

Stieltjesův integrál

Milan Tvrđý

1. listopadu 2011

Základní úmluvy a označení	v
1 Funkce s konečnou variací.	1
2 Absolutně spojitě funkce.	15
3 Regulované funkce.	19
4 Riemannův-Stieljesův integrál	27
5 Kurzweilův-Stieltjesův integrál	47
6 Spojitě lineární funkcionály na prostorech regulovaných funkcí	79
7 Aplikace Stieltjesova integrálu v teorii distribucí	87
8 Zobecněné diferenciální rovnice	93
9 Dodatky	95
9.1 Důkaz Věty 1.15	95
9.2 Alternativní důkaz Věty 5.28 (per-partes)	104
Literatura	106

Základní úmluvy a označení

- (i) \mathbb{N} je množina přirozených čísel (mezi něž nezahrnujeme nulu).
- (ii) \mathbb{R} je množina reálných čísel, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$, $\mathbb{R}^{m \times n}$ je množina $m \times n$ -matic reálných čísel, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n \times 1}$. Je-li $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$, pak příslušná transponovaná matice je označena symbolem M^T ($M^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$).
- (iii) Je-li $-\infty < a < b < \infty$, pak $[a, b]$ značí uzavřený interval $\{t \in \mathbb{R} : a \leq t \leq b\}$ a (a, b) je otevřený interval $\{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}$. Příslušné polouzavřené (resp. polootevřené) intervaly značíme $[a, b)$ a $(a, b]$. Ve všech těchto případech nazýváme body a, b krajní body intervalu. V případě $a = b \in \mathbb{R}$ říkáme, že interval $[a, b]$ degeneruje na jednobodovou množinu a píšeme $[a, b] = [a]$. Budeme též užívat obvyklé značení I° pro vnitřek intervalu I . Je-li I interval (uzavřený resp. otevřený resp. polootevřený) s krajními body a, b značíme symbolem $|I| = |b - a|$ jeho délku ($|[a]| = 0$).
- (iv) Pro $A \in \mathbb{R}$ značíme $A^+ = \max(A, 0)$ a $A^- = \max(-A, 0)$. (Připomeňme, že platí $A^+ + A^- = |A|$ a $A^+ - A^- = A$ pro každé $A \in \mathbb{R}$.)
- (v) Konečný systém bodů $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ intervalu $[a, b]$ nazveme dělením intervalu $[a, b]$, jestliže platí $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_m = b$. Množinu všech dělení intervalu $[a, b]$ značíme $\mathcal{D}[a, b]$. Je-li $D \in \mathcal{D}[a, b]$, pak jeho elementy zpravidla značíme α_i . Pro dané dělení $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, značíme $\nu(D) = m$ a

$$|D| = \max_{i=1,2,\dots,\nu(D)} (\alpha_i - \alpha_{i-1}).$$

Bude-li to výhodné, budeme též dělení D intervalu $[a, b]$ chápat jako systém podintervalů $\{I_j; j = 1, 2, \dots, \nu(D)\}$ takových, že platí

$$\bigcup_{j=1}^{\nu(D)} I_j = [a, b], \quad \text{přičemž } I_j^\circ \cap I_k^\circ = \emptyset \quad \text{jakmile } j \neq k.$$

Jestliže dělení D' a $D'' \in \mathcal{D}[a, b]$ jsou taková, že všechny elementy z D' jsou obsaženy v D'' , říkáme, že D'' je zjemnění dělení D' a značíme $D' \subset D''$.

- (vi) Dvojici $(D, \xi) \in \mathcal{D}[a, b] \times \mathbb{R}^{\nu(D)}$ nazveme rozšířeným dělením intervalu $[a, b]$, jestliže platí

$$\alpha_{i-1} \leq \xi_i \leq \alpha_i \quad \text{pro všechna } i = 1, 2, \dots, \nu(D).$$

Množinu všech rozšířených dělení intervalu $[a, b]$ značíme $\mathcal{S}[a, b]$.

(vii) Pro libovolné funkce $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a reálné číslo λ součtem $f + g$ funkcí f a g rozumíme funkci $(f + g)(t) = f(t) + g(t)$, $t \in [a, b]$, a násobek λf funkce f číslem λ je funkce $(\lambda f)(t) = \lambda f(t)$, $t \in [a, b]$. (Zápis $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ znamená, že funkce f je definována pro každé $x \in [a, b]$ a každá její hodnota $f(x)$ je (konečné) reálné číslo.

(viii) Pro libovolnou funkci $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ značíme

$$\|f\| = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|.$$

(Není-li funkce f ohraničená na intervalu $[a, b]$, pak je ovšem $\|f\| = \infty$.)

(ix) $\mathbb{C}[a, b]$ je prostor reálných funkcí spojitých na intervalu $[a, b]$ a zobrazení

$$f \in \mathbb{C}[a, b] \rightarrow \|f\|$$

definuje normu na $\mathbb{C}[a, b]$.

(x) $\mathbb{L}^1[a, b]$ je prostor reálných funkcí integrovatelných (ve smyslu Lebesgueově) na intervalu $[a, b]$ (s rovností $f = g \in \mathbb{L}^1[a, b] \iff f(x) = g(x)$ s.v. na $[a, b]$) a zobrazení

$$f \in \mathbb{L}^1[a, b] \rightarrow \|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$$

definuje normu na $\mathbb{L}^1[a, b]$.

(xi) Pro danou množinu $M \subset \mathbb{R}$ symbolem χ_M značíme její charakteristickou funkci, tj. funkci $\mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ definovanou předpisem :

$$\chi_M(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \in M, \\ 0 & \text{pro } t \notin M. \end{cases}$$

(xii) Jestliže $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \in [a, b]$ a $s \in (a, b)$ a jestliže existují konečné jednostranné limity $\lim_{\tau \rightarrow t+} f(\tau)$ a $\lim_{\tau \rightarrow s-} f(\tau)$, pak značíme

$$f(t+) = \lim_{\tau \rightarrow t+} f(\tau), \quad f(s-) = \lim_{\tau \rightarrow s-} f(\tau),$$

$$\Delta^+ f(t) = f(t+) - f(t), \quad \Delta^- f(s) = f(s) - f(s-),$$

$$\Delta f(x) = f(x+) - f(x-) \quad \text{pro } x \in (a, b).$$

Dále, budeme užívat následující úmluvu :

$$f(a-) = f(a), \quad f(b+) = f(b), \quad \Delta^- f(a) = \Delta^+ f(b) = 0.$$

(xiii) Je-li M podmnožina Banachova prostoru X , pak symbolem \overline{M} značíme její uzávěr v prostoru X .

Kapitola 1

Funkce s konečnou variací.

Výklad v této kapitole se opírá zejména o monografie V. Jarníka *Diferenciální počet II* [5, Kapitola V] a *Integrální počet II* [6, Kapitola V] a dále o odstavec II.6 v monografii T.H.Hildebrandta *Theory of Integration* [3] a kapitolu XIII v monografii Š.Schwabika *Integrace v \mathbb{R} (Kurzweilova teorie)* [9].

1.1. Definice. Pro danou funkci $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a dělení D intervalu $[a, b]$,

$$D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \in \mathcal{D}[a, b],$$

definujeme

$$V(f, D) = \sum_{j=1}^{\nu(D)} |f(\alpha_j) - f(\alpha_{j-1})| \quad (1.1)$$

a

$$\text{var}_a^b f = \sup_{D \in \mathcal{D}[a, b]} V(f, D). \quad (1.2)$$

Je-li $a = b$, definujeme $\text{var}_a^b f = \text{var}_a^a f = 0$. Veličinu $\text{var}_a^b f$ nazýváme *variace funkce f* na intervalu $[a, b]$. Je-li $\text{var}_a^b f < \infty$, říkáme, že funkce f má *konečnou variaci na $[a, b]$* . Množinu funkcí s konečnou variací na $[a, b]$ značíme $\mathbb{BV}[a, b]$.

1.2. Cvičení. Dokažte následující vlastnosti variace a funkcí s konečnou variací.

(i) Pro každou funkci $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je $\text{var}_a^b f \geq 0$.

(ii) Pro libovolné dvě funkce $f_1, f_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a reálné číslo c platí

$$\text{var}_a^b (f_1 + f_2) \leq \text{var}_a^b f_1 + \text{var}_a^b f_2 \quad \text{a} \quad \text{var}_a^b (c f_1) = |c| \text{var}_a^b f_1.$$

(iii) Je-li $[c, d] \subset [a, b]$, pak pro každou funkci $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ platí

$$|f(d) - f(c)| \leq \text{var}_c^d f \leq \text{var}_a^b f.$$

(iv) Pro každou funkci $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ platí

$$|f(x)| \leq \|f\| \leq |f(a)| + \text{var}_a^b f \quad \text{pro } x \in [a, b].$$

Každá funkce $f \in \mathbb{BV}[a, b]$ je tedy ohraničená na $[a, b]$.

- (v) $\text{var}_a^b f = 0 \iff f(x) \equiv f(a)$ na $[a, b]$.
- (vi) Zavedeme-li pro funkce z množiny $\mathbb{BV}[a, b]$ obvyklým způsobem operace sčítání a násobení skalárem (viz 0.(vi)), stane se lineárním normovaným prostorem vzhledem k těmto operacím a vzhledem k normě $\|\cdot\|_{\mathbb{BV}}$ definované předpisem
- $$f \in \mathbb{BV}[a, b] \rightarrow \|f\|_{\mathbb{BV}} = |f(a)| + \text{var}_a^b f.$$
- (vii) Pro každou funkci f monotonní na $[a, b]$ platí $\text{var}_a^b f = |f(b) - f(a)|$.
- (viii) Pro libovolná dělení D' a D'' intervalu $[a, b]$ taková, že $D'' \subset D'$ a libovolnou funkci $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je $V(f, D'') \leq V(f, D')$.
- (ix) $\text{var}_a^b f = d \in \mathbb{R} \iff (\forall \varepsilon > 0 \exists D_\varepsilon \in \mathcal{D}[a, b] : D_\varepsilon \subset D \implies d - \varepsilon \leq V(f, D) \leq d)$.
- (x) $\text{var}_a^b f = \infty \iff (\forall K > 0 \exists D_K \in \mathcal{D}[a, b] : V(f, D_K) \geq K)$.
- (xi) Pro libovolné dělení $D_0 \in \mathcal{D}[a, b]$ platí $\text{var}_a^b f = \sup_{D \supset D_0} V(f, D)$.
- (xii) Dokažte Větu 1.3.

1.3. Věta. Pro každé $c \in (a, b)$ a každou funkci $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ platí:

$$\text{var}_a^b f = \text{var}_a^c f + \text{var}_c^b f.$$

□

1.4. Věta. $f \in \mathbb{BV}[a, b]$ tehdy a jen tehdy, když existují funkce f_1 a f_2 neklesající na $[a, b]$ a takové, že platí $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ pro každé $x \in [a, b]$.

Důkaz. Stačí dokázat, že pro každou funkci $f \in \mathbb{BV}[a, b]$ existují funkce f_1 a f_2 neklesající na $[a, b]$ a takové, že platí

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) \quad \text{na } [a, b].$$

Nechť tedy $f \in \mathbb{BV}[a, b]$. Položme

$$f_1(x) = \text{var}_a^x f \quad \text{a} \quad f_2(x) = f_1(x) - f(x) \quad \text{pro } x \in [a, b].$$

Potom f_1 je evidentně neklesající na $[a, b]$. Dále, pro $x_2 \geq x_1$ máme vzhledem ke Větě 1.3

$$f_2(x_2) = f_1(x_1) + \text{var}_{x_1}^{x_2} f - f(x_2)$$

a

$$f_2(x_2) - f_2(x_1) = \text{var}_{x_1}^{x_2} f - (f(x_2) - f(x_1)) \geq 0,$$

t.j., že f_2 je také neklesající na $[a, b]$.

□

1.5. Cvičení. Necht' $f \in \mathbb{BV}[a, b]$. Dokažte, že funkce

$$p(x) = \sup_{D \in \mathcal{D}[a, x]} \sum_{j=1}^{\nu(D)} (f(\alpha_j) - f(\alpha_{j-1}))^+$$

a

$$n(x) = \sup_{D \in \mathcal{D}[a, x]} \sum_{j=1}^{\nu(D)} (f(\alpha_j) - f(\alpha_{j-1}))^-$$

jsou obě neklesající a nezáporné na $[a, b]$ a platí

$$f(x) = f(a) + p(x) - n(x) \quad \text{a} \quad \text{var}_a^x f = p(x) + n(x) \quad \text{pro každé } x \in [a, b].$$

1.6. Důsledek. Pro každou funkci $f \in \mathbb{BV}[a, b]$ a pro všechna $t \in [a, b]$ a $s \in (a, b)$ existují konečné limity

$$f(t+) = \lim_{\tau \rightarrow t+} f(\tau) \quad \text{a} \quad f(s-) = \lim_{\tau \rightarrow s-} f(\tau)$$

(tj. f může mít v $[a, b]$ pouze nespojitosti 1. druhu).

Důk a z plyne z Věty 1.4 a z toho, že uvedené limity existují pro každou funkci monotónní na $[a, b]$. Např. je-li f neklesající na $[a, b]$, $t \in (a, b]$, a $t_n \searrow t$ (tj. $\{t_n\}$ je nerostoucí posloupnost bodů z $(t, b]$ konvergující k t), pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) = \inf_{n \in \mathbb{N}} f(t_n). \quad \square$$

1.7. Věta. Každá funkce $f \in \mathbb{BV}[a, b]$ má nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti na intervalu $[a, b]$.

Důk a z plyne z Důsledku 1.6 a z následujícího Lemmatu. □

Lemma. Necht' $J \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval, $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ a M je množina bodů nespojitosti 1. druhu funkce f v J . Potom M je nejvýše spočetná.

Důk a z . Označme

$$M^+ = \{x \in J : f(x+) \neq f(x)\}, \quad M^- = \{x \in J : f(x-) \neq f(x)\}$$

a

$$M_1^+ = \{x \in M^+ : f(x+) > f(x)\}, \quad M_2^+ = \{x \in M^+ : f(x+) < f(x)\}.$$

Potom je $M = M^+ \cup M^-$ a $M^+ = M_1^+ \cup M_2^+$. Uspořádejme množinu \mathbb{P} racionálních čísel tak, aby platilo $\mathbb{P} = \{r_k\}_{k=1}^\infty$. Dále, definujme funkci $r: M_1^+ \rightarrow \mathbb{P}$ předpisem

$$r(x) = r_j \iff r_j \in (f(x), f(x+)) \wedge \{r_1, r_2, \dots, r_{j-1}\} \cap (f(x), f(x+)) = \emptyset$$

a pro každé $q \in \mathbb{P}$ označme

$$r_{-1}(q) = \{x \in M_1^+ : r(x) = q\}.$$

Máme

$$M_1^+ = \bigcup_{q \in \mathbb{P}} r_{-1}(q).$$

Ukážeme-li tedy, že každá množina $r_{-1}(q)$, $q \in \mathbb{P}$, je spočetná, budeme mít současně také dokázáno, že i množina M_1^+ je spočetná.

Nechť je tedy dáno libovolné $q \in \mathbb{P}$. Vzhledem k definici množiny M_1^+ a zobrazení r , pro každé $x \in r_{-1}(q)$ existuje $\delta(x) > 0$ takové, že $x < y < x + \delta(x) \implies f(y) > r(x)$. Jsou-li $x_1, x_2 \in r_{-1}(q)$ takové, že $x_1 < x_2$ a $r(x_1) = r(x_2) = q$, pak musí platit

$$(x_1, x_1 + \delta(x_1)) \cap (x_2, x_2 + \delta(x_2)) = \emptyset.$$

Vskutku, kdyby bylo $x_1 < x_2 < x_1 + \delta(x_1)$, bylo by též (vzhledem k definici δ)

$$q = r(x_1) < f(x_2) < r(x_2) = q,$$

spor. Systém intervalů $\{(x, x + \delta(x)), x \in r_{-1}(q)\}$ je tedy disjunktní. V každém z nich můžeme zvolit jediné racionální číslo $r \in (x, x + \delta(x))$ a tím definovat prosté zobrazení $r_{-1}(q)$ do \mathbb{P} . To znamená, že každá množina $r_{-1}(q)$, $q \in \mathbb{P}$, je spočetná.

b) Protože $M_2^+ = \{x \in J : -f(x) < -f(x+)\}$, můžeme použít část a) tohoto důkazu k důkazu spočetnosti množiny M_2^+ .

c) Konečně, $M^- = \{x \in J : f(-x) \neq f(-x+)\}$, takže podle částí a)–b) tohoto důkazu je také M^- spočetná množina. \square

1.8. Cvičení. Přesvědčete se, že důkaz předešlého lemmatu v sobě obsahuje též důkaz následujícího tvrzení:

Každý disjunktní systém intervalů v \mathbb{R} je spočetný.

1.9. Věta. *Nechť $f \in \mathbb{BV}[a, b]$. Potom*

$$\sum_{t \in [a, b]} |\Delta^+ f(t)| + \sum_{t \in (a, b]} |\Delta^- f(t)| < \infty. \quad (1.3)$$

Důkaz. Nechť W značí množinu bodů nespojitosti funkce f ležících v otevřeném intervalu (a, b) . Podle Věty 1.7 je W nejvýše spočetná. Je-li W konečná, je tvrzení věty evidentní. Nechť $W = \{w_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Předpokládejme, že f je neklesající. Potom

$$\sum_{t \in [a, b]} |\Delta^+ f(t)| + \sum_{t \in (a, b]} |\Delta^- f(t)| = \Delta^+ f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} (\Delta^+ f(w_k) + \Delta^- f(w_k)) + \Delta^- f(b).$$

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť σ_k , $k = 0, 1, \dots, n+1$, jsou body intervalu $[a, b]$ takové, že platí

$$a = \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_n < \sigma_{n+1} = b \quad \text{a} \quad \{\sigma_k\}_{k=0}^{n+1} = \{a\} \cup \{w_k\}_{k=1}^n \cup \{b\}.$$

Zvolme dále t_k , $k = 1, 2, \dots, n+1$, tak, aby platilo

$$a < t_1 < \sigma_1 < t_2 < \sigma_2 < \dots < \sigma_n < t_{n+1} < b.$$

Potom

$$\begin{aligned} & \Delta^+ f(a) + \sum_{k=1}^n (\Delta^+ f(w_k) + \Delta^- f(w_k)) + \Delta^- f(b) \\ &= f(a+) - f(a) + f(\sigma_1) - f(\sigma_1-) + f(\sigma_1+) - f(\sigma_1) \\ & \quad + \dots + f(\sigma_n) - f(\sigma_n) + f(b) - f(b-) \\ & \leq f(a+) - f(a) + f(t_1) - f(a+) + f(\sigma_1-) - f(t_1) + f(\sigma_1) - f(\sigma_1-) \\ & \quad + f(\sigma_1+) - f(\sigma_1) + f(t_2) - f(\sigma_1+) + f(\sigma_2-) - f(t_2) \\ & \quad + \dots + f(\sigma_n) - f(\sigma_n) + f(t_n) - f(\sigma_n+) + f(b-) - f(t_n) + f(b) - f(b-) \\ &= f(b) - f(a). \end{aligned}$$

Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ tedy platí

$$\Delta^+ f(a) + \sum_{k=0}^n (\Delta^+ f(w_k) + \Delta^- f(w_k)) + \Delta^- f(b) \leq f(b) - f(a)$$

a tudíž

$$\sum_{t \in [a,b)} |\Delta^+ f(t)| + \sum_{t \in (a,b]} |\Delta^- f(t)| \leq f(b) - f(a).$$

Tvrzení (1.3) tedy platí pro každou funkci f neklesající na $[a, b]$. Důkaz věty nyní můžeme snadno dokončit použitím Věty 1.4. \square

1.10. Cvičení. Pomocí rozkladu $f(x) = f(a) + p(x) - n(x)$ ze Cvičení 1.5 dokažte, že pro každou funkci $f \in \mathbb{BV}[a, b]$ platí

$$\sum_{t \in [a,b)} |\Delta^+ f(t)| + \sum_{t \in (a,b]} |\Delta^- f(t)| \leq \text{var}_a^b f. \quad (1.4)$$

1.11. Věta. *Prostor $\mathbb{BV}[a, b]$ je Banachův prostor (tj. úplný normovaný prostor).*

D ů k a z . $\mathbb{BV}[a, b]$ je lineární normovaný prostor vzhledem k normě

$$f \in \mathbb{BV}[a, b] \rightarrow \|f\|_{\mathbb{BV}} = |f(a)| + \text{var}_a^b f$$

(viz Cvičení 1.2 (vi)). Zbývá tedy dokázat, že $\mathbb{BV}[a, b]$ je úplný, tj. že každá posloupnost cauchyovská v $\mathbb{BV}[a, b]$ má v $\mathbb{BV}[a, b]$ limitu. Předpokládejme tedy, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{BV}[a, b]$ je cauchyovská v $\mathbb{BV}[a, b]$.

a) Potom platí

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : \\ n, m \geq n_\varepsilon \implies |f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_{\mathbb{B}V} < \varepsilon \text{ pro všechna } x \in [a, b]. \end{cases} \quad (1.5)$$

Speciálně je tedy pro každé $x \in [a, b]$ posloupnost reálných čísel $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ cauchyovská a tudíž pro každé $x \in [a, b]$ existuje konečná limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

b) Nechť je dáno libovolné $\varepsilon > 0$ a nechť $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ má vlastnost (1.5). Potom pro každé $x \in [a, b]$ máme také

$$|f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_{n_\varepsilon}(x)| \leq \varepsilon$$

a tudíž pro každé $n \geq n_\varepsilon$ a každé $x \in [a, b]$ platí

$$|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)| + |f_{n_\varepsilon}(x) - f_n(x)| < 2\varepsilon.$$

To ovšem znamená, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| = 0,$$

neboli, posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje k f stejnoměrně na $[a, b]$.

c) Číselná posloupnost $\{\text{var}_a^b f_n\}_{n=1}^\infty$ je ohraničená. Podle Bolzanovy-Weierstrašovy věty z ní tedy lze vybrat podposloupnost $\{\text{var}_a^b f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, pro kterou platí:

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \text{var}_a^b f_{n_k} = d < \infty,$$

tj.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_\varepsilon : k \geq k_\varepsilon \wedge D \in \mathcal{D}[a, b] \implies V(f_{n_k}, D) < d + \varepsilon$$

a

$$\forall \varepsilon > 0 \forall D \in \mathcal{D}[a, b] : V(f, D) = \lim_{k \rightarrow \infty} V(f_{n_k}, D) \leq d + \varepsilon.$$

Odtud ovšem už plyne, že je

$$\text{var}_a^b f = \sup_{D \in \mathcal{D}[a, b]} V(f, D) \leq d < \infty,$$

tj. $f \in \mathbb{B}V[a, b]$.

d) Podle (1.5) máme

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : \\ n, m \geq n_\varepsilon \implies V(f_n - f_m, D) \leq \text{var}_a^b(f_n - f_m(x)) < \varepsilon \text{ pro každé } D \in \mathcal{D}[a, b]. \end{cases}$$

Tudíž, je-li $m \geq n_\varepsilon$, pak pro každé $D \in \mathcal{D}[a, b]$ platí

$$V(f - f_m, D) = \lim_{n \rightarrow \infty} V(f_n - f_m, D) \leq \varepsilon$$

neboli

$$\text{var}_a^b(f - f_m) \leq \varepsilon.$$

To ovšem znamená, že

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|f - f_m\|_{\mathbb{B}\mathbb{V}} = 0,$$

což zbývalo ještě dokázat. □

1.12. Cvičení. Definujme pro $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{pro } \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Ukažte, že $f_n \in \mathbb{B}\mathbb{V}[0, 1]$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $f_n \rightrightarrows f$ na $[0, 1]$, kde

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x = 0 \\ x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{pro } x > 0 \end{cases},$$

a přitom f nemá konečnou variaci na $[0, 1]$.

Nyní se budeme věnovat vlastnostem funkcí s konečnou variací vzhledem k derivování. Nejprve připomeňme pojem množin s nulovou mírou.

1.13. Definice. Množina $M \subset \mathbb{R}$ má *nulovou míru* ($\mu(M) = 0$), když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje spočetný systém otevřených intervalů $\{I_j, j \in \mathbb{N}\}$ takový, že je

$$M \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \quad \text{a} \quad \sum_{j=1}^{\infty} |I_j| < \varepsilon.$$

Řekneme, že nějaká vlastnost platí *skoro všude* (s.v.) na intervalu $[a, b]$, jestliže existuje množina $M \subset [a, b]$ nulové míry taková, že tato vlastnost platí pro každé $x \in [a, b] \setminus M$.

1.14. Cvičení.

- (i) Každá spočetná podmnožina S v \mathbb{R} má nulovou míru.
- (ii) Sjednocení spočetně mnoha množin nulové míry má nulovou míru.

1.15. Věta. Každá funkce $f \in \mathbb{B}\mathbb{V}[a, b]$ má vlastní derivaci $f'(x)$ pro s.v. $x \in [a, b]$.

Důkaz Věty 1.15 je technicky komplikovaný. Odsouváme ho proto do Dodatku 9.1.

1.16. Poznámka. Lze dokonce dokázat (viz [6, Věty 84 a 91]), že je-li $f \in \mathbb{B}\mathbb{V}[a, b]$, pak $f' \in \mathbb{L}^1[a, b]$. **ALE !!!!** Obecně neplatí pro každou funkci $f \in \mathbb{B}\mathbb{V}[a, b]$ zdánlivě evidentní rovnost

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) \, dt.$$

Existují totiž funkce $f \in \mathbb{BV}[a, b]$ nekonstantní na $[a, b]$ a přitom takové, že platí $f'(x) = 0$ s.v. na $[a, b]$.

1.17. Definice. Funkce $f \in \mathbb{BV}[a, b]$ se nazývá *singulární*, jestliže platí $f'(x) = 0$ pro s.v. $x \in [a, b]$.

Nejjednodušším příkladem nekonstantních singulárních funkcí jsou funkce tvaru

$$f(x) = \chi_{[a,c]}(x),$$

kde $c \in (a, b)$. Jejich zobecněním jsou třídy *jednoduchých skokových funkcí* (anglicky *step functions*) resp. *skokových funkcí* (anglicky *break functions*).

1.18. Definice. Funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je *jednoduchá skoková funkce na $[a, b]$* ($f \in \mathbb{S}[a, b]$), jestliže existuje dělení $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \in \mathcal{D}[a, b]$ takové, že na každém jeho dílčím otevřeném intervalu (α_{j-1}, α_j) je f konstantní.

Funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je *skoková funkce na $[a, b]$* ($f \in \mathbb{B}[a, b]$), jestliže existují $c \in \mathbb{R}$, $K \subset \mathbb{N}$ a

$$\{w_k\}_{k \in K} \subset [a, b], \quad \{c_k\}_{k \in K} \subset \mathbb{R} \quad \text{a} \quad \{d_k\}_{k \in K} \subset \mathbb{R}$$

takové, že platí

$$\sum_{k \in K} (|c_k| + |d_k|) < \infty$$

a

$$f(x) = c + \sum_{a < w_k \leq x} c_k + \sum_{a \leq w_k < x} d_k \quad \text{pro } x \in [a, b]. \quad (1.6)$$

1.19. Cvičení.

(i) Funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je jednoduchá skoková funkce na $[a, b]$ právě tehdy, když existuje dělení $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ intervalu $[a, b]$ takové, že

$$f(x) = \sum_{j=0}^m f(\alpha_j) \chi_{[\alpha_j]}(x) + \sum_{j=1}^m f\left(\frac{\alpha_{j-1} + \alpha_j}{2}\right) \chi_{(\alpha_{j-1}, \alpha_j)}(x)$$

pro $x \in [a, b]$.

(ii) Pro každou $f \in \mathbb{B}[a, b]$ tvaru (1.6) platí

$$\text{var}_a^b f = \sum_{k \in K} (|c_k| + |d_k|)$$

a tudíž $\mathbb{S}[a, b] \subset \mathbb{B}[a, b] \subset \mathbb{BV}[a, b]$.

1.20. Věta. Každá skoková funkce na $[a, b]$ je singulární na $[a, b]$.

D ů k a z . Necht' $c \in \mathbb{R}$, $K \subset \mathbb{N}$, $\{w_k\}_{k \in K} \subset [a, b]$, $\sum_{k \in K} (|c_k| + |d_k|) < \infty$ a

$$f(x) = c + \sum_{a < w_k \leq x} c_k + \sum_{a \leq w_k < x} d_k \quad \text{na } [a, b].$$

Definujme pro $x \in [a, b]$:

$$v(x) = \sum_{a < w_k \leq x} |c_k| + \sum_{a \leq w_k < x} |d_k| \quad \text{na } [a, b].$$

Potom je

$$v(x) = \sum_{k \in K} v_k(x) \quad \text{na } [a, b],$$

kde

$$v_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{když } a \leq x < w_k, \\ |c_k| & \text{když } x = w_k, \\ |c_k| + |d_k| & \text{když } w_k < x \leq b. \end{cases}$$

Každá funkce v_k je neklesající na $[a, b]$ a $v'_k(x) = 0$ pro $x \neq w_k$. Máme tedy

$$v'(x) = \sum_{k \in K} v'_k(x) = 0 \quad \text{pro } x \notin \{w_k\}_{k \in K}, \quad \text{tj. pro s.v. } x \in [a, b].$$

Protože pro všechna $x, y \in [a, b]$, $x \neq y$, zřejmě platí

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq \left| \frac{v(x) - v(y)}{x - y} \right|,$$

plyne odsud tvrzení věty. □

1.21 . Poznámka. Příklad funkce, která je spojitá, neklesající a singulární na daném intervalu, je uveden v [5, V.9, cvičení 4].

1.22. Lemma. Necht' $f \in \mathbb{BV}[a, b]$, $K \subset \mathbb{N}$ a necht' $\{w_k\}_{k \in K}$, je množina bodů nespojivosti funkce f v $[a, b]$. Definujme

$$f^{\text{B}}(x) = \sum_{a < w_k \leq x} \Delta^- f(w_k) + \sum_{a \leq w_k < x} \Delta^+ f(w_k) \quad \text{pro } x \in [a, b]. \quad (1.7)$$

Potom je $f^{\text{B}} \in \mathbb{BV}[a, b]$ a funkce $f - f^{\text{B}}$ je spojitá na $[a, b]$.

