Kapitola 6

Spojité lineární funkcionály na prostorech regulovaných funkcí

Úvodem připomeňme několik základních pojmů.

Nechť $\mathbb{X}$ a $\mathbb{Y}$ jsou lineární (vektorové) prostory. O zobrazení

$$\beta\colon x\in\mathbb{X},\, y\in\mathbb{Y}\to\beta(x,y)\in\mathbb{R}$$

řekneme, že je *bilineární*, jestliže platí

$$\begin{aligned}
&\beta(x_1+x_2,y)=\beta(x_1,y)+\beta(x_2,y) && \text{pro všechna } \ x_1,x_2\in\mathbb{X},\ y\in\mathbb{Y},\\
&\beta(\lambda\, x,y)=\lambda\,\beta(x,y) && \text{pro všechna } \ x\in\mathbb{X},\ y\in\mathbb{Y},\ \lambda\in\mathbb{R},\\
&\beta(x,y_1+y_2)=\beta(x,y_1)+\beta(x,y_2) && \text{pro všechna } \ x\in\mathbb{X},\ y_1,y_2\in\mathbb{Y},\\
&\beta(x,\lambda\, y)=\lambda\,\beta(x,y) && \text{pro všechna } \ x\in\mathbb{X},\ y\in\mathbb{Y},\ \lambda\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Prostory $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ tvoří *duální pár vzhledem k bilineárnímu zobrazení* β, jestliže platí

$$\begin{aligned}
&\beta(x,y)=0 \ \text{ pro všechna } \ x\in\mathbb{X} \implies y=0,\\
&\beta(x,y)=0 \ \text{ pro všechna } \ y\in\mathbb{X} \implies x=0.
\end{aligned}$$

Lineárním zobrazením lineárního prostoru $\mathbb{X}$ do $\mathbb{R}$ říkáme *lineární funkcionály na* $\mathbb{X}$. Pro libovolné lineární funkcionály Φ, Ψ na $\mathbb{X}$, $\lambda\in\mathbb{R}$ a $x\in\mathbb{X}$ definujeme

$$(\Phi+\Psi)(x)=\Phi(x)+\Psi(x) \quad \text{a} \quad (\lambda\,\Phi)(x)=\lambda\,\Phi(x).$$

Množina lineárních funkcionálů na prostoru $\mathbb{X}$ je zřejmě vzhledem k takto zavedeným operacím také lineární prostor. (Nulovým prvkem množiny lineárních funkcionálů na prostoru $\mathbb{X}$ je přirozeně funkcionál $O\colon x\in\mathbb{X}\to 0\in\mathbb{R}$.)

Je-li $\mathbb{X}$ Banachův prostor s normou $x\in\mathbb{X}\to\|x\|_{\mathbb{X}}$, pak lineární funkcionál Φ na $\mathbb{X}$ je spojitý (vzhledem k topologii indukované normou $\|.\|_{\mathbb{X}}$) právě tehdy, když je ohraničený, tj.

$$\sup\{|\Phi(x)|\colon x\in\mathbb{X}, \|x\|_{\mathbb{X}}\le 1\}<\infty.$$

Prostor spojitých lineárních funkcionálů na Banachově prostoru $\mathbb{X}$ značíme $\mathbb{X}^*$ a nazýváme *duální* (nebo též *adjungovaný prostor*) k $\mathbb{X}$. Předpisem

$$\Phi\in\mathbb{X}^*\to\|\Phi\|_{\mathbb{X}^*}=\sup\{|\Phi\, x|\colon x\in\mathbb{X}, \|x\|_{\mathbb{X}}\le 1\}\,.$$

je přirozeně definována norma na $\mathbb{X}^*$ a $\mathbb{X}^*$ je vzhledem k této normě také Banachův prostor. Je známým důsledkem Hahn-Banachovy věty, že dvojice tvořená Banachovým prostorem $\mathbb{X}$ a jeho duálním prostorem $\mathbb{X}^*$ tvoří duální pár vzhledem k bilineárnímu zobrazení

$$x \in \mathbb{X},\ \Phi \in \mathbb{X}^* \to \Phi(x) \in \mathbb{R}.$$

Mezi významné výsledky funkcionální analýzy patří representace spojitých lineárních funkcionálů na některých často používaných prostorech funkcí. Je dobře známo např., že Φ je spojitý lineární funkcionál na $\mathbb{C}[a,b]$ ($\Phi \in (\mathbb{C}[a,b])^*$) právě tehdy, když existuje funkce $p \in \mathbb{BV}[a,b]$ zprava spojitá na $[a,b)$ a taková, že $p\,(a) = 0$ a

$$\Phi(x) = \int_a^b \mathrm{d}[p]\,x \quad \text{pro všechny funkce } x \in \mathbb{C}[a,b].$$

