosti 1. druhu funkce f v J. Potom M je nejvýše spočetná.*

D ů k a z . Označme

$$M^+ = \{x \in J : f(x+) \neq f(x)\}, \qquad M^- = \{x \in J : f(x-) \neq f(x)\}$$

a

$$M_1^+ = \{x \in M^+ : f(x+) > f(x)\}, \quad M_2^+ = \{x \in M^+ : f(x+) < f(x)\}.$$

Potom je $M = M^+ \cup M^-$ a $M^+ = M_1^+ \cup M_2^+$. Uspořádejme množinu $\mathbb{P}$ racionálních čísel tak, aby platilo $\mathbb{P} = \{r_k\}_{k=1}^{\infty}$. Dále, definujme funkci $r : M_1^+ \to \mathbb{P}$ předpisem

$$r(x) = r_j \iff r_j \in (f(x), f(x+)) \ \wedge \ \{r_1, r_2, \ldots, r_{j-1}\} \cap (f(x), f(x+)) = \emptyset$$

a pro každé $q \in \mathbb{P}$ označme

$$r_{-1}(q) = \{x \in M_1^+ : r(x) = q\}.$$

Máme

$$M_1^+ = \bigcup_{q \in \mathbb{P}} r_{-1}(q).$$

Ukážeme-li tedy, že každá množina $r_{-1}(q)$, $q \in \mathbb{P}$, je spočetná, budeme mít současně také dokázáno, že i množina M_1^+ je spočetná.

Nechť je tedy dáno libovolné $q \in \mathbb{P}$. Vzhledem k definici množiny M_1^+ a zobrazení r, pro každé $x \in r_{-1}(q)$ existuje $\delta(x) > 0$ takové, že $x < y < x + \delta(x) \implies f(y) > r(x)$. Jsou-li x_1, $x_2 \in r_{-1}(q)$ takové, že $x_1 < x_2$ a $r(x_1) = r(x_2) = q$, pak musí platit

$$(x_1, x_1 + \delta(x_1)) \cap (x_2, x_2 + \delta(x_2)) = \emptyset.$$

Vskutku, kdyby bylo $x_1 < x_2 < x_1 + \delta(x_1)$, bylo by též (vzhledem k definici δ)

$$q = r(x_1) < f(x_2) < r(x_2) = q,$$

spor. Systém intervalů $\{(x, x + \delta(x)),\ x \in r_{-1}(q)\}$ je tedy disjunktní. V každém z nich můžeme zvolit jediné racionální číslo $r \in (x, x + \delta(x))$ a tím definovat prosté zobrazení $r_{-1}(q)$ do $\mathbb{P}$. To znamená, že každá množina $r_{-1}(q)$, $q \in \mathbb{P}$, je spočetná.

b) Protože $M_2^+ = \{x \in J :\, - f(x) < -f(x+)\}$, můžeme použít část a) tohoto důkazu k důkazu spočetnosti množiny M_2^+.

c) Konečně, $M^- = \{x \in J : f(-x) \neq f(-x+)\}$, takže podle částí a)–b) tohoto důkazu je také M^- spočetná množina. □

1.8. Cvičení. Přesvědčete se, že důkaz předešlého lemmatu v sobě obsahuje též důkaz následujícího tvrzení:

Každý disjunktní systém intervalů v $\mathbb{R}$ je spočetný.

1.9. Věta. *Nechť* $f \in \mathbb{BV}[a,b]$. *Potom*

$$\sum_{t \in [a,b)} |\Delta^+ f(t)| + \sum_{t \in (a,b]} |\Delta^- f(t)| < \infty\,. \tag{1.3}$$

D ů k a z . Nechť W značí množinu bodů nespojitosti funkce f ležících v otevřeném intervalu (a,b). Podle Věty 1.7 je W nejvýše spočetná. Je-li W konečná, je tvrzení věty evidentní. Nechť $W = \{w_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Předpokládejme, že f je neklesající. Potom

$$\sum_{t \in [a,b)} |\Delta^+ f(t)| + \sum_{t \in (a,b]} |\Delta^- f(t)| = \Delta^+ f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} (\Delta^+ f(w_k) + \Delta^- f(w_k)) + \Delta^- f(b).$$