D ů k a z . Podle Věty 1.9 (viz též Cvičení 1.19 (ii)) máme

$$\text{var}_a^b f^{\text{B}} = \sum_{k \in K} (|\Delta^- f(w_k)| + |\Delta^+ f(w_k)|) < \infty$$

a tudíž $f^B \in \mathbb{B}[a, b] \subset \mathbb{BV}[a, b]$. Dále, pro každé $x \in [a, b)$ máme

$$f^B(x+) = \sum_{a < w_k \leq x} \Delta^- f(w_k) + \sum_{a \leq w_k \leq x} \Delta^+ f(w_k).$$

Proto také

$$f^B(x+) - f^B(x) = \Delta^+ f(x)$$

a

$$(f(x+) - f^B(x+)) - (f(x) - f^B(x)) = \Delta^+ f(x) - \Delta^+ f(x) = 0.$$

Podobně, pro každé $x \in (a, b]$ je

$$f^B(x-) = \sum_{a < w_k < x} \Delta^- f(w_k) + \sum_{a \leq w_k < x} \Delta^+ f(w_k),$$

a tedy

$$(f(x) - f^B(x)) - (f(x-) - f^B(x-)) = \Delta^- f(x) - \Delta^- f(x) = 0. \quad \square$$

1.23. Definice. Funkce f^B přiřazená k f podle definice (1.7) budeme nazývat *skoková část* funkce f . Rozdíl $f - f^B$ nazýváme *spojitá část* funkce f a značíme f^C .

1.24. Poznámka. Podle Lemmatu 1.22 lze každou funkci s konečnou variací rozložit na součet funkce spojitě a funkce skokové. Takový rozklad se nazývá *Jordanův rozklad* funkce s konečnou variací. Obecně jsou skoková resp. spojitá část z Jordanova rozkladu určeny jednoznačně až na konstantu. Všimněme si ještě, že použitím charakteristických funkcí podintervalů v $[a, b]$ lze definici (1.7) ekvivalentně zapsat též ve tvaru

$$f^B(x) = \sum_{k \in K} \Delta^- f(w_k) \chi_{[w_k, b]}(x) + \sum_{k \in K} \Delta^+ f(w_k) \chi_{(w_k, b]}(x).$$

1.25. Lemma. *Nechť $f \in \mathbb{BV}[a, b]$, $K \subset \mathbb{N}$, $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ je množina bodů nespojitosti funkce f v intervalu $[a, b]$ a nechť f^B je definována jako v Lemmatu 1.22. Definujme dále*

$$f_n^B(x) = \sum_{k \in K \cap [1, n]} \Delta^- f(w_k) \chi_{[w_k, b]}(x) + \sum_{k \in K \cap [1, n]} \Delta^+ f(w_k) \chi_{(w_k, b]}(x)$$

pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [a, b]$.

Potom je $f_n^B \in \mathbb{S}[a, b]$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{var}_a^b (f^B - f_n^B) = 0.$$

Důkaz plyne z nerovnosti

$$\text{var}_a^b (f^B - f_n^B) \leq \sum_{k \in K \setminus [1, n]} (|\Delta^- f(w_k)| + |\Delta^+ f(w_k)|)$$

a z Věty 1.9. □

1.26. Věta (HELLY). *Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{BV}[a, b]$, $\varkappa \in \mathbb{R}$,*

$$|f_n(a)| \leq \varkappa \quad a \quad \text{var}_a^b f_n \leq \varkappa \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Potom existují funkce $f \in \mathbb{BV}[a, b]$ a podposloupnost

$$\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

takové, že platí

$$|f(a)| \leq \varkappa, \quad \text{var}_a^b f \leq \varkappa \quad a \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = f(x) \quad \text{na } [a, b].$$

K důkazu Hellyovy věty využijeme následujících dvou lemmat.

Lemma 1. *Nechť*

$$|f_n(x)| \leq M < \infty \quad \text{na } [a, b] \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Potom pro každou spočetnou $P \subset [a, b]$ existuje podposloupnost $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že limita

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(p)$$

je konečná pro všechna $p \in P$.

D ů k a z . Nechť $P = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$. Máme $|f_n(p_k)| \leq M < \infty$ pro všechna $n, k \in \mathbb{N}$. Podle Bolzanovy-Weierstraßovy věty lze tedy vybrat z $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ podposloupnost $\{f_{n_{k,1}}\}_{k=1}^{\infty}$, pro níž existuje konečná limita

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_{k,1}}(p_1) = q_1 \in \mathbb{R}.$$

Podobně existují

$$\{f_{n_{k,2}}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{f_{n_{k,1}}\}_{k=1}^{\infty} \quad a \quad q_2 \in \mathbb{R}$$

tak, že

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_{k,2}}(p_2) = q_2 \in \mathbb{R}.$$

Takto pro každé $j \in \mathbb{N}$ najdeme posloupnosti

$$\{f_{n_{k,j}}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{f_{n_{k,j-1}}\}_{k=1}^{\infty} \quad a \quad q_j \in \mathbb{R}$$

takové, že platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_{k,\ell}}(p_\ell) = q_\ell \in \mathbb{R} \quad \text{pro každé } \ell \in \{1, 2, \dots, j\}.$$

Položme $f_{n_k} = f_{n_k, k}$ pro $k \in \mathbb{N}$. Potom

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(p_j) = q_j \in \mathbb{R} \quad \text{pro každé } j \in \mathbb{N}.$$

□

Lemma 2. *Předpokládejme, že všechny funkce f_n , $n \in \mathbb{N}$, jsou neklesající na $[a, b]$ a že existuje $M \in (0, \infty)$ takové, že $\|f_n\| \leq M$ platí pro každé $n \in \mathbb{N}$. Potom existují podposloupnost*

$$\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$$

a funkce $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neklesající na $[a, b]$ takové, že platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = f(x) \quad \text{na } [a, b].$$

Důkaz. Nechť $P = (\mathbb{P} \cap (a, b)) \cup [a] \cup [b]$ je množina racionálních čísel z intervalu (a, b) doplněná o body a, b . Množina P je spočetná a $[a, b] \setminus P \subset (a, b)$. Podle Lemmatu 1 existují podposloupnost $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ a zobrazení $\varphi: P \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(p) = \varphi(p) \quad \text{pro všechna } p \in P.$$

Zřejmě platí

$$\varphi(p') \leq \varphi(p'') \quad \text{pro všechna } p', p'' \in P, p' \leq p''.$$

Dále, definujme pro $x \in (a, b) \setminus P$

$$\varphi(x) = \sup_{p \in P \cap [a, x)} \varphi(p).$$

Potom máme

$$\varphi(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) \quad \text{pro } x \in P \quad \text{a} \quad \varphi(x) = \lim_{\substack{p \rightarrow x^- \\ p \in P}} \varphi(p)$$

a φ je definovaná a neklesající na $[a, b]$. Ukážeme, že v každém bodě $x_0 \in (a, b)$, ve kterém je funkce φ spojitá platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x_0) = \varphi(x_0). \tag{1.8}$$

Vskutku, nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Potom existuje $\delta_\varepsilon > 0$ takové, že

$$x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0 + \delta_\varepsilon \implies \varphi(x_0) - \varepsilon < \varphi(x) < \varphi(x_0) + \varepsilon.$$

Zvolíme-li $r' \in P \cap (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0)$ a $r'' \in P \cap (x_0, x_0 + \delta_\varepsilon)$, bude platit

$$\varphi(x_0) - \varepsilon < \varphi(r') \leq \varphi(x_0) \leq \varphi(r'') < \varphi(x_0) + \varepsilon.$$

Dále, zvolme k_ε tak, aby bylo

$$\varphi(r') - \varepsilon < f_{n_k}(r') < \varphi(r') + \varepsilon \quad \text{a} \quad \varphi(r'') - \varepsilon < f_{n_k}(r'') < \varphi(r'') + \varepsilon$$

pro každé $k \geq k_\varepsilon$. Potom, pro každé $k \geq k_\varepsilon$ dostaneme také

$$\begin{aligned} \varphi(x_0) - 2\varepsilon &< \varphi(r') - \varepsilon < f_{n_k}(r') \leq f_{n_k}(x_0) \\ &\leq f_{n_k}(r'') < \varphi(r'') + \varepsilon < \varphi(x_0) + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

čili platí (1.8).

Dokázali jsme tedy, že značí-li Q množinu bodů nespojitosti funkce φ v (a, b) , pak

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = \varphi(x) \quad \text{pro } x \in [a, b] \setminus Q.$$

Podle Věty 1.7 je množina Q spočetná. Můžeme tedy použít ještě jednou Lemma 1 a dokázat tak existenci vybrané posloupnosti

$$\{f_{n_{k_\ell}}\}_{\ell=1}^\infty \subset \{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty,$$

kteřá má limitu $\psi(x) \in \mathbb{R}$ pro každé $x \in Q$. Definujeme-li tedy

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{když } x \in [a, b] \setminus Q, \\ \psi(x) & \text{když } x \in Q, \end{cases}$$

bude

$$\lim_{\ell} f_{n_{k_\ell}}(x) = f(x) \quad \text{na } [a, b]$$

a protože funkce, která je na intervalu $[a, b]$ bodovou limitou posloupnosti funkcí neklesajících na $[a, b]$, je také neklesající, lemma je dokázáno. \square

Důkaz Věty 1.26. Podle Lemmatu 2 (a s přihlédnutím ke Cvičení 1.5) existují funkce $f \in \mathbb{B}\mathbb{V}[a, b]$ a podposloupnost $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ takové, že

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = f(x) \quad \text{na } [a, b].$$

Zřejmě je $|f(a)| \leq \varkappa$. Dále, protože pro každé dělení $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \in \mathcal{D}[a, b]$ máme

$$V(f, D) = \lim_{k \rightarrow \infty} V(f_{n_k}, D) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \text{var}_a^b f_{n_k} \leq \varkappa,$$

platí také $\text{var}_a^b f \leq \varkappa$. \square

Absolutně spojité funkce.

2.1 . Definice. Funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je *absolutně spojitá* na intervalu $[a, b]$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\sum_{j=1}^m |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| < \varepsilon$$

platí pro každý systém intervalů $[\alpha_j, \beta_j]$, $j = 1, 2, \dots, m$, splňující

$$a \leq \alpha_1 \leq \beta_1 \leq \alpha_2 \leq \beta_2 \cdots \leq \beta_{m-1} \leq \alpha_m \leq \beta_m \leq b \quad \text{a} \quad \sum_{j=1}^m (\beta_j - \alpha_j) < \delta. \quad (2.1)$$

Množinu funkcí absolutně spojitých na $[a, b]$ značíme $\mathbb{AC}[a, b]$ resp. \mathbb{AC} (je-li ze souvislosti jasné, o jaký interval se jedná).

2.2 . Cvičení. (i) Každá funkce absolutně spojitá na intervalu $[a, b]$ je na tomto intervalu stejnoměrně spojitá.

(ii) Nechť funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ splňuje Lipschitzovu podmínku na intervalu $[a, b]$, tj. existuje $L \in \mathbb{R}$ takové, že

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \text{platí pro všechna } x, y \in [a, b].$$

Potom $f \in \mathbb{AC}[a, b]$.

2.3 . Věta. Každá funkce absolutně spojitá na intervalu $[a, b]$ má na tomto intervalu konečnou variaci.

D ů k a z . Nechť $f \in \mathbb{AC}$. Zvolme $\delta > 0$ tak, aby platilo

$$\sum_{j=1}^m |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| < 1$$

pro každý systém intervalů $[\alpha_j, \beta_j]$, $j = 1, 2, \dots, k$, splňující (2.1). Dále, zvolme dělení $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ intervalu $[a, b]$ tak, aby platilo

$$0 < x_i - x_{i-1} < \delta \quad \text{pro každé } i = 1, 2, \dots, k.$$

Potom pro každé $i = 1, 2, \dots, k$ a každé dělení $D^i = \{\alpha_0^i, \alpha_1^i, \dots, \alpha_{m_i}^i\}$ intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ máme

$$\sum_{j=1}^{m_i} (\alpha_j^i - \alpha_{j-1}^i) = x_i - x_{i-1} < \delta$$

a tudíž (podle Věty 1.3)

$$\operatorname{var}_a^b f = \sum_{i=1}^m \operatorname{var}_{x_{i-1}}^{x_i} f = \sum_{i=1}^k \sup_{D^i \in \mathcal{D}[x_{i-1}, x_i]} \sum_{j=1}^{m_i} |f(\alpha_j^i) - f(\alpha_{j-1}^i)| \leq k < \infty. \quad \square$$

2.4. Věta. *Jestliže $f, g \in \mathbb{A}\mathbb{C}[a, b]$, pak $|f|, f + g, fg, \max\{f, g\}, \min\{f, g\} \in \mathbb{A}\mathbb{C}[a, b]$. Je-li navíc $|f(x)| > 0$ na $[a, b]$, pak také $f^{-1} \in \mathbb{A}\mathbb{C}[a, b]$.*

Důkaz. Nechť $f, g \in \mathbb{A}\mathbb{C}[a, b]$.

a) Pro libovolná $x, y \in [a, b]$ platí $|f(x)| \leq |f(x) - f(y)| + |f(y)|$. Tudíž

$$|f(x) - f(y)| \geq ||f(x)| - |f(y)||$$

a

$$\sum_{j=1}^m ||f(\beta_j)| - |f(\alpha_j)|| \leq \sum_{j=1}^m |f(\beta_j) - f(\alpha_j)|.$$

Odtud už ovšem okamžitě plyne, že také $|f| \in \mathbb{A}\mathbb{C}[a, b]$.

b) Druhé a třetí tvrzení, tj. $f + g \in \mathbb{A}\mathbb{C}[a, b]$ a $fg \in \mathbb{A}\mathbb{C}[a, b]$, plynou z nerovností

$$|(f(x) + g(x)) - (f(y) + g(y))| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)|$$

a

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leq \|f\| |g(x) - g(y)| + \|g\| |f(x) - f(y)|.$$

c) Protože pro libovolné $x \in [a, b]$ máme

$$\max\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|)$$

a

$$\min\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|),$$

platí v důsledku a) a b) také

$$\max\{f, g\} \in \mathbb{A}\mathbb{C}[a, b] \quad \text{a} \quad \min\{f, g\} \in \mathbb{A}\mathbb{C}[a, b].$$

d) Konečně, je-li navíc $|f(x)| > 0$ na $[a, b]$, pak existuje $\mu > 0$ takové, že platí $|f(x)| \geq \mu$ na $[a, b]$ a tudíž také

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)} \right| \leq \frac{|f(x) - f(y)|}{\mu^2}.$$

Nyní už je snadné ukázat, že $f^{-1} \in \mathbb{A}\mathbb{C}[a, b]$. □

2.5. Poznámka. Podle vět 1.15 a 2.3 každá funkce f absolutně spojitá na intervalu $[a, b]$ má konečnou derivaci $f'(x)$ pro s.v. $x \in [a, b]$. Lze dokázat (viz [6, Věty 93 a 94]), že funkce $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je absolutně spojitá na $[a, b]$ právě tehdy, když

$$f(x) - f(a) = \int_a^x g(t) dt \quad \text{na } [a, b]$$

pro nějakou funkci $g \in \mathbb{L}^1[a, b]$. (Potom je $f'(x) = g(x)$ pro s.v. $x \in [a, b]$.) Speciálně, platí, že je-li $f \in \mathbb{AC}[a, b]$ a $f'(x) = 0$ pro s.v. $x \in [a, b]$, pak je f konstantní na $[a, b]$. Dále, zobrazení

$$f \in \mathbb{AC}[a, b] \rightarrow (f(a), f') \in \mathbb{R} \times \mathbb{L}^1[a, b]$$

a

$$(c, g) \in \mathbb{R} \times \mathbb{L}^1[a, b] \rightarrow f(x) := c + \int_a^x g(t) dt \in \mathbb{AC}[a, b]$$

představují vzájemně jednoznačný vztah mezi $\mathbb{AC}[a, b]$ a $\mathbb{R} \times \mathbb{L}^1[a, b]$. Na $\mathbb{AC}[a, b]$ definujeme normu předpisem

$$\|f\|_{\mathbb{AC}} = |f(a)| + \|f'\|_1 \quad \text{pro } f \in \mathbb{AC}[a, b]$$

a $\mathbb{AC}[a, b]$ je pak Banachův prostor. Obecný spojitý lineární funkcional na $\mathbb{AC}[a, b]$ má tvar:

$$f \in \mathbb{AC}[a, b] \rightarrow q f(a) + \int_a^b p f' dt,$$

kde $q \in \mathbb{R}$ a $p \in \mathbb{L}^\infty[a, b]$. ($\mathbb{L}^\infty[a, b]$ značí prostor funkcí "v podstatě" ohraničených na $[a, b]$.)

Další podrobnosti o funkcích absolutně spojitých lze nalézt v monografiích V. Jarníka *Diferenciální počet II* [5, V.9] a *Integrální počet II* [6, V.5] a Š. Schwabika *Integrace v \mathbb{R} (Kurzweilova teorie)* [9, XIII.4].

Víme již (viz Lemma 1.22 a Poznámka 1.24), že každou funkci s konečnou variací na $[a, b]$ můžeme rozložit na součet funkce spojitě a funkce skokové resp. na rozdíl dvou funkcí neklesajících na $[a, b]$ (viz Věta 1.4). Funkce s konečnou variací lze také rozložit na součet funkce absolutně spojitě a funkce singulární. Důkaz následujícího tvrzení je uveden např. v [6, Věta 125].

2.6. Věta (LEBESGUEŮV ROZKLAD FUNKCE S KONEČNOU VARIACÍ). *Pro každou funkci $f \in \mathbb{BV}[a, b]$ existuje singulární funkce f^{SING} taková, že $f - f^{\text{SING}}$ je absolutně spojitá na $[a, b]$. Funkce f^{SING} je určena jednoznačně až na konstantu.*

2.7. Definice. Jestliže $f \in \mathbb{BV}[a, b]$, pak funkci f^{SING} přiřazenou k f podle Věty 2.6 nazýváme *singulární část* funkce f . Dále, rozdíl $f - f^{\text{SING}}$ nazýváme *absolutně spojitá část* funkce f a značíme f^{AC} . Konečně, $f^{\text{SC}} := f - f^{\text{B}} - f^{\text{AC}} = f^{\text{C}} - f^{\text{AC}}$ je *spojitá singulární část* funkce f .

Kapitola 3

Regulované funkce.

3.1. Definice. Funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá *regulovaná* na $[a, b]$, jestliže pro každé $t \in (a, b)$ a každé $s \in [a, b)$ existují konečné limity

$$f(t-) = \lim_{\tau \rightarrow t-} f(\tau) \quad \text{a} \quad f(s+) = \lim_{\tau \rightarrow s+} f(\tau),$$

tj. má-li na intervalu $[a, b]$ nespojitosti nejvýše 1. *druhu*. Množinu funkcí regulovaných na $[a, b]$ značíme $\mathbb{G}[a, b]$.

3.2. Poznámka. Zřejmě platí $\mathbb{BV}[a, b] \cup \mathbb{C}[a, b] \subset \mathbb{G}[a, b]$, přičemž $\mathbb{G}[a, b] \setminus \mathbb{C}[a, b] \neq \emptyset$ a $\mathbb{G}[a, b] \setminus \mathbb{BV}[a, b] \neq \emptyset$.

Podobně jako pro funkce s konečnou variací (viz Lemma z důkazu Věty 1.7) platí pro regulované funkce :

3.3. Věta. Každá funkce regulovaná na $[a, b]$ má na $[a, b]$ nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti. □

3.4. Věta. Jestliže pro posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{G}[a, b]$ a funkci $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ stejnoměrně na $[a, b]$ (tj. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| = 0$), pak $f \in \mathbb{G}[a, b]$.

D ů k a z . Necht' $x \in [a, b)$, necht' $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset (x, b]$ je libovolná posloupnost taková, že $x_k > x$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$ a $x_k \rightarrow x$ pro $k \rightarrow \infty$. Necht' je dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ a $k_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby platilo

$$\|f - f_{n_0}\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{a} \quad |f_{n_0}(x_k) - f_{n_0}(x_\ell)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pro všechna } k, \ell \geq k_0.$$

Potom budeme mít pro všechna $k, \ell \geq k_0$

$$\begin{aligned} & |f(x_k) - f(x_\ell)| \\ & \leq |f(x_k) - f_{n_0}(x_k)| + |f_{n_0}(x_k) - f_{n_0}(x_\ell)| + |f_{n_0}(x_\ell) - f(x_\ell)| < \varepsilon, \end{aligned}$$

tj. existuje konečná limita $f(x+) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k)$. Podobně bychom ukázali, že pro každé $x \in (a, b]$ existuje konečná limita $f(x-)$. □

3.5. Definice. Pro libovolnou funkci $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, podinterval $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ a dělení $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \in \mathcal{D}[a, b]$ definujeme

$$\omega_{(\alpha, \beta)}(f) = \sup_{x', x'' \in (\alpha, \beta)} |f(x') - f(x'')| \quad \text{a} \quad \omega_D(f) = \max_{i=1, 2, \dots, m} \omega_{(\alpha_{i-1}, \alpha_i)}(f).$$

3.6. Věta. *Následující tři tvrzení jsou ekvivalentní*

(i) $f \in \mathbb{G}[a, b]$.

(ii) *Existuje posloupnost $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{S}[a, b]$ taková, že platí $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$ pro $n \rightarrow \infty$.*

(iii) *Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení $D \in \mathcal{D}[a, b]$ takové, že $\omega_D(f) < \varepsilon$.*

D ů k a z . a) Implikace (ii) \implies (i) je dokázána Větou 3.4.

b) Předpokládejme, že platí (i) a necht' je dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Potom pro každé $x \in [a, b]$ existuje $\delta(x) > 0$ takové, že platí

$$x - \delta(x) > a \text{ pro všechna } x \in (a, b], \quad x + \delta(x) < b \text{ pro všechna } x \in [a, b)$$

a

$$\begin{cases} \omega_{(a, a+\delta(a))}(f) < \varepsilon, & \omega_{(b-\delta(b), b)}(f) < \varepsilon, \\ \omega_{(x-\delta(x), x)}(f) < \varepsilon \text{ a } \omega_{(x, x+\delta(x))}(f) < \varepsilon \end{cases} \text{ pro všechna } x \in (a, b). \quad (3.1)$$

Intervaly

$$[a, a + \delta(a)), (x - \delta(x), x + \delta(x)), x \in (a, b), (b - \delta(b), b]$$

tvorí otevřené pokrytí intervalu $[a, b]$, ze kterého lze podle Vitaliovy věty (viz např. [5, Věta 81]) vybrat pokrytí konečné:

$$[a, a + \delta(a)), (x_i - \delta(x_i), x_i + \delta(x_i)), i = 1, 2, \dots, m-1, (b - \delta(b), b],$$

přičemž vzhledem k (3.1) platí

$$\omega_{(x_i - \delta(x_i), x_i)}(f) < \varepsilon \text{ a } \omega_{(x_i, x_i + \delta(x_i))}(f) < \varepsilon \text{ pro všechna } i = 1, 2, \dots, m-1.$$

Označme $x_0 := a$ a $x_m := b$ a necht'

$$D = \{x_0, \alpha_1, x_1, \dots, \alpha_{m-1}, x_{m-1}, \alpha_m, x_m\},$$

kde

$$\alpha_i \in (x_i - \delta(x_i), x_{i-1} + \delta(x_{i-1})) \cap (x_{i-1}, x_i), \quad i = 1, 2, \dots, m-1.$$

Potom

$$\omega_{(a, \alpha_1)}(f) \leq \omega_{(a, a+\delta(a))}(f) < \varepsilon, \quad \omega_{(\alpha_m, b)}(f) \leq \omega_{(b-\delta(b), b)}(f) < \varepsilon$$

a

$$\omega_{(\alpha_i, x_i)}(f) \leq \omega_{(x_i - \delta(x_i), x_i)}(f) < \varepsilon \text{ a } \omega_{(x_i, \alpha_{i+1})}(f) \leq \omega_{(x_i, x_i + \delta(x_i))}(f) < \varepsilon$$

pro každé $i = 1, 2, \dots, m-1$, tj.

$$\omega_D(f) < \varepsilon.$$

c) Předpokládejme, že platí (iii). Nechť je dáno $\varepsilon > 0$ a necht'

$$D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \in \mathcal{D}[a, b]$$

je dělení $[a, b]$ takové, že $\omega_D(f) < \varepsilon$. Pro každé $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ zvolme $\xi_i \in (\alpha_{i-1}, \alpha_i)$ a definujme

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} f(\alpha_i) & \text{pro } x = \alpha_i, \\ f(\xi_i) & \text{pro } x \in (\alpha_{i-1}, \alpha_i). \end{cases}$$

Pro každé $x \in [a, b]$ máme $|f(x) - g_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ a tudíž také $\|f - g_\varepsilon\| < \varepsilon$. Jestliže tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme $f_n = g_{1/n}$, bude $f_n \in \mathbb{S}[a, b]$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$ pro $n \rightarrow \infty$. \square

3.7. Důsledky.

- (i) Každá funkce regulovaná na $[a, b]$ je na $[a, b]$ ohraničená. Tudíž také $G[a, b] \subset \mathbb{L}^1[a, b]$.
- (ii) Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje nejvýše konečně mnoho $x \in [a, b]$ takových, že platí

$$|\Delta^+ f(x)| \geq \varepsilon \quad \text{nebo} \quad |\Delta^- f(x)| \geq \varepsilon.$$

D ů k a z . Obě tvrzení plynou z vlastnosti (iii) z Věty 3.6. \square

3.8. Věta. $\mathbb{G}[a, b]$ je Banachův prostor vzhledem k normě

$$\|f\|_{\mathbb{G}} = \|f\| = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

D ů k a z . Předpokládejme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{G}[a, b]$ je cauchyovská v $\mathbb{G}[a, b]$. Jako v částech a) a b) důkazu Věty 1.11 dokážeme, že existuje funkce $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$. Podle Věty 3.4 ovšem platí $f \in \mathbb{G}[a, b]$ a tím je věta dokázána. \square

3.9. Poznámky.

- (i) $f \in \mathbb{S}[a, b] \iff f$ je konečná lineární kombinace charakteristických funkcí intervalů $[a, \tau]$, $[a, \tau)$, $\tau \in (a, b]$, a charakteristické funkce jednobodového intervalu $[a]$, tj.

$$\mathbb{S}[a, b] = \text{Lin}\left(\chi_{[a, \tau]}, \chi_{[a, \tau)}, \tau \in (a, b], \chi_{[a]}\right).$$

($\text{Lin}(M)$ značí lineární obal množiny M .)

- (ii) Množina $\overline{\mathbb{S}[a, b]}$ je podle tvrzení (ii) Věty 3.6 hustá v $\mathbb{G}[a, b]$, tj. $\overline{\mathbb{S}[a, b]} = \mathbb{G}[a, b]$, kde $\overline{\mathbb{S}[a, b]}$ značí uzávěr $\mathbb{S}[a, b]$ v $\mathbb{G}[a, b]$.

3.10. Lemma. *Nechť $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{G}[a, b]$ a $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$. Potom platí též*

$$f_n(x-) \rightrightarrows f(x-) \quad \text{a} \quad f_n(x+) \rightrightarrows f(x+) \quad \text{na } [a, b],$$

kde $f(a-) = f(a)$, $f(b+) = f(b)$ a $f_k(a-) = f_k(a)$ a $f_k(b+) = f_k(b)$ pro $k \in \mathbb{N}$.

D ů k a z . Pro $n \in \mathbb{N}$ polořme

$$\tilde{f}_n(x) = \begin{cases} f_n(x+) & \text{kdyř } x \in [a, b), \\ f_n(b) & \text{kdyř } x = b \end{cases}$$

a

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x+) & \text{kdyř } x \in [a, b), \\ f(b) & \text{kdyř } x = b. \end{cases}$$

Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Existuje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takové, ře je $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$ pro každé $n \geq n_\varepsilon$ a každé $t \in [a, b]$. Odtud ovšem limitním přechodem $t \rightarrow x+$ dostaneme, ře také pro každé $x \in [a, b)$ a každé $n \geq n_\varepsilon$ platí

$$|\tilde{f}_n(x) - \tilde{f}(x)| = \lim_{t \rightarrow x+} |f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon,$$

tj.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{f}_n - \tilde{f}\| = 0$$

neboli

$$f_n(x+) \rightrightarrows f(x+).$$

Podobně bychom ukázali, ře platí i $f_n(x-) \rightrightarrows f(x-)$ na $[a, b]$. □

Ve zbývající části kapitoly uvedeme několik tvrzení, které budou později (zejména v kapitole 6) užitečné. Nejprve shrneme důsledky Lemmatu 3.10 pro některé důležité podmnořiny prostoru $\mathbb{G}[a, b]$.

3.11. Důsledky. Mnořiny

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{G}_L[a, b] = \{f \in \mathbb{G}[a, b] : f(x-) = f(x) \text{ na } (a, b)\}, \\ \tilde{\mathbb{G}}_L[a, b] = \{f \in \mathbb{G}[a, b] : f(x-) = f(x) \text{ na } [a, b)\}, \\ \mathbb{G}_R[a, b] = \{f \in \mathbb{G}[a, b] : f(x+) = f(x) \text{ na } (a, b)\}, \\ \tilde{\mathbb{G}}_R[a, b] = \{f \in \mathbb{G}[a, b] : f(x+) = f(x) \text{ na } (a, b]\}, \\ \mathbb{G}_{reg}[a, b] = \{f \in \mathbb{G}[a, b] : f(x-) + f(x+) = 2f(x) \text{ na } (a, b)\} \end{array} \right. \quad (3.2)$$

jsou uzavřené v $\mathbb{G}[a, b]$ a tudíž jsou to také Banachovy prostory vřhledem k operacím a normě indukovaným z $\mathbb{G}[a, b]$. □

3.12. Lemma.

$$\overline{\mathbb{G}_L[a, b] \cap \mathbb{S}[a, b]} = \mathbb{G}_L[a, b], \quad \overline{\widetilde{\mathbb{G}}_L[a, b] \cap \mathbb{S}[a, b]} = \widetilde{\mathbb{G}}_L[a, b],$$

$$\overline{\mathbb{G}_R[a, b] \cap \mathbb{S}[a, b]} = \mathbb{G}_R[a, b], \quad \overline{\widetilde{\mathbb{G}}_R[a, b] \cap \mathbb{S}[a, b]} = \widetilde{\mathbb{G}}_R[a, b],$$

$$\overline{\mathbb{G}_{reg}[a, b] \cap \mathbb{S}[a, b]} = \mathbb{G}_{reg}[a, b].$$

D ů k a z . Dokážeme pouze první a poslední tvrzení. Zbývající vztahy se dokážou analogicky.

(i) Necht' $f \in \mathbb{G}_L[a, b]$ a $\varepsilon > 0$. Podle Věty 3.6 (ii) existuje $\varphi \in \mathbb{S}[a, b]$ takové, že

$$|f(x) - \varphi(x)| \leq \|f - \varphi\| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } x \in [a, b]. \quad (3.3)$$

Dále, pro každé $x \in (a, b)$ existuje $\delta(x) > 0$ takové, že $x - \delta(x) > a$ a

$$|f(x) - f(t)| = |f(x-) - f(t)| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } t \in (x - \delta(x), x).$$

Pro každé $x \in (a, b)$ a $t \in (x - \delta(x), x]$ tedy máme

$$|\varphi(x) - \varphi(t)| \leq |\varphi(x) - f(x)| + |f(x) - f(t)| + |f(t) - \varphi(t)| < 3\varepsilon,$$

tj.

$$|\varphi(x) - \varphi(x-)| \leq 3\varepsilon.$$

Položme

$$\widetilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{pro } x = a \text{ nebo } x = b, \\ \varphi(x-) & \text{pro } x \in (a, b). \end{cases}$$

Potom $\widetilde{\varphi} \in \mathbb{G}_L[a, b] \cap \mathbb{S}[a, b]$,

$$|f(x) - \widetilde{\varphi}(x)| = |f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon \quad \text{když } x = a \text{ nebo } x = b$$

a

$$|f(x) - \widetilde{\varphi}(x)| \leq |f(x) - \varphi(x)| + |\varphi(x) - \varphi(x-)| < 4\varepsilon \quad \text{když } x \in (a, b).$$

Odtud už plyne, že množina $\mathbb{G}_L[a, b] \cap \mathbb{S}[a, b]$ je hustá v $\mathbb{G}_L[a, b]$.

