Kapitola 7

Aplikace Stieltjesova integrálu v teorii distribucí

V této kapitole naznačíme možnosti použití KS integrálu v teorii distribucí. Distribuce zde budeme chápat ve smyslu L. Schwartze. Připomeňme si nejprve několik základních pojmů a definic.

7.1. Definice. Množinu funkcí $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které mají pro každé $k \in N \cup \{0\}$ derivaci $\varphi^{(k)}$ k-tého řádu spojitou na $\mathbb{R}$ a takovou, že $\varphi^{(k)}(t) = 0$ pro $t \in \mathbb{R} \setminus (a, b)$ označíme symbolem $\mathscr{D}[a, b]$.

Funkcím z $\mathscr{D}[a, b]$ říkáme *testovací funkce* na $[a, b]$.

Množina $\mathscr{D}[a, b]$ je lineární prostor vzhledem k přirozeným operacím sčítání a násobení skalárem. Množina $\mathscr{D}[a, b]$ se stane topologickým vektorovým prostorem, zavedeme-li na ní topologii, ve které posloupnost $\{\varphi_n\} \subset \mathscr{D}[a, b]$ konverguje k $\varphi \in \mathscr{D}[a, b]$ tehdy a jen tehdy, když

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n^{(k)} - \varphi^{(k)}\| = 0 \quad \text{for každé} \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Typickými příklady funkcí z prostoru $\mathscr{D}[a, b]$ jsou funkce tvaru

$$\varphi_{c,d}(t) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{t-c} + \frac{1}{d-t}\right) & \text{pro} \quad t \in (c, d), \\ 0 & \text{pro} \quad t \in \mathbb{R} \setminus (c, d), \end{cases}$$

kde $[c, d]$ může být libovolný podinterval v (a, b).

7.2. Definice. Spojité lineární funkcionály na topologickém vektorovém prostoru $\mathscr{D}[a, b]$ se nazývají *distribuce* na $[a, b]$. Množina všech distribucí na $[a, b]$ je tedy duálním prostorem k $\mathscr{D}[a, b]$. Značíme ji symbolem $\mathscr{D}^*[a, b]$.

Pro danou distribuci $f \in \mathscr{D}^*[a, b]$ a testovací funkci $\varphi \in \mathscr{D}[a, b]$, hodnotu funkcionálu f na φ značíme symbolem $\langle f, \varphi \rangle$.

7.3. Poznámka. Je-li $f \in \mathbb{L}^1[a, b]$, pak předpisem

$$\varphi \in \mathscr{D}[a, b] \to \int_a^b f(t)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t$$

je definována distribuce

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_a^b f(t)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t \quad \text{pro všechny} \quad \varphi \in \mathscr{D}[a, b]$$

na $[a,b]$, kterou budeme značit také symbolem f. Říkáme, že distribuce f je určena funkcí f.

Nulový prvek prostoru $\mathscr{D}^*[a,b]$ je určen libovolnou měřitelnou funkcí, která se anuluje s.v. na intervalu $[a,b]$. Speciálně, je-li $f\in\mathbb{G}[a,b]$, pak $f=0\in\mathscr{D}^*[a,b]$ tehdy a jen tehdy, když $f(t-)=f(s+)=0$ pro všechna $t\in(a,b]$ a všechna $s\in[a,b)$. Tudíž, je-li $f\in\mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b]$, pak $f=0\in\mathscr{D}^*[a,b]$ tehdy a jen tehdy, když $f(t)=0$ pro všechna $t\in[a,b]$. Jestliže $f,\,g\in\mathscr{D}^*[a,b]$, pak $f=g$ znamená, že $f-g=0\in\mathscr{D}^*[a,b]$. Z výše uvedeného plyne, že pro je-li $g\in\mathbb{L}^1[a,b]$, pak existuje nejvýše jedna funkce $f\in\mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b]$ taková, že $f=g$ s.v. na $[a,b]$. Dále, jsou-li $f,\,g$ funkce definované na $[a,b]$, $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$, pak je $f=g$ v $\mathscr{D}^*[a,b]$ tehdy a jen tehdy, když $f=g$ s.v. na $[a,b]$.