Nechť $n \in N$ a nechť σ_k, $k = 0, 1, \ldots, n+1$, jsou body intervalu $[a,b]$ takové, že platí

$$a = \sigma_0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_n < \sigma_{n+1} = b \quad \text{a} \quad \{\sigma_k\}_{k=0}^{n+1} = \{a\} \cup \{w_k\}_{k=1}^{n} \cup \{b\}.$$

Zvolme dále t_k, $k = 1, 2, \ldots, n+1$, tak, aby platilo

$$a < t_1 < \sigma_1 < t_2 < \sigma_2 < \cdots < \sigma_n < t_{n+1} < b.$$

Potom

$$\begin{aligned}
&\Delta^+ f(a) + \sum_{k=1}^{n} \big(\Delta^+ f(w_k) + \Delta^- f(w_k)\big) + \Delta^- f(b) \\
&\quad = f(a+) - f(a) + f(\sigma_1) - f(\sigma_1-) + f(\sigma_1+) - f(\sigma_1) \\
&\qquad + \cdots + f(\sigma_n+) - f(\sigma_n) + f(b) - f(b-) \\
&\quad \le f(a+) - f(a) + f(t_1) - f(a+) + f(\sigma_1-) - f(t_1) + f(\sigma_1) - f(\sigma_1-) \\
&\qquad + f(\sigma_1+) - f(\sigma_1) + f(t_2) - f(\sigma_1+) + f(\sigma_2-) - f(t_2) \\
&\qquad + \cdots + f(\sigma_n+) - f(\sigma_n) + f(t_n) - f(\sigma_n+) + f(b-) - f(t_n) + f(b) - f(b-) \\
&\quad = f(b) - f(a).
\end{aligned}$$

Pro libovolné $n \in N$ tedy platí

$$\Delta^+ f(a) + \sum_{k=0}^{n} \big(\Delta^+ f(w_k) + \Delta^- f(w_k)\big) + \Delta^- f(b) \le f(b) - f(a)$$

a tudíž

$$\sum_{t \in [a,b)} |\Delta^+ f(t)| + \sum_{t \in (a,b]} |\Delta^- f(t)| \le f(b) - f(a).$$

Tvrzení (1.3) tedy platí pro každou funkci f neklesající na $[a, b]$. Důkaz věty nyní můžeme snadno dokončit použitím Věty 1.4. □

1.10 . Cvičení. Pomocí rozkladu $f(x) = f(a) + p(x) - n(x)$ ze Cvičení 1.5 dokažte, že pro každou funkci $f \in \mathbb{BV}[a, b]$ platí

$$\sum_{t \in [a,b)} |\Delta^+ f(t)| + \sum_{t \in (a,b]} |\Delta^- f(t)| \le \operatorname{var}_a^b f\,. \tag{1.4}$$

1.11 . Věta. *Prostor $\mathbb{BV}[a, b]$ je Banachův prostor (tj. úplný normovaný prostor).*

D ů k a z . $\mathbb{BV}[a, b]$ je lineární normovaný prostor vzhledem k normě

$$f \in \mathbb{BV}[a, b] \to \|f\|_{\mathbb{BV}} = |f(a)| + \operatorname{var}_a^b f$$

(viz Cvičení 1.2 (vi)). Zbývá tedy dokázat, že $\mathbb{BV}[a, b]$ je úplný, tj. že každá posloupnost cauchyovská v $\mathbb{BV}[a, b]$ má v $\mathbb{BV}[a, b]$ limitu. Předpokládejme tedy, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{BV}[a, b]$ je cauchyovská v $\mathbb{BV}[a, b]$.

a) Potom platí

$$\begin{cases} \forall\,\varepsilon > 0 \ \exists\, n_\varepsilon : \\ \quad n, m \ge n_\varepsilon \implies |f_n(x) - f_m(x)| \le \|f_n - f_m\|_{\mathbb{BV}} < \varepsilon \ \text{ pro všechna } \ x \in [a, b]. \end{cases} \tag{1.5}$$