Funkce $p \in \mathbb{BV}[a,b]$ zprava spojité na $(a,b]$ a takové, že $p\,(a) = 0$, se nazývají *normalizované* funkce s konečnou variací a tvoří podprostor v $\mathbb{BV}[a,b]$, který budeme značit $NBV[a,b]$. Prostory $(\mathbb{C}[a,b])^*$ a $NBV[a,b]$ jsou isometricky isomorfní. (To by neplatilo, kdybychom $NBV[a,b]$ nahradili prostorem $\mathbb{BV}[a,b]$ všech funkcí s konečnou variací na $[a,b]$. Pochopitelně, $NBV[a,b]$ lze ale nahradit např. podprostorem $\mathbb{BV}[a,b]$ tvořeným funkcemi spojitými zleva na $(a,b]$, které se anulují v nějakém pevně daném bodě $c \in [a,b]$.) Vzhledem k tomu, se jedná o integraci spojitých funkcí, integrál, který se ve výše uvedené representaci objevuje, je klasický (normový) Riemannův-Stieltjesův integrál. Další dobře známé representace spojitých lineárních prostorů využívají Lebesgueova integrálu:

$$\Phi \in (\mathbb{L}^\alpha[a,b])^* \iff \text{existuje } p \in \mathbb{L}^{\alpha^*}[a,b], \quad \text{takové, že}$$

$$\Phi(x) = \int_a^b p\,x\,\mathrm{d}t \quad \text{pro } x \in \mathbb{L}^\alpha[a,b],$$

$$\Phi \in (AC[a,b])^* \iff \text{existují } q \in \mathbb{R},\ p \in \mathbb{L}^\infty[a,b] \text{ takové, že}$$

$$\Phi(x) = q\,x(a) + \int_a^b p\,x'\,\mathrm{d}t \quad \text{pro } x \in \mathbb{AC}[a,b].$$

Zde, jak je obvyklé, $\mathbb{L}^\alpha[a,b]$ pro $\alpha \in [1,\infty)$, značí prostor funkcí x měřitelných na $[a,b]$ a takových, že

$$\int_a^b |x|^\alpha\,\mathrm{d}t < \infty,$$

přičemž norma na $\mathbb{L}^\alpha[a,b]$ je definována předpisem

$$x \in \mathbb{L}^\alpha[a,b] \to \|x\|_\alpha = \left(\int_a^b |x|^\alpha\,\mathrm{d}t\right)^{1/\alpha}$$

a

$$\alpha^* = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha-1} & \text{jestliže} \quad \alpha > 1, \\ \infty & \text{jestliže} \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

(O tvaru spojitých lineárních funkcionálů na $\mathbb{AC}[a,b]$ jsme se již zmínili v Poznámce 2.5.) Důkazy výše uvedených tvrzení a další podrobnosti lze nalézti ve většině standardních učebnic funkcionální analýzy. Všeobecně dostupná je také on-line verse plzeňských skript [1].

V této kapitole odvodíme obecný tvar spojitých lineárních funkcionálů na některých podprostorech prostoru $\mathbb{G}[a,b]$. Pro začátek si připomeňme, že podle Věty 5.22 je výraz

$$\Phi_\eta(x) = q\,x(a) + \int_a^b p\,\mathrm{d}[x] \tag{6.1}$$

definován pro každou funkci $x \in \mathbb{G}[a,b]$ a každou dvojici $\eta = (p,q) \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$. Navíc, pro každé $\eta \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$, předpis (6.1) definuje ohraničený (a tedy spojitý) lineární funkcionál na $\mathbb{G}[a,b]$.