(ii) Necht' $f \in \mathbb{G}_{reg}[a, b]$. Necht' je dáno $\varepsilon > 0$ a funkce $\varphi \in \mathbb{S}[a, b]$ je taková, že platí (3.3). Potom musí být také

$$|f(x-) - \varphi(x-)| \leq \varepsilon \quad \text{pro } x \in [a, b) \quad \text{a} \quad |f(x+) - \varphi(x+)| \leq \varepsilon \quad \text{pro } x \in (a, b]. \quad (3.4)$$

Položme

$$\widetilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(a) & \text{když } x = a, \\ \frac{1}{2}(\varphi(x+) + \varphi(x-)) & \text{když } x \in (a, b) \\ \varphi(b) & \text{když } x = b. \end{cases} \quad (3.5)$$

Potom $\tilde{\varphi} \in \mathbb{S}[a, b] \cap \mathbb{G}_{\text{reg}}[a, b]$. Dále, vzhledem k (3.4) a (3.5),

$$\begin{aligned} |f(x) - \tilde{\varphi}(x)| &= \left| \frac{1}{2} [f(x+) + f(x-)] - \frac{1}{2} [\varphi(x+) + \varphi(x-)] \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \left(|f(x+) - \varphi(x+)| + |f(x-) - \varphi(x-)| \right) \leq \varepsilon \quad \text{když } x \in (a, b). \end{aligned}$$

Konečně, podle (3.3) a (3.5) máme

$$|f(x) - \tilde{\varphi}(x)| = |f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon \quad \text{když } x = a \text{ nebo } x = b.$$

Odtud už plyne, že platí $\overline{\mathbb{G}_{\text{reg}}[a, b] \cap \mathbb{S}[a, b]} = \mathbb{G}_{\text{reg}}[a, b]$. □

3.13. Lemma.

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_L[a, b] \cap \mathbb{S}[a, b] &= \text{Lin} \left(1, \chi_{(\tau, b]}, \tau \in [a, b), \chi_{[b]} \right), \\ \tilde{\mathbb{G}}_L[a, b] \cap \mathbb{S}[a, b] &= \text{Lin} \left(1, \chi_{(\tau, b]}, \tau \in (a, b) \right), \\ \mathbb{G}_R[a, b] \cap \mathbb{S}[a, b] &= \text{Lin} \left(1, \chi_{[a]}, \chi_{[\tau, b)}, \tau \in [a, b) \right), \\ \tilde{\mathbb{G}}_R[a, b] \cap \mathbb{S}[a, b] &= \text{Lin} \left(1, \chi_{[\tau, b)}, \tau \in (a, b) \right), \\ \mathbb{G}_{\text{reg}}[a, b] \cap \mathbb{S}[a, b] &= \text{Lin} \left(1, \chi_{(a, b]}, \frac{1}{2} \chi_{[\tau]} + \chi_{(\tau, b]}, \tau \in (a, b), \chi_{[b]} \right), \\ \tilde{\mathbb{G}}_{\text{reg}}[a, b] \cap \mathbb{S}[a, b] &= \text{Lin} \left(1, \frac{1}{2} \chi_{[\tau]} + \chi_{(\tau, b]}, \tau \in (a, b) \right), \end{aligned}$$

D ů k a z . Dokážeme např. předposlední z uvedených relací. Necht' tedy $f \in \mathbb{S}[a, b] \cap \mathbb{G}_{\text{reg}}[a, b]$. Potom existují $m \in \mathbb{N}$, $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{m+1} \in \mathbb{R}$ a dělení $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ intervalu $[a, b]$ takové, že

$$f(x) = \begin{cases} c_0 & \text{když } x = a, \\ c_j & \text{když } x \in (\alpha_{j-1}, \alpha_j) \text{ pro nějaké } j = 1, 2, \dots, m, \\ \frac{c_j + c_{j+1}}{2} & \text{když } x = \alpha_j \text{ pro nějaké } j = 1, 2, \dots, m-1, \\ c_{m+1} & \text{když } x = b, \end{cases}$$

tj.

$$\begin{cases} f(x) = c_0 \chi_{[a]}(x) + \sum_{j=1}^m c_j \chi_{(\alpha_{j-1}, \alpha_j)}(x) \\ \quad + \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{m-1} (c_j + c_{j+1}) \chi_{[\alpha_j]}(x) \right) + c_{m+1} \chi_{[b]}(x) \text{ pro } x \in [a, b]. \end{cases} \quad (3.6)$$

Pravou stranu vztahu (3.6) můžeme upravit takto

$$\begin{aligned} f &= c_0 \chi_{[a, b]} - c_0 \chi_{(a, b]} + \sum_{j=1}^m c_j \chi_{(\alpha_{j-1}, b]} - \sum_{j=1}^{m-1} c_j \chi_{[\alpha_j, b]} - c_m \chi_{[b]} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m-1} c_j \chi_{[\alpha_j]} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m-1} c_{j+1} \chi_{[\alpha_j]} + c_{m+1} \chi_{[b]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c_0 \chi_{[a,b]} - c_0 \chi_{(a,b]} + \sum_{j=1}^m c_j \chi_{(\alpha_{j-1},b]} - \sum_{j=1}^{m-1} c_j (\chi_{(\alpha_j,b]} + \chi_{[\alpha_j]}) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m-1} c_j \chi_{[\alpha_j]} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m-1} c_{j+1} \chi_{[\alpha_j]} + (c_{m+1} - c_m) \chi_{[b]} \\
&= c_0 \chi_{[a,b]} - c_0 \chi_{(a,b]} + \sum_{j=0}^{m-1} c_{j+1} \chi_{(\alpha_j,b]} - \sum_{j=1}^{m-1} c_j \chi_{(\alpha_j,b]} \\
&- \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m-1} c_j \chi_{[\alpha_j]} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m-1} c_{j+1} \chi_{[\alpha_j]} + (c_{m+1} - c_m) \chi_{[b]} \\
&= c_0 \chi_{[a,b]} + (c_1 - c_0) \chi_{(a,b]} + \sum_{j=1}^{m-1} (c_{j+1} - c_j) \left(\chi_{(\alpha_j,b]} + \frac{1}{2} \chi_{[\alpha_j]} \right) \\
&+ (c_{m+1} - c_m) \chi_{[b]} \\
&= d_0 \chi_{[a,b]} + d_1 \chi_{(a,b]} + \sum_{j=2}^m d_j \left(\chi_{(\alpha_j,b]} + \frac{1}{2} \chi_{[\alpha_j]} \right) + d_{m+1} \chi_{[b]},
\end{aligned}$$

kde

$$d_0 = c_0, \quad d_j = c_j - c_{j-1} \text{ pro } j = 1, 2, \dots, m+1, \quad (3.7)$$

Dokázali jsme tedy, že

$$f \in \text{Lin} \left(1, \chi_{(a,b]}, \frac{1}{2} \chi_{[\tau]} + \chi_{[\tau,b]}, \tau \in (a, b), \chi_{[b]} \right).$$

Protože vztahy (3.7) definují vzájemně jednoznačnou korespondenci mezi vektory

$$(c_0, c_1, \dots, c_m, c_{m+1}) \quad \text{a} \quad (d_0, d_1, \dots, d_m, d_{m+1}),$$

znamená to, že platí

$$\mathbb{G}_{\text{reg}}[a, b] \cap \mathbb{S}[a, b] = \text{Lin} \left(1, \chi_{(a,b]}, \chi_{[\tau]}, \chi_{[\tau,b]}, \tau \in (a, b), \chi_{[b]} \right). \quad \square$$

Další podrobnosti týkající se regulovaných funkcí lze nalézt zejména v monografii Ch. Hönig: *Volterra Stieltjes-Integral Equations*[4, sec.3].

Riemannův-Stieljesův integrál

Text této kapitoly se opírá zejména o kapitolu II Hildebrandtovy monografie [3].

4.1. Definice. Pro libovolné dvě funkce $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a rozšířené dělení $(D, \xi) \in \mathcal{D}[a, b]$ intervalu $[a, b]$, $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)^{\text{scriptsize}T} \in \mathbb{R}^m$, definujeme

$$S_{f\Delta g}(D, \xi) := \sum_{j=1}^m f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})].$$

(Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme psát zjednodušeně $S(D, \xi)$ místo $S_{f\Delta g}(D, \xi)$.)

4.2. Definice. Nechtě $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Řekneme, že existuje *normový Riemannův-Stieltjesův integrál* ((n) RS-integrál)

$$(n) \int_a^b f d[g] = (n) \int_a^b f(x) d[g(x)]$$

a má hodnotu $I \in \mathbb{R}$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že platí

$$\left((D, \xi) \in \mathcal{D}[a, b] \quad \wedge \quad |D| < \delta \right) \implies |S(D, \xi) - I| < \varepsilon.$$

Řekneme, že existuje *σ -Riemannův-Stieltjesův integrál* ((σ) RS-integrál)

$$(\sigma) \int_a^b f d[g] = (\sigma) \int_a^b f(x) d[g(x)]$$

a má hodnotu $I \in \mathbb{R}$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení $D_\varepsilon \in \mathcal{D}[a, b]$ takové, že platí

$$\left((D, \xi) \in \mathcal{D}[a, b] \quad \wedge \quad D_\varepsilon \subset D \right) \implies |S(D, \xi) - I| < \varepsilon.$$

Existuje-li integrál $\int_a^b f d[g]$ (v některém z výše uvedených smyslů), pak pro libovolné funkce $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definujeme:

$$\int_b^a f d[g] = - \int_a^b f d[g].$$

Dále, pro každé $c \in [a, b]$ a pro všechny funkce $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definujeme:

$$\int_c^c f d[g] = 0.$$

4.3. Cvičení. Jestliže funkce $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a $g \in \mathbb{BV}[a, b]$ jsou takové, že existuje RS-integrál $\int_a^b f d[g]$ (v normovém či zjemňovacím smyslu), pak platí:

$$\left| \int_a^b f d[g] \right| \leq \|f\| \operatorname{var}_a^b g.$$

Pro každá dvě dělení $D', D'' \in \mathcal{D}[a, b]$ taková, že $D' \subset D''$ (D'' je zjemnění D') platí $|D''| \leq |D'|$. Snadno lze tedy dokázat následující tvrzení:

4.4. Věta. Je-li $(n) \int_a^b f d[g] = I \in \mathbb{R}$, pak platí také $(\sigma) \int_a^b f d[g] = I$. □

4.5. Poznámka. Nechť $f \in \mathbb{G}[a, b]$, $x_0 \in (a, b)$, $c, d \in \mathbb{R}$, $cd > 0$ a

$$g(x) = -c \chi_{[a, x_0)}(x) + d \chi_{(x_0, b]}(x) = \begin{cases} -c & \text{pro } x < x_0, \\ 0 & \text{pro } x = x_0, \\ d & \text{pro } x > x_0. \end{cases}$$

Pro libovolné rozšířené dělení

$$(D, \xi) = \left(\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}, (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \right) \in \mathcal{P}[a, b]$$

intervalu $[a, b]$ máme

$$S(D, \xi) = \begin{cases} f(\xi') (c + d) & \text{je-li } x_0 \in (\alpha_j, \alpha_{j+1}), \xi_j = \xi' \neq x_0, \\ f(x_0) (c + d) & \text{je-li } x_0 \in (\alpha_j, \alpha_{j+1}), \xi_j = x_0, \\ f(\xi') c + f(\xi'') d & \text{je-li } x_0 = \alpha_j, \xi_{j-1} = \xi' \neq x_0, \xi_j = \xi'' \neq x_0, \\ f(x_0) c + f(\xi'') d & \text{je-li } x_0 = \alpha_j, \xi_{j-1} = x_0, \xi_j = \xi'' \neq x_0, \\ f(\xi') c + f(x_0) d & \text{je-li } x_0 = \alpha_j, \xi_{j-1} = \xi' \neq x_0, \xi_j = x_0. \end{cases}$$

Odtud vidíme, že pokud je $-c = g(x_0-) \neq d = g(x_0+)$, pak k tomu, aby částečné součty $S(D, \xi)$ konvergovaly pro $|D| \rightarrow 0$ k nějaké konečné hodnotě I , je nutné, aby funkce f byla v bodě x_0 spojitá ($\lim_{\xi \rightarrow x_0} f(\xi) = f(x_0)$). Lze tedy očekávat, že pro existenci normového integrálu $(n) \int_a^b f d[g]$ bude nutné, aby funkce f a g neměly žádný společný bod nespojitosti.

Nyní, nechť $D_0 \in \mathcal{D}[a, b]$ je libovolné dělení obsahující x_0 . Pro každé jeho zjemnění D potom máme

$$S(D, \xi) \in \{f(\xi') c + f(\xi'') d, f(x_0) c + f(\xi'') d, f(\xi') c + f(x_0) d, f(x_0) (c + d)\},$$

kde $\xi' < x_0$ a $\xi'' > x_0$. Bude-li tedy funkce f regulovaná na $[a, b]$, bude množina \mathcal{Q} hromadných bodů množiny $\{S(D, \xi) : (D, \xi) \in \mathcal{P}[a, b] \wedge D_0 \subset D\}$ nejvýše tříbodová:

$$\mathcal{Q} = \{f(x_0-) c + f(x_0+) d, f(x_0) c + f(x_0+) d, f(x_0-) c + f(x_0) d, f(x_0) (c + d)\}$$

To naznačuje, že pro existenci integrálu $(\sigma) \int_a^b f d[g]$ bude nutné (a mohlo by stačit (?)), aby pro funkce f a g a libovolné $x \in [a, b]$ platilo:

$$(\Delta^+ f(x) \Delta^+ g(x) = 0) \quad \wedge \quad (\Delta^- f(x) \Delta^- g(x) = 0).$$

Standardním způsobem lze dokázat následující tvrzení.

4.6. Věta (BOLZANO - CAUCHYHOVA PODMÍNKA). *Pro dané funkce $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ existuje normový integrál $(n) \int_a^b f d[g]$ právě tehdy, když je splněna podmínka:*

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: ((D', \xi'), (D'', \xi'') \in \mathcal{D}[a, b] \wedge |D'| < \delta \wedge |D''| < \delta) \\ \implies |S(D', \xi') - S(D'', \xi'')| < \varepsilon. \end{cases} \quad (4.1)$$

Podobně, $(\sigma) \int_a^b f d[g] \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když platí

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists D_\varepsilon \in \mathcal{D}[a, b]: ((D', \xi'), (D'', \xi'') \in \mathcal{D}[a, b] \wedge D' \supset D_\varepsilon \wedge D'' \supset D_\varepsilon) \\ \implies |S(D', \xi') - S(D'', \xi'')| < \varepsilon. \end{cases} \quad (4.2)$$

D ů k a z . Nutnost splnění uvedených podmínek pro existenci příslušných integrálů je zřejmá z Definice 4.2.

Předpokládejme, že je splněna podmínka (4.2). Potom můžeme vybrat posloupnost rozšířených dělení $\{(D^k, \xi^k)\}_{k=1}^\infty$ intervalu $[a, b]$ takovým způsobem, že bude platit

$$|S(D, \xi) - S(D^k, \xi^k)| < \frac{1}{k} \quad \text{pro každé } D \supset D^k \quad \text{a} \quad (D, \xi) \in \mathcal{D}[a, b] \quad (4.3)$$

a přitom současně

$$D^k \subset D^\ell \quad \text{a} \quad |S(D^k, \xi^k) - S(D^\ell, \xi^\ell)| < \frac{1}{k} \quad \text{pro každé } k \in \mathbb{N} \quad \text{a} \quad \ell \geq k. \quad (4.4)$$

Posloupnost $\{S(D^k, \xi^k)\}_{k=1}^\infty$ je cauchyovská posloupnost reálných čísel a existuje tedy reálné číslo $I \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S(D^k, \xi^k) = I.$$

Nyní, necht' je dáno $\varepsilon > 0$. Zvolíme-li k_ε tak, aby bylo současně

$$\frac{1}{k_\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad |S(D_{k_\varepsilon}, \xi_{k_\varepsilon}) - I| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (4.5)$$

bude, vzhledem k (4.3) a (4.5), pro každé $D \supset D^{k_\varepsilon}$ a každé $(D, \xi) \in \mathcal{D}[a, b]$ platit

$$|S(D, \xi) - I| \leq |S(D, \xi) - S(D^{k_\varepsilon}, \xi^{k_\varepsilon})| + |S(D^{k_\varepsilon}, \xi^{k_\varepsilon}) - I| < \varepsilon,$$

neboli

$$I = (\sigma) \int_a^b f d[g].$$

Implikace (4.1) \implies (n) $\int_a^b f d[g] \in \mathbb{R}$ by se dokazovala podobně a ponechává se čtenáři jako cvičení. \square

Pokud nebude v následujících tvrzeních explicitně zmíněno, zda se jedná o normový integrál či o (σ) -integrál, bude to znamenat, že tvrzení platí pro oba typy integrálu.

4.7. Věta. *Jestliže existuje integrál $\int_a^b f d[g]$ a $c \in (a, b)$, pak existují také integrály*

$$\int_a^c f d[g] \quad \text{a} \quad \int_c^b f d[g]$$

a platí

$$\int_a^b f d[g] = \int_a^c f d[g] + \int_c^b f d[g]. \quad (4.6)$$

D ů k a z . a) Existenci integrálů

$$\int_a^c f d[g] \quad \text{a} \quad \int_c^b f d[g]$$

dokážeme snadno pomocí Věty 4.6.

b) Dále, necht' je dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme rozšířená dělení $(D', \xi') \in \mathcal{P}[a, c]$ a $(D'', \xi'') \in \mathcal{P}[c, b]$ tak, aby platilo

$$|S(D', \xi') - \int_a^c f d[g]| + |S(D'', \xi'') - \int_c^b f d[g]| + |S(D, \xi) - \int_a^b f d[g]| < \varepsilon, \quad (4.7)$$

kde

$$(D, \xi) = (D' \cup D'', (\xi', \xi'')) \in \mathcal{P}[a, b].$$

Potom bude $S(D, \xi) = S(D', \xi') + S(D'', \xi'')$ a tudíž

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f d[g] - \int_a^c f d[g] - \int_c^b f d[g] \right| \\ & \leq \left| \int_a^b f d[g] - S(D, \xi) \right| + |S(D, \xi) - S(D', \xi') - S(D'', \xi'')| \\ & \quad + |S(D', \xi') - \int_a^c f d[g]| + |S(D, \xi) - \int_a^b f d[g]| < \varepsilon. \end{aligned} \quad \square$$

4.8 . Cvičení. Pro oba integrály (normový i zjemňovací) proveďte podrobně část a) důkazu předchozí věty.

Dále, rozmyslete si proč z existence integrálů

$$\int_a^b f d[g], \quad \int_a^c f d[g], \quad \int_c^b f d[g]$$

opravdu plyne existence rozšířených dělení $(D', \xi') \in \mathcal{P}[a, c]$ a $(D'', \xi'') \in \mathcal{P}[c, b]$ takových, že platí (4.7).

Konečně: proč z toho, že platí rovnost (4.6) pro σ -integrály plyne, že (4.6) i pro normové integrály?

Další tvrzení plyne přímo z Definice 4.2.

4.9. Cvičení. Necht' $f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, a necht' existují integrály :

$$\int_a^b f_1 d[g], \int_a^b f_2 d[g], \int_a^b f d[g_1] \quad \text{a} \quad \int_a^b f_2 d[g_2].$$

Potom pro libovolná $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ platí

$$\int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2) d[g] = c_1 \int_a^b f_1 d[g] + c_2 \int_a^b f_2 d[g],$$

a

$$\int_a^b f d[c_1 g_1 + c_2 g_2] = c_1 \int_a^b f d[g_1] + c_2 \int_a^b f d[g_2].$$

4.10. Věta. Necht' $g \in \mathbb{BV}[a, b]$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je ohraničená a funkce $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou takové, že

$$\int_a^b f_n d[g] \in \mathbb{R} \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N} \tag{4.8}$$

a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0. \tag{4.9}$$

Potom existuje také integrál $\int_a^b f d[g]$ a platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n d[g] = \int_a^b f d[g]. \tag{4.10}$$

Důkaz provedeme pro σ integrál :

Necht' je dáno $\varepsilon > 0$. Vzhledem k předpokladu (4.9) můžeme zvolit $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tak, aby platilo

$$n \geq n_\varepsilon \implies \left(\|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{\text{var}_a^b g} \right) \wedge \left(\|f_n\| < \|f\| + 1 \right). \tag{4.11}$$

Dále, za našich předpokladů (viz Cvičení 4.3) je pro $n \geq n_\varepsilon$

$$\left| \int_a^b f_n d[g] \right| \leq \|f_n\| \text{var}_a^b g \leq (\|f\| + 1) \text{var}_a^b g.$$

Můžeme tedy vybrat podposloupnost $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ v \mathbb{N} a $I \in \mathbb{R}$ tak, že bude platit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f_{n_k} d[g] = I.$$

Speciálně, existuje $k_\varepsilon \in N$ takové, že

$$n_{k_\varepsilon} \geq n_\varepsilon \quad \text{a} \quad \left(k \geq k_\varepsilon \implies \left| \int_a^b f_{n_k} d[g] - I \right| < \varepsilon \right). \quad (4.12)$$

Dále, necht' $D_\varepsilon = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \in \mathcal{D}$ je takové dělení intervalu $[a, b]$, že

$$\left((D, \xi) \in \mathcal{P}[a, b] \right) \wedge \left(D_\varepsilon \subset D \right) \implies \left| S_{k_\varepsilon}(D, \xi) - \int_a^b f_{n_{k_\varepsilon}} d[g] \right| < \varepsilon, \quad (4.13)$$

kde

$$S_{k_\varepsilon}(D, \xi) = \sum_{j=1}^m f_{n_{k_\varepsilon}}(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})].$$

Protože je $n_{k_\varepsilon} \geq n_\varepsilon$ (viz (4.12)), znamená (4.11), že pro každé $(D, \xi) \in \mathcal{P}[a, b]$ splňující $D_\varepsilon \subset D$ je

$$\left| S(D, \xi) - S_{k_\varepsilon}(D, \xi) \right| \leq \|f - f_{n_{k_\varepsilon}}\| \operatorname{var}_a^b g < \varepsilon.$$

Vzhledem k (4.12)-(4.13) tedy dostáváme

$$\left| S(D, \xi) - I \right| \leq \left| S(D, \xi) - S_{k_\varepsilon}(D, \xi) \right| + \left| S_{k_\varepsilon}(D, \xi) - \int_a^b f_{n_{k_\varepsilon}} d[g] \right| + \left| \int_a^b f_{n_{k_\varepsilon}} d[g] - I \right| < 3\varepsilon.$$

Odtud okamžitě plyne, že platí

$$\int_a^b f d[g] = I.$$

Konečně, protože podle Cvičení 4.3 máme

$$\left| \int_a^b f_n d[g] - \int_a^b f d[g] \right| \leq \|f_n - f\| \operatorname{var}_a^b g,$$

tvrzení (4.10) plyne nyní snadno z předpokladu (4.9). □

4.11. Poznámka. Všimněme si, že z existence integrálu $(\sigma) \int_a^b f d[g] \in \mathbb{R}$ plyne, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení $D_\varepsilon \in \mathcal{D}[a, b]$ takové, že:

$$\left((D, \xi) \in \mathcal{P}[a, b] \wedge D \supset D_\varepsilon \right) \implies \left| \sum_{j=1}^{\nu(D)} \left(f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f d[g] \right) \right| < \varepsilon.$$

4.12. Lemma. Necht' $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a necht' existuje $(\sigma) \int_a^b f d[g]$. Bud' dáno $\varepsilon > 0$ a necht' $D_\varepsilon \in \mathcal{D}[a, b]$ je takové, že

$$\left| S(D, \xi) - (\sigma) \int_a^b f d[g] \right| < \varepsilon$$

platí pro každé rozšířené dělení $(D, \xi) \in \mathcal{P}[a, b]$ takové, že $D \supset D_\varepsilon$.

Potom pro každé rozšířené dělení (D, ξ) , $D = \{\alpha_0, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$, takové, že $D \supset D_\varepsilon$ platí

$$\sum_{j=1}^m \left| f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma) \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f d[g] \right| < 6\varepsilon. \quad (4.14)$$

D ů k a z . a) Pro každou dvojici (D', ξ') , $(D'', \xi'') \in \mathcal{P}[a, b]$ takovou, že je $D' \supset D_\varepsilon$ a $D'' \supset D_\varepsilon$ máme

$$|S(D', \xi') - S(D'', \xi'')| < 2\varepsilon. \quad (4.15)$$

Nechť $(D, \xi) \in \mathcal{P}[a, b]$, $D = \{\alpha_0, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ a $D \supset D_\varepsilon$. Pro každé $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ můžeme zvolit $D_\varepsilon^{(j)} \in \mathcal{P}[\alpha_{j-1}, \alpha_j]$ a $\xi_\varepsilon^{(j)} \in \mathbb{R}^m$ tak, aby platilo

$$(D_\varepsilon^{(j)}, \xi_\varepsilon^{(j)}) \in \mathcal{P}[\alpha_{j-1}, \alpha_j]$$

a

$$|S(D_\varepsilon^{(j)}, \xi_\varepsilon^{(j)}) - (\sigma) \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f d[g]| < \frac{\varepsilon}{m}. \quad (4.16)$$

Nechť

$$U = \{j_1, j_2, \dots, j_k\} \subset \{1, 2, \dots, m\}, \quad 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq m,$$

je daná podmnožina indexů. Potom pro každý vektor $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ takový, že $(D, \xi) \in \mathcal{P}[a, b]$, máme

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j \in U} \left(f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma) \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f d[g] \right) \right| \\ & \leq \left| \sum_{j \in U} \left(f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - S(D_\varepsilon^{(j)}, \xi_\varepsilon^{(j)}) \right) \right| \\ & \quad + \left| \sum_{j \in U} \left(S(D_\varepsilon^{(j)}, \xi_\varepsilon^{(j)}) - (\sigma) \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f d[g] \right) \right| \\ & = \left| S(D, \xi) - \sum_{j \notin U} f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - \sum_{j \in U} S(D_\varepsilon^{(j)}, \xi_\varepsilon^{(j)}) \right| \\ & \quad + \left| \sum_{j \in U} \left(S(D_\varepsilon^{(j)}, \xi_\varepsilon^{(j)}) - (\sigma) \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f d[g] \right) \right| \\ & = |S(D, \xi) - S(D', \xi')| + \left| \sum_{j \in U} \left(S(D_\varepsilon^{(j)}, \xi_\varepsilon^{(j)}) - (\sigma) \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f d[g] \right) \right|, \end{aligned}$$

kde $(D', \xi') \in \mathcal{P}[a, b]$, $D' = D \cup \bigcup_{j \in U} D_\varepsilon^{(j)}$. Odtud, vzhledem k (4.15) a (4.16), plyne

$$\left| \sum_{j \in U} \left(f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma) \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f d[g] \right) \right| < 2\varepsilon + k \frac{\varepsilon}{m} \leq 3\varepsilon. \quad (4.17)$$

b) Označme

$$U^+ = \{j \in \{1, 2, \dots, m\} : f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma) \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f d[g] \geq 0\}.$$

Po dosazení $U = U^+$ do (4.17) získáme nerovnost

$$\begin{cases} \sum_{j \in U^+} \left| f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma) \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f d[g] \right| \\ = \sum_{j \in U^+} \left(f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma) \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f d[g] \right) < 3\varepsilon. \end{cases} \quad (4.18)$$

Podobně, pro $U = U^-$,

$$U^- = \{j \in \{1, 2, \dots, m\} : f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma) \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f d[g] < 0\},$$

dostaneme

$$\begin{cases} \sum_{j \in U^-} \left| f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma) \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f d[g] \right| \\ = - \sum_{j \in U^-} \left(f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma) \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f d[g] \right) < 3\varepsilon. \end{cases} \quad (4.19)$$

Odtud a z (4.18) plyne

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \left| f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma) \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f d[g] \right| \\ &= \sum_{j \in U^+} \left(f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma) \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f d[g] \right) \\ & \quad - \sum_{j \in U^-} \left(f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma) \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f d[g] \right) \\ &= \left| \sum_{j \in U^+} \left(f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma) \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f d[g] \right) \right| \\ & \quad + \left| \sum_{j \in U^-} \left(f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma) \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f d[g] \right) \right| < 6\varepsilon, \end{aligned}$$

tj. platí (4.14). □

4.13. Poznámka. Povšimněme si, že důkaz Lemmatu 4.12 obsahuje také důkaz následujícího tvrzení:

Nechť $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a necht' existuje $(\sigma) \int_a^b f d[g]$. Bud' dáno $\varepsilon > 0$ a necht' $D_\varepsilon \in \mathcal{D}[a, b]$ je takové, že

$$\left| S(D, \xi) - (\sigma) \int_a^b f d[g] \right| < \varepsilon$$

platí pro každé rozšířené dělení $(D, \xi) \in \mathcal{D}[a, b]$ takové, že $D \supset D_\varepsilon$. Dále, necht'

$$U = \{j_1, j_2, \dots, j_k\} \subset \{1, 2, \dots, m\}, \quad 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq m,$$

je daná podmnožina indexů.

Potom pro každé rozšířené dělení (D, ξ) , $D = \{\alpha_0, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$, takové, že $D \supset D_\varepsilon$ platí

$$\left| \sum_{j \in U} f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - (\sigma) \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f d[g] \right| < 3\varepsilon.$$

Tvrzení tohoto typu se zpravidla nazývá Saksovo-Henstockovo lemma a hraje důležitou roli v teorii integrálu.