Speciálně je tedy pro každé $x \in [a, b]$ posloupnost reálných čísel $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ cauchyovská a tudíž pro každé $x \in [a, b]$ existuje konečná limita

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

b) Nechť je dáno libovolné $\varepsilon > 0$ a nechť $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ má vlastnost (1.5). Potom pro každé $x \in [a, b]$ máme také

$$|f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f_{n_\varepsilon}(x)| \le \varepsilon$$

a tudíž pro každé $n \ge n_\varepsilon$ a každé $x \in [a, b]$ platí

$$|f(x) - f_n(x)| \le |f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)| + |f_{n_\varepsilon}(x) - f_n(x)| < 2\,\varepsilon.$$

To ovšem znamená, že

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0,$$

neboli, posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje k f stejnoměrně na $[a, b]$.

c) Číselná posloupnost $\{\operatorname{var}_a^b f_n\}_{n=1}^\infty$ je ohraničená. Podle Bolzanovy-Weierstraßovy věty z ní tedy lze vybrat podposloupnost $\{\operatorname{var}_a^b f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, pro kterou platí:

$$0 \le \lim_{k\to\infty} \operatorname{var}_a^b f_{n_k} = d < \infty,$$

tj.

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists\, k_\varepsilon : k \ge k_\varepsilon \wedge D \in \mathscr{D}[a, b] \implies V(f_{n_k}, D) < d + \varepsilon$$

a

$$\forall\varepsilon > 0 \ \forall D \in \mathscr{D}[a, b] : V(f, D) = \lim_{k\to\infty} V(f_{n_k}, D) \le d + \varepsilon.$$

Odtud ovšem už plyne, že je

$$\operatorname{var}_a^b f = \sup_{D \in \mathscr{D}[a,b]} V(f, D) \le d < \infty,$$

tj. $f \in \mathbb{BV}[a, b]$.

d) Podle (1.5) máme

$$\begin{cases} \forall\,\varepsilon > 0 \ \exists\, n_\varepsilon : \\ \quad n, m \ge n_\varepsilon \implies V(f_n - f_m, D) \le \operatorname{var}_a^b(f_n - f_m(x)) < \varepsilon \text{ pro každé } \ D \in \mathscr{D}[a, b]. \end{cases}$$

Tudíž, je-li $m \geq n_\varepsilon$, pak pro každé $D \in \mathscr{D}[a,b]$ platí

$$V(f - f_m, D) = \lim_{n\to\infty} V(f_n - f_m, D) \leq \varepsilon$$

neboli

$$\operatorname{var}_a^b(f - f_m) \leq \varepsilon.$$

To ovšem znamená, že

$$\lim_{m\to\infty} \|f - f_m\|_{\mathbb{BV}} = 0,$$

což zbývalo ještě dokázat. □

1.12. Cvičení. Definujme pro $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \ 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ x\,\sin(\frac{\pi}{x}) & \text{pro } \ \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Ukažte, že $f_n \in \mathbb{BV}[0,1]$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,1]$, kde

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \ x = 0 \\ x\,\sin(\frac{\pi}{x}) & \text{pro } \ x > 0 \end{cases},$$

a přitom f nemá konečnou variaci na $[0,1]$.

Nyní se budeme věnovat vlastnostem funkcí s konečnou variací vzhledem k derivování. Nejprve připomeňme pojem množin s nulovou mírou.

1.13. Definice. Množina $M \subset \mathbb{R}$ má *nulovou míru* ($\mu(M) = 0$), když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje spočetný systém otevřených intervalů$\{I_j,\ j \in \mathbb{N}\}$ takový, že je

$$M \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \quad \text{a} \quad \sum_{j=1}^{\infty} |I_j| < \varepsilon.$$

Řekneme, že nějaká vlastnost platí *skoro všude* (s.v.) na intervalu $[a,b]$, jestliže existuje množina $M \subset [a,b]$ nulové míry taková, že tato vlastnost platí pro každé $x \in [a,b] \setminus M$.

1.14. Cvičení.

(i) Každá spočetná podmnožina S v $\mathbb{R}$ má nulovou míru.

(ii) Sjednocení spočetně mnoha množin nulové míry má nulovou míru.