7.4. Definice. Pro danou distribuci $f\in\mathscr{D}^*[a,b]$, definujeme její (*distributivní*) *derivaci* f' předpisem

$$f':\varphi\in\mathscr{D}[a,b]\to\langle f',\varphi\rangle=-\langle f,\varphi'\rangle.$$

Podobně, pro každé $k\in\mathbb{N}$,

$$f^{(k)}:\varphi\in\mathscr{D}[a,b]\to\langle f^{(k)},\varphi\rangle=(-1)^k\langle f,\varphi^{(k)}\rangle.$$

7.5 . Poznámka. Distributivní derivace absolutně spojitých funkcí jsou zřejmě určeny jejich klasickými derivacemi.

7.6. Poznámka. Definujme

$$H(t)=\begin{cases}0 & \text{pro } t<0,\\ \frac{1}{2} & \text{pro } t=0,\\ 1 & \text{pro } t>0\,.\end{cases}$$

Nechť $\tau\in(a,b)$ a $h_\tau(t)=H(t-\tau)$ pro $t\in[a,b]$. Potom použitím Věty 5.28 a s přihlédnutím k (5.8) a (5.12) dostaneme

$$\langle h_\tau',\varphi\rangle=-\langle h_\tau,\varphi'\rangle=-\int_a^b h_\tau\,\mathrm{d}[\varphi]=\int_a^b \mathrm{d}[h_\tau]\,\varphi=\varphi(\tau).$$

Funkce h_τ se nazývá *Heavisideova funkce* (se středem v bodě τ) a její distributivní derivace h_τ' se značí δ_τ a nazývá se *Diracova δ-distribuce* (se středem v bodě τ).

7.7. Tvrzení. *Nechť $f\in\mathscr{D}^*[a,b]$. Potom f' je nulová distribuce tehdy a jen tehdy, když existuje konstanta $c\in\mathbb{R}$ taková, že $f(t)=c$ pro s.v. $t\in[a,b]$.*

Důkaz. Jestliže $f(t)=c$ pro s.v. $t\in[a,b]$ a $\varphi\in\mathscr{D}[a,b]$, pak

$$\langle f',\varphi\rangle=-\langle c,\varphi'\rangle=-c\int_a^b\varphi'(s)\,\mathrm{d}s=-c\,(\varphi(b)-\varphi(a))=0.$$

Naopak, nechť $\langle f,\varphi'\rangle=0$ pro každou $\varphi\in\mathscr{D}[a,b]$. Nechť je dána libovolná $\rho\in\mathscr{D}[a,b]$. Položme

$$\varphi(t)=\begin{cases}\displaystyle\int_a^t\big(\rho(s)-a_0\,\Theta(s)\big)\,\mathrm{d}s & \text{pro} \quad t\in[a,b],\\[2mm] 0 \quad \text{pro} \quad t\in\mathbb{R}\setminus[a,b]\,,\end{cases}$$

kde

$$a_0=\int_a^b\rho(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{a} \quad \Theta(t)=\frac{\varphi_{a,b}(t)}{\int_a^b\varphi_{a,b}(s)\,\mathrm{d}s}\,.$$

Potom

$$\int_a^b\Theta(s)\,\mathrm{d}s=1\,.$$

Odtud snadno plyne, že $\varphi(a)=\varphi(b)=0$ a tedy i, že $\varphi\in\mathscr{D}[a,b]$. Dále,

$$\varphi'(t)=\rho(t)-a_0\,\Theta(t) \quad \text{pro} \quad t\in[a,b].$$

Tudíž

$$0=\langle f,\varphi'\rangle=\langle f,\rho\rangle-\left(\int_a^b\rho(s)\,\mathrm{d}s\right)\langle f,\Theta\rangle\,.$$

T.zn., že pro každé $\rho\in\mathscr{D}[a,b]$ platí

$$\langle f,\rho\rangle=\left(\int_a^b\rho(s)\,\mathrm{d}s\right)\langle f,\Theta\rangle=\int_a^b c\,\rho(s)\,\mathrm{d}s,$$

kde $c=\langle f,\Theta\rangle\in\mathbb{R}$ je konstanta. Tedy $f=c$ ve smyslu distribucí. □