Důležitým důsledkem Lemmatu 4.12 je následující tvrzení:

4.14. Věta (SUBSTITUCE). Necht' $f, g, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, přičemž f je ohraničená na intervalu $[a, b]$ a $\int_a^b g d[h] \in \mathbb{R}$. Potom existuje jeden z integrálů

$$\int_a^b f d\left[\int_a^x g d[h]\right] \quad \text{a} \quad \int_a^b f g d[h] \tag{4.20}$$

právě tehdy když existuje i ten druhý. V takovém případě pak platí

$$\int_a^b f d\left[\int_a^x g d[h]\right] = \int_a^b f g d[h]. \tag{4.21}$$

Důk a z provedeme opět pouze pro σ integrál:

Nejprve si povšimněme, že z existence integrálu $\int_a^b g d[h] \in \mathbb{R}$ plyne, že pro libovolné $x \in [a, b]$ je definovaná funkce

$$w(x) = \int_a^x g d[h]$$

(viz Věta 4.7). Dále, pro každé rozšířené dělení

$$(D, \xi) \in \mathcal{D}[a, b], \quad D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$$

máme:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^m f(\xi_j) g(\xi_j) [h(\alpha_j) - h(\alpha_{j-1})] - \sum_{j=1}^m f(\xi_j) [w(\alpha_j) - w(\alpha_{j-1})] \right| \\ & \leq \sum_{j=1}^m |f(\xi_j)| \left| g(\xi_j) [h(\alpha_j) - h(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} g \, d[h] \right| \\ & \leq \|f\| \left(\sum_{j=1}^m |g(\xi_j) [h(\alpha_j) - h(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} g \, d[h]| \right) \end{aligned}$$

Bud' dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Zvolme $D_\varepsilon \in \mathcal{D}[a, b]$ tak aby platilo

$$\left| S(D, \xi) - (\sigma) \int_a^b g \, d[h] \right| < \varepsilon$$

pro každé rozšířené dělení $(D, \xi) \in \mathcal{P}[a, b]$ takové, že $D \supset D_\varepsilon$. Potom podle Saks-Henstockova lemmatu (Lemma 4.12) máme

$$\sum_{j=1}^m \left| g(\xi_j) [h(\alpha_j) - h(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} g \, d[h] \right| < 6\varepsilon$$

pro každé $(D, \xi) \in \mathcal{P}[a, b]$ takové, že $D \supset D_\varepsilon$. To ovšem znamená, že pro integrální součty příslušné k integrálům (4.20) platí:

$$\left| \sum_{j=1}^m f(\xi_j) g(\xi_j) [h(\alpha_j) - h(\alpha_{j-1})] - \sum_{j=1}^m f(\xi_j) [w(\alpha_{j-1}) - w(\alpha_j)] \right| < \|f\| 6\varepsilon.$$

Odtud už důkaz našeho tvrzení snadno plyne. □

4.15. Věta (INTEGRACE PER-PARTES). *Existuje-li jeden z integrálů*

$$\int_a^b f \, d[g], \quad \int_a^b g \, d[f],$$

existuje i druhý a platí

$$\int_a^b f \, d[g] + \int_a^b g \, d[f] = f(b)g(b) - f(a)g(a). \tag{4.22}$$

D ů k a z . Pro libovolné rozšířené dělení

$$(D, \xi) = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}, \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m\} \in \mathcal{P}[a, b]$$

platí

$$\begin{aligned}
S_{f\Delta g}(D, \xi) &= f(\xi_1) [g(\alpha_1) - g(a)] + f(\xi_2) [g(\alpha_2) - g(\alpha_1)] + \cdots + f(\xi_m) [g(b) - g(\alpha_{m-1})] \\
&= -f(a)g(a) - [f(\xi_1) - f(a)]g(a) - [f(\xi_2) - f(\alpha_1)]g(\alpha_1) \\
&\quad - [f(\alpha_1) - f(\xi_1)]g(\alpha_1) - \cdots - [f(\xi_m) - f(\alpha_{m-1})]g(\alpha_{m-1}) \\
&\quad - [f(\alpha_{m-1}) - f(\xi_{m-1})]g(\alpha_{m-1}) - [f(b) - f(\xi_m)]g(b) + f(b)g(b) \\
&= f(b)g(b) - f(a)g(a) - S_{g\Delta f}(D', \xi'),
\end{aligned}$$

kde

$$\xi' = (a, \alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}, \alpha_{m-1}, b) \quad \text{a} \quad D' = \{a, \xi_1, \alpha_1, \xi_2, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}, \xi_m, b\}$$

je zjemněním D . (Stane-li se, že $\xi_j = \alpha_{j-1}$ resp. $\xi_j = \alpha_j$ pro nějaké j , musíme ovšem tyto body ξ_j z D' i z ξ' vynechat.)

Nechť je dáno $\varepsilon > 0$ a necht' existuje integrál $\int_a^b g \, d[f]$. Zvolme dělení D_ε intervalu $[a, b]$ tak, aby pro každé jeho zjemnění D' a každé $(D', \xi') \in \mathcal{P}[a, b]$ platilo

$$\left| S_{g\Delta f}(D', \xi') - \int_a^b g \, d[f] \right| < \varepsilon.$$

Vzhledem k výše uvedenému máme tedy pro každé $D \supset D_\varepsilon$ a každé příslušné rozšířené dělení (D, ξ)

$$S_{f\Delta g}(D, \xi) - f(b)g(b) + f(a)g(a) + \int_a^b g \, d[f] = \int_a^b g \, d[f] - S_{g\Delta f}(D', \xi'),$$

kde $D' \supset D \supset D_\varepsilon$ a tudíž

$$\left| S_{f\Delta g}(D, \xi) - f(b)g(b) + f(a)g(a) + \int_a^b g \, d[f] \right| = \left| \int_a^b g \, d[f] - S_{g\Delta f}(D', \xi') \right| < \varepsilon.$$

Odtud už snadno plyne existence integrálu $\int_a^b f \, d[g]$ a platnost vztahu (4.22).

Druhá implikace by se dokazovala symetricky. □

4.16. Věta. *Jestliže $c \in [a, b]$ a jestliže existují integrály*

$$I_1 = (\sigma) \int_a^c f \, d[g] \quad \text{a} \quad I_2 = (\sigma) \int_c^b f \, d[g],$$

pak existuje také integrál $I = (\sigma) \int_a^b f \, d[g]$ a platí $I = I_1 + I_2$.

D ů k a z . Bud' dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme dělení $D'_\varepsilon \in \mathcal{D}[a, c]$ a $D''_\varepsilon \in \mathcal{D}[c, b]$ tak, aby platilo

$$|S(D', \xi') - I_1| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } (D', \xi') \in \mathcal{D}[a, c] \quad \text{taková, že } D' \supset D'_\varepsilon$$

a

$$|S(D'', \xi'') - I_2| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } (D'', \xi'') \in \mathcal{D}[c, b] \quad \text{taková, že } D'' \supset D''_\varepsilon.$$

Nyní, necht' $D_\varepsilon = D'_\varepsilon \cup D''_\varepsilon$. Protože je $c \in D_\varepsilon$, každé rozšířené dělení $(D, \xi) \in \mathcal{D}[a, b]$ splňující $D \supset D_\varepsilon$ můžeme rozdělit:

$$D = D' \cup D'' \quad \text{a} \quad \xi = (\xi', \xi'')$$

tak, že bude platit $(D', \xi') \in \mathcal{D}[a, c]$, $(D'', \xi'') \in \mathcal{D}[c, b]$, $D' \supset D'_\varepsilon$ a $D'' \supset D''_\varepsilon$. Navíc, je

$$S(D, \xi) = S(D', \xi') + S(D'', \xi'').$$

Vzhledem k definici D'_ε a D''_ε tedy pro každé $(D, \xi) \in \mathcal{D}[a, b]$ splňující $D \supset D_\varepsilon$ máme

$$|S(D, \xi) - (I_1 + I_2)| \leq |S(D', \xi') - I_1| + |S(D'', \xi'') - I_2| < 2\varepsilon,$$

tj. dokázali jsme tvrzení věty. □

4.17. Věta. *Necht' $f \in \mathbb{C}[a, b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a, b]$. Potom existují oba integrály*

$$\int_a^b f \, d[g] \quad \text{i} \quad \int_a^b g \, d[f].$$

D ů k a z . Vzhledem k Větám 1.4, 4.4 a 4.15 stačí dokázat existenci normového integrálu $(n) \int_a^b f \, d[g]$, pro případ, že f je spojitá na $[a, b]$ a g neklesající na $[a, b]$.

Necht' tedy f je spojitá na $[a, b]$, g neklesající na $[a, b]$ a bud' dáno $\varepsilon > 0$. Jestliže $g(b) = g(a)$, pak funkce g je nutně konstantní na $[a, b]$ a tudíž $\int_a^b f \, d[g] = 0$. Bez újmy na obecnosti můžeme tedy předpokládat, že $g(b) - g(a) > 0$. Dále využijeme toho, že každá funkce spojitá na kompaktním intervalu je na tomto intervalu také stejnoměrně spojitá. Existuje tedy $\delta_\varepsilon > 0$ takové, že

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2[g(b) - g(a)]} \quad \text{pro všechna } x, y \in [a, b] \quad \text{taková, že } |x - y| < \delta_\varepsilon. \quad (4.23)$$

Dokážeme, že pro libovolná dvě rozšířená dělení (D, ξ) , (D', ξ') intervalu $[a, b]$ taková, že $|D| < \delta_\varepsilon$ a $|D'| < \delta_\varepsilon$ platí $|S(D, \xi) - S(D', \xi')| < \varepsilon$. Podle Věty 4.6 to už bude znamenat, že existuje $(n) \int_a^b f \, d[g]$.

Necht' (D^*, ξ^*) je rozšířené dělení intervalu $[a, b]$ takové, že současně platí $D \subset D^*$ a $D' \subset D^*$. Jestliže $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$, pak prvky dělení D^* a složky vektoru ξ^* označme tak, že bude

$$D^* = \{\alpha_0, \alpha_1^1, \dots, \alpha_{n_1-1}^1, \alpha_1, \alpha_1^2, \dots, \alpha_{n_2-1}^2, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}, \alpha_1^m, \dots, \alpha_{n_m-1}^m, \alpha_m\}$$

$$\xi^* = (\xi_1^1, \dots, \xi_{n_1}^1, \xi_1^2, \dots, \xi_{n_2}^2, \dots, \xi_1^m, \dots, \xi_{n_m}^m).$$

Potom

$$S(D, \xi) = \sum_{j=1}^m f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] = \sum_{j=1}^m f(\xi_j) \sum_{i=1}^{n_j} [g(\alpha_i^j) - g(\alpha_{i-1}^j)]$$

a

$$|S(D, \xi) - S(D^*, \xi^*)| \leq \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} |[f(\xi_j) - f(\xi_i^j)] [g(\alpha_i^j) - g(\alpha_{i-1}^j)]|.$$

Pro každé $j = 1, 2, \dots, m$ a každé $i = 1, 2, \dots, n_j$ je $|\xi_j - \xi_i^j| < |D| < \delta_\varepsilon$. Můžeme tedy použít (4.23) a poté dostaneme

$$\begin{aligned} |S(D, \xi) - S(D^*, \xi^*)| &\leq \frac{\varepsilon}{2(g(b) - g(a))} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} [g(\alpha_i^j) - g(\alpha_{i-1}^j)] \\ &= \frac{\varepsilon}{2[g(b) - g(a)]} [g(b) - g(a)] = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Stejně bychom dokázali, že platí také

$$|S(D', \xi') - S(D^*, \xi^*)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Odtud okamžitě plyne, že

$$|S(D, \xi) - S(D', \xi')| \leq |S(D, \xi) - S(D^*, \xi^*)| + |S(D', \xi') - S(D^*, \xi^*)| < \varepsilon.$$

Tím je důkaz hotov. □

4.18. Věta. *Je-li $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ regulovaná na $[a, b]$, pak integrál $\int_a^b f d[g]$ existuje pro každou funkci f spojitou na $[a, b]$ pouze tehdy, když g má konečnou variaci na $[a, b]$.*

D ů k a z . a) Je-li $f \in \mathbb{C}[a, b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a, b]$, pak podle Věty 4.17 existuje $(n) \int_a^b f d[g]$. Podle Věty 4.4 tedy existuje i $(\sigma) \int_a^b f d[g]$.

b) Důkaz obrácené implikace se opírá o následující tři pomocná tvrzení.

Tvrzení 1. *Je-li $a_n \geq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, pak existuje posloupnost $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ taková, že platí*

$$c_n > 0 \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0 \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n = \infty. \quad (4.24)$$

D ů k a z . Označíme-li $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ pro $n \in \mathbb{N}$, bude posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ neklesající a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty. \quad (4.25)$$

Speciálně, pro dostatečně velká n ($n \geq n_0$) bude $s_n > 0$. Můžeme tudíž definovat

$$c_n = \begin{cases} 1 & \text{pro } n < n_0, \\ \frac{1}{s_n} & \text{pro } n \geq n_0. \end{cases}$$

Zřejmě je $c_n > 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$. Na druhou stranu, pro libovolná $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n \geq n_0$ máme

$$\sum_{k=n}^m c_k a_k = \sum_{k=n}^m \frac{a_k}{s_k} \geq \frac{\sum_{k=n}^m a_k}{s_m} = 1 - \frac{s_{n-1}}{s_m}.$$

Vzhledem k (4.25), pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $m_n > n$ takové, že je $\frac{s_{n-1}}{s_{m_n}} < \frac{1}{2}$, tj.

$$\sum_{k=n}^{m_n} c_k a_k > \frac{1}{2}.$$

To ovšem znamená, že musí platit (4.24). □

Druhé tvrzení je snadným důsledkem Vitaliovy věty o konečném pokrytí a Věty 1.3.

Tvrzení 2. *Funkce $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ má konečnou variaci na $[a, b]$ právě tehdy, když platí*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pro každé } x \in (a, b] \text{ existuje } \delta_1 \in (0, x - a) \text{ takové, že } \operatorname{var}_{x-\delta_1}^x g < \infty \\ a \\ \text{pro každé } x \in [a, b) \text{ existuje } \delta_2 \in (0, b - x) \text{ takové, že } \operatorname{var}_x^{x+\delta_2} g < \infty. \end{array} \right. \quad (4.26)$$

Tvrzení 3. *Nechť $g \in G[a, b]$, $x_0 \in (a, b]$ a*

$$\operatorname{var}_x^{x_0} g = \infty \quad \text{pro každé } x \in [a, x_0). \quad (4.27)$$

Potom existuje rostoucí posloupnost $\{x_k\}$ bodů v $(0, x_0)$ taková, že

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0 \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| = \infty. \quad (4.28)$$

Důkaz rozdělíme na dvě části: podle toho, zda platí

$$\sup\{|g(x)|; x \in [y, x_0]\} = \infty \quad \text{pro všechna } y \in [a, x_0) \quad (4.29)$$

či nikoliv.

a) Předpokládejme nejprve, že (4.29) neplatí. To znamená, že existuje $y_1 \in [a, x_0]$ takové, že

$$g^* := \sup\{|g(x)|; x \in [y_1, x_0]\} \in [0, \infty). \quad (4.30)$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $y_1 > x_0 - 1$. Podle našeho předpokladu je $\text{var}_{y_1}^{x_0} g = \infty$. Existuje tedy dělení $D^1 = \{\alpha_0^1, \alpha_1^1, \dots, \alpha_{m_1}^1\}$ intervalu $[y_1, x_0]$ takové, že $V(g, D^1) \geq 1 + 2g^*$. Vzhledem k (4.30) tedy máme

$$\sum_{j=1}^{m_1-1} |g(\alpha_j^1) - g(\alpha_{j-1}^1)| \geq 1 + 2g^* - |g(x_0)| - |g(\alpha_{m_1-1}^1)| \geq 1 + 2g^* - 2g^* = 1.$$

Položme $x_1 = y_1$, $x_k = \alpha_{k-1}^1$ pro $k = 2, \dots, m_1$, $y_2 = \max\{x_{m_1-1}, x_0 - \frac{1}{2}\}$ a $r_1 = m_1 - 1$. Máme opět $\text{var}_{y_2}^{x_0} g = \infty$. Existuje tedy dělení $D^2 = \{\alpha_0^2, \alpha_1^2, \dots, \alpha_{m_2}^2\}$ intervalu $[y_2, x_0]$ takové, že $V(g, D^2) \geq 1 + 2g^*$. Tudíž, podle (4.30),

$$\sum_{j=1}^{m_2-1} |g(\alpha_j^2) - g(\alpha_{j-1}^2)| \geq 1 + 2g^* - |g(x_0)| - |g(\alpha_{m_2-1}^2)| \geq 1.$$

Položme

$$r_2 = m_1 + m_2 - 1, \quad x_k = \alpha_{k-r_1}^2 \quad \text{pro } k = r_1 + 1, r_1 + 2, \dots, r_2 \quad \text{a} \quad y_3 = \max\{x_{r_2}, x_0 - \frac{1}{3}\}.$$

(Všimněme si, že $x_{r_1+1} = y_2 = \alpha_0^2$.)

Nyní, necht' $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$ a necht' $r_i, y_i, i = 1, 2, \dots, n-1$, a $x_k, k = 1, 2, \dots, r_{n-1}$, jsou takové, že

$$x_{r_{i-1}+1} = y_{i-1}, \quad x_k \in (y_{i-1}, y_i] \quad \text{pro } k = r_{i-1}+2, \dots, r_i$$

a

$$y_i = \max\{x_{r_{i-1}}, x_0 - \frac{1}{i}\}, \quad \sum_{k=r_{i-1}}^{r_i-1} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| \geq 1$$

platí pro $i = 1, 2, \dots, n-1$. Položme $y_n = \max\{x_{r_{n-1}}, x_0 - \frac{1}{n}\}$. Máme opět $\text{var}_{y_n}^{x_0} g = \infty$. Vzhledem k (4.30) tedy existuje dělení $D^n = \{\alpha_0^n, \alpha_1^n, \dots, \alpha_{m_n}^n\}$ intervalu $[y_n, x_0]$ takové, že

$$\sum_{j=1}^{m_n-1} |g(\alpha_j^n) - g(\alpha_{j-1}^n)| \geq 1.$$

Položíme-li

$$r_n = r_{n-1} + m_n - 1 \quad x_k = \alpha_{k-r_{n-1}}^n \quad \text{pro } k = r_{n-1} + 1, \dots, r_n,$$

bude platit

$$\sum_{k=r_{n-1}}^{r_n-1} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| \geq 1 \quad \text{a} \quad x_k \geq y_n \geq x_0 - \frac{1}{n} \quad \text{pro } k = r_{n-1}, \dots, r_n.$$

Shrnutí: indukcí jsme zkonstruovali rostoucí posloupnosti $\{r_n\}$, $\{y_n\}$ a $\{x_k\}$ takové, že

$$y_n \in (x_0 - \frac{1}{n}, x_0), \quad \sum_{k=r_{n-1}}^{r_n-1} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| \geq 1 \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}$$

a $x_k \geq y_n \geq x_0 - \frac{1}{n}$ pro $k \geq r_{n-1}$. Odtud plyne, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=r_{n-1}}^{r_n-1} |g(x_{j+1}) - g(x_j)| \right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$$

a $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} y_n = x_0$. Dokázali jsme tedy, že naše posloupnost $\{x_k\}$ je rostoucí a splňuje (4.28).

b) Předpokládejme, že (4.29) platí. Nejprve si povšimněme, že pro libovolné $y \in [a, x_0)$ platí

$$\sup\{|g(x)|; x \in [y, x_0]\} = \infty \quad \text{tehdy a jen tehdy když} \quad \sup\{|g(x)|; x \in (y, x_0)\} = \infty.$$

Vskutku, je-li $\sup\{|g(x)|; x \in [y, x_0]\} = \infty$, pak musí v intervalu (y, x_0) existovat bod x takový, že $|g(x)| \geq \max\{|g(y)|, |g(x_0)|\}$. (Připomeňme si, že funkce g je definována na celém intervalu $[a, b]$ a zobrazuje tento interval do \mathbb{R} .) Vzhledem k (4.29) můžeme vybrat $x_k \in (y, x_0)$, $k \in \mathbb{N}$, tak, aby platilo $|g(x_k)| > 1$ a

$$x_k > \max\{x_{k-1}, x_0 - \frac{1}{k}\} \quad \text{a} \quad |g(x_k)| > |g(x_{k-1})| + 1 \quad \text{pro } k = 2, 3, \dots$$

Zřejmě $\{x_k\}$ je rostoucí, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$ a

$$\sum_{k=1}^n |g(x_{k+1}) - g(x_k)| \geq \sum_{k=1}^n (|g(x_{k+1})| - |g(x_k)|) > \sum_{k=1}^n 1 = \infty.$$

Naše posloupnost $\{x_k\}$ je neklesající a splňuje (4.28). □

Pokračování D ů k a z u Věty 4.18:

Vzhledem k Větě 4.4 se můžeme omezit na σ integrál. Nechť $\text{var}_a^b g = \infty$. Podle Tvzení 2 existuje $x_0 \in [a, b]$ pro které není splněna jedna z podmínek (4.26). Nechť tedy např. $x_0 \in (a, b)$ a nechť pro každé $x \in [a, x_0)$ platí (4.27). Podle Tvzení 3 tedy existuje rostoucí posloupnost $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ bodů v $(0, x_0)$ taková, že

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0 \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |g(x_k) - g(x_{k-1})| = \infty.$$

Dále, podle Tvrzení 1 existuje posloupnost $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ kladných čísel taková, že platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = \infty \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k |g(\alpha_k) - g(\alpha_{k-1})| = \infty.$$

Položme

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq \alpha_0 \text{ resp. } x \geq x_0 \text{ resp. } x \in \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}, \\ c_k \operatorname{sign}(g(\alpha_k) - g(\alpha_{k-1})) & \text{pro } x = \xi_k := \frac{\alpha_k + \alpha_{k-1}}{2} \end{cases}$$

a ve zbývajících bodech intervalu $[a, b]$ dodefinujme funkci f lineárně. Takto definovaná funkce $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bude zřejmě spojitá na $[a, b]$ a přitom pro ní bude platit

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(\xi_k) [g(\alpha_k) - g(\alpha_{k-1})] = \infty.$$

Speciálně, pro každé $M > 0$ existuje $N_M \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{k=1}^{N_M} f(\xi_k) [g(\alpha_k) - g(\alpha_{k-1})] > M.$$

Pro dané $M > 0$, označme $D_M = \{a, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{N_M}, x_0, b\}$ a $\xi_M = (a, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{N_M}, x_0, b)$. Potom je $(D_M, \xi_M) \in \mathcal{P}$ a $S(D_M, \xi_M) > M$. To ale znamená, že integrál $(\sigma) \int_a^b f d[g]$ nemůže existovat.

Není-li splněna druhá z podmínek v (4.26), tj. jestliže existuje $x_0 \in [a, b)$ a $\operatorname{var}_{x_0}^x g = \infty$ pro každé $x \in [x_0, b)$, je třeba místo Tvrzení 3 použít jeho vhodnou úpravu. \square

4.19. Cvičení. Zformulujte a dokažte analogii Tvrzení 3 potřebnou k dokončení důkazu Věty 4.18.

4.20. Věta. *Integrál $\int_a^b f d[g]$ existuje pro každou konečnou skokovou funkci g pouze tehdy, když f je spojitá na $[a, b]$.*

Důkaz. Stejně jako v důkazu předešlé věty, můžeme se omezit na σ -integrál. Nechť $x_0 \in (a, b)$, $c, d \in \mathbb{R}$, $cd > 0$ a nechť funkce $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je definována podobně jako v Poznámce 4.5:

$$g(x) = -c \chi_{[a, x_0)}(x) + d \chi_{(x_0, b]}(x) \quad \text{pro } x \in [a, b].$$

Podle Poznámky 4.5 může integrál $(\sigma) \int_a^b f d[g]$ existovat pouze tehdy, bude-li platit

$$c \Delta^- f(x_0) = 0 \quad \text{a} \quad d \Delta^+ f(x_0) = 0,$$

tj. $\Delta^- f(x_0) = \Delta^+ f(x_0) = 0$. Existuje-li tedy integrál $(\sigma) \int_a^b f d[g]$, musí být f spojitá v každém bodě $x_0 \in (a, b)$. Podobně bychom dokázali, že pak musí být f spojitá i v bodě a zprava a v bodě b zleva. \square

Kapitola věnovaná RS-integrálům bude zakončena uvedením několika dalších důležitých tvrzení. Pro důkazy odkazují čtenáře na kapitolu II již zmíněné Hildebrandtovy monografie [3].

4.21. Definice. Řekneme, že funkce $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ splňují v bodě $x \in (a, b)$ podmínku (PA) (*podmínku pseudoadditivity*), jestliže

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pro každé } \varepsilon > 0 \text{ existuje } \delta_0 > 0 \text{ takové, že pro všechna} \\ \delta' \in (0, \delta_0), \delta'' \in (0, \delta_0), \xi \in [x - \delta', x + \delta''], \xi' \in [x - \delta', x] \text{ a } \xi'' \in [x, x + \delta''] \\ \text{platí:} \\ |f(\xi) [g(x + \delta'') - g(x - \delta')] \\ - f(\xi') [g(x) - g(x - \delta')] - f(\xi'') [g(x + \delta'') - g(x)]| < \varepsilon. \end{array} \right.$$

Následující tvrzení plyne z [3, Theorem II.3.10]), kde je ovšem třeba intervalovou funkci $f(I)$ nahradit mnohoznačnou intervalovou funkcí

$$F: [c, d] \rightarrow f(\xi) [g(d) - g(c)], \quad \xi \in [c, d].$$

4.22. Věta. Normový integrál $(n) \int_a^b f d[g]$ existuje právě tehdy, když existuje $(\sigma) \int_a^b f d[g]$ a je splněna podmínka (PA) v každém bodě $x \in (a, b)$.

4.23. Věta. Nechť $x \in (a, b)$. Funkce $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ splňují podmínku (PA) v bodě $x \in (a, b)$ právě tehdy, když alespoň jedna z nich je v bodě x spojitá.

4.24. Poznámka. Je-li f ohraničená v okolí bodu $x \in (a, b)$ a g spojitá v bodě x , pak funkce f, g splňují podmínku (PA) v bodě x .

4.25. Důsledek. ([3, Corollary II,10,6]) $(n) \int_a^b f d[g]$ existuje pouze tehdy, když funkce f a g nemají společný bod nespojitosti v (a, b) .

4.26. Důsledek. Nechť $c \in (a, b)$ a nechť funkce $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ splňují (PA) v bodě c . Potom, jestliže existují integrály:

$$(n) \int_a^c f d[g] = I_1 \quad \text{a} \quad (n) \int_c^b f d[g] = I_2,$$

pak existuje také integrál $\int_a^b f d[g]$ a platí

$$(n) \int_a^b f d[g] = I_1 + I_2.$$

4.27. Věta. *Jestliže existuje $(\sigma) \int_a^b f \, d[g]$, pak platí obě následující tvrzení:*

- (i) Pro každé $x \in [a, b)$ je alespoň jedna z funkcí f, g spojitá v x zprava,*
- (ii) Pro každé $x \in (a, b]$ je alespoň jedna z funkcí f, g spojitá v x zleva.*

Kurzweilův-Stieltjesův integrál

5.1. Definice. Funkce $\delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ se nazývají *kalibry* na intervalu $[a, b]$, množinu kalibrů na intervalu $[a, b]$ značíme $\mathcal{G} = \mathcal{G}[a, b]$.

Pro daný kalibr $\delta \in \mathcal{G}$, řekneme, že rozšířené dělení $(D, \xi) \in \mathcal{D}[a, b]$ je δ -jemné (píšeme $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta) = \mathcal{A}(\delta; [a, b])$), jestliže platí

$$[\alpha_{j-1}, \alpha_j] \subset (\xi_j - \delta(\xi_j), \xi_j + \delta(\xi_j)) \quad \text{pro všechna } j = 1, 2, \dots, \nu(D).$$

Pro dané funkce $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a rozšířené dělení $(D, \xi) \in \mathcal{D}[a, b]$ definujeme (jako v kapitole 4)

$$S(D, \xi) (= S_{f \Delta g}(D, \xi)) := \sum_{j=1}^{\nu(D)} f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})].$$

5.2. Definice (KURZWEIL). Necht' $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a $I \in \mathbb{R}$. Řekneme, že existuje *Kurzweilův-Stieltjesův integrál* (KS-integrál)

$$(KS) \int_a^b f \, d[g] = (KS) \int_a^b f(x) \, d[g(x)]$$

a má hodnotu $I \in \mathbb{R}$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje kalibr $\delta_\varepsilon \in \mathcal{G}$ takový, že

$$\left| I - S(D, \xi) \right| < \varepsilon \tag{5.1}$$

platí pro všechna δ_ε -jemná rozšířená dělení (D, ξ) (tj. pro všechna $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta_\varepsilon)$).

Jestliže existuje integrál $(KS) \int_a^b f \, d[g]$, definujeme $(KS) \int_b^a f \, d[g] = -(KS) \int_a^b f \, d[g]$. Dále, $(KS) \int_a^a f \, d[g] = 0$.

Tato definice má smysl díky následujícímu lemmatu.

5.3. Lemma (COUSIN). Pro každý kalibr $\delta \in \mathcal{G}$ je množina $\mathcal{A}(\delta)$ všech δ -jemných rozšířených dělení intervalu $[a, b]$ neprázdná.

D ů k a z . Necht' je dáno $\delta \in \mathcal{G}$. Označme M množinu všech $c \in (a, b]$ pro něž je $\mathcal{A}(\delta; [a, c]) \neq \emptyset$. Protože je $\delta(a) > 0$, položíme-li $c = \min\{a + \delta(a), b\}$, $D = \{a, c\}$ a $\xi = a$, bude $c \in (a, b]$ a $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta; [a, c])$, tj. $c \in M$ a $M \neq \emptyset$. Položme $d = \sup M$. Protože je $\delta(d) > 0$, existuje $c \in (d - \delta(d), d] \cap M$. Je-li $c < d$, pak existuje $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta; [a, c])$. Definujme $\tilde{D} = D \cup \{d\}$ a $\tilde{\xi} = (\xi, d)$. Potom $(\tilde{D}, \tilde{\xi}) \in \mathcal{D}[a, d]$ a protože je $[c, d] \subset (d - \delta(d), d + \delta(d))$, znamená to, že $(\tilde{D}, \tilde{\xi}) \in \mathcal{A}(\delta; [a, d])$, tj. $d \in M$. Konečně, kdyby

bylo $d < b$, pak bychom mohli zvolit $c \in (d, d + \delta(d)) \cap (d, b)$ a ukázat, že $c \in M$, což by znamenalo spor s definicí $d = \sup M$. To znamená, že platí $d = \sup M = b$ a důkaz je proveden. \square

Nebude-li uvedeno jinak, bude mít v následujícím textu symbol integrálu vždy smysl KS-integrálu.

Důkazy tvrzení uvedených v této kapitole byly jednak převzaty z monografické publikace [8], jednak jsou modifikacemi důkazů analogických tvrzení pro speciální případ $g(x) \equiv x$ ze Schwabikovy monografie [9].

5.4. Poznámka. Jsou-li δ a $\delta_0 \in \mathcal{G}$ kalibry na intervalu $[a, b]$, pro které je $\delta(x) \leq \delta_0(x)$ na $[a, b]$, pak každé rozšířené dělení intervalu $[a, b]$, které je δ -jemné je také δ_0 -jemné, tj. platí $\mathcal{A}(\delta) \subset \mathcal{A}(\delta_0)$. Platí-li tedy nějaká vlastnost pro všechna $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta_0)$ tím spíše platí i pro všechna $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta)$. Speciálně, je-li δ_0 libovolný kalibr na intervalu $[a, b]$, stačí v Definici 5.2 požadovat existenci kalibru δ_ε , pro který kromě vlastností v definici požadovaných platí navíc i $\delta_\varepsilon(x) \leq \delta_0(x)$ na $[a, b]$.