1.15. Věta. *Každá funkce $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ má vlastní derivaci $f'(x)$ pro s.v. $x \in [a,b]$.*

Důkaz Věty 1.15 je technicky komplikovaný. Odsouváme ho proto do Dodatku 9.1.

1.16. Poznámka. Lze dokonce dokázat (viz [6, Věty 84 a 91]), že je-li $f \in \mathbb{BV}[a,b]$, pak $f' \in \mathbb{L}^1[a,b]$. **ALE !!!!** Obecně neplatí pro každou funkci $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ zdánlivě evidentní rovnost

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Existují totiž funkce $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ nekonstantní na $[a,b]$ a přitom takové, že platí $f'(x) = 0$ s.v. na $[a,b]$.

1.17. Definice. Funkce $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ se nazývá *singulární*, jestliže platí $f'(x) = 0$ pro s.v. $x \in [a,b]$.

Nejjednodušším příkladem nekonstantních singulárních funkcí jsou funkce tvaru

$$f(x) = \chi_{[a,c]}(x),$$

kde $c \in (a,b)$. Jejich zobecněním jsou třídy *jednoduchých skokových funkcí* (anglicky *step functions*) resp. *skokových funkcí* (anglicky *break functions*).

1.18. Definice. Funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je *jednoduchá skoková funkce na* $[a,b]$ ($f \in \mathbb{S}[a,b]$), jestliže existuje dělení $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \in \mathscr{D}[a,b]$ takové, že na každém jeho dílčím otevřeném intervalu (α_{j-1}, α_j) je f konstantní.

Funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je *skoková funkce na* $[a,b]$ ($f \in \mathbb{B}[a,b]$), jestliže existují $c \in \mathbb{R}$, $K \subset \mathbb{N}$ a

$$\{w_k\}_{k \in K} \subset [a,b], \quad \{c_k\}_{k \in K} \subset \mathbb{R} \quad \text{a} \quad \{d_k\}_{k \in K} \subset \mathbb{R}$$

takové, že platí

$$\sum_{k \in K} (|c_k| + |d_k|) < \infty$$

a

$$f(x) = c + \sum_{a < w_k \le x} c_k + \sum_{a \le w_k < x} d_k \quad \text{pro} \quad x \in [a,b]. \tag{1.6}$$

1.19. Cvičení.

(i) Funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je jednoduchá skoková funkce na $[a,b]$ právě tehdy, když existuje dělení $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ intervalu $[a,b]$ takové, že

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m} f(\alpha_j)\, \chi_{[\alpha_j]}(x) + \sum_{j=1}^{m} f\Big(\frac{\alpha_{j-1} + \alpha_j}{2}\Big)\, \chi_{(\alpha_{j-1}, \alpha_j)}(x)$$

pro $x \in [a,b]$.

(ii) Pro každou $f \in \mathbb{B}[a,b]$ tvaru (1.6) platí

$$\operatorname{var}_a^b f = \sum_{k \in K} (|c_k| + |d_k|)$$

a tudíž $\mathbb{S}[a,b] \subset \mathbb{B}[a,b] \subset \mathbb{BV}[a,b]$.

1.20. Věta. *Každá skoková funkce na $[a,b]$ je singulární na $[a,b]$.*

D ů k a z . Nechť $c\in\mathbb{R}$, $K\subset\mathbb{N}$, $\{w_k\}_{k\in K}\subset[a,b]$, $\sum_{k\in K}(|c_k|+|d_k|)<\infty$ a

$$f(x)=c+\sum_{a<w_k\le x}c_k+\sum_{a\le w_k<x}d_k\quad\text{na }[a,b].$$

Definujme pro $x\in[a,b]$:

$$v(x)=\sum_{a<w_k\le x}|c_k|+\sum_{a\le w_k<x}|d_k|\quad\text{na }[a,b].$$

Potom je

$$v(x)=\sum_{k\in K}v_k(x)\quad\text{na}\ \ [a,b],$$

kde

$$v_k(x)=\begin{cases}0 & \text{když}\ \ a\le x<w_k,\\ |c_k| & \text{když}\ \ x=w_k,\\ |c_k|+|d_k| & \text{když}\ \ w_k<x\le b.\end{cases}$$