Snadno ověříme, že předpisem $\eta = (p,q) \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R} \to \|\eta\|_{\mathbb{BV}\times\mathbb{R}} = |q| + \|p\|_{\mathbb{BV}}$ je definována norma na prostoru $\mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ a $\mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ je Banachův prostor vzhledem k této normě. Z formulí uvedených v Příkladech 5.12 (viz též Příklady 5.33 resp. Cvičení 5.34) také snadno odvodíme následující tvrzení.

6.1 . Lemma.

(i) *Pro libovolnou dvojici* $\eta = (p,q) \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ *platí*

$$\begin{cases} \Phi_\eta(1) &= q, \\ \Phi_\eta(\chi_{(\tau,b]}) &= p(\tau) \qquad \textit{když} \;\; \tau \in [a,b), \\ \Phi_\eta(\chi_{[\tau]}) &= 0 \qquad\quad \textit{když} \;\; \tau \in (a,b), \\ \Phi_\eta(\chi_{[b]}) &= p(b). \end{cases} \tag{6.2}$$

(ii) *Pro libovolnou funkci* $x \in \mathbb{G}[a,b]$ *platí*

$$\begin{cases} \Phi_\eta(x) = x(a) & \textit{když} \;\; p \equiv 0 \;\; \textit{na} \;\; [a,b] \;\; \textit{a} \;\; q = 1, \\ \Phi_\eta(x) = x(b) & \textit{když} \;\; p \equiv 1 \;\; \textit{na} \;\; [a,b] \;\; \textit{a} \;\; q = 1, \\ \Phi_\eta(x) = x(\tau-) & \textit{když} \;\; p = \chi_{[a,\tau)} \;\; \textit{na} \;\; [a,b], \; \tau \in (a,b] \;\; \textit{a} \;\; q = 1, \\ \Phi_\eta(x) = x(\tau+) & \textit{když} \;\; p = \chi_{[a,\tau]} \;\; \textit{na} \;\; [a,b], \; \tau \in [a,b) \;\; \textit{a} \;\; q = 1. \end{cases} \tag{6.3}$$

□

Přímým důsledkem vztahů (6.2), (6.3) a Lemmatu 3.13 je následující tvrzení.

6.2. Lemma.

(i) *Jestliže* $\eta = (p,q) \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ *a*

$$\Phi_\eta(x) = 0 \quad \textit{pro každé } x \in \mathrm{Lin}\Big(1, \chi_{(\tau,b]}, \tau \in [a,b), \chi_{[b]}\Big),$$

pak $p\,(t) \equiv 0$ *na* $[a,b]$ *a* $q = 0$.

(ii) *Jestliže* $x \in \mathbb{G}[a,b]$ *a* $\Phi_\eta(x) = 0$ *pro všechny dvojice* $\eta = (p,q) \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$, *pak*

$$x(a) = x(a+) = x(\tau-) = x(\tau+) = x(b-) = x(b) \tag{6.4}$$

platí pro $\tau \in (a,b)$. □

6.3. Poznámka. Všimněme si, že vzhledem k třetímu vztahu v (6.2), můžeme v tvrzení (i) předešlého lemmatu nahradit množinu $\mathrm{Lin}\Big(1, \chi_{(\tau,b]}, \tau \in [a,b), \chi_{[b]}\Big)$ množinami

$$\mathrm{Lin}\Big(1, \chi_{[\tau,b]}, \tau \in [a,b), \chi_{[b]}\Big) \quad \text{resp.} \quad \mathrm{Lin}\Big(1, \tfrac{1}{2}\,\chi_{[\tau]} + \chi_{(\tau,b]}, \tau \in [a,b), \chi_{[b]}\Big)$$

Odtud okamžitě plyne též následující tvrzení, kde symboly $\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$, $\mathbb{G}_{\mathrm{R}}[a,b]$ a $\mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b]$ byly definovány v (3.3).

6.4. Věta. *Dvojice prostorů* X *a* $\mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$, $X = \mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$ *resp.* $X = \mathbb{G}_{reg}[a,b]$ *resp.* $X = \mathbb{G}_{\mathrm{R}}[a,b]$ *tvoří duální páry vzhledem k bilineární formě* $x \in X$, $\eta \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R} \to \Phi_\eta(x)$.