7.8 . Cvičení. Dokažte, že je-li $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, pak $f^{(k)}=0\in\mathscr{D}^*[a,b]$ tehdy a jen tehdy, když existují $c_0,c_1,\dots,c_{k-1}\in\mathbb{R}$ takové, že

$$f(t)=c_0+c_1\,t+\cdots+c_{k-1}\,t^{k-1} \quad \text{pro s.v. } t\in[a,b].$$

7.9. Poznámka. Všimněme si, že jsou-li $u,\ v\in\mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b]$ takové, že $u'=v$, pak $u\in\mathbb{AC}[a,b]$. Vskutku, položme

$$w(t)=u(a)+\int_a^t v(s)\,\mathrm{d}s.$$

Potom $(w-u)'=0$ a $w(a)=u(a)$ a tudíž, protože $w-u\in\mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b]$, je nutně $w=u$ na $[a,b]$.

7.10. Definice. Jestliže $f \in \mathbb{G}[a,b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a,b]$, pak definujeme

$$f'g : \varphi \in \mathscr{D}[a,b] \to \langle f'g, \varphi\rangle = \int_a^b g(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}[f(t)] \tag{7.1}$$

a

$$f\,g' : \varphi \in \mathscr{D}[a,b] \to \langle f\,g', \varphi\rangle = \int_a^b f(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}[g(t)]. \tag{7.2}$$

7.11. Poznámka. Nechť $f \in \mathbb{L}^1[a,b]$ a $g \in \mathbb{G}[a,b]$. Potom z (7.1) plyne, že součin $f\,g$ je definován předpisem

$$f\,g : \varphi \in \mathscr{D}[a,b] \to \langle f\,g, \varphi\rangle = \int_a^b f(t)\,g(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t,$$

t.j. (distributivní) součin funkcí f a g je v tomto případě representován funkcí

$$f\,g : t \in [a,b] \to f(t)\,g(t).$$

7.12. Lemma. *Nechť $f \in \mathbb{G}[a,b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a,b]$ splňují*

$$\Delta^+ f(t)\,\Delta^+ g(t) = \Delta^- f(t)\,\Delta^- g(t) \quad \textit{pro každé} \;\; t \in (a,b), \tag{7.3}$$

Potom

$$(f'g)(t) = \Big(\int_a^t \mathrm{d}[f(s)]\,g(s)\Big)' \tag{7.4}$$

a

$$(f\,g')(t) = \Big(\int_a^t \mathrm{d}[g(s)]\,f(s)\Big)'. \tag{7.5}$$

Důkaz. Použitím Věty o substituci (Věta 5.36) a Věty o integraci per-partes (Věta 5.28) pro libovolné $\varphi \in \mathscr{D}[a,b]$ dostaneme

$$\begin{aligned}\langle f'g, \varphi\rangle &= \int_a^b \mathrm{d}\Big[\int_a^t \mathrm{d}[f(s)]\,g(s)\Big]\,\varphi(t) = -\int_a^b \Big(\int_a^t \mathrm{d}[f(s)]\,g(s)\Big)\,\varphi'(t)\\ &= \langle\Big(\int_a^t \mathrm{d}[f(s)]\,g(s)\Big)', \varphi\rangle,\end{aligned}$$

t.j. platí (7.4). Vztah (7.5) se dokazuje analogicky. □

7.13. Důsledek. Jestliže funkce $f \in \mathbb{G}[a,b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a,b]$ splňují podmínku (7.3), pak

$$(f\,g)' = f\,g' + f'g.$$

D ů k a z plyne přímo z Definice 7.4, Věty 5.28 (o integraci per-partes) a Lemmatu 7.12. □

7.14. Poznámka. Nechť $f \in \mathbb{G}[a,b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a,b]$. Podmínka (7.3) je pak zřejmě splněna např. v následujících případech:

(i) obě funkce jsou regulární,

(ii) alespoň jedna z nich je spojitá na (a,b),

(iii) jedna z nich zleva spojitá na (a,b) a druhá je zprava spojitá na (a,b).

7.15 . Cvičení. Dokažte, že jestliže $\tau \in (a,b)$ a h_τ resp. δ_τ jsou Heavisideova funkce resp. Diracova distribuce se středem v τ, pak $h_\tau\,\delta_\tau = \frac{1}{2}\,\delta_\tau$.