Každá funkce v_k je neklesající na $[a,b]$ a $v_k'(x)=0$ pro $x\ne w_k$. Máme tedy

$$v'(x)=\sum_{k\in K}v_k'(x)=0\quad\text{pro}\ \ x\notin\{w_k\}_{k\in K},\quad\text{tj. pro s.v. }x\in[a,b].$$

Protože pro všechna $x,y\in[a,b]$, $x\ne y$, zřejmě platí

$$\Big|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\Big|\le\Big|\frac{v(x)-v(y)}{x-y}\Big|,$$

plyne odsud tvrzení věty. □

1.21 . Poznámka. Příklad funkce, která je spojitá, neklesající a singulární na daném intervalu, je uveden v [5, V.9,cvičení 4].

1.22. Lemma. *Nechť $f\in\mathbb{BV}[a,b]$, $K\subset\mathbb{N}$ a nechť $\{w_k\}_{k\in K}$, je množina bodů nespojitosti funkce f v $[a,b]$. Definujme*

$$f^{\,\mathrm{B}}(x)=\sum_{a<w_k\le x}\Delta^-f(w_k)+\sum_{a\le w_k<x}\Delta^+f(w_k)\quad\textit{pro}\ \ x\in[a,b].\tag{1.7}$$

Potom je $f^{\,\mathrm{B}}\in\mathbb{BV}[a,b]$ a funkce $f-f^{\,\mathrm{B}}$ je spojitá na $[a,b]$.

D ů k a z . Podle Věty 1.9 (viz též Cvičení 1.19 (ii)) máme

$$\operatorname{var}_a^b f^{\,\mathrm{B}}=\sum_{k\in K}(|\Delta^-f(w_k)|+|\Delta^+f(w_k)|)<\infty$$

a tudíž $f^{\mathrm{B}} \in \mathbb{B}[a,b] \subset \mathbb{BV}[a,b]$. Dále, pro každé $x \in [a,b)$ máme

$$f^{\mathrm{B}}(x+) = \sum_{a < w_k \le x} \Delta^- f(w_k) + \sum_{a \le w_k \le x} \Delta^+ f(w_k).$$

Proto také

$$f^{\mathrm{B}}(x+) - f^{\mathrm{B}}(x) = \Delta^+ f(x)$$

a

$$(f(x+) - f^{\mathrm{B}}(x+)) - (f(x) - f^{\mathrm{B}}(x)) = \Delta^+ f(x) - \Delta^+ f(x) = 0.$$

Podobně, pro každé $x \in (a,b]$ je

$$f^{\mathrm{B}}(x-) = \sum_{a < w_k < x} \Delta^- f(w_k) + \sum_{a \le w_k < x} \Delta^+ f(w_k)),$$

a tedy

$$(f(x) - f^{\mathrm{B}}(x)) - (f(x-) - f^{\mathrm{B}}(x-)) = \Delta^- f(x) - \Delta^- f(x) = 0.$$

□

1.23. Definice. Funkce f^{B} přiřazená k f podle definice (1.7) budeme nazývat *skoková část* funkce f. Rozdíl $f - f^{\mathrm{B}}$ nazýváme *spojitá část* funkce f a značíme f^{C}.

1.24. Poznámka. Podle Lemmatu 1.22 lze každou funkci s konečnou variací rozložit na součet funkce spojité a funkce skokové. Takový rozklad se nazývá *Jordanův rozklad* funkce s konečnou variací. Obecně jsou skoková resp. spojitá část z Jordanova rozkladu určeny jednoznačně až na konstantu. Všimněme si ještě, že použitím charakteristických funkcí podintervalů v $[a,b]$ lze definici (1.7) ekvivalentně zapsat též ve tvaru

$$f^{\mathrm{B}}(x) = \sum_{k \in K} \Delta^- f(w_k)\, \chi_{[w_k,b]}(x) + \sum_{k \in K} \Delta^+ f(w_k)\, \chi_{(w_k,b]}(x).$$

1.25. Lemma. *Nechť* $f \in \mathbb{BV}[a,b]$, $K \subset \mathbb{N}$, $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ *je množina bodů nespojitosti funkce* f *v intervalu* $[a,b]$ *a nechť* f^{B} *je definována jako v Lemmatu* 1.22. *Definujme dále*

$$f_n^{\mathrm{B}}(x) = \sum_{k \in K \cap [1,n]} \Delta^- f(w_k)\, \chi_{[w_k,b]}(x) + \sum_{k \in K \cap [1,n]} \Delta^+ f(w_k)\, \chi_{(w_k,b]}(x)$$

pro $n \in \mathbb{N}$ *a* $x \in [a,b]$.