Pro existenci KS-integrálu platí podmínka Bolzanova-Cauchyova typu:

5.5. Věta (BOLZANOVA-CAUCHYOVA PODMÍNKA). *Nechť $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Potom integrál $\int_a^b f d[g]$ existuje právě tehdy, když je splněna následující podmínka:*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon \in \mathcal{G} : \left((D, \xi), (D', \xi') \in \mathcal{A}(\delta_\varepsilon) \right) \implies \left| S(D, \xi) - S(D', \xi') \right| < \varepsilon. \quad (5.2)$$

D ů k a z . a) Existuje-li integrál $\int_a^b f d[g] = I \in \mathbb{R}$, pak podle Definice 5.2 pro každé $\varepsilon > 0$ existuje kalibr $\delta_\varepsilon \in \mathcal{G}$ takový, že je $|S(D, \xi) - I| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro všechna $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta_\varepsilon)$. Pro všechny dvojice $(D, \xi), (D', \xi') \in \mathcal{A}(\delta_\varepsilon)$ tedy máme

$$|S(D, \xi) - S(D', \xi')| \leq |S(D, \xi) - I| + |S(D', \xi') - I| < \varepsilon,$$

tj. je splněna (B-C) podmínka (5.2).

b) Předpokládejme nyní, že je splněna (B-C) podmínka (5.2). Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Podle (5.2) můžeme zvolit kalibr δ_ε tak, aby

$$|S(D, \xi) - S(D', \xi')| < \frac{\varepsilon}{2}$$

platilo pro všechna $(D, \xi), (D', \xi') \in \mathcal{A}(\delta_\varepsilon)$. Označme nyní

$$M = \{m \in \mathbb{R} : \exists \delta_m \in \mathcal{G} \text{ takové, že } (D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta_m) \implies S(D, \xi) \geq m\}$$

Zvolíme-li libovolně $(D_0, \xi_0) \in \mathcal{A}(\delta_\varepsilon)$, bude pro každé $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta_\varepsilon)$ platit

$$S(D_0, \xi_0) - \frac{\varepsilon}{2} < S(D, \xi) < S(D_0, \xi_0) + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5.3)$$

Odtud plyne, že $(-\infty, S(D_0, \xi_0) - \frac{\varepsilon}{2}) \subset M$, a tudíž množina M není prázdná. Dále, pro každé $m \in M$ a každé $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\tilde{\delta}_m)$, kde

$$\tilde{\delta}_m(x) = \min\{\delta_m(x), \delta_\varepsilon(x)\} \quad \text{na } [a, b],$$

máme také $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta_\varepsilon)$ a tudíž

$$m \leq S(D, \xi) < S(D_0, \xi_0) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{tj. } M \subset (-\infty, S(D_0, \xi_0) + \frac{\varepsilon}{2}).$$

To ale znamená, že množina M je shora ohraničená, tj. $\sup M < \infty$, a platí

$$S(D_0, \xi_0) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \sup M \leq S(D_0, \xi_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Toto spolu s nerovností (5.3) implikuje, že platí

$$|S(D, \xi) - \sup M| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } (D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta_\varepsilon)$$

neboli

$$\sup M = \int_a^b f \, d[g].$$

□

KS-integrál má obvyklé lineární vlastnosti :

5.6. Věta. *Nechť $f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, a necht' existují integrály :*

$$\int_a^b f_1 \, d[g], \quad \int_a^b f_2 \, d[g], \quad \int_a^b f \, d[g_1] \quad \text{a} \quad \int_a^b f \, d[g_2].$$

Potom pro libovolná $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ platí

$$\int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2) \, d[g] = c_1 \int_a^b f_1 \, d[g] + c_2 \int_a^b f_2 \, d[g],$$

a

$$\int_a^b f \, d[c_1 g_1 + c_2 g_2] = c_1 \int_a^b f \, d[g_1] + c_2 \int_a^b f \, d[g_2].$$

D ů k a z . Ukažme si např. důkaz prvního tvrzení: Bud' dáno $\varepsilon > 0$. Podle předpokladu existují kalibry $\delta_1 \in \mathcal{G}$ a $\delta_2 \in \mathcal{G}$ takové, že platí

$$(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta_i) \implies |S_{f_i \Delta g}(D, \xi) - \int_a^b f_i \, d[g]| < \varepsilon \quad \text{pro } i = 1, 2.$$

Pro $x \in [a, b]$ položme $\delta_\varepsilon(x) = \min\{\delta_1(x), \delta_2(x)\}$. Označme $h = c_1 f_1 + c_2 f_2$. Protože pro každé $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta_\varepsilon)$ platí

$$\begin{aligned} S_{h \Delta g}(D, \xi) &= \sum_{j=1}^{\nu(D)} (c_1 f_1(\xi_j) + c_2 f_2(\xi_j)) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] \\ &= c_1 S_{f_1 \Delta g}(D, \xi) + c_2 S_{f_2 \Delta g}(D, \xi), \end{aligned}$$

dostáváme

$$\begin{aligned} & \left| S_{h_{\Delta g}}(D, \xi) - c_1 \int_a^b f_1 d[g] + c_2 \int_a^b f_2 d[g] \right| \\ & \leq |c_1| \left| S_{f_1 \Delta g}(D, \xi) - \int_a^b f_1 d[g] \right| + |c_2| \left| S_{f_2 \Delta g}(D, \xi) - \int_a^b f_2 d[g] \right| \\ & < (|c_1| + |c_2|) \varepsilon. \end{aligned}$$

Odtud už ovšem naše tvrzení bezprostředně plyne.

Druhé tvrzení věty by se dokazovalo obdobně a důkaz lze ponechat čtenáři jako cvičení. \square

5.7. Věta. *Jestliže existuje integrál $\int_a^b f d[g]$ a jestliže $[c, d] \subset [a, b]$, pak existuje také integrál $\int_c^d f d[g]$.*

D ů k a z . Předpokládejme, že je $a < c < d < b$. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Podle (B-C) podmínky (viz Věta 5.5) můžeme zvolit kalibr $\delta_\varepsilon \in \mathcal{G}$ tak, aby platilo

$$|S(\tilde{D}, \tilde{\xi}) - S(\tilde{D}', \tilde{\xi}')| < \varepsilon \tag{5.4}$$

pro všechna δ_ε -jemná rozšířená dělení $(\tilde{D}, \tilde{\xi})$ a $(\tilde{D}', \tilde{\xi}')$ intervalu $[a, b]$. Mějme nyní libovolnou dvojici $(D, \xi), (D', \xi') \in \mathcal{A}(\delta_\varepsilon; [c, d])$. Dále, zvolme libovolně $(D^-, \xi^-) \in \mathcal{A}(\delta_\varepsilon; [a, c])$, $(D^+, \xi^+) \in \mathcal{A}(\delta_\varepsilon; [d, b])$ a doplňme jimi (D, ξ) a (D', ξ') na rozšířená dělení intervalu $[a, b]$, tj. položme

$$\tilde{D} = D^- \cup D \cup D^+, \quad \tilde{\xi} = (\xi^-, \xi, \xi^+),$$

a

$$\tilde{D}' = D^- \cup D' \cup D^+, \quad \tilde{\xi}' = (\xi^-, \xi', \xi^+).$$

Zřejmě je $(\tilde{D}, \tilde{\xi}) \in \mathcal{A}(\delta_\varepsilon; [a, b])$ a $(\tilde{D}', \tilde{\xi}') \in \mathcal{A}(\delta_\varepsilon; [a, b])$ a vzhledem k (5.4) platí

$$|S(D, \xi) - S(D', \xi')| = |S(\tilde{D}, \tilde{\xi}) - S(\tilde{D}', \tilde{\xi}')| < \varepsilon.$$

Odtud, vzhledem ke Větě 5.5, již existence integrálu $\int_c^d f d[g]$ bezprostředně plyne. Modifikace důkazu pro případ, že $c = a$ resp. $d = b$ je zřejmá. \square

5.8. Věta. *Nechť $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a $c \in [a, b]$. Integrál $\int_a^b f d[g]$ existuje právě tehdy když existují oba integrály $\int_a^c f d[g]$ a $\int_c^b f d[g]$. Potom navíc platí také rovnost*

$$\int_a^b f d[g] = \int_a^c f d[g] + \int_c^b f d[g].$$

D ů k a z . a) Existuje-li integrál $\int_a^b f d[g]$, pak podle Věty 5.7 existují také oba integrály $\int_a^c f d[g]$ a $\int_c^b f d[g]$.

b) Necht'

$$\int_a^c f d[g] = I_1 \quad \text{a} \quad \int_c^b f d[g] = I_2.$$

Budiž dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme kalibry $\delta'_\varepsilon \in \mathcal{G}[a, c]$ a $\delta''_\varepsilon \in \mathcal{G}[c, b]$ tak, aby pro všechna $(D', \xi') \in \mathcal{A}(\delta'_\varepsilon; [a, c])$ a $(D'', \xi'') \in \mathcal{A}(\delta''_\varepsilon; [c, b])$ platilo

$$|S(D', \xi') - I_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad |S(D'', \xi'') - I_2| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5.5)$$

Definujme nyní kalibr δ_ε na $[a, b]$ předpisem

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \min \left\{ \delta'_\varepsilon(x), \frac{1}{4}(c-x) \right\} & \text{když } x \in [a, c), \\ \min \left\{ \delta'_\varepsilon(c), \delta''_\varepsilon(c) \right\} & \text{když } x = c, \\ \min \left\{ \delta''_\varepsilon(x), \frac{1}{4}(x-c) \right\} & \text{když } x \in (c, b]. \end{cases}$$

Potom,

$$x + \delta(x) \leq x + \frac{1}{4}(c-x) < c \quad \text{je-li } x < c,$$

a

$$x - \delta(x) \geq x - \frac{1}{4}(c-x) > c \quad \text{je-li } x > c.$$

Pro žádné $x \neq c$ tedy nemůže platit $|c-x| < \delta(x)$. T.zn., že pro každé δ_ε -jemné rozšířené dělení (D, ξ) intervalu $[a, b]$ musí existovat index $k \in \{1, 2, \dots, \nu(D)\}$ takový, že $\xi_k = c$. Navíc, bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že platí

$$\alpha_{k-1} < \alpha_k = \xi_k = \xi_{k+1} = c < \alpha_{k+1}.$$

(Kdyby bylo $\alpha_{k-1} < c = \xi_k < \alpha_k$, upravili bychom příslušný člen v součtu $S(D, \xi)$ následujícím způsobem :

$$f(c) [g(\alpha_k) - g(\alpha_{k-1})] = f(c) [g(\alpha_k) - g(c)] + f(c) [g(c) - g(\alpha_{k-1})].)$$

To znamená, že každé rozšířené dělení $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta_\varepsilon; [a, b])$ intervalu $[a, b]$ můžeme rozdělit : $D = D' \cup D''$, $\xi = (\xi', \xi'')$ tak, že bude

$$(D', \xi') \in \mathcal{A}(\delta_\varepsilon; [a, c]) \subset \mathcal{A}(\delta'_\varepsilon; [a, c]), \quad (D'', \xi'') \in \mathcal{A}(\delta_\varepsilon; [c, b]) \subset \mathcal{A}(\delta''_\varepsilon; [c, b])$$

a

$$S(D, \xi) = S(D', \xi') + S(D'', \xi'').$$

Tudíž, vzhledem k (5.5),

$$\begin{aligned} |S(D, \xi) - (I_1 + I_2)| &= |S(D', \xi') + S(D'', \xi'') - (I_1 + I_2)| \\ &\leq |S(D', \xi') - I_1| + |S(D'', \xi'') - I_2| < \varepsilon, \end{aligned}$$

tj. $\int_a^b f d[g] = I_1 + I_2$. □

5.9. Poznámka (Srovnání s normovým RS-integrálem). Jestliže existuje normový RS-integrál (n) $\int_a^b f d[g]$, pak také existuje KS-integrál $\int_a^b f d[g]$ a má tutěž hodnotu. Je-li totiž (n) $\int_a^b f d[g] = I \in \mathbb{R}$, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\Delta_\varepsilon > 0$ takové, že $|S(D, \xi) - I| < \varepsilon$ platí pro všechna rozšířená dělení (D, ξ) intervalu $[a, b]$ taková, že $|D| < \Delta_\varepsilon$. Definujeme-li pak $\delta_\varepsilon(x) \equiv \Delta_\varepsilon$, získáme evidentně kalibr s vlastnostmi zaručujícími existenci příslušného KS-integrálu $\int_a^b f d[g] = I$.

Na druhou stranu, jestliže existuje KS-integrál $\int_a^b f d[g] = I$, přičemž pro každé $\varepsilon > 0$ lze najít kalibr $\delta_\varepsilon \in \mathcal{G}[a, b]$ takový, že platí $\inf\{\delta_\varepsilon(x); x \in [a, b]\} > 0$

$$|S(D, \xi) - I| < \varepsilon \quad \text{pro každé } (D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta),$$

pak existuje také (n) $\int_a^b f d[g]$ a platí rovnost (n) $\int_a^b f d[g] = I$. Položíme-li totiž pro dané $\varepsilon > 0$ $\Delta_\varepsilon = \inf\{\delta_\varepsilon(x); x \in [a, b]\}$, bude platit také

$$|S(D, \xi) - I| < \varepsilon \quad \text{pro každé } (D, \xi) \in \mathcal{P}([a, b]) \quad \text{takové, že } |D| < \Delta_\varepsilon.$$

Následující věta popisuje vztah (σ) RS-integrálu a KS-integrálu.

5.10. Věta. *Jestliže existuje (σ) RS-integrál $(\sigma) \int_a^b f d[g]$, pak existuje také KS-integrál $\int_a^b f d[g]$ a platí*

$$\int_a^b f d[g] = (\sigma) \int_a^b f d[g].$$

D ů k a z . Označme $I = (\sigma) \int_a^b f d[g]$. Buď dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Z předpokladu o existenci (σ) RS-integrálu plyne, že existuje dělení $D_\varepsilon = \{s_0, s_1, \dots, s_m\} \in \mathcal{D}[a, b]$ takové, že pro každé rozšířené dělení $(D, \xi) \in \mathcal{P}[a, b]$, kde D je zjemněním D_ε platí (5.1). Položme nyní

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} \min\{|x - s_j|; j = 0, 1, \dots, m\} & \text{když } x \notin D_\varepsilon, \\ 1 & \text{když } x \in D_\varepsilon. \end{cases}$$

Potom $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta_\varepsilon)$ pouze tehdy, když

$$D_\varepsilon \subset \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{\nu(D)}\}. \tag{5.6}$$

Navíc máme ještě

$$S(D, \xi) = \sum_{j=1}^{\nu(D)} \left[f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\xi_j)] + f(\xi_j) [g(\xi_j) - g(\alpha_{j-1})] \right] = S(D', \xi'), \quad (5.7)$$

kde $D' = \{\alpha_0, \xi_1, \alpha_1, \xi_2, \dots, \xi_{\nu(D)}, \alpha_{\nu(D)}\}$ a $\xi' = (\xi_1, \xi_1, \xi_2, \xi_2, \dots, \xi_{\nu(D)}, \xi_{\nu(D)})^T$. Podle (5.6) je

$$D_\varepsilon \subset \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{\nu(D)}\} \subset D'$$

a vzhledem k (5.7) odtud plyne

$$|S(D, \xi) - I| = |S(D', \xi') - I| < \varepsilon, \quad \text{t.j.} \quad \int_a^b f \, d[g] = I. \quad \square$$

5.11. Příklad. V případě $g(x) \equiv x$ budeme místo o KS-integrálu mluvit o K-integrálu (Kurzweilův integrál). K-integrál je zřejmě zobecněním klasického Riemannova integrálu.

(i) Nechť $f(x) = 0$ na $[a, b] \setminus W$, kde W je spočetná podmnožina $[a, b]$, $W = \{w_k\}_{k=1}^\infty$. Buď dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Definujme

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{když } x \notin W, \\ \frac{\varepsilon}{2^{k+1}(1 + |f(w_k)|)} & \text{když } x = w_k \in W. \end{cases}$$

Pro každé $(D, \xi) \in \mathcal{D}[a, b]$ se v příslušném integrálním součtu $S(D, \xi)$,

$$S(D, \xi) = \sum_{j=1}^m f(\xi_j) [\alpha_j - \alpha_{j-1}],$$

uplatní pouze takové sčítance, pro které existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že platí $\xi_j = w_k \in W$. Pro každé δ_ε -jemné rozšířené dělení (D, ξ) intervalu $[a, b]$, (tj. $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta_\varepsilon)$, kde $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \in \mathcal{D}[a, b]$ a $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)^T \in \mathbb{R}^m$) a každý takový index j ovšem musí platit

$$\alpha_j - \alpha_{j-1} \leq \frac{\varepsilon}{2^k(1 + |f(w_k)|)}$$

a tudíž je

$$|S(D, \xi)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |f(w_k)| \frac{\varepsilon}{2^k(1 + |f(w_k)|)} \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \varepsilon.$$

Podle Definice 5.2 je tedy $\int_a^b f(x) \, dx = 0$.

(ii) Nechť existuje Newtonův integrál $(N) \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, kde funkce F je spojitá na $[a, b]$ a platí

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pro každé } x \in (a, b), \quad F'(a+) = f(a), \quad F'(b-) = f(b).$$

Ukážeme, že pak existuje také K-integrál $\int_a^b f(x) dx$ a rovná se také $F(b) - F(a)$.

Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Pro každé $\xi \in [a, b]$ zvolme $\delta_\varepsilon(\xi) > 0$ tak, aby platilo

$$|F(x) - F(\xi) - f(\xi)(x - \xi)| < \frac{\varepsilon}{b-a} |x - \xi|$$

pro všechna $x \in [a, b] \cap (\xi - \delta_\varepsilon(\xi), \xi + \delta_\varepsilon(\xi))$.

Pro každé $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta_\varepsilon)$ ($D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)^T \in \mathbb{R}^m$) a každé $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ tedy platí

$$\begin{aligned} & |F(\alpha_j) - F(\alpha_{j-1}) - f(\xi_j) [\alpha_j - \alpha_{j-1}]| \\ & \leq |F(\alpha_j) - F(\xi_j) - f(\xi_j) [\alpha_j - \xi_j]| + |F(\xi_j) - F(\alpha_{j-1}) - f(\xi_j) [\xi_j - \alpha_{j-1}]| \\ & \leq \frac{\varepsilon}{b-a} (|\alpha_j - \xi_j| + |\xi_j - \alpha_{j-1}|) = \frac{\varepsilon}{b-a} [\alpha_j - \alpha_{j-1}] \end{aligned}$$

a tudíž

$$\begin{aligned} |S(D, \xi) - [F(b) - F(a)]| &= \left| \sum_{j=1}^m (F(\alpha_j) - F(\alpha_{j-1}) - f(\xi_j) [\alpha_j - \alpha_{j-1}]) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^m |F(\alpha_j) - F(\alpha_{j-1}) - f(\xi_j) [\alpha_j - \alpha_{j-1}]| \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{j=1}^m [\alpha_j - \alpha_{j-1}] = \varepsilon, \end{aligned}$$

tj.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Platí dokonce, že K-integrál je ekvivalentní s Perronovým integrálem. Zahrnuje tedy současně integrály nejen Riemannův či Newtonův, ale i Lebesgueův. Tím se rozumí, že je-li na nějakém intervalu daná funkce integrovatelná ve smyslu Lebesgueově, pak má na tomto intervalu i K-integrál a oba integrály jsou si rovny. Navíc, má-li funkce f K-integrál, pak f je Lebesgueovsky integrovatelná právě tehdy když také její absolutní hodnota $|f|$ má K-integrál.

Ukážeme si nyní, jak lze v některých jednoduchých příkladech určit hodnotu integrálu přímo z definice.

5.12. Příklady.

(i) Z Definice 5.2 je zřejmé, že je-li $f(t) \equiv f(a)$ na $[a, b]$, pak

$$\int_a^b f \, d[g] = f(a) [g(b) - g(a)] \quad \text{a} \quad \int_a^b g \, d[f] = 0$$

pro každou funkci $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

(ii) Pro libovolnou funkci $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ platí

$$\int_a^b f \, d[\chi_{(\tau, b]}] = f(\tau) \quad \text{pro } \tau \in [a, b), \quad (5.8)$$

$$\int_a^b f \, d[\chi_{[\tau, b]}] = f(\tau) \quad \text{pro } \tau \in (a, b), \quad (5.9)$$

$$\int_a^b f \, d[\chi_{[a, \tau]}] = -f(\tau) \quad \text{pro } \tau \in (a, b), \quad (5.10)$$

$$\int_a^b f \, d[\chi_{(a, \tau]}] = -f(\tau) \quad \text{pro } \tau \in (a, b], \quad (5.11)$$

a

$$\int_a^b f \, d[\chi_{[\tau]}] = \begin{cases} -f(a) & \text{když } \tau = a, \\ 0 & \text{když } \tau \in (a, b), \\ f(b) & \text{když } \tau = b. \end{cases} \quad (5.12)$$

Ukažme si odvození vztahů (5.8) a (5.9). Všechny ostatní se z nich už snadno odvodí použitím Věty 5.8. Nechť $g(x) = \chi_{(\tau, b]}(x)$ na $[a, b]$. Potom je

$$\int_a^\tau f \, d[g] = 0.$$

Dále, položme

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{když } x = \tau, \\ \frac{1}{4}(x - \tau) & \text{když } x \in (\tau, b]. \end{cases}$$

Pro každé $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta; [\tau, b])$ ($D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$) pak platí $\tau = \alpha_0 = \xi_1$, $g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1}) = 0$ pro $j = 2, 3, \dots, m$. Tudíž

$$S(D, \xi) = f(\tau) [g(\alpha_1) - g(\tau)] = f(\tau)$$

a

$$\int_{\tau}^b f d[g] = f(\tau).$$

Důkaz vztahu (5.8) teď už snadno dokončíme použitím Věty 5.8.

Vztah (5.9) se dokazuje podobně. Tentokrát ovšem máme $g(x) = \chi_{[\tau,b]}(x)$ na $[a, b]$, $\int_{\tau}^b f d[g] = 0$ a položíme

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{když } x = \tau, \\ \frac{1}{4}(\tau - x) & \text{když } x \in [a, \tau). \end{cases}$$

Pro každé $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta; [a, \tau])$ pak máme $\alpha_m = \xi_m = \tau$ a tedy

$$S(D, \xi) = f(\tau) [g(\tau) - g(\alpha_{m-1})] = f(\tau) \quad \text{a} \quad \int_a^{\tau} f d[g] = f(\tau).$$

(iii) Pro libovolnou funkci $g \in \mathbb{G}[a, b]$ platí

$$\int_a^b \chi_{(\tau,b]} d[g] = g(b) - g(\tau+) \quad \text{pro } \tau \in [a, b), \quad (5.13)$$

$$\int_a^b \chi_{[\tau,b]} d[g] = g(b) - g(\tau-) \quad \text{pro } \tau \in (a, b], \quad (5.14)$$

$$\int_a^b \chi_{[a,\tau]} d[g] = g(\tau+) - g(a) \quad \text{pro } \tau \in (a, b], \quad (5.15)$$

$$\int_a^b \chi_{(a,\tau]} d[g] = g(\tau-) - g(a) \quad \text{pro } \tau \in (a, b] \quad (5.16)$$

a

$$\int_a^b \chi_{[\tau]} d[g] = \begin{cases} g(a+) - g(a) & \text{když } \tau = a, \\ g(\tau+) - g(\tau-) & \text{když } \tau \in (a, b), \\ g(b) - g(b-) & \text{když } \tau = b. \end{cases} \quad (5.17)$$

Opět provedeme důkaz pouze prvních dvou z uvedených vztahů. Nechť tedy $f(x) = \chi_{(\tau,b]}(x)$ na $[a, b]$. Potom je

$$\int_a^{\tau} f d[g] = 0.$$

Bud' dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme nyní $\eta > 0$ tak, aby platilo $|g(\tau+) - g(x)| < \varepsilon$ pro každé $x \in (\tau, \tau + \eta)$ a definujme

$$\delta(x) = \begin{cases} \eta & \text{když } x = \tau \\ \frac{1}{4}(x - \tau) & \text{když } x \in (\tau, b]. \end{cases}$$

Pro každé $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta; [\tau, b])$ musí platit $\tau = \alpha_0 = \xi_1$ a tedy

$$\begin{aligned} |S(D, \xi) - [g(b) - g(\tau+)]| \\ &= |[g(b) - g(\alpha_{m-1})] + [g(\alpha_{m-1}) - g(\alpha_{m-2}) \\ &\quad + \cdots + [g(\alpha_2) - g(\alpha_1)] - [g(b) - g(\tau+)]| \\ &= |g(\tau+) - g(\alpha_1)|. \end{aligned}$$

Protože $\tau < \alpha_1 < \tau + \delta(\tau) = \tau + \eta$, plyne odtud a z definice η , že

$$|S(D, \xi) - [g(b) - g(\tau+)]| < \varepsilon \quad \text{pro každé } (D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta; [\tau, b]).$$

Tudíž

$$\int_a^b f \, d[g] = \int_a^\tau f \, d[g] + \int_\tau^b f \, d[g] = g(b) - g(\tau+),$$

tj. platí (5.13).

V druhém případě, $f(x) = \chi_{[\tau, b]}(x)$ na $[a, b]$, máme

$$\int_\tau^b f \, d[g] = g(b) - g(\tau).$$

Zvolme $\eta > 0$ tak, aby platilo $|g(\tau-) - g(x)| < \varepsilon$ pro každé $x \in (\tau - \eta, \tau)$, a definujme

$$\delta(x) = \begin{cases} \eta & \text{když } x = \tau, \\ \frac{1}{4}(\tau - x) & \text{když } x \in [a, \tau). \end{cases}$$

Tím si opět vynutíme, že pro každé $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta; [a, \tau])$ musí být $\tau = \alpha_m = \xi_m$ a tudíž

$$S(D, \xi) = [g(\tau) - g(\alpha_{m-1})],$$

kde $\alpha_{m-1} \in (\tau - \eta, \tau)$. Jako v předchozím případě, odtud plyne, že platí

$$\int_a^\tau f \, d[g] = g(\tau) - g(\tau-), \text{ tj. } \int_a^b f \, d[g] = \int_a^\tau f \, d[g] + \int_\tau^b f \, d[g] = g(b) - g(\tau-).$$

Výše uvedené příklady můžeme podle Cvičení 1.19 (i) shrnout do následujícího tvrzení:

5.13. Důsledek. *Jestliže $g \in \mathbb{G}[a, b]$ a $f \in \mathbb{S}[a, b]$, pak oba integrály*

$$\int_a^b f \, d[g] \quad \text{a} \quad \int_a^b g \, d[f]$$

existují.

Následující věta poskytuje základní odhad pro integrál $\int_a^b f \, d[g]$ za předpokladu, že $\text{var}_a^b g < \infty$. Na funkci f přitom žádné zásadní omezení neklademe.

5.14. Věta. *Jestliže $g \in \mathbb{BV}[a, b]$ a $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je taková, že integrály*

$$\int_a^b f \, d[g] \quad \text{a} \quad \int_a^b |f(x)| \, d[\text{var}_a^x g]$$

existují, pak platí

$$\left| \int_a^b f(x) \, d[g(x)] \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, d[\text{var}_a^x g] \leq \|f\| \text{var}_a^b g. \quad (5.18)$$

D ů k a z . Pro každé rozšířené dělení (D, ξ) intervalu $[a, b]$ platí

$$\begin{aligned} |S(D, \xi)| &\leq \sum_{j=1}^{\nu(D)} |f(\xi_j)| |g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\nu(D)} |f(\xi_j)| \text{var}_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} g \leq \|f\| \text{var}_a^b g. \end{aligned}$$

□

Další věta poskytuje nejjednodušší konvergenční tvrzení:

5.15. Věta. *Nechť $g \in \mathbb{BV}[a, b]$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce ohraničená na $[a, b]$ a $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí definovaných na intervalu $[a, b]$ taková, že platí*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0 \quad (5.19)$$

a existují všechny integrály $\int_a^b f_n \, d[g]$, $n \in \mathbb{N}$. Potom existuje také integrál $\int_a^b f \, d[g]$ a platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n \, d[g] = \int_a^b f \, d[g]. \quad (5.20)$$

D ů k a z . a) Protože f je ohraničená, z předpokladu (5.19) plyne, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že platí

$$\|f_n\| \leq \|f\| + 1 < \infty \quad \text{pro všechna } n \geq n_0.$$

Podle Věty 5.14 tedy máme

$$\left| \int_a^b f_n d[g] \right| \leq (\|f\| + 1) \text{var}_a^b g < \infty \quad \text{pro všechna } n \geq n_0$$

a podle Bolzanovy-Weierstraßovy věty tedy existuje podposloupnost $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ v \mathbb{N} a $I \in \mathbb{R}$ takové, že platí $n_1 \geq n_0$ a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f_{n_k} d[g] = I. \quad (5.21)$$

Označme

$$\begin{cases} I_k := \int_a^b f_{n_k} d[g] & \text{pro } k \in \mathbb{N}, \\ S_k(D, \xi) := S_{f_{n_k} \Delta g}(D, \xi) & \text{pro } k \in \mathbb{N}, (D, \xi) \in \mathcal{D}[a, b], \\ S(D, \xi) := S_{f \Delta g}(D, \xi), & \text{pro } (D, \xi) \in \mathcal{D}[a, b]. \end{cases} \quad (5.22)$$

b) Buď dáno $\varepsilon > 0$. Vzhledem k (5.19) a (5.21) můžeme zvolit $k_0 \in \mathbb{N}$ tak, že platí

$$|I_k - I| < \varepsilon \quad \text{a} \quad \|f_{n_k} - f\| < \varepsilon \quad \text{pro } k \geq k_0.$$

Potom bude také

$$|S(D, \xi) - S_{k_0}(D, \xi)| < \varepsilon \text{var}_a^b g \quad \text{pro všechna } (D, \xi) \in \mathcal{D}[a, b].$$

Dále, nechť $\delta_0 \in \mathcal{G}[a, b]$ je kalibr na $[a, b]$ takový, že pro všechna δ_0 -jemná rozšířená dělení (D, ξ) intervalu $[a, b]$ platí

$$|S_{k_0}(D, \xi) - I_{k_0}| < \varepsilon.$$

Pro každé $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta_0)$ tedy máme

$$|S(D, \xi) - I| \leq |S(D, \xi) - S_{k_0}(D, \xi)| + |S_{k_0}(D, \xi) - I_{k_0}| + |I_{k_0} - I| < \varepsilon (\text{var}_a^b g + 2).$$

Odtud

$$\int_a^b f d[g] = I = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f_{n_k} d[g].$$

c) Konečně, opětným použitím Věty 5.14,

$$\left| \int_a^b f_n d[g] - \int_a^b f d[g] \right| \leq \|f_n - f\| \text{var}_a^b g \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Platí tedy i (5.20). □

Nyní můžeme formulovat první významnější existenční výsledek :

5.16. Věta. *Nechť $f \in \mathbb{G}[a, b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a, b]$. Potom $\int_a^b f d[g]$ existuje.*

D ů k a z . Podle Věty 3.6 (ii) existuje posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konečných skokových funkcí, která konverguje stejnoměrně na $[a, b]$ k funkci f . Podle Věty 5.6 a Příkladů 5.12(iii) integrál $\int_a^b f_n d[g]$ existuje pro každé $n \in \mathbb{N}$. To znamená, že podle Věty 5.15 existuje také integrál $\int_a^b f d[g]$ a platí (5.20). \square

Následující konvergenční výsledek je tak trochu symetrický k Větě 5.15.