□

Na druhou stranu, máme také

6.5. Lemma. *Jestliže* Φ *je lineární ohraničený funkcionál na* $\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$ *a*

$$p\,(t) = \begin{cases} \Phi(\chi_{(t,b]}) & \textit{když } \ t \in [a,b), \\[2mm] \Phi(\chi_{[b]}) & \textit{když } \ t = b, \end{cases} \tag{6.5}$$

pak $p \in \mathbb{BV}[a,b]$ *a*

$$\left\{ \begin{aligned} & |p\,(a)| + |p\,(b)| + \mathrm{var}_a^b\, p \le 2\, \|\Phi\|_{\mathbb{G}^*_{\mathrm{L}}[a,b]}, \\[2mm] & \quad \textit{kde} \ \ \|\Phi\|_{\mathbb{G}^*_{\mathrm{L}}[a,b]} = \sup\{ |\Phi(x)| : x \in \mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b],\ \|x\| \le 1 \}. \end{aligned} \right. \tag{6.6}$$

D ů k a z . Pro libovolné dělení $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ intervalu $[a,b]$ a libovolný vektor $(c_0, c_1, \dots, c_m.c_{m+1})^T \in \mathbb{R}^{m+2}$ platí

$$\Big| c_0\, p\,(a) + c_{m+1}\, p\,(b) + \sum_{j=1}^{m} c_j\, [p\,(\alpha_j) - p\,(\alpha_{j-1})] \Big|$$

$$= \Big| \Phi\Big(c_0\, \chi_{(a,b]} + c_{m+1}\, \chi_{[b]} - \sum_{j=1}^{m-1} c_j\, \chi_{(\alpha_{j-1},\alpha_j]} + c_m\, \chi_{(\alpha_{m-1},b)} \Big) \Big| = |\Phi(h)|,$$

kde

$$h = c_0\,\chi_{(a,b]} + c_{m+1}\,\chi_{[b]} - \sum_{j=1}^{m-1} c_j\,\chi_{(\alpha_{j-1},\alpha_j]} + c_m\,\chi_{(\alpha_{m-1},b)}.$$

Snadno ověříme, že bude-li $|c_j| \le 1$ pro $j = 0, 1, \dots, m{+}1$, pak bude $\|h\| \le 2$. Zvolíme-li tedy

$$c_0 = \operatorname{sgn} p\,(a), c_{m+1} = \operatorname{sgn} p\,(b), c_j = \operatorname{sgn}(p\,(\alpha_j) - p\,(\alpha_{j-1}))\ \text{pro}\ j = 1, 2, \dots, m\,,$$

získáme vztah

$$|p\,(a)| + |p\,(b)| + V(p, D) \le 2\,\|\Phi\|_{\mathbb{G}^*_{\mathrm{L}}[a,b]} \quad \text{pro každé} \ \ D \in \mathscr{D}\,[a,b].$$

Odtud už plyne, že platí i (6.6). $\square$

Analogicky předchozímu Lemmatu máme také

6.6. Lemma. *Nechť Φ je libovolný lineární ohraničený funkcionál na $\mathbb{G}_{reg}[a,b]$. Položme*

$$p\,(t) = \begin{cases} \Phi(\chi_{(a,b]}) & \textit{když} \ \ t = a, \\ \Phi(\frac{1}{2}\chi_{[t]} + \chi_{(t,b]}) & \textit{když} \ \ t \in (a,b), \\ \Phi(\chi_{[b]}) & \textit{když} \ \ t = b. \end{cases} \tag{6.7}$$

Potom

$$\operatorname{var}_a^b p \le \sup\{|\Phi(x)| : x \in \mathbb{G}_{reg}[a,b],\ \|x\| \le 1\} < \infty,$$

tj. $p \in \mathbb{BV}[a,b])$.

D ů k a z . Nechť $\Phi \in \mathbb{G}^*_{\mathrm{reg}}[a,b]$, $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ je dělení intervalu $[a,b]$ a nechť reálná čísla c_j, $j = 1, 2, \dots, m$, jsou taková, že je $|c_j| \le 1$ pro všechna $j = 1, 2, \dots, m$. Potom