Potom je $f_n^{\mathrm{B}} \in \mathbb{S}[a,b]$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *a platí*

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{var}_a^b (f^{\mathrm{B}} - f_n^{\mathrm{B}}) = 0.$$

D ů k a z plyne z nerovnosti

$$\operatorname{var}_a^b (f^{\mathrm{B}} - f_n^{\mathrm{B}}) \le \sum_{k \in K \setminus [1,n]} (|\Delta^- f(w_k)| + |\Delta^+ f(w_k)|)$$

a z Věty 1.9. □

1.26. Věta (Helly). *Nechť* $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{BV}[a,b]$, $\varkappa \in \mathbb{R}$,

$$|f_n(a)| \le \varkappa \quad a \quad \operatorname{var}_a^b f_n \le \varkappa \quad \textit{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Potom existují funkce $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ *a podposloupnost*

$$\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

takové, že platí

$$|f(a)| \le \varkappa, \quad \operatorname{var}_a^b f \le \varkappa \quad a \quad \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x) \quad \textit{na } [a,b].$$

K důkazu Hellyovy věty využijeme následujících dvou lemmat.

Lemma 1. *Nechť*

$$|f_n(x)| \le M < \infty \quad \textit{na} \quad [a,b] \quad \textit{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Potom pro každou spočetnou $P \subset [a,b]$ *existuje podposloupnost* $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ *posloupnosti* $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ *taková, že limita*

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(p)$$

je konečná pro všechna $p \in P$.

D ů k a z . Nechť $P = \{p_k\}_{k=1}^\infty$. Máme $|f_n(p_k)| \le M < \infty$ pro všechna $n, k \in \mathbb{N}$. Podle Bolzanovy-Weierstraßovy věty lze tedy vybrat z $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ podposloupnost $\{f_{n_{k,1}}\}_{k=1}^\infty$, pro níž existuje konečná limita

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_{k,1}}(p_1) = q_1 \in \mathbb{R}.$$

Podobně existují

$$\{f_{n_{k,2}}\}_{k=1}^\infty \subset \{f_{n_{k,1}}\}_{k=1}^\infty \quad \text{a} \quad q_2 \in \mathbb{R}$$

tak, že

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_{k,2}}(p_2) = q_2 \in \mathbb{R}.$$

Takto pro každé $j \in \mathbb{N}$ najdeme posloupnosti

$$\{f_{n_{k,j}}\}_{k=1}^\infty \subset \{f_{n_{k,j-1}}\}_{k=1}^\infty \quad \text{a} \quad q_j \in \mathbb{R}$$

takové, že platí

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_{k,\ell}}(p_\ell) = q_\ell \in \mathbb{R} \quad \text{pro každé } \ell \in \{1, 2, \dots, j\}.$$

Položme $f_{n_k} = f_{n_{k,k}}$ pro $k \in \mathbb{N}$. Potom

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(p_j) = q_j \in \mathbb{R} \quad \text{pro každé } j \in \mathbb{N}.$$

$\square$

Lemma 2. *Předpokládejme, že všechny funkce f_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou neklesající na $[a,b]$ a že existuje $M \in (0,\infty)$ takové, že $||f_n|| \le M$ platí pro každé $n \in \mathbb{N}$. Potom existují podposloupnost*

$$\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$$

a funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ neklesající na $[a,b]$ takové, že platí

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x) \quad \textit{na} \;\; [a,b].$$