5.17. Věta. *Nechť $g \in \mathbb{BV}[a, b]$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce ohraničená na $[a, b]$ a $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost funkcí definovaných na intervalu $[a, b]$ taková, že platí*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{var}_a^b (g_n - g) = 0$$

a existují všechny integrály $\int_a^b f d[g_n]$, $n \in \mathbb{N}$. Potom existuje také integrál $\int_a^b f d[g]$ a platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f d[g_n] = \int_a^b f d[g]. \quad (5.23)$$

D ů k a z . Zavedme opět značení (5.22). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat

$$g_n(a) = g(a) = 0 \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Dále je důkaz podobný důkazu Věty 5.15. Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že platí

$$\operatorname{var}_a^b g_n \leq \operatorname{var}_a^b g + 1 \quad \text{pro všechna } n \geq n_0.$$

Podle Věty 5.14 tedy máme

$$\left| \int_a^b f d[g_n] \right| \leq \|f\| (\operatorname{var}_a^b g + 1) \quad \text{pro všechna } n \geq n_0$$

a podle Bolzanovy-Weierstraßovy věty tedy existuje podposloupnost $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ v \mathbb{N} a $I \in \mathbb{R}$ takové, že platí $n_1 \geq n_0$ a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f d[g_{n_k}] = I.$$

Použijeme značení analogické značení zavedenému v (5.22). Buď dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme $k_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby platilo

$$|I_k - I| < \varepsilon \quad \text{a} \quad \operatorname{var}_a^b (g_{n_k} - g) < \varepsilon \quad \text{pro } k \geq k_0.$$

Dále, necht' $\delta_0 \in \mathcal{G}[a, b]$ je kalibr na $[a, b]$ takový, že pro všechna δ_0 -jemná rozšířená dělení (D, ξ) intervalu $[a, b]$ platí

$$|S_{k_0}(D, \xi) - I_{k_0}| < \varepsilon.$$

Pro každé $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta_0)$ tedy máme

$$|S(D, \xi) - I| \leq |S(D, \xi) - S_{k_0}(D, \xi)| + |S_{k_0}(D, \xi) - I_{k_0}| + |I_{k_0} - I| < \varepsilon (\|f\| + 2).$$

Odtud

$$\int_a^b f \, d[g] = I = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f \, d[g_{n_k}].$$

Konečně, opětým použitím Věty 5.14,

$$\left| \int_a^b f \, d[g_n] - \int_a^b f \, d[g] \right| \leq \|f\| \operatorname{var}_a^b(g_n - g) \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Platí tedy (5.23). □

Podle Věty 5.16 integrál $\int_a^b f \, d[g]$ existuje pro všechny $f \in \mathbb{G}[a, b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a, b]$. Chtěli bychom ukázat, že tento integrál vždy existuje i v symetrické situaci: $f \in \mathbb{BV}[a, b]$ a $g \in \mathbb{G}[a, b]$. Rozložíme-li funkci f na součet spojitě části f^C a skokové části f^B (viz Lemma 1.22 a Definice 9.9) a vzpomeneme-li si na Lemma 1.25, podle kterého existuje posloupnost konečných skokových funkcí $f_n^B \in \mathbb{S}[a, b]$ taková, že platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f^B - f_n^B\|_{\mathbb{BV}} = 0,$$

zjistíme, že ke svému cíli dospějeme, budeme-li umět dokázat existenci integrálu $\int_a^b f \, d[g]$ pro každou funkci $f \in \mathbb{BV} \cap \mathbb{C}$ a každou $g \in \mathbb{G}[a, b]$ a budeme-li mít k dispozici konvergenční větu, ze které by plynulo, že platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n^B \, d[g] = \int_a^b f^B \, d[g]$$

pro každou funkci $g \in \mathbb{G}[a, b]$. (Věta 5.15 a ani Věta 5.17 takový výsledek nezahrnují.)

Tyto úkoly splníme v následujících třech krocích.

Nejprve dokážeme tvrzení zaručující existenci integrálu $\int_a^b f \, d[g]$ za předpokladů zahrnujících i případ $f \in \mathbb{BV} \cap \mathbb{C}$, $g \in \mathbb{G}[a, b]$.

5.18. Lemma. *Jestliže funkce $f \in \mathbb{BV}[a, b]$ je spojitá na intervalu $[a, b]$, pak integrál $(\sigma) \int_a^b f \, d[g]$ existuje pro každou funkci $g \in \mathbb{G}[a, b]$.*

D ů k a z . Nechť $f \in \mathbb{BV}[a, b]$, $g \in \mathbb{G}[a, b]$ a f je spojitá na intervalu $[a, b]$. Podle Vět 5.10, 3.6, 4.10 a 4.15 stačí ukázat existenci integrálu $(\sigma) \int_a^b g \, d[f]$ pro každou konečnou skokovou funkci g (t.j. $g \in \mathbb{S}[a, b]$). Navíc, protože

$$\mathbb{S}[a, b] = \operatorname{Lin}(\chi_{[a, \tau]}, \chi_{[a, \tau]}, \tau \in (a, b], \chi_{[a]}).$$

(viz Poznámka 3.9 (i)), podle Cvičení 4.9 se můžeme omezit na případy

$$g = \chi_{[a,\tau]}, \quad g = \chi_{[a,\tau)}, \quad \tau \in (a, b], \quad g = \chi_{[a]}.$$

a) Necht' tedy $\tau \in (a, b]$ a $g = \chi_{[a,\tau]}$. Zřejmě je

$$(\sigma) \int_a^\tau g \, d[f] = f(\tau) - f(a).$$

Pro každé rozšířené dělení $(D, \xi) \in \mathcal{P}[\tau, b]$, $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ máme

$$S(D, \xi) = \begin{cases} 0 & \text{je-li } \xi_1 > \tau, \\ f(\alpha_1) - f(\tau) & \text{je-li } \xi_1 = \tau. \end{cases}$$

Díky spojitosti funkce f v bodě τ zprava můžeme tedy k danému $\varepsilon > 0$ vždy najít dělení D_ε takové, že bude

$$|S(D, \xi)| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } (D, \xi) \in \mathcal{P}[\tau, b] \quad \text{taková, že } D \supset D_\varepsilon,$$

tj.

$$(\sigma) \int_\tau^b \chi_{[a,\tau]} \, d[f] = 0$$

a

$$(\sigma) \int_a^b \chi_{[a,\tau]} \, d[f] = f(\tau) - f(a).$$

b) Necht' $\tau \in (a, b]$ a $g = \chi_{[a,\tau)}$. Potom

$$(\sigma) \int_\tau^b g \, d[f] = 0.$$

Pro každé rozšířené dělení $(D, \xi) \in \mathcal{P}[a, \tau]$, $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ máme

$$S(D, \xi) = \begin{cases} 0 & \text{je-li } \xi_{m-1} < \tau, \\ f(\tau) - f(\alpha_{m-1}) & \text{je-li } \xi_m = \tau. \end{cases}$$

Díky spojitosti funkce f v bodě τ zleva můžeme tedy k danému $\varepsilon > 0$ vždy najít dělení D_ε takové, že bude

$$|S(D, \xi)| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } (D, \xi) \in \mathcal{P}[a, \tau] \quad \text{taková, že } D \supset D_\varepsilon,$$

tj.

$$(\sigma) \int_a^\tau \chi_{[a,\tau)} \, d[f] = 0$$

a

$$(\sigma) \int_a^b \chi_{[a,\tau]} d[f] = f(\tau) - f(a).$$

c) Podobně bychom ukázali, že

$$(\sigma) \int_a^b \chi_{[a]} d[f] = 0. \quad \square$$

5.19. Cvičení. Dokažte následující dvě jemné modifikace Lemmatu 5.18:

Jestliže $f \in \mathbb{BV}[a, b]$ je zleva spojitá na intervalu $(a, b]$, pak integrál $(\sigma) \int_a^b f d[g]$ existuje pro každou funkci $g \in \mathbb{G}[a, b]$ zprava spojitou na intervalu $[a, b]$.

Jestliže $f \in \mathbb{BV}[a, b]$ je zprava spojitá na intervalu $[a, b)$, pak integrál $(\sigma) \int_a^b f d[g]$ existuje pro každou funkci $g \in \mathbb{G}[a, b]$ zleva spojitou na intervalu $(a, b]$.

Následující věta poskytuje odhad symetrický k Větě 5.14.

5.20. Věta. *Nechť funkce g ohraničená na $[a, b]$ a $f \in \mathbb{BV}[a, b]$ jsou takové, že existuje integrál $\int_a^b f d[g]$. Potom platí*

$$\left| \int_a^b f d[g] \right| \leq (|f(a)| + |f(b)| + \text{var}_a^b f) \|g\|. \quad (5.24)$$

Důkaz. Pro libovolné $(D, \xi) \in \mathcal{P}[a, b]$, $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$, máme

$$\begin{aligned} S(D, \xi) &= f(\xi_1) [g(\alpha_1) - g(a)] + f(\xi_2) [g(\alpha_2) - g(\alpha_1)] + \dots + f(\xi_m) [g(b) - g(\alpha_{m-1})] \\ &= f(b) g(b) - f(a) g(a) \\ &\quad - [f(\xi_1) - f(a)] g(a) - [f(\xi_2) - f(\xi_1)] g(\alpha_1) - \dots - [f(b) - f(\xi_m)] g(b) \\ &= f(b) g(b) - f(a) g(a) - \sum_{j=0}^m [f(\xi_{j+1}) - f(\xi_j)] g(\alpha_j), \end{aligned}$$

kde $\xi_0 = a$ a $\xi_{m+1} = b$. Odtud plyne, že pro každé $(D, \xi) \in \mathcal{P}[a, b]$ platí

$$|S(D, \xi)| \leq (|f(a)| + |f(b)| + \sum_{j=0}^m |f(\xi_{j+1}) - f(\xi_j)|) \|g\|,$$

neboli

$$|S(D, \xi)| \leq (|f(a)| + |f(b)| + \text{var}_a^b f) \|g\|$$

odkud už tvrzení Věty okamžitě plyne. □

Nyní dokážeme konvergenční větu která zaručí, že bude platit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n^B d[g] = \int_a^b f^B d[g].$$

5.21. Věta. *Nechť funkce g je ohraničená na $[a, b]$, $f \in \mathbb{BV}[a, b]$ a nechť $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{BV}[a, b]$ je posloupnost taková, že*

$$\int_a^b f_n d[g] \text{ existuje pro každé } n \in \mathbb{N} \text{ a platí } \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\mathbb{BV}} = 0.$$

Potom existuje také integrál $\int_a^b f d[g]$ a platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n d[g] = \int_a^b f d[g].$$

D ů k a z . Podle Věty 5.20 platí

$$\left| \int_a^b (f_n - f_m) d[g] \right| \leq 2 \|g\| \|f_n - f_m\|_{\mathbb{BV}} \quad \text{pro libovolná } m, n \in \mathbb{N}.$$

Posloupnost $\left\{ \int_a^b f_n d[g] \right\}_{n=1}^\infty$ je tedy cauchyovská a existuje tudíž $I \in \mathbb{R}$ takové, že platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n d[g] = I.$$

Ukážeme, že $\int_a^b f d[g] = I$. Budiž dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby platilo

$$\left| \int_a^b f_{n_0} d[g] - I \right| < \varepsilon \quad \text{a} \quad \|f_{n_0} - f\|_{\mathbb{BV}} < \varepsilon.$$

Dále, zvolme $\delta_\varepsilon \in \mathcal{G}$ tak, aby pro každé $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta_\varepsilon)$ platilo

$$\left| S_{n_0}(D, \xi) - \int_a^b f_{n_0} d[g] \right| < \varepsilon,$$

kde značíme $S_{n_0}(D, \xi) = S_{f_{n_0} \Delta g}(D, \xi)$. Potom pro libovolné $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta_\varepsilon)$ máme

$$\begin{aligned} |S(D, \xi) - I| &\leq |S(D, \xi) - S_{n_0}(D, \xi)| + \left| S_{n_0}(D, \xi) - \int_a^b f_{n_0} d[g] \right| + \left| \int_a^b f_{n_0} d[g] - I \right| \\ &\leq \varepsilon (\|g\| + 2) \end{aligned}$$

odkud už snadno odvodíme, že platí

$$\int_a^b f d[g] = I = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n d[g].$$

□

Nyní už budeme umět dokázat kýžený existenci výsledek. Připomeňme ještě, že v následujících tvrzeních a jejich důkazech důsledně používáme konvenci z našich *Základních úmluv a označení* (viz (xiii)) pro funkce regulované na intervalu $[a, b]$ a klademe

$$g(a-) = g(a), \quad g(b+) = g(b) \\ (\text{a tedy také } \Delta^- g(a) = \Delta^+ g(b) = 0, \quad \Delta g(a) = \Delta^+ g(a), \quad \Delta g(b) = \Delta^- g(b))$$

pro každou funkci $g \in \mathbb{G}[a, b]$. V tomto smyslu je třeba i rozumět symbolům pro funkce $g(x-)$ resp. $g(x+)$ definované na $[a, b]$. Není těžké si rozmyslet, že např. pro $g \in \mathbb{G}[a, b]$ a $h(x) = g(x-)$ platí

$$h(x-) = h(x) = g(x), \quad h(x+) = g(x+) \quad \text{na } [a, b].$$

Analogicky, pro $g \in \mathbb{G}[a, b]$ a $h(x) = g(x+)$ máme

$$h(x+) = h(x) = g(x), \quad h(x-) = g(x-) \quad \text{na } [a, b].$$

5.22. Věta. *Jestliže $f \in \mathbb{BV}[a, b]$ a $g \in \mathbb{G}[a, b]$, pak integrál $\int_a^b f d[g]$ existuje a platí (5.24).*

Důkaz. Necht' $f \in \mathbb{BV}[a, b]$ a $g \in \mathbb{G}[a, b]$ a necht' $W = \{w_k\}_{k \in K}$ je množina bodů nespojitosti funkce f v $[a, b]$. ($K \subset \mathbb{N}$ může být případně i konečná množina.) Necht' $f = f^C + f^B$ je Jordanův rozklad funkce f na spojitou část f^C a skokovou část f^B definovanou jako v (1.7). Definujme

$$f_n^B(x) = \sum_{k \in K \cap [1, n]} \Delta^- f(w_k) \chi_{(w_k, b]}(x) + \sum_{k \in K \cap [1, n]} \Delta^+ f(w_k) \chi_{[w_k, b]}(x) \quad \text{pro } n \in \mathbb{N} \text{ a } x \in [a, b].$$

Zřejmě $f_n^B \in \mathbb{S}[a, b]$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a podle Lemmatu 1.25 platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n^B - f^B\|_{\mathbb{BV}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{var}_a^b(f^B - f_n^B) = 0.$$

Dále, podle Důsledku 5.13 integrál $\int_a^b f_n^B d[g]$ existuje pro každé $n \in \mathbb{N}$. Speciálně, integrál $\int_a^b f^B d[g]$ existuje je-li množina K konečná, tj. když f má jenom konečný počet bodů nespojitosti. Není-li K konečná, pak integrál $\int_a^b f^B d[g]$ existuje podle Věty 5.21. Protože integrál $\int_a^b f^C d[g]$ existuje podle Lemmatu 5.18, existence integrálu $\int_a^b f d[g]$ nyní plyne z Věty 5.6. Konečně, podle Věty 5.20 platí také (5.24). \square

Přímým důsledkem Věty 5.22 je následující konvergenční tvrzení:

5.23. Důsledek. *Jestliže $g_n \in \mathbb{G}[a, b]$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $g_n \rightrightarrows g$ na $[a, b]$ pro $n \rightarrow \infty$, pak pro každou funkci $f \in \mathbb{BV}[a, b]$ platí*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f d[g_n] = \int_a^b f d[g]. \quad (5.25)$$

\square

Následující tvrzení navazuje na důkaz Věty 5.22 a dává návod k výpočtu integrálu $\int_a^b f \, d[g]$, je-li znám integrál $\int_a^b f^C \, d[g]$, kde f^C značí spojitou část funkce f .

5.24. Důsledek. *Jestliže $f \in BV[a, b]$, $g \in G[a, b]$, $K \subset \mathbb{N}$ a W je množina bodů nespojitosti funkce f v $[a, b]$ a f^C je spojitá část funkce f ($f^C(a) = f(a)$), pak*

$$\int_a^b f \, d[g] = \int_a^b f^C \, d[g] + \sum_{w \in W} [\Delta^- f(w)(g(b) - g(w-)) + \Delta^+ f(w)(g(b) - g(w+))]. \quad (5.26)$$

Důkaz. Necht', jako v důkazu Věty 5.22, $K \subset \mathbb{N}$, $W = \{w_k\}_{k \in K}$ a

$$f_n^B(x) = \sum_{k \in K \cap [1, n]} [\Delta^- f(w_k) \chi_{(w_k, b]}(x) + \Delta^+ f(w_k) \chi_{[w_k, b]}(x)] \quad \text{pro } n \in \mathbb{N} \text{ a } x \in [a, b].$$

Podle Lemmatu 1.25 platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n^B - f^B\|_{\mathbb{B}V} = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{var}_a^b(f^B - f_n^B) = 0.$$

Dále, podle (5.14), (5.15) a Věty 5.6, máme

$$\int_a^b f_n^B \, d[g] = \sum_{k=1}^n [\Delta^- f(w_k)(g(b) - g(w_k-)) + \Delta^+ f(w_k)(g(b) - g(w_k+))] \quad (5.27)$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Je-li K konečná, plyne odtud okamžitě, že platí (5.26).

Není-li K konečná, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat $K = \mathbb{N}$. Potom podle Věty 5.21 platí

$$\int_a^b f^B \, d[g] = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n^B \, d[g]. \quad (5.28)$$

Podle Cvičení 1.10 je

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta^- f(w_k)(g(b) - g(w_k-)) + \Delta^+ f(w_k)(g(b) - g(w_k+))| \\ & \leq 2 \|g\| \sum_{k=1}^{\infty} (|\Delta^- f(w_k)| + |\Delta^+ f(w_k)|) \leq 2 \|g\| (\text{var}_a^b f) < \infty. \end{aligned}$$

Vzhledem k (5.27) a (5.28) tudíž máme

$$\int_a^b f^B \, d[g] = \sum_{k=1}^{\infty} [\Delta^- f(w_k)(g(b) - g(w_k-)) + \Delta^+ f(w_k)(g(b) - g(w_k+))]. \quad (5.29)$$

Platí tedy (5.26). □

5.25 . Cvičení. Pomocí Lemmatu 1.25 a úvah analogických těm, které jsme použili v důkazu Důsledku 5.24, dokažte, že pro $f \in \mathbb{G}[a, b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a, b]$ platí

$$\int_a^b f \, d[g] = \int_a^b f \, d[g^C] + \sum_{w \in W} f(w) \Delta g(w), \quad (5.30)$$

kde W je množina bodů nespojitosti funkce g v $[a, b]$ a g^C je její spojitá část. (Přirozeně, zde $\Delta g(a) = \Delta^+ g(a)$ a $\Delta g(b) = \Delta^- g(b)$.)

Při důkazu Důsledku 5.24 a ve Cvičení 5.25 jsme použili Příklady 5.11. Následující technická lemmata jsou potřebná pro důkaz Věty o integraci per-partes, která je našim dalším významnějším cílem. Také v jejich důkazech budou Příklady 5.11 využity.

5.26 . Lemma. *Nechť $h \in G[a, b]$, $c \in \mathbb{R}$, $K \subset \mathbb{N}$ a $W = \{w_k\}_{k \in K} \subset [a, b]$ jsou takové, že*

$$h(x) = c \quad \text{pro } x \in [a, b] \setminus W, \quad (5.31)$$

Potom

$$\int_a^b f \, d[h] = f(b) [h(b) - c] - f(a) [h(a) - c] \quad (5.32)$$

platí pro každou funkci $f \in \mathbb{BV}[a, b]$.

D ů k a z . a) Funkce h splňuje (5.31) právě tehdy, když

$$h(x) = c + \sum_{k \in K} (h(w_k) - c) \chi_{[w_k]}(x) \quad \text{pro } n \in \mathbb{N} \text{ a } x \in [a, b].$$

Definujme $K_n = K \cap [1, n]$, $W_n = \{w_k\}_{k \in K_n}$ a

$$h_n(x) = c + \sum_{k \in K_n} (h(w_k) - c) \chi_{[w_k]}(x) \quad \text{pro } n \in \mathbb{N} \text{ a } x \in [a, b]$$

pro $n \in \mathbb{N}$. Dokážeme, že platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|h_n - h\| = 0. \quad (5.33)$$

Nechť je tedy dáno $\varepsilon > 0$ a nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ je takové, že

$$|h(w_k) - c| < \varepsilon \quad \text{pro každé } k > n_0. \quad (5.34)$$

Takové n_0 existuje, protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ je

$$|h(w_k) - c| = \begin{cases} |\Delta^- h(w_k)| & \text{když } w_k \in (a, b), \\ |\Delta^+ h(a)| & \text{když } w_k = a, \\ |\Delta^- h(b)| & \text{když } w_k = b \end{cases}$$

a množina těch $k \in \mathbb{N}$, pro něž $|h(w_k) - c| \geq \varepsilon$, může mít podle Důsledku 3.7 (ii) jenom nejvýše konečný počet (n_0) prvků. Tudíž,

$$|h_n(x) - h(x)| = \left\{ \begin{array}{ll} |c - h(x)| & \text{když } x \in W_n, \\ 0 & \text{když } x \in [a, b] \setminus W_n \end{array} \right\} < \varepsilon \quad \text{pro } n \geq n_0 \text{ a } x \in [a, b].$$

Platí tedy (5.33).

b) Podle Příkladu 5.12 (i), formule (5.12) a Věty 5.6 platí

$$\int_a^b f \, d[h_n] = f(b) [h_n(b) - c] - f(a) [h_n(a) - c] \quad (5.35)$$

pro každou funkci $f \in \mathbb{BV}[a, b]$ a každé $n \in \mathbb{N}$. Podle (5.33) a podle Důsledku 5.23 tedy máme

$$\int_a^b f \, d[h] = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f \, d[h_n] = f(b) [h(b) - c] - f(a) [h(a) - c].$$

□

5.27. Lemma. *Nechť $h \in \mathbb{BV}[a, b]$, $c \in \mathbb{R}$, $K \subset \mathbb{N}$ a $W = \{w_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset [a, b]$ jsou takové, že platí (5.31). Potom*

$$\int_a^b h \, d[g] = c [g(b) - g(a)] + \sum_{k=1}^{\infty} [h(w_k) - c] \Delta g(w_k) \quad \text{pro každou } g \in \mathbb{G}[a, b]. \quad (5.36)$$

D ů k a z . Vzhledem k (5.31) můžeme položit $h^C(x) = c$ a $h^B(x) = h(x) - c$ na $[a, b]$. W je množina bodů nespojitosti funkce h na intervalu $[a, b]$. Dále, $h(x-) = h(x+) = h(a+) = h(b-) = c$ pro každé $x \in (a, b)$. Tudíž

$$\Delta^- h(x) = h(x) - c = -\Delta^+ h(x) \quad \text{pro každé } x \in (a, b).$$

Podle (5.26) (kde $f = h$) tedy máme

$$\begin{aligned} \int_a^b h \, d[g] &= c [g(b) - g(a)] + \sum_{w \in W} (h(w) - c) [g(b) - g(w-) - g(b) + g(w+)] \\ &= c [g(b) - g(a)] + \sum_{w \in W} [h(w) - c] \Delta g(w), \end{aligned}$$

tj. platí (5.36). (Připomeňme znovu, že $\Delta g(a) = \Delta^+ g(a)$ a $\Delta g(b) = \Delta^- g(b)$.) □

5.28. Věta (VĚTA O INTEGRACI PER-PARTES). *Jestliže $f \in \mathbb{G}[a, b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a, b]$, pak existují oba integrály*

$$\int_a^b f \, d[g] \quad \text{a} \quad \int_a^b g \, d[f]$$

a platí

$$\int_a^b f \, d[g] + \int_a^b g \, d[f] = f(b)g(b) - f(a)g(a) \quad (5.37)$$

$$+ \sum_{x \in [a, b]} \left(\Delta^- f(x) \Delta^- g(x) - \Delta^+ f(x) \Delta^+ g(x) \right).$$

D ů k a z . Integrál $\int_a^b f \, d[g]$ existuje podle Věty 5.16 a integrál $\int_a^b g \, d[f]$ existuje podle Věty 5.22. Dále,

$$\begin{aligned} & \int_a^b f \, d[g] + \int_a^b g \, d[f] \\ &= \int_a^b f(x) \, d[g(x) + \Delta^+ g(x)] + \int_a^b g(x) \, d[f(x) - \Delta^- f(x)] \\ & \quad - \int_a^b f(x) \, d[\Delta^+ g(x)] + \int_a^b g(x) \, d[\Delta^- f(x)]. \end{aligned}$$

Není obtížné ověřit, že funkce $h(x) = \Delta^+ g(x)$ splňuje (5.31) s $c = 0$ a $h(b) = 0$. Dále, $\Delta h(x) = 0$ pro $x \in (a, b)$. Podle Lemmatu 5.26 tedy máme

$$\int_a^b f(x) \, d[\Delta^+ g(x)] = -f(a) \Delta^+ g(a).$$

Analogicky,

$$\int_a^b g(x) \, d[\Delta^- f(x)] = g(b) \Delta^- f(b),$$

čili

$$\begin{cases} \int_a^b f(x) \, d[g(x)] + \int_a^b g(x) \, d[f(x)] \\ = \int_a^b f(x) \, d[g(x+)] + \int_a^b g(x) \, d[f(x-)] + f(a) \Delta^+ g(a) + \Delta^- f(b) g(b). \end{cases} \quad (5.38)$$

První integrál na pravé straně můžeme upravit na

$$\int_a^b f(x) \, d[g(x+)] = \int_a^b f(x-) \, d[g(x+)] + \int_a^b \Delta^- f(x) \, d[g(x+)]. \quad (5.39)$$

Pro funkci $h(x) = g(x+)$ máme $h(x+) = h(x) = g(x+)$ a $h(x-) = g(x-)$ na $[a, b]$, tj. $\Delta h(x) = \Delta g(x)$ na $[a, b]$. Podle Lemmatu 5.27 tedy platí

$$\int_a^b \Delta^- f(x) \, d[g(x+)] = \sum_{x \in [a, b]} \Delta^- f(x) \Delta g(x). \quad (5.40)$$

Analogicky,

$$\left\{ \begin{aligned} \int_a^b g(x) d[f(x-)] &= \int_a^b g(x+) d[f(x-)] - \int_a^b \Delta^+ g(x) d[f(x-)] \\ &= \int_a^b g(x+) d[f(x-)] - \sum_{x \in [a,b]} \Delta^+ g(x) \Delta f(x). \end{aligned} \right. \quad (5.41)$$

Funkce $f(x-)$ je spojitá zleva na $(a, b]$ a $g(x+)$ je spojitá zprava na $[a, b)$. Podle Cvičení 5.19 to znamená, že oba integrály

$$\int_a^b f(x-) d[g(x+)] \quad \text{a} \quad \int_a^b g(x+) d[f(x-)]$$

existují jako σ -Riemannovy-Stieltjesovy (RS) integrály. Pomocí Věty 4.15 o integraci per partes pro RS-integrály dostáváme

$$\int_a^b f(x-) d[g(x+)] + \int_a^b g(x+) d[f(x-)] = f(b-)g(b) - f(a)g(a+). \quad (5.42)$$

Dosazením (5.39)-(5.42) do (5.38) dostaneme

$$\begin{aligned} & \int_a^b f d[g] + \int_a^b g d[f] \\ &= f(b-)g(b) - f(a)g(a+) + f(a)\Delta^+ g(a) + \Delta^- f(b)g(b) \\ & \quad + \sum_{x \in [a,b]} \left(\Delta^- f(x) [\Delta^- g(x) + \Delta^+ g(x)] - [\Delta^- f(x) + \Delta^+ f(x)] \Delta^+ g(x) \right) \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) + \sum_{x \in [a,b]} [\Delta^- f(x) \Delta^- g(x) - \Delta^+ f(x) \Delta^+ g(x)]. \end{aligned}$$

Dokázali jsme, že (5.37) platí. □

5.29. Lemma (SAKS-HENSTOCK). *Nechť $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jsou takové, že integrál*

$$\int_a^b f d[g]$$

má konečnou hodnotu. Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno a nechť $\delta \in \mathcal{G}[a, b]$ je kalibr na $[a, b]$ takový, že platí

$$\left| S(D, \xi) - \int_a^b f d[g] \right| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } (D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta).$$

Potom pro libovolný systém $\{(s_j, t_j], \tau_j), j = 1, 2, \dots, k\}$ takový, že

$$\begin{cases} a \leq s_1 \leq \tau_1 \leq t_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_k \leq \tau_k \leq t_k \leq b, \\ [s_j, t_j] \subset [\tau_j - \delta(\tau_j), \tau_j + \delta(\tau_j)], \quad j = 1, 2, \dots, k, \end{cases} \quad (5.43)$$

platí nerovnost

$$\left| \sum_{j=1}^k \left[f(\tau_j) [g(t_j) - g(s_j)] - \int_{s_j}^{t_j} f \, d[g] \right] \right| \leq \varepsilon. \quad (5.44)$$

D ů k a z . Bud' dáno $\eta > 0$. Označme $t_0 = a$, $s_{k+1} = b$. Je-li $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ a $t_j < s_{j+1}$, pak můžeme najít kalibr δ^j a rozšířené dělení $(D^j, \xi^j) \in \mathcal{A}(\delta^j; [t_j, s_{j+1}])$ takové, že $\delta^j(x) \leq \delta(x)$ pro každé $x \in [a, b]$ a

$$|S(D^j, \xi^j) - \int_{t_j}^{s_{j+1}} f \, d[g]| < \frac{\eta}{k+1}. \quad (5.45)$$

Nyní sestavme δ -jemné rozšířené dělení $(\tilde{D}, \tilde{\xi})$ intervalu $[a, b]$ tak, aby platilo

$$\sum_{j=1}^k f(\tau_j) [g(t_j) - g(s_j)] + \sum_{j=0}^k S(D^j, \xi^j) = S(\tilde{D}, \tilde{\xi}).$$

(Je-li $t_j = s_{j+1}$, klademe $S(D^j, \xi^j) = 0$.) Vzhledem k předpokladům lemmatu tedy máme