$$\left\{ \begin{aligned} &\textstyle\sum_{j=1}^m c_j\,[p\,(\alpha_j) - p\,(\alpha_{j-1})] \\ &= \quad c_1 \left[\Phi(\tfrac{1}{2}\chi_{[\alpha_1]} + \chi_{(\alpha_1,b]}) - \Phi(\chi_{(a,b]})\right] \\ &\qquad + \sum_{j=2}^{m-1} c_j \left[\Phi(\tfrac{1}{2}\chi_{[\alpha_j]} + \chi_{(\alpha_j,b]}) - \Phi(\tfrac{1}{2}\chi_{[\alpha_{j-1}]} + \chi_{(\alpha_{j-1},b]})\right] \\ &\qquad + c_m \left[\Phi(\chi_{[b]}) - \Phi(\tfrac{1}{2}\chi_{[\alpha_{m-1}]} + \chi_{(\alpha_{m-1},b]})\right] = \Phi(h), \end{aligned} \right. \tag{6.8}$$

kde

$$
\begin{aligned}
h = \;& c_1\Big[\tfrac12\chi_{[\alpha_1]} + \chi_{(\alpha_1,b]} - \chi_{(a,b]}\Big] + c_m\Big[\chi_{[b]} - \tfrac12\chi_{[\alpha_{m-1}]} - \chi_{(\alpha_{m-1},b]}\Big]\\
&\quad + \sum_{j=2}^{m-1} c_j\Big[\tfrac12\chi_{[\alpha_j]} + \chi_{(\alpha_j,b]} - \tfrac12\chi_{[\alpha_{j-1}]} - \chi_{(\alpha_{j-1},b]}\Big]\\
= \;& c_1\Big[\tfrac12\chi_{[\alpha_1]} - \chi_{(a,\alpha_1]}\Big] - c_m\Big[\tfrac12\chi_{[\alpha_{m-1}]} + \chi_{(\alpha_{m-1},b)}\Big]\\
&\quad + \sum_{j=2}^{m-1} c_j\Big[\tfrac12\chi_{[\alpha_j]} - \chi_{(\alpha_{j-1},\alpha_j]} - \tfrac12\chi_{[\alpha_{j-1}]}\Big]\\
= \;& -c_1\Big[\tfrac12\chi_{[\alpha_1]} + \chi_{(a,\alpha_1)}\Big] - c_m\Big[\tfrac12\chi_{[\alpha_{m-1}]} + \chi_{(\alpha_{m-1},b)}\Big]\\
&\quad - \tfrac12\sum_{j=2}^{m-1} c_j\,\chi_{[\alpha_j]} - \tfrac12\sum_{j=2}^{m-1} c_j\,\chi_{[\alpha_{j-1}]} - \sum_{j=2}^{m-1} c_j\,\chi_{(\alpha_{j-1},\alpha_j)}\\
= \;& -\tfrac12\sum_{j=1}^{m-1} c_j\,\chi_{[\alpha_j]} - \tfrac12\sum_{j=2}^{m} c_j\,\chi_{[\alpha_{j-1}]} - \sum_{j=1}^{m} c_j\,\chi_{(\alpha_{j-1},\alpha_j)}\\
= \;& -\sum_{j=1}^{m-1} \tfrac{c_j+c_{j+1}}{2}\chi_{[\alpha_j]} - \sum_{j=1}^{m} c_j\,\chi_{(\alpha_{j-1},\alpha_j)}\\
= \;& -c_1\,\chi_{(a,\alpha_1)} - \sum_{j=2}^{m-1}\Big(\tfrac{c_j+c_{j+1}}{2}\,\chi_{[\alpha_j]} + c_j\,\chi_{(\alpha_{j-1},\alpha_j)}\Big) - c_m\,\chi_{(\alpha_{m-1},b)}.
\end{aligned}
$$

Z tohoto vyjádření snadno nahlédneme, že

$$h(\alpha_j-) = -c_j,\ \ h(\alpha_j+) = -c_{j+1},\ \ h(\alpha_j) = -\tfrac12(c_j+c_{j+1}) \quad \text{pro} \ \ j = 1, 2, \ldots, m.$$