D ů k a z . Nechť $P = (\mathbb{P} \cap (a,b)) \cup [a] \cup [b]$ je množina racionálních čísel z intervalu (a,b) doplněná o body a, b. Množina P je spočetná a $[a,b] \setminus P \subset (a,b)$. Podle Lemmatu 1 existují podposloupnost $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ a zobrazení $\varphi : P \to \mathbb{R}$ takové, že platí

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(p) = \varphi(p) \quad \text{pro všechna } p \in P.$$

Zřejmě platí

$$\varphi(p') \le \varphi(p'') \quad \text{pro všechna } p', p'' \in P, p' \le p''.$$

Dále, definujme pro $x \in (a,b) \setminus P$

$$\varphi(x) = \sup_{p\,\in\, P\cap[a,x)} \varphi(p).$$

Potom máme

$$\varphi(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) \quad \text{pro} \;\; x \in P \quad \text{a} \quad \varphi(x) = \lim_{\substack{p\to x- \\ p\,\in\, P}} \varphi(p)$$

a φ je definovaná a neklesající na $[a,b]$. Ukážeme, že v každém bodě $x_0 \in (a,b)$, ve kterém je funkce φ spojitá platí

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_0) = \varphi(x_0). \tag{1.8}$$

Vskutku, nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Potom existuje $\delta_\varepsilon > 0$ takové, že

$$x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0 + \delta_\varepsilon \implies \varphi(x_0) - \varepsilon < \varphi(x) < \varphi(x_0) + \varepsilon.$$

Zvolíme-li $r' \in P \cap (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0)$ a $r'' \in P \cap (x_0, x_0 + \delta_\varepsilon)$, bude platit

$$\varphi(x_0) - \varepsilon < \varphi(r') \le \varphi(x_0) \le \varphi(r'') < \varphi(x_0) + \varepsilon.$$

Dále, zvolme k_ε tak, aby bylo

$$\varphi(r') - \varepsilon < f_{n_k}(r') < \varphi(r') + \varepsilon \quad \text{a} \quad \varphi(r'') - \varepsilon < f_{n_k}(r'') < \varphi(r'') + \varepsilon$$

pro každé $k \ge k_\varepsilon$. Potom, pro každé $k \ge k_\varepsilon$ dostaneme také

$$\begin{aligned}\varphi(x_0) - 2\varepsilon < \varphi(r') - \varepsilon < f_{n_k}(r') \le f_{n_k}(x_0)\\ \le f_{n_k}(r'') < \varphi(r'') + \varepsilon < \varphi(x_0) + 2\varepsilon,\end{aligned}$$

čili platí (1.8).

Dokázali jsme tedy, že značí-li Q množinu bodů nespojitosti funkce φ v (a,b), pak

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = \varphi(x) \quad \text{pro} \quad x \in [a,b] \setminus Q.$$

Podle Věty 1.7 je množina Q spočetná. Můžeme tedy použít ještě jednou Lemma 1 a dokázat tak existenci vybrané posloupnosti

$$\{f_{n_{k_\ell}}\}_{\ell=1}^\infty \subset \{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty,$$

která má limitu $\psi(x) \in \mathbb{R}$ pro každé $x \in Q$. Definujeme-li tedy

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{když} \;\; x \in [a,b] \setminus Q,\\ \psi(x) & \text{když} \;\; x \in Q,\end{cases}$$

bude

$$\lim_{\ell} f_{n_{k_\ell}}(x) = f(x) \quad \text{na } [a,b]$$

a protože funkce, která je na intervalu $[a,b]$ bodovou limitou posloupnosti funkcí neklesajících na $[a,b]$, je také neklesající, lemma je dokázáno. □

Důkaz Věty 1.26. Podle Lemmatu 2 (a s přihlédnutím ke Cvičení 1.5) existují funkce $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ a podposloupnost $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ takové, že

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x) \text{ na } [a,b].$$

Zřejmě je $|f(a)| \le \varkappa$. Dále, protože pro každé dělení $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \in \mathscr{D}[a,b]$ máme

$$V(f,D) = \lim_{k\to\infty} V(f_{n_k}, D) \le \lim_{k\to\infty} \operatorname{var}_a^b f_{n_k} \le \varkappa,$$

platí také $\operatorname{var}_a^b f \le \varkappa$. □