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^k \left(f(\tau_j) [g(t_j) - g(s_j)] - \int_{s_j}^{t_j} f \, d[g] \right) + \sum_{j=0}^k \left(S(D^j, \xi^j) - \int_{t_j}^{s_{j+1}} f \, d[g] \right) \right| \\ &= \left| S(\tilde{D}, \tilde{\xi}) - \int_a^b f \, d[g] \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Odtud a z (5.45) dostáváme pro libovolné $\eta > 0$

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^k f(\tau_j) [g(t_j) - g(s_j)] - \int_{s_j}^{t_j} f \, d[g] \right| \\ & \leq \left| S(\tilde{D}, \tilde{\xi}) - \int_a^b f \, d[g] \right| + \left| \sum_{j=0}^k \left(S(D^j, \xi^j) - \int_{t_j}^{s_{j+1}} f \, d[g] \right) \right| < \varepsilon + \eta, \end{aligned}$$

tj. platí (5.44). □

5.30. Věta. *Nechť $\int_a^b f \, d[g]$ existuje a $c \in [a, b]$. Potom platí*

$$\lim_{x \rightarrow c, x \in [a, b]} \left(\int_a^x f \, d[g] + f(c) [g(c) - g(x)] \right) = \int_a^c f \, d[g]. \quad (5.46)$$

D ů k a z . Bud' dáno $\varepsilon > 0$ a necht' $\delta_\varepsilon \in \mathcal{G}[a, b]$ je takový kalibr, že

$$\left| S(D, \xi) - \int_a^b f d[g] \right| < \varepsilon$$

platí všechna $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta_\varepsilon)$. Pro každé $x \in (c, c + \delta_\varepsilon(c)) \cap [a, b]$ systém $\{([s_1, t_1], \tau_1)\}$, kde $s_1 = \tau_1 = c$ a $t_1 = x$, vyhovuje podmínkám (5.43). Podle Saks-Henstockova lemmatu (Lemma 5.29) tedy máme

$$\left| f(c) [g(x) - g(c)] - \int_c^x f d[g] \right| < \varepsilon. \quad (5.47)$$

Podobně, je-li $x \in (c - \delta_\varepsilon(c), c) \cap [a, b]$, pak použitím Lemmatu 5.29 na systém $\{[x, c], c\}$ dostaneme nerovnost

$$\left| f(c) [g(c) - g(x)] - \int_x^c f d[g] \right| < \varepsilon$$

Pro každé $x \in (c - \delta_\varepsilon(c), c + \delta_\varepsilon(c)) \cap [a, b]$ tedy platí nerovnost (5.47) a tudíž také nerovnost

$$\left| \int_a^c f d[g] - \int_a^x f d[g] - f(c) [g(c) - g(x)] \right| = \left| \int_c^x f d[g] - f(c) [g(x) - g(c)] \right| < \varepsilon,$$

tj. platí (5.46). □

5.31. Důsledek. *Necht' $\int_a^b f d[g]$ existuje, $g \in \mathbb{G}[a, b]$ a necht' funkce $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je definována předpisem*

$$h(x) = \int_a^x f d[g], \quad x \in [a, b].$$

Potom $h \in \mathbb{G}[a, b]$ a

$$h(t+) = h(t) + f(t)\Delta^+g(t) \quad a \quad h(s-) = h(s) - f(s)\Delta^-g(s) \quad \text{pro } t \in [a, b), \quad s \in (a, b]. \quad \square$$

5.32. Věta (HAKE). (i) *Necht' $\int_a^x f d[g]$ existuje pro každé $x \in [a, b)$ a necht'*

$$\lim_{x \rightarrow b-} \left(\int_a^x f d[g] + f(b) [g(b) - g(x)] \right) = I \in \mathbb{R}.$$

Potom také

$$\int_a^b f d[g] = I.$$

(ii) Necht' $\int_x^b f d[g]$ existuje pro každé $x \in (a, b]$ a necht'

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \left(\int_x^b f d[g] + f(a) [g(x) - g(a)] \right) = I \in \mathbb{R}.$$

Potom také

$$\int_a^b f d[g] = I.$$

D ů k a z . (i) Bud' dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme $\Delta > 0$ tak, aby platilo

$$\left| \int_a^x f d[g] + f(b) [g(b) - g(x)] - I \right| < \varepsilon \quad \text{pro každé } x \in [b - \Delta, b]. \quad (5.48)$$

Položme $x_k = b - \frac{b-a}{k+1}$ pro $k \in \mathbb{N}$. Posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí a $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = b$ a

$$\forall k \in \mathbb{N} \exists \delta_k \in \mathcal{G}[a, x_k] : (D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta_k, [a, x_k]) \implies \left| S(D, \xi) - \int_a^{x_k} f d[g] \right| < \frac{\varepsilon}{2^k} \quad (5.49)$$

Pro každé $\tau \in [a, b)$ označme symbolem $\kappa(\tau)$ jednoznačně určené přirozené číslo k takové, že $\tau \in [x_{k-1}, x_k)$. Dále, definujme kalibr δ_0 na $[a, b)$ tak, aby platilo

$$\delta_0(\tau) \leq \delta_k(\tau) \quad \text{a} \quad [\tau - \delta_0(\tau), \tau + \delta_0(\tau)] \subset [a, x_k] \quad \text{pro každé } k \in \mathbb{N} \text{ a každé } \tau \in [x_{k-1}, x_k).$$

Nyní, necht' je dáno $x \in [a, b)$ a necht' $p \in \mathbb{N}$ je takové, že $x \in [x_{p-1}, x_p)$ (tj. $p = \kappa(x)$) a necht'

$$(B, \eta) = (\{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m\}, (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m))$$

je libovolné δ_0 -jemné dělení intervalu $[a, x]$. Pro každé $k \in \mathbb{N} \cap [1, p]$ a každé $j \in \mathbb{N} \cap [1, m]$ takové, že $\kappa(\eta_j) = k$ pak máme

$$\eta_j - \delta_k(\eta_j) \leq \eta_j - \delta_0(\eta_j) \leq \beta_{j-1} < \beta_j \leq \eta_j + \delta_0(\eta_j) \leq \eta_j + \delta_k(\eta_j).$$

Vzhledem k (5.49) a definici kalibru δ_0 , tedy vidíme, že pro každé $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ systém

$$\{([\beta_{j-1}, \beta_j], \eta_j), j = 1, 2, \dots, m, \kappa(\eta_j) = k\}$$

splňuje předpoklady Saks-Henstockova lemmatu 5.29). Pro každé $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ tedy platí nerovnost

$$\left| \sum_{\kappa(\eta_j)=k} f(\eta_j) [g(\beta_j) - g(\beta_{j-1})] - \int_{\beta_{j-1}}^{\beta_j} f d[g] \right| < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Tudíž

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^m \left(f(\eta_j) [g(\beta_j) - g(\beta_{j-1})] - \int_a^x f \, d[g] \right) \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^p \left(\sum_{\kappa(\eta_j)=k} f(\eta_j) [g(\beta_j) - g(\beta_{j-1})] - \int_{\beta_{j-1}}^{\beta_j} f \, d[g] \right) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{\kappa(\eta_j)=k} \left(f(\eta_j) [g(\beta_j) - g(\beta_{j-1})] - \int_{\beta_{j-1}}^{\beta_j} f \, d[g] \right) \right| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon, \end{aligned}$$

tj.

$$|S(B, \eta) - \int_a^x f \, d[g]| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } x \in [a, b] \text{ a všechna } (B, \eta) \in \mathcal{A}(\delta_0, [a, x]) \quad (5.50)$$

Nyní, položme

$$\delta^*(x) = \begin{cases} \min\{b-x, \delta_0(x)\} & \text{pro } x \in [a, b), \\ \frac{\Delta}{2} & \text{pro } x = b. \end{cases}$$

Pak pro každé δ^* -jemné dělení

$$(\tilde{D}, \tilde{\xi}) = (\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}, (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m))$$

intervalu $[a, b]$ musí platit $\xi_m = \alpha_m = b$, $\alpha_{m-1} \in (b - \Delta, b)$ a tudíž, vzhledem k (5.48) a (5.50),

$$\begin{aligned} |S(D, \xi) - I| &= \left| \sum_{j=1}^{m-1} f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] + f(b) [g(b) - g(\alpha_{m-1})] - I \right| \\ &\leq \left| \sum_{j=1}^{m-1} f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - \int_a^{\alpha_{m-1}} f \, d[g] \right| \\ &\quad + \left| \int_a^{\alpha_{m-1}} f \, d[g] + f(b) [g(b) - g(\alpha_{m-1})] - I \right| < 2\varepsilon, \end{aligned}$$

t.j. $\int_a^b f \, d[g] = I$.

Důkaz tvrzení (ii) se provede analogicky a ponechávám ho čtenáři jako cvičení. \square

5.33. Příklady. Pomocí Hakeovy věty můžeme snadno a universálním způsobem odvodit vzorce, které jsme v Příkladech 5.12 odvodili přímo z definice pomocí vhodné volby kalibru. Např. formuli (5.9) dostaneme takto:

$$\int_a^b f \, d[\chi_{[\tau, b]}] = \int_a^{\tau} f \, d[\chi_{[\tau, b]}] = \lim_{t \rightarrow \tau^-} \left(\int_a^t f \, d[\chi_{[\tau, b]}] + f(\tau) [\chi_{[\tau, b]}(\tau) - \chi_{[\tau, b]}(t)] \right) = f(\tau)$$

pro libovolnou funkci f a $\tau \in (a, b)$. Podobně, pro $\tau \in (a, b)$ a $g \in \mathbb{G}[a, b]$ dostaneme pomocí Hakeovy věty

$$\begin{aligned} \int_a^b \chi_{[a, \tau]} d[g] &= \int_a^\tau 1 d[g] + \int_\tau^b \chi_{[a, \tau]} d[g] \\ &= g(\tau) - g(a) + \lim_{t \rightarrow \tau^+} \left(\int_t^b \chi_{[a, \tau]} d[g] + 1 [g(t) - g(\tau)] \right) = g(\tau+) - g(a), \end{aligned}$$

tj. (5.15).

5.34. Cvičení. Pomocí Hakeovy věty dokažte i zbývající formule z Příkladů 5.12.

5.35. Lemma. *Nechť $\int_a^b f d[g]$ existuje. Potom pro každé $\varepsilon > 0$ existuje kalibr $\delta \in \mathcal{G}[a, b]$ takový, že platí*

$$\sum_{j=1}^m \left| f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f d[g] \right| < \varepsilon \quad (5.51)$$

pro každé $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta)$, $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$.

D ů k a z . Bud' dáno $\varepsilon > 0$ a necht' $\delta \in \mathcal{G}([a, b])$ je kalibr takový, že

$$\left| S(D, \xi) - \int_a^b f d[g] \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

platí pro všechna δ -jemná rozšířená dělení (D, ξ) intervalu $[a, b]$. Nyní, necht'

$$(D, \xi) = (\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}, \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, m)) \in \mathcal{A}(\delta).$$

Označme

$$J^+ = \{j \in \{1, 2, \dots, m\} : f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f d[g] \geq 0\}$$

a

$$J^- = \{1, 2, \dots, m\} \setminus J^+.$$

Systém $\{([\alpha_{j-1}, \alpha_j], \xi_j), j \in J^+\}$ splňuje předpoklady (5.43) z Lemmatu 5.29 na místě $\{([s_j, t_j], \tau_j)\}$. Podle Lemmatu 5.29 tedy platí

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{j \in J^+} \left(f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f d[g] \right) \right| \\ &= \sum_{j \in J^+} \left| f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f d[g] \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Podobně

$$\left| \sum_{j \in J^-} \left(f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f \, d[g] \right) \right| \\ = \sum_{j \in J^-} \left| f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f \, d[g] \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Odtud už nerovnost (5.51) okamžitě vyplývá. \square

5.36. Věta (VĚTA O SUBSTITUCI). *Je-li funkce $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ohraničená a integrál $\int_a^b f \, d[g]$ existuje, pak oba integrály*

$$\int_a^b h(x) \, d \left[\int_a^x f \, d[g] \right], \quad \int_a^b h(x) f(x) \, d[g(x)]$$

existují jakmile existuje alespoň jeden z nich a v takovém případě pak platí:

$$\int_a^b h(x) \, d \left[\int_a^x f \, d[g] \right] = \int_a^b h(x) f(x) \, d[g(x)].$$

D ů k a z . Podle Věty 5.7 je funkce

$$k(x) = \int_a^x f \, d[g]$$

definovaná pro každé $x \in [a, b]$.

a) Předpokládejme, že existuje integrál

$$\int_a^b h f \, d[g].$$

Nechť je dáno $\varepsilon > 0$ a nechť δ_ε je kalibr na $[a, b]$ takový, že pro každé δ_ε -jemné dělení $(D, \xi) = (\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}, (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m))$ intervalu $[a, b]$ platí

$$\sum_{j=1}^m \left| h(\xi_j) f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} h f \, d[g] \right| < \varepsilon$$

a

$$\sum_{j=1}^m \left| f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f \, d[g] \right| < \varepsilon.$$

(Takový kalibr existuje podle Lemmatu 5.35.) Pro každé δ_ε -jemné dělení

$$(D, \xi) = (\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}, (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m))$$

intervalu $[a, b]$ tedy máme :

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{j=1}^m h(\xi_j) [k(\alpha_j) - k(\alpha_{j-1})] - \int_a^b h f d[g] \right| \\
& \leq \sum_{j=1}^m \left| h(\xi_j) \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f d[g] - h(\xi_j) f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] \right| \\
& \quad + \sum_{j=1}^m \left| h(\xi_j) f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} h f d[g] \right| \\
& \leq \|h\| \sum_{j=1}^m \left| \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f d[g] - f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] \right| \\
& \quad + \sum_{j=1}^m \left| h(\xi_j) f(\xi_j) [g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} h f d[g] \right| \\
& \leq (\|h\| + 1) \varepsilon,
\end{aligned}$$

tj. existuje integrál $\int_a^b h d[k]$ a platí

$$\int_a^b h d[k] = \int_a^b h f d[g].$$

b) Obrácená implikace by se dokazovala podobně – opět za vydatné pomoci Lemmatu 5.35. \square

5.37. Věta (VĚTA O DOMINOVANÉ KONVERGENCI). *Nechť $f, f_n \in \mathbb{G}[a, b]$,*

$$\|f_n\| \leq C < \infty \text{ pro } n \in \mathbb{N} \quad \text{a} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \text{ pro všechna } t \in [a, b].$$

Potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n d[g] = \int_a^b f d[g] \quad \text{pro každou funkci } g \in \mathbb{BV}[a, b].$$

5.38. Důsledek. *Nechť $A \in \mathbb{BV}[a, b]$. Potom operátor*

$$x \in \mathbb{BV}[a, b] \rightarrow Lx \in \mathbb{BV}[a, b],$$

$$\text{kde } (Lx)(t) = \int_a^t d[A(s)] x(s) \quad \text{pro } t \in [a, b]$$

je kompaktní (totálně spojitý) lineární operátor.

Důkaz. L je zřejmě lineární ohraničené zobrazení $\mathbb{BV}[a, b]$ do $\mathbb{BV}[a, b]$. Zbývá tedy dokázat, že pro každou posloupnost $\{x_n\}$ ohraničenou v $\mathbb{BV}[a, b]$, její obraz $\{Lx_n\} \subset \mathbb{BV}[a, b]$ obsahuje podposloupnost, která konverguje v $\mathbb{BV}[a, b]$.

Nechť je tedy $\{x_n\} \subset \mathbb{BV}[a, b]$ posloupnost taková, že $\|x_n\|_{\mathbb{BV}} \leq C < \infty$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Podle Hellyovy věty (Věta 1.26) pak existuje podposloupnost $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ a funkce $x \in \mathbb{BV}[a, b]$ takové, že

$$\|x\|_{\mathbb{BV}} \leq C \quad \text{and} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}(t) = x(t) \quad \text{pro každé } t \in [a, b].$$

Označme $z_k(t) = x_{n_k}(t) - x(t)$ pro $k \in \mathbb{N}$ a $t \in [a, b]$. Potom

$$|z_k(t)| \leq 2C \quad \text{pro } k \in \mathbb{N} \quad \text{a } t \in [a, b].$$

Pro libovolnou funkci $u \in \mathbb{BV}[a, b]$ a libovolnou dvojici t_1, t_2 bodů z $[a, b]$ takových, že $a \leq t_1 < t_2 \leq b$ máme podle Věty 5.14

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} d[A] u \right| \leq \int_{t_1}^{t_2} d[\text{var}_{t_1}^s A] |u(s)| = \int_{t_1}^{t_2} d[\text{var}_a^s A] |u(s)|.$$

Pro libovolné $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \in \mathcal{D}[a, b]$ a každé $k \in \mathbb{N}$ tedy platí

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m |(L z_k)(\alpha_j) - (L z_k)(\alpha_{j-1})| &= \sum_{j=1}^m \left| \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} d[A(s)] z_k(s) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^m \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} d[\text{var}_a^s A] |z_k(s)| \leq \int_a^b d[\text{var}_a^s A] |z_k(s)|, \end{aligned}$$

neboli

$$\|L z_k\|_{\mathbb{BV}} = \text{var}_a^b(L z_k) \leq \int_a^b d[\text{var}_a^s A] |z_k(s)|.$$

Použitím Věty 5.37 dostaneme konečně

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|L x_{n_k} - L x\|_{\mathbb{BV}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|L z_k\|_{\mathbb{BV}} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b d[\text{var}_a^s A] |z_k(s)| = 0.$$

□

Spojité lineární funkcionály na prostorech regulovaných funkcí

Úvodem připomeňme několik základních pojmů.

Nechť \mathbb{X} a \mathbb{Y} jsou lineární (vektorové) prostory. O zobrazení

$$\beta: x \in \mathbb{X}, y \in \mathbb{Y} \rightarrow \beta(x, y) \in \mathbb{R}$$

řekneme, že je *bilineární*, jestliže platí

$$\begin{aligned} \beta(x_1 + x_2, y) &= \beta(x_1, y) + \beta(x_2, y) && \text{pro všechna } x_1, x_2 \in \mathbb{X}, y \in \mathbb{Y}, \\ \beta(\lambda x, y) &= \lambda \beta(x, y) && \text{pro všechna } x \in \mathbb{X}, y \in \mathbb{Y}, \lambda \in \mathbb{R}, \\ \beta(x, y_1 + y_2) &= \beta(x, y_1) + \beta(x, y_2) && \text{pro všechna } x \in \mathbb{X}, y_1, y_2 \in \mathbb{Y}, \\ \beta(x, \lambda y) &= \lambda \beta(x, y) && \text{pro všechna } x \in \mathbb{X}, y \in \mathbb{Y}, \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Prostory \mathbb{X}, \mathbb{Y} tvoří *duální pár vzhledem k bilineárnímu zobrazení* β , jestliže platí

$$\begin{aligned} \beta(x, y) = 0 \text{ pro všechna } x \in \mathbb{X} &\implies y = 0, \\ \beta(x, y) = 0 \text{ pro všechna } y \in \mathbb{Y} &\implies x = 0. \end{aligned}$$

Lineárním zobrazením lineárního prostoru \mathbb{X} do \mathbb{R} říkáme *lineární funkcionály na* \mathbb{X} . Pro libovolné lineární funkcionály Φ, Ψ na \mathbb{X} , $\lambda \in \mathbb{R}$ a $x \in \mathbb{X}$ definujeme

$$(\Phi + \Psi)(x) = \Phi(x) + \Psi(x) \quad \text{a} \quad (\lambda \Phi)(x) = \lambda \Phi(x).$$

Množina lineárních funkcionálů na prostoru \mathbb{X} je zřejmě vzhledem k takto zavedeným operacím také lineární prostor. (Nulovým prvkem množiny lineárních funkcionálů na prostoru \mathbb{X} je přirozeně funkcionál $O: x \in \mathbb{X} \rightarrow 0 \in \mathbb{R}$.)

Je-li \mathbb{X} Banachův prostor s normou $x \in \mathbb{X} \rightarrow \|x\|_{\mathbb{X}}$, pak lineární funkcionál Φ na \mathbb{X} je spojitý (vzhledem k topologii indukované normou $\|\cdot\|_{\mathbb{X}}$) právě tehdy, když je ohraničený, tj.

$$\sup \{|\Phi(x)|: x \in \mathbb{X}, \|x\|_{\mathbb{X}} \leq 1\} < \infty.$$

Prostor spojitých lineárních funkcionálů na Banachově prostoru \mathbb{X} značíme \mathbb{X}^* a nazýváme *duální* (nebo též *adjungovaný prostor*) k \mathbb{X} . Předpisem

$$\Phi \in \mathbb{X}^* \rightarrow \|\Phi\|_{\mathbb{X}^*} = \sup \{|\Phi x|: x \in \mathbb{X}, \|x\|_{\mathbb{X}} \leq 1\}.$$

je přirozeně definována norma na \mathbb{X}^* a \mathbb{X}^* je vzhledem k této normě také Banachův prostor. Je známým důsledkem Hahn-Banachovy věty, že dvojice tvořená Banachovým prostorem \mathbb{X} a jeho duálním prostorem \mathbb{X}^* tvoří duální pár vzhledem k bilineárnímu zobrazení

$$x \in \mathbb{X}, \Phi \in \mathbb{X}^* \rightarrow \Phi(x) \in \mathbb{R}.$$

Mezi významné výsledky funkcionální analýzy patří reprezentace spojitých lineárních funkcionálů na některých často používaných prostorech funkcí. Je dobře známo např., že Φ je spojitý lineární funkcionál na $\mathbb{C}[a, b]$ ($\Phi \in (\mathbb{C}[a, b])^*$) právě tehdy, když existuje funkce $p \in \mathbb{BV}[a, b]$ zprava spojitá na $[a, b]$ a taková, že $p(a) = 0$ a

$$\Phi(x) = \int_a^b d[p]x \quad \text{pro všechny funkce } x \in \mathbb{C}[a, b].$$

Funkce $p \in \mathbb{BV}[a, b]$ zprava spojitá na $(a, b]$ a takové, že $p(a) = 0$, se nazývají *normalizované* funkce s konečnou variací a tvoří podprostor v $\mathbb{BV}[a, b]$, který budeme značit $NBV[a, b]$. Prostory $(\mathbb{C}[a, b])^*$ a $NBV[a, b]$ jsou isometricky isomorfní. (To by neplatilo, kdybychom $NBV[a, b]$ nahradili prostorem $\mathbb{BV}[a, b]$ všech funkcí s konečnou variací na $[a, b]$. Pochopitelně, $NBV[a, b]$ lze ale nahradit např. podprostorem $\mathbb{BV}[a, b]$ tvořeným funkcemi spojitými zleva na $(a, b]$, které se anulují v nějakém pevně daném bodě $c \in [a, b]$.) Vzhledem k tomu, se jedná o integraci spojitých funkcí, integrál, který se ve výše uvedené reprezentaci objevuje, je klasický (normový) Riemannův-Stieltjesův integrál. Další dobře známé reprezentace spojitých lineárních prostorů využívají Lebesgueova integrálu:

$$\Phi \in (\mathbb{L}^\alpha[a, b])^* \iff \text{existuje } p \in \mathbb{L}^{\alpha^*}[a, b], \quad \text{takové, že}$$

$$\Phi(x) = \int_a^b p x \, dt \quad \text{pro } x \in \mathbb{L}^\alpha[a, b],$$

$$\Phi \in (AC[a, b])^* \iff \text{existují } q \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{L}^\infty[a, b] \quad \text{takové, že}$$

$$\Phi(x) = q x(a) + \int_a^b p x' \, dt \quad \text{pro } x \in AC[a, b].$$

Zde, jak je obvyklé, $\mathbb{L}^\alpha[a, b]$ pro $\alpha \in [1, \infty)$, značí prostor funkcí x měřitelných na $[a, b]$ a takových, že

$$\int_a^b |x|^\alpha \, dt < \infty,$$

přičemž norma na $\mathbb{L}^\alpha[a, b]$ je definována předpisem

$$x \in \mathbb{L}^\alpha[a, b] \rightarrow \|x\|_\alpha = \left(\int_a^b |x|^\alpha \, dt \right)^{1/\alpha}$$

a

$$\alpha^* = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha-1} & \text{jestliže } \alpha > 1, \\ \infty & \text{jestliže } \alpha = 1. \end{cases}$$

(O tvaru spojitých lineárních funkcionalů na $\mathbb{A}\mathbb{C}[a, b]$ jsme se již zmínili v Poznámce 2.5.) Důkazy výše uvedených tvrzení a další podrobnosti lze nalézt ve většině standardních učebnic funkcionalní analýzy. Všeobecně dostupná je také on-line verze plzeňských skript [1].

V této kapitole odvodíme obecný tvar spojitých lineárních funkcionalů na některých podprostorech prostoru $\mathbb{G}[a, b]$. Pro začátek si připomeňme, že podle Věty 5.22 je výraz

$$\Phi_\eta(x) = qx(a) + \int_a^b p \, d[x] \tag{6.1}$$

definován pro každou funkci $x \in \mathbb{G}[a, b]$ a každou dvojici $\eta = (p, q) \in \mathbb{B}\mathbb{V}[a, b] \times \mathbb{R}$. Navíc, pro každé $\eta \in \mathbb{B}\mathbb{V}[a, b] \times \mathbb{R}$, předpis (6.1) definuje ohraničený (a tedy spojitý) lineární funkcional na $\mathbb{G}[a, b]$.

Snadno ověříme, že předpisem $\eta = (p, q) \in \mathbb{B}\mathbb{V}[a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \|\eta\|_{\mathbb{B}\mathbb{V} \times \mathbb{R}} = |q| + \|p\|_{\mathbb{B}\mathbb{V}}$ je definována norma na prostoru $\mathbb{B}\mathbb{V}[a, b] \times \mathbb{R}$ a $\mathbb{B}\mathbb{V}[a, b] \times \mathbb{R}$ je Banachův prostor vzhledem k této normě. Z formulí uvedených v Příkladech 5.12 (viz též Příklady 5.33 resp. Cvičení 5.34) také snadno odvodíme následující tvrzení.

6.1. Lemma.

(i) *Pro libovolnou dvojici $\eta = (p, q) \in \mathbb{B}\mathbb{V}[a, b] \times \mathbb{R}$ platí*

$$\begin{cases} \Phi_\eta(1) = q, \\ \Phi_\eta(\chi_{(\tau, b)}) = p(\tau) & \text{když } \tau \in [a, b), \\ \Phi_\eta(\chi_{[\tau]}) = 0 & \text{když } \tau \in (a, b), \\ \Phi_\eta(\chi_{[b]}) = p(b). \end{cases} \tag{6.2}$$

(ii) *Pro libovolnou funkci $x \in \mathbb{G}[a, b]$ platí*

$$\begin{cases} \Phi_\eta(x) = x(a) & \text{když } p \equiv 0 \text{ na } [a, b] \text{ a } q = 1, \\ \Phi_\eta(x) = x(b) & \text{když } p \equiv 1 \text{ na } [a, b] \text{ a } q = 1, \\ \Phi_\eta(x) = x(\tau-) & \text{když } p = \chi_{[a, \tau)} \text{ na } [a, b], \tau \in (a, b) \text{ a } q = 1, \\ \Phi_\eta(x) = x(\tau+) & \text{když } p = \chi_{[a, \tau]} \text{ na } [a, b], \tau \in [a, b) \text{ a } q = 1. \end{cases} \tag{6.3}$$

□

Prímým důsledkem vztahů (6.2), (6.3) a Lemmatu 3.13 je následující tvrzení:

6.2. Lemma.

(i) Jestliže $\eta = (p, q) \in \mathbb{BV}[a, b] \times \mathbb{R}$ a

$$\Phi_\eta(x) = 0 \quad \text{pro každé } x \in \text{Lin}\left(1, \chi_{(\tau, b]}, \tau \in [a, b), \chi_{[b]}\right),$$

pak $p(t) \equiv 0$ na $[a, b]$ a $q = 0$.

(ii) Jestliže $x \in \mathbb{G}[a, b]$ a $\Phi_\eta(x) = 0$ pro všechny dvojice $\eta = (p, q) \in \mathbb{BV}[a, b] \times \mathbb{R}$, pak

$$x(a) = x(a+) = x(\tau-) = x(\tau+) = x(b-) = x(b) \quad (6.4)$$

platí pro $\tau \in (a, b)$. □

6.3. Poznámka. Všimněme si, že vzhledem k třetímu vztahu v (6.2), můžeme v tvrzení

(i) předešlého lemmatu nahradit množinu $\text{Lin}\left(1, \chi_{(\tau, b]}, \tau \in [a, b), \chi_{[b]}\right)$ množinami

$$\text{Lin}\left(1, \chi_{[\tau, b]}, \tau \in [a, b), \chi_{[b]}\right) \quad \text{resp.} \quad \text{Lin}\left(1, \frac{1}{2} \chi_{[\tau]} + \chi_{(\tau, b]}, \tau \in [a, b), \chi_{[b]}\right)$$

Odtud okamžitě plyne též následující tvrzení, kde symboly $\mathbb{G}_L[a, b]$, $\mathbb{G}_R[a, b]$ a $\mathbb{G}_{\text{reg}}[a, b]$ byly definovány v (3.3).

6.4. Věta. Dvojice prostorů X a $\mathbb{BV}[a, b] \times \mathbb{R}$, $X = \mathbb{G}_L[a, b]$ resp. $X = \mathbb{G}_{\text{reg}}[a, b]$ resp. $X = \mathbb{G}_R[a, b]$ tvoří duální páry vzhledem k bilineární formě $x \in X$, $\eta \in \mathbb{BV}[a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \Phi_\eta(x)$. □

Na druhou stranu, máme také

6.5. Lemma. Jestliže Φ je lineární ohraničený funkcionál na $\mathbb{G}_L[a, b]$ a

$$p(t) = \begin{cases} \Phi(\chi_{(t, b]}) & \text{když } t \in [a, b), \\ \Phi(\chi_{[b]}) & \text{když } t = b, \end{cases} \quad (6.5)$$

pak $p \in \mathbb{BV}[a, b]$ a

$$\begin{cases} |p(a)| + |p(b)| + \text{var}_a^b p \leq 2 \|\Phi\|_{\mathbb{G}_L^*[a, b]}, \\ \text{kde } \|\Phi\|_{\mathbb{G}_L^*[a, b]} = \sup\{|\Phi(x)| : x \in \mathbb{G}_L[a, b], \|x\| \leq 1\}. \end{cases} \quad (6.6)$$

D ů k a z . Pro libovolné dělení $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ intervalu $[a, b]$ a libovolný vektor $(c_0, c_1, \dots, c_m, c_{m+1})^T \in \mathbb{R}^{m+2}$ platí

$$\begin{aligned} & \left| c_0 p(a) + c_{m+1} p(b) + \sum_{j=1}^m c_j [p(\alpha_j) - p(\alpha_{j-1})] \right| \\ &= \left| \Phi\left(c_0 \chi_{(a, b]} + c_{m+1} \chi_{[b]} - \sum_{j=1}^{m-1} c_j \chi_{(\alpha_{j-1}, \alpha_j]} + c_m \chi_{(\alpha_{m-1}, b)}\right) \right| = |\Phi(h)|, \end{aligned}$$

kde

$$h = c_0 \chi_{(a,b]} + c_{m+1} \chi_{[b]} - \sum_{j=1}^{m-1} c_j \chi_{(\alpha_{j-1}, \alpha_j]} + c_m \chi_{(\alpha_{m-1}, b]}.$$

Snadno ověříme, že bude-li $|c_j| \leq 1$ pro $j = 0, 1, \dots, m+1$, pak bude $\|h\| \leq 2$. Zvolíme-li tedy

$$c_0 = \operatorname{sgn} p(a), c_{m+1} = \operatorname{sgn} p(b), c_j = \operatorname{sgn}(p(\alpha_j) - p(\alpha_{j-1})) \text{ pro } j = 1, 2, \dots, m,$$

získáme vztah

$$|p(a)| + |p(b)| + V(p, D) \leq 2 \|\Phi\|_{\mathbb{G}_{\mathbb{L}}^*[a,b]} \text{ pro každé } D \in \mathcal{D}[a, b].$$

Odtud už plyne, že platí i (6.6). □

Analogicky předchozímu Lemmatu máme také

6.6. Lemma. *Nechť Φ je libovolný lineární ohraničený funkcionál na $\mathbb{G}_{\operatorname{reg}}[a, b]$. Položme*

$$p(t) = \begin{cases} \Phi(\chi_{(a,b]}) & \text{když } t = a, \\ \Phi(\frac{1}{2}\chi_{[t]} + \chi_{(t,b]}) & \text{když } t \in (a, b), \\ \Phi(\chi_{[b]}) & \text{když } t = b. \end{cases} \quad (6.7)$$

Potom

$$\operatorname{var}_a^b p \leq \sup\{|\Phi(x)| : x \in \mathbb{G}_{\operatorname{reg}}[a, b], \|x\| \leq 1\} < \infty,$$

tj. $p \in \mathbb{BV}[a, b]$.