Tedy $h \in \mathbb{S}[a,b] \cap \mathbb{G}_{\text{reg}}[a,b]$ a $|h(t)| \le 1$ pro všechna $t \in [a,b]$. Vzhledem k (6.8) tedy dostáváme, že nerovnost

$$
\begin{aligned}
&\sup\Big\{\Big|\sum_{j=1}^{m} c_j\,\big[p\,(\alpha_j) - p\,(\alpha_{j-1})\big]\Big| : |c_j| \le 1, j = 1, 2, \ldots, m\Big\}\\
&\qquad \le \sup\{|\Phi(x)| : x \in \mathbb{G}_{\text{reg}}[a,b], \|x\| \le 1\}
\end{aligned}
$$

platí pro každé dělení $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ intervalu $[a,b]$. Zvolíme-li nyní

$$c_j = \operatorname{sgn}\big[p\,(\alpha_j) - p\,(\alpha_{j-1})\big] \quad \text{pro} \ \ j = 1, 2, \ldots, m,$$

zjistíme,že platí

$$V(p, D) \le \sup\{|\Phi(x)| : x \in \mathbb{G}_{\text{reg}}[a,b], \|x\| \le 1\} < \infty \quad \text{pro každé} \ \ D \in \mathscr{D}[a,b],$$

tj. $\operatorname{var}_a^b p \le \|\Phi\|_{\mathbb{G}^*_{\text{reg}}[a,b]} < \infty$. □

Prvním hlavním výsledkem této kapitoly je následující věta.

6.7 . Věta. *Φ je lineární ohraničený funkcionál na $\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$ ($\Phi \in \mathbb{G}^*_{\mathrm{L}}[a,b]$) právě tehdy, když existuje dvojice $\eta = (p,q) \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ taková, že*

$$\Phi(x) = q\,x(a) + \int_a^b p\,\mathrm{d}x \quad \textit{pro} \quad x \in \mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]. \tag{6.9}$$

Navíc, zobrazení

$$\eta \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R} \to \Phi_\eta \in \mathbb{G}^*_{\mathrm{L}}[a,b] \tag{6.10}$$

je isomorfismus.

D ů k a z . Nechť Φ je spojitý lineární funkcionál na $\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$ a nechť Φ_η je funkcionál definovaný předpisem (6.1), kde $\eta = (p,q)$, $q = \Phi(1)$ a funkce p je definovaná v (6.5). Podle Lemmatu 6.5 $\eta = (p,q) \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ a podle (6.2) a (6.5) máme

$$\Phi(1) \quad = q \quad = \Phi_\eta(1),$$

$$\Phi(\chi_{(\tau,b]}) = p\,(\tau) = \Phi_\eta(\chi_{(\tau,b]}) \quad \text{pro každé} \ \tau \in [a,b)$$

a

$$\Phi(\chi_{[b]}) \quad = p\,(b) = \Phi_\eta(\chi_{[b]}).$$

Protože podle Lemmatu 3.13 je každá funkce z $\mathbb{S}[a,b] \cap \mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$ lineární kombinací funkcí

$$1,\ \chi_{(\tau,b]},\ \tau \in [a,b),\ \chi_{[b]},$$

plyne odtud, že $\Phi(x) = \Phi_\eta(x)$ pro každé $x \in \mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b]$. Konečně, protože podle Lemmatu 3.12 je množina $\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b]$ hustá v $\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$, plyne odtud, že platí

$$\Phi(x) = \Phi_\eta(x) \quad \text{pro všechny} \ x \in \mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b].$$

Podle Věty 6.4 je (6.10) vzájemně jednoznačné zobrazení $\mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ na $\mathbb{G}^*_{\mathrm{L}}[a,b]$. Dále, podle Věty 5.22 máme

$$|\Phi_\eta(x)| \le \big(|p\,(a)| + |p\,(b)| + \operatorname{var}_a^b p + |q|\big)\,\|x\| \quad \text{pro každé} \ x \in \mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$$

a tudíž

$$\|\Phi_\eta\|_{\mathbb{G}^*_{\mathrm{L}}[a,b]} \le |p\,(a)| + |p\,(b)| + \operatorname{var}_a^b p + |q| \le 2\,\big(\|p\|_{\mathbb{BV}} + |q|\big) = 2\,\|\eta\|_{\mathbb{BV}\times\mathbb{R}}.$$

Na druhou stranu, podle (6.7) a podle Lemmatu 6.5 je

$$|q| = |\Phi(1)| \le \|\Phi_\eta\|_{\mathbb{G}^*_{\mathrm{L}}[a,b]} \quad \text{a} \quad \|p\|_{\mathbb{BV}} \le \big(|p\,(a)| + |p\,(b)| + \operatorname{var}_a^b p\big) \le 2\,\|\Phi_\eta\|_{\mathbb{G}^*_{\mathrm{L}}[a,b]}.$$

Souhrnem máme

$$\tfrac{1}{2}\|\Phi_\eta\|_{\mathbb{G}^*_{\mathrm{L}}[a,b]} \le \|\eta\|_{\mathbb{BV}\times\mathbb{R}} \le 3\,\|\Phi_\eta\|_{\mathbb{G}^*_{\mathrm{L}}[a,b]},$$

čili, zobrazení

$$\eta \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R} \to \Phi_\eta \in \mathbb{G}^*_{\mathrm{L}}[a,b]$$

je isomorfismus. □

6.8. Věta. *Φ je lineární ohraničený funkcionál na $\mathbb{G}_{reg}[a,b]$ ($\Phi \in \mathbb{G}^*_{reg}[a,b]$) právě tehdy, když existuje dvojice $\eta = (p,q) \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ taková, že*

$$\Phi(x) = q\,x(a) + \int_a^b p\,\mathrm{d}x \quad \textit{pro} \quad x \in \mathbb{G}_{reg}[a,b]. \tag{6.11}$$

Navíc, zobrazení

$$\eta \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R} \to \Phi_\eta \in \mathbb{G}^*_{reg}[a,b] \tag{6.12}$$

je isomorfismus.

D ů k a z . Nechť $\Phi \in \mathbb{G}^*_{\mathrm{reg}}[a,b]$, a nechť Φ_η je funkcionál definovný předpisem (6.1), kde $\eta = (p,q)$, $q = \Phi(1)$ a p je dáno předpisem (6.7). Podle Lemmatu 6.6 $\eta = (p,q) \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ a podle (6.2) a (6.7) máme

$$\Phi(1) = q = \Phi_\eta(1),$$

$$\Phi\big(\tfrac{1}{2}\chi_{[\tau]} + \chi_{(\tau,b]}\big) = p\,(\tau) = \Phi_\eta\big(\tfrac{1}{2}\chi_{[\tau]} + \chi_{(\tau,b]}\big) \quad \text{pro každé} \quad \tau \in [a,b)$$

a

$$\Phi(\chi_{[b]}) = p\,(b) = \Phi_\eta(\chi_{[b]}).$$

Podle Lemmatu 3.13 odtud plyne, že $\Phi(x) = \Phi_\eta(x)$ pro každé $x \in \mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b]$. Konečně, protože podle Lemmatu 3.12 je množina $\mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b]$ hustá v $\mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b]$ a tudíž

$$\Phi(x) = \Phi_\eta(x) \quad \text{pro všechny} \quad x \in \mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b].$$

Podobně jako jsme dokázali analogickou nerovnost v závěru důkazu Věty 6.7 dokázali bychom nyní, že platí také

$$\tfrac{1}{2}\|\Phi_\eta\|_{\mathbb{G}^*_{\mathrm{reg}}[a,b]} \le \|\eta\|_{\mathbb{BV}\times\mathbb{R}} \le 3\,\|\Phi_\eta\|_{\mathbb{G}^*_{\mathrm{reg}}[a,b]}.$$

6.9. Cvičení. Postupem použitým v důkazech Vět 6.7 a 6.8 ukažte, že také platí

(i) Φ *je lineární ohraničený funkcionál na*

$$\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{L}}[a,b] = \{x \in \mathbb{G} : x(t-) = x(t) \ \textit{pro}\ t \in (a,b]\},$$

(viz (3.2)) *právě tehdy, když existuje funkce $p \in \mathbb{BV}[a,b]$ taková, že*

$$\Phi(x) = p\,(b)\,x(b) - \int_a^b p\,\mathrm{d}[x] \quad \textit{pro} \quad x \in \widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{L}}[a,b].$$

(ii) Φ *je lineární ohraničený funkcionál na*

$$\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{R}}[a,b] = \{x \in \mathbb{G} : x(t+) = x(t) \ \textit{pro}\ t \in [a,b)\},$$

(viz (3.2)) *právě tehdy, když existuje funkce $p \in \mathbb{BV}[a,b]$ taková, že*

$$\Phi(x) = p\,(a)\,x(a) + \int_a^b p\,\mathrm{d}[x] \quad \textit{pro} \quad x \in \widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{R}}[a,b].$$