D ů k a z . Nechť $\Phi \in \mathbb{G}_{\operatorname{reg}}^*[a, b]$, $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ je dělení intervalu $[a, b]$ a necht' reálná čísla c_j , $j = 1, 2, \dots, m$, jsou taková, že je $|c_j| \leq 1$ pro všechna $j = 1, 2, \dots, m$. Potom

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^m c_j [p(\alpha_j) - p(\alpha_{j-1})] \\ = c_1 \left[\Phi(\frac{1}{2}\chi_{[\alpha_1]} + \chi_{(\alpha_1,b]}) - \Phi(\chi_{(a,b]}) \right] \\ \quad + \sum_{j=2}^{m-1} c_j \left[\Phi(\frac{1}{2}\chi_{[\alpha_j]} + \chi_{(\alpha_j,b]}) - \Phi(\frac{1}{2}\chi_{[\alpha_{j-1}]} + \chi_{(\alpha_{j-1},b]}) \right] \\ \quad + c_m \left[\Phi(\chi_{[b]}) - \Phi(\frac{1}{2}\chi_{[\alpha_{m-1}]} + \chi_{(\alpha_{m-1},b]}) \right] = \Phi(h), \end{array} \right. \quad (6.8)$$

kde

$$\begin{aligned}
h &= c_1 \left[\frac{1}{2} \chi_{[\alpha_1]} + \chi_{(\alpha_1, b]} - \chi_{(a, b]} \right] + c_m \left[\chi_{[b]} - \frac{1}{2} \chi_{[\alpha_{m-1}]} - \chi_{(\alpha_{m-1}, b]} \right] \\
&\quad + \sum_{j=2}^{m-1} c_j \left[\frac{1}{2} \chi_{[\alpha_j]} + \chi_{(\alpha_j, b]} - \frac{1}{2} \chi_{[\alpha_{j-1}]} - \chi_{(\alpha_{j-1}, b]} \right] \\
&= c_1 \left[\frac{1}{2} \chi_{[\alpha_1]} - \chi_{(a, \alpha_1]} \right] - c_m \left[\frac{1}{2} \chi_{[\alpha_{m-1}]} + \chi_{(\alpha_{m-1}, b]} \right] \\
&\quad + \sum_{j=2}^{m-1} c_j \left[\frac{1}{2} \chi_{[\alpha_j]} - \chi_{(\alpha_{j-1}, \alpha_j]} - \frac{1}{2} \chi_{[\alpha_{j-1}]} \right] \\
&= -c_1 \left[\frac{1}{2} \chi_{[\alpha_1]} + \chi_{(a, \alpha_1]} \right] - c_m \left[\frac{1}{2} \chi_{[\alpha_{m-1}]} + \chi_{(\alpha_{m-1}, b]} \right] \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{m-1} c_j \chi_{[\alpha_j]} - \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{m-1} c_j \chi_{[\alpha_{j-1}]} - \sum_{j=2}^{m-1} c_j \chi_{(\alpha_{j-1}, \alpha_j)} \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m-1} c_j \chi_{[\alpha_j]} - \frac{1}{2} \sum_{j=2}^m c_j \chi_{[\alpha_{j-1}]} - \sum_{j=1}^m c_j \chi_{(\alpha_{j-1}, \alpha_j)} \\
&= -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{c_j + c_{j+1}}{2} \chi_{[\alpha_j]} - \sum_{j=1}^m c_j \chi_{(\alpha_{j-1}, \alpha_j)} \\
&= -c_1 \chi_{(a, \alpha_1]} - \sum_{j=2}^{m-1} \left(\frac{c_j + c_{j+1}}{2} \chi_{[\alpha_j]} + c_j \chi_{(\alpha_{j-1}, \alpha_j)} \right) - c_m \chi_{(\alpha_{m-1}, b)}.
\end{aligned}$$

Z tohoto vyjádření snadno nahlédneme, že

$$h(\alpha_j -) = -c_j, \quad h(\alpha_j +) = -c_{j+1}, \quad h(\alpha_j) = -\frac{1}{2}(c_j + c_{j+1}) \quad \text{pro } j = 1, 2, \dots, m.$$

Tedy $h \in \mathbb{S}[a, b] \cap \mathbb{G}_{\text{reg}}[a, b]$ a $|h(t)| \leq 1$ pro všechna $t \in [a, b]$. Vzhledem k (6.8) tedy dostáváme, že nerovnost

$$\begin{aligned}
&\sup \left\{ \left| \sum_{j=1}^m c_j [p(\alpha_j) - p(\alpha_{j-1})] \right| : |c_j| \leq 1, j = 1, 2, \dots, m \right\} \\
&\leq \sup \{ |\Phi(x)| : x \in \mathbb{G}_{\text{reg}}[a, b], \|x\| \leq 1 \}
\end{aligned}$$

platí pro každé dělení $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ intervalu $[a, b]$. Zvolíme-li nyní

$$c_j = \text{sgn} [p(\alpha_j) - p(\alpha_{j-1})] \quad \text{pro } j = 1, 2, \dots, m,$$

zjistíme, že platí

$$V(p, D) \leq \sup \{ |\Phi(x)| : x \in \mathbb{G}_{\text{reg}}[a, b], \|x\| \leq 1 \} < \infty \quad \text{pro každé } D \in \mathcal{D}[a, b],$$

tj. $\text{var}_a^b p \leq \|\Phi\|_{\mathbb{G}_{\text{reg}}^*[a, b]} < \infty$. □

Prvním hlavním výsledkem této kapitoly je následující věta.

6.7. Věta. Φ je lineární ohraničený funkcionál na $\mathbb{G}_L[a, b]$ ($\Phi \in \mathbb{G}_L^*[a, b]$) právě tehdy, když existuje dvojice $\eta = (p, q) \in \mathbb{BV}[a, b] \times \mathbb{R}$ taková, že

$$\Phi(x) = qx(a) + \int_a^b p \, dx \quad \text{pro } x \in \mathbb{G}_L[a, b]. \quad (6.9)$$

Navíc, zobrazení

$$\eta \in \mathbb{BV}[a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \Phi_\eta \in \mathbb{G}_L^*[a, b] \quad (6.10)$$

je isomorfismus.

D ů k a z . Necht' Φ je spojitý lineární funkcionál na $\mathbb{G}_L[a, b]$ a necht' Φ_η je funkcionál definovaný předpisem (6.1), kde $\eta = (p, q)$, $q = \Phi(1)$ a funkce p je definovaná v (6.5). Podle Lemmatu 6.5 $\eta = (p, q) \in \mathbb{BV}[a, b] \times \mathbb{R}$ a podle (6.2) a (6.5) máme

$$\Phi(1) = q = \Phi_\eta(1),$$

$$\Phi(\chi_{(\tau, b]}) = p(\tau) = \Phi_\eta(\chi_{(\tau, b]}) \quad \text{pro každé } \tau \in [a, b)$$

a

$$\Phi(\chi_{[b]}) = p(b) = \Phi_\eta(\chi_{[b]}).$$

Protože podle Lemmatu 3.13 je každá funkce z $\mathbb{S}[a, b] \cap \mathbb{G}_L[a, b]$ lineární kombinací funkcí

$$1, \chi_{(\tau, b]}, \tau \in [a, b), \chi_{[b]},$$

plyne odtud, že $\Phi(x) = \Phi_\eta(x)$ pro každé $x \in \mathbb{G}_L[a, b] \cap \mathbb{S}[a, b]$. Konečně, protože podle Lemmatu 3.12 je množina $\mathbb{G}_L[a, b] \cap \mathbb{S}[a, b]$ hustá v $\mathbb{G}_L[a, b]$, plyne odtud, že platí

$$\Phi(x) = \Phi_\eta(x) \quad \text{pro všechny } x \in \mathbb{G}_L[a, b].$$

Podle Věty 6.4 je (6.10) vzájemně jednoznačné zobrazení $\mathbb{BV}[a, b] \times \mathbb{R}$ na $\mathbb{G}_L^*[a, b]$. Dále, podle Věty 5.22 máme

$$|\Phi_\eta(x)| \leq (|p(a)| + |p(b)| + \text{var}_a^b p + |q|) \|x\| \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{G}_L[a, b]$$

a tudíž

$$\|\Phi_\eta\|_{\mathbb{G}_L^*[a, b]} \leq |p(a)| + |p(b)| + \text{var}_a^b p + |q| \leq 2(\|p\|_{\mathbb{BV}} + |q|) = 2\|\eta\|_{\mathbb{BV} \times \mathbb{R}}.$$

Na druhou stranu, podle (6.7) a podle Lemmatu 6.5 je

$$|q| = |\Phi(1)| \leq \|\Phi_\eta\|_{\mathbb{G}_L^*[a, b]} \quad \text{a} \quad \|p\|_{\mathbb{BV}} \leq (|p(a)| + |p(b)| + \text{var}_a^b p) \leq 2\|\Phi_\eta\|_{\mathbb{G}_L^*[a, b]}.$$

Souhrnem máme

$$\frac{1}{2}\|\Phi_\eta\|_{\mathbb{G}_L^*[a, b]} \leq \|\eta\|_{\mathbb{BV} \times \mathbb{R}} \leq 3\|\Phi_\eta\|_{\mathbb{G}_L^*[a, b]},$$

čili, zobrazení

$$\eta \in \mathbb{BV}[a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \Phi_\eta \in \mathbb{G}_L^*[a, b]$$

je isomorfismus. □

6.8. Věta. Φ je lineární ohraničený funkcionál na $\mathbb{G}_{\text{reg}}[a, b]$ ($\Phi \in \mathbb{G}_{\text{reg}}^*[a, b]$) právě tehdy, když existuje dvojice $\eta = (p, q) \in \mathbb{BV}[a, b] \times \mathbb{R}$ taková, že

$$\Phi(x) = q x(a) + \int_a^b p \, dx \quad \text{pro } x \in \mathbb{G}_{\text{reg}}[a, b]. \quad (6.11)$$

Navíc, zobrazení

$$\eta \in \mathbb{BV}[a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \Phi_\eta \in \mathbb{G}_{\text{reg}}^*[a, b] \quad (6.12)$$

je isomorfismus.

Důkaz. Nechť $\Phi \in \mathbb{G}_{\text{reg}}^*[a, b]$, a nechť Φ_η je funkcionál definovaný předpisem (6.1), kde $\eta = (p, q)$, $q = \Phi(1)$ a p je dáno předpisem (6.7). Podle Lemmatu 6.6 $\eta = (p, q) \in \mathbb{BV}[a, b] \times \mathbb{R}$ a podle (6.2) a (6.7) máme

$$\Phi(1) = q = \Phi_\eta(1),$$

$$\Phi\left(\frac{1}{2}\chi_{[\tau]} + \chi_{(\tau, b)}\right) = p(\tau) = \Phi_\eta\left(\frac{1}{2}\chi_{[\tau]} + \chi_{(\tau, b)}\right) \quad \text{pro každé } \tau \in [a, b]$$

a

$$\Phi(\chi_{[b]}) = p(b) = \Phi_\eta(\chi_{[b]}).$$

Podle Lemmatu 3.13 odtud plyne, že $\Phi(x) = \Phi_\eta(x)$ pro každé $x \in \mathbb{G}_{\text{reg}}[a, b] \cap \mathbb{S}[a, b]$. Konečně, protože podle Lemmatu 3.12 je množina $\mathbb{G}_{\text{reg}}[a, b] \cap \mathbb{S}[a, b]$ hustá v $\mathbb{G}_{\text{reg}}[a, b]$ a tudíž

$$\Phi(x) = \Phi_\eta(x) \quad \text{pro všechny } x \in \mathbb{G}_{\text{reg}}[a, b].$$

Podobně jako jsme dokázali analogickou nerovnost v závěru důkazu Věty 6.7 dokázali bychom nyní, že platí také

$$\frac{1}{2} \|\Phi_\eta\|_{\mathbb{G}_{\text{reg}}^*[a, b]} \leq \|\eta\|_{\mathbb{BV} \times \mathbb{R}} \leq 3 \|\Phi_\eta\|_{\mathbb{G}_{\text{reg}}^*[a, b]}.$$

6.9. Cvičení. Postupem použitým v důkazech Vět 6.7 a 6.8 ukažte, že také platí

(i) Φ je lineární ohraničený funkcionál na

$$\tilde{\mathbb{G}}_{\text{L}}[a, b] = \{x \in \mathbb{G} : x(t-) = x(t) \text{ pro } t \in (a, b)\},$$

(viz (3.2)) právě tehdy, když existuje funkce $p \in \mathbb{BV}[a, b]$ taková, že

$$\Phi(x) = p(b)x(b) - \int_a^b p \, d[x] \quad \text{pro } x \in \tilde{\mathbb{G}}_{\text{L}}[a, b].$$

(ii) Φ je lineární ohraničený funkcionál na

$$\tilde{\mathbb{G}}_{\text{R}}[a, b] = \{x \in \mathbb{G} : x(t+) = x(t) \text{ pro } t \in [a, b)\},$$

(viz (3.2)) právě tehdy, když existuje funkce $p \in \mathbb{BV}[a, b]$ taková, že

$$\Phi(x) = p(a)x(a) + \int_a^b p \, d[x] \quad \text{pro } x \in \tilde{\mathbb{G}}_{\text{R}}[a, b].$$

Aplikace Stieltjesova integrálu v teorii distribucí

V této kapitole naznačíme možnosti použití KS integrálu v teorii distribucí. Distribuce zde budeme chápat ve smyslu L. Schwartz. Připomeňme si nejprve několik základních pojmů a definic.

7.1. Definice. Množinu funkcí $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, které mají pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ derivaci $\varphi^{(k)}$ k -tého řádu spojitou na \mathbb{R} a takovou, že $\varphi^{(k)}(t) = 0$ pro $t \in \mathbb{R} \setminus (a, b)$ označíme symbolem $\mathcal{D}[a, b]$.

Funkcím z $\mathcal{D}[a, b]$ říkáme *testovací funkce* na $[a, b]$.

Množina $\mathcal{D}[a, b]$ je lineární prostor vzhledem k přirozeným operacím sčítání a násobení skalárem. Množina $\mathcal{D}[a, b]$ se stane topologickým vektorovým prostorem, zavedeme-li na ní topologii, ve které posloupnost $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}[a, b]$ konverguje k $\varphi \in \mathcal{D}[a, b]$ tehdy a jen tehdy, když

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n^{(k)} - \varphi^{(k)}\| = 0 \quad \text{for každé } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Typickými příklady funkcí z prostoru $\mathcal{D}[a, b]$ jsou funkce tvaru

$$\varphi_{c,d}(t) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{t-c} + \frac{1}{d-t}\right) & \text{pro } t \in (c, d), \\ 0 & \text{pro } t \in \mathbb{R} \setminus (c, d), \end{cases}$$

kde $[c, d]$ může být libovolný podinterval v (a, b) .

7.2. Definice. Spojité lineární funkcionály na topologickém vektorovém prostoru $\mathcal{D}[a, b]$ se nazývají *distribuce* na $[a, b]$. Množina všech distribucí na $[a, b]$ je tedy duálním prostorem k $\mathcal{D}[a, b]$. Značíme ji symbolem $\mathcal{D}^*[a, b]$.

Pro danou distribuci $f \in \mathcal{D}^*[a, b]$ a testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}[a, b]$, hodnotu funkcionálu f na φ značíme symbolem $\langle f, \varphi \rangle$.

7.3. Poznámka. Je-li $f \in \mathbb{L}^1[a, b]$, pak předpisem

$$\varphi \in \mathcal{D}[a, b] \rightarrow \int_a^b f(t) \varphi(t) dt$$

je definována distribuce

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_a^b f(t) \varphi(t) dt \quad \text{pro všechny } \varphi \in \mathcal{D}[a, b]$$

na $[a, b]$, kterou budeme značit také symbolem f . Říkáme, že distribuce f je určena funkcí f .

Nulový prvek prostoru $\mathcal{D}^*[a, b]$ je určen libovolnou měřitelnou funkcí, která se anuluje s.v. na intervalu $[a, b]$. Speciálně, je-li $f \in \mathbb{G}[a, b]$, pak $f = 0 \in \mathcal{D}^*[a, b]$ tehdy a jen tehdy, když $f(t-) = f(s+) = 0$ pro všechna $t \in (a, b]$ a všechna $s \in [a, b)$. Tudiž, je-li $f \in \mathbb{G}_{\text{reg}}[a, b]$, pak $f = 0 \in \mathcal{D}^*[a, b]$ tehdy a jen tehdy, když $f(t) = 0$ pro všechna $t \in [a, b]$. Jestliže $f, g \in \mathcal{D}^*[a, b]$, pak $f = g$ znamená, že $f - g = 0 \in \mathcal{D}^*[a, b]$. Z výše uvedeného plyne, že pro je-li $g \in \mathbb{L}^1[a, b]$, pak existuje nejvýše jedna funkce $f \in \mathbb{G}_{\text{reg}}[a, b]$ taková, že $f = g$ s.v. na $[a, b]$. Dále, jsou-li f, g funkce definované na $[a, b]$, $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, pak je $f = g$ v $\mathcal{D}^*[a, b]$ tehdy a jen tehdy, když $f = g$ s.v. na $[a, b]$.

7.4. Definice. Pro danou distribuci $f \in \mathcal{D}^*[a, b]$, definujeme její (*distributivní*) *derivaci* f' předpisem

$$f' : \varphi \in \mathcal{D}[a, b] \rightarrow \langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle.$$

Podobně, pro každé $k \in \mathbb{N}$,

$$f^{(k)} : \varphi \in \mathcal{D}[a, b] \rightarrow \langle f^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle f, \varphi^{(k)} \rangle.$$

7.5. Poznámka. Distributivní derivace absolutně spojitých funkcí jsou zřejmě určeny jejich klasickými derivacemi.

7.6. Poznámka. Definujme

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{pro } t = 0, \\ 1 & \text{pro } t > 0. \end{cases}$$

Nechť $\tau \in (a, b)$ a $h_\tau(t) = H(t - \tau)$ pro $t \in [a, b]$. Potom použitím Věty 5.28 a s přihlédnutím k (5.8) a (5.12) dostaneme

$$\langle h'_\tau, \varphi \rangle = -\langle h_\tau, \varphi' \rangle = -\int_a^b h_\tau d[\varphi] = \int_a^b d[h_\tau] \varphi = \varphi(\tau).$$

Funkce h_τ se nazývá *Heavisideova funkce* (se středem v bodě τ) a její distributivní derivace h'_τ se značí δ_τ a nazývá se *Diracova δ -distribuce* (se středem v bodě τ).

7.7. Tvzení. Nechť $f \in \mathcal{D}^*[a, b]$. Potom f' je nulová distribuce tehdy a jen tehdy, když existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že $f(t) = c$ pro s.v. $t \in [a, b]$.

Důkaz. Jestliže $f(t) = c$ pro s.v. $t \in [a, b]$ a $\varphi \in \mathcal{D}[a, b]$, pak

$$\langle f', \varphi \rangle = -\langle c, \varphi' \rangle = -c \int_a^b \varphi'(s) ds = -c(\varphi(b) - \varphi(a)) = 0.$$

Naopak, nechť $\langle f, \varphi' \rangle = 0$ pro každou $\varphi \in \mathcal{D}[a, b]$. Nechť je dána libovolná $\rho \in \mathcal{D}[a, b]$. Položme

$$\varphi(t) = \begin{cases} \int_a^t (\rho(s) - a_0 \Theta(s)) \, ds & \text{pro } t \in [a, b], \\ 0 & \text{pro } t \in \mathbb{R} \setminus [a, b], \end{cases}$$

kde

$$a_0 = \int_a^b \rho(s) \, ds \quad \text{a} \quad \Theta(t) = \frac{\varphi_{a,b}(t)}{\int_a^b \varphi_{a,b}(s) \, ds}.$$

Potom

$$\int_a^b \Theta(s) \, ds = 1.$$

Odtud snadno plyne, že $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ a tedy i, že $\varphi \in \mathcal{D}[a, b]$. Dále,

$$\varphi'(t) = \rho(t) - a_0 \Theta(t) \quad \text{pro } t \in [a, b].$$

Tudíž

$$0 = \langle f, \varphi' \rangle = \langle f, \rho \rangle - \left(\int_a^b \rho(s) \, ds \right) \langle f, \Theta \rangle.$$

T.zn., že pro každé $\rho \in \mathcal{D}[a, b]$ platí

$$\langle f, \rho \rangle = \left(\int_a^b \rho(s) \, ds \right) \langle f, \Theta \rangle = \int_a^b c \rho(s) \, ds,$$

kde $c = \langle f, \Theta \rangle \in \mathbb{R}$ je konstanta. Tedy $f = c$ ve smyslu distribucí. □

7.8. Cvičení. Dokažte, že je-li $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pak $f^{(k)} = 0 \in \mathcal{D}^*[a, b]$ tehdy a jen tehdy, když existují $c_0, c_1, \dots, c_{k-1} \in \mathbb{R}$ takové, že

$$f(t) = c_0 + c_1 t + \dots + c_{k-1} t^{k-1} \quad \text{pro s.v. } t \in [a, b].$$

7.9. Poznámka. Všimněme si, že jestliže $u, v \in \mathbb{G}_{\text{reg}}[a, b]$ a $u' = v$, pak $u \in \mathbb{AC}[a, b]$. Vskutku, položme

$$w(t) = u(a) + \int_a^t v(s) \, ds.$$

Potom $(w - u)' = 0$ a $w(a) = u(a)$ a tudíž, protože $w - u \in \mathbb{G}_{\text{reg}}[a, b]$, je nutně $w = u$ na $[a, b]$.

7.10. Definice. Jestliže $f \in \mathbb{G}[a, b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a, b]$, pak definujeme

$$f'g: \varphi \in \mathcal{D}[a, b] \rightarrow \langle f'g, \varphi \rangle = \int_a^b g(t) \varphi(t) d[f(t)] \quad (7.1)$$

a

$$fg': \varphi \in \mathcal{D}[a, b] \rightarrow \langle fg', \varphi \rangle = \int_a^b f(t) \varphi(t) d[g(t)]. \quad (7.2)$$

7.11. Poznámka. Necht' $f \in \mathbb{L}^1[a, b]$ a $g \in \mathbb{G}[a, b]$. Potom z (7.1) plyne, že součin fg je definován předpisem

$$fg: \varphi \in \mathcal{D}[a, b] \rightarrow \langle fg, \varphi \rangle = \int_a^b f(t) g(t) \varphi(t) dt,$$

t.j. (distributivní) součin funkcí f a g je v tomto případě representován funkcí

$$fg: t \in [a, b] \rightarrow f(t) g(t).$$

7.12. Lemma. Necht' $f \in \mathbb{G}[a, b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a, b]$ splňují

$$\Delta^+ f(t) \Delta^+ g(t) = \Delta^- f(t) \Delta^- g(t) \quad \text{pro každé } t \in (a, b), \quad (7.3)$$

Potom

$$(f'g)(t) = \left(\int_a^t d[f(s)] g(s) \right)' \quad (7.4)$$

a

$$(fg')(t) = \left(\int_a^t d[g(s)] f(s) \right)'. \quad (7.5)$$

Důkaz. Použitím Věty o substituci (Věta 5.36) a Věty o integraci per-partes (Věta 5.28) pro libovolné $\varphi \in \mathcal{D}[a, b]$ dostaneme

$$\begin{aligned} \langle f'g, \varphi \rangle &= \int_a^b d \left[\int_a^t d[f(s)] g(s) \right] \varphi(t) = - \int_a^b \left(\int_a^t d[f(s)] g(s) \right) \varphi'(t) \\ &= \left\langle \left(\int_a^t d[f(s)] g(s) \right)', \varphi \right\rangle, \end{aligned}$$

t.j. platí (7.4). Vztah (7.5) se dokazuje analogicky. □

7.13. Důsledek. Jestliže funkce $f \in \mathbb{G}[a, b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a, b]$ splňují podmínku (7.3), pak

$$(fg)' = fg' + f'g.$$

Důkaz plyne přímo z Definice 7.4, Věty 5.28 (o integraci per-partes) a Lemmatu 7.12. □

7.14. Poznámka. Necht' $f \in \mathbb{G}[a, b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a, b]$. Podmínka (7.3) je pak zřejmě splněna např. v následujících případech :

- (i) obě funkce jsou regulární,
- (ii) alespoň jedna z nich je spojitá na (a, b) ,
- (iii) jedna z nich zleva spojitá na (a, b) a druhá je zprava spojitá na (a, b) .

7.15 . Cvičení. Dokažte, že jestliže $\tau \in (a, b)$ a h_τ resp. δ_τ jsou Heavisideova funkce resp. Diracova distribuce se středem v τ , pak $h_\tau \delta_\tau = \frac{1}{2} \delta_\tau$.

Zobecněné diferenciální rovnice

”V rekonstrukci.”

Dodatky

9.1 Důkaz Věty 1.15

Pro důkaz Věty 1.15 je účelné zavést následující definice.

9.1. Definice. Funkce $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je *shora (zdola) polospojité v bodě* $x_0 \in [a, b]$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in [a, b] \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ platí

$$F(x) < F(x_0) + \varepsilon \quad (F(x) > F(x_0) - \varepsilon).$$

Je-li funkce f shora resp. zdola polospojité v každém bodě intervalu $[a, b]$, říkáme, že je *shora resp. zdola polospojité na intervalu* $[a, b]$.

9.2. Poznámka. Je zřejmé, že funkce f je spojitá v bodě x_0 právě tehdy, když je v něm současně polospojité shora i zdola.

9.3. Cvičení. Každá funkce polospojité shora (zdola) na ohraničeném a uzavřeném intervalu je na tomto intervalu ohraničená shora (zdola).

Další příjemnou vlastností funkcí shora polospojitéch na intervalu $[a, b]$ je to, že tyto funkce nabývají na tomto intervalu svého maxima :

9.4. Tvrzení. *Je-li funkce $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ shora polospojité na intervalu $[a, b]$, potom existuje bod $x_0 \in [a, b]$ takový, že*

$$F(x) \leq F(x_0) \quad \text{pro každé } x \in [a, b].$$

D ů k a z . Označme

$$M = \sup_{x \in [a, b]} F(x).$$

Podle Cvičení 9.3 je $M < \infty$. Množina

$$Q_k = \left\{ x \in [a, b] : F(x) \geq M - \frac{1}{k} \right\} \tag{9.1}$$

je pro každé $k \in \mathbb{N}$ neprázdná. Ukážeme, že je také uzavřená :

Nechť x^* je hromadný bod množiny Q_k . Zřejmě $x^* \in [a, b]$. Předpokládejme, že $x^* \notin Q_k$. Platí tedy $F(x^*) < M - \frac{1}{k}$. Dále, z polospojítosti shora funkce f plyne, že k danému $\varepsilon = M - \frac{1}{k} - F(x^*) > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že platí

$$F(x) < F(x^*) + \varepsilon = F(x^*) + M - \frac{1}{k} - F(x^*) = M - \frac{1}{k}$$

pro všechna $x \in (x^* - \delta, x^* + \delta) \cap [a, b]$,

což je ovšem spor s tím, že x^* je hromadný bod množiny Q_k . Každá množina Q_k , $k \in \mathbb{N}$, je tedy uzavřená. Dále, vzhledem k tomu, že posloupnost $\{M - \frac{1}{k}\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí, plyne z (9.1), že platí

$$[a, b] \supset Q_1 \supset Q_2 \cdots \supset Q_k \supset Q_{k+1} \cdots$$

Podle Cantorovy věty (viz např. [5, Věta 157]) je tudíž množina $\bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k$ neprázdná. Budiž x_0 její libovolný prvek. Potom

$$M - \frac{1}{k} \leq F(x_0) \leq M \quad \text{platí pro každé } k \in \mathbb{N},$$

což je možné pouze, když

$$F(x_0) = M = \sup_{x \in [a, b]} F(x). \quad \square$$

9.5 . Cvičení. Je-li funkce $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zdola polospojité na intervalu $[a, b]$, potom existuje bod $x_0 \in [a, b]$ takový, že

$$F(x) \geq F(x_0) \quad \text{pro každé } x \in [a, b].$$

9.6. Tvzení. *Nechť funkce $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je taková, že pro každé $t \in [a, b]$ a každé $s \in (a, b]$ existují limity*

$$f(t+) = \lim_{\tau \rightarrow t+} f(\tau) \quad \text{a} \quad f(s-) = \lim_{\tau \rightarrow s-} f(\tau).$$

Definujme funkci $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$F(x) = \max\{f(x-), f(x), f(x+)\} \quad \text{pro } x \in (a, b), \quad F(a) = f(a+) \quad \text{a} \quad F(b) = f(b-).$$

Potom je funkce F shora polospojité na intervalu $[a, b]$.

D ů k a z . Budiž dán libovolný bod $x_0 \in (a, b)$. Potom platí $f(x_0) \leq F(x_0)$. Dále, vzhledem k předpokladu o existenci limit $f(x_0-)$ a $f(x_0+)$, pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že platí

$$f(x) < f(x_0-) + \varepsilon \leq F(x_0) + \varepsilon \quad \text{pro všechna } x \in (x_0 - \delta, x_0),$$

$$f(x) < f(x_0+) + \varepsilon \leq F(x_0) + \varepsilon \quad \text{pro všechna } x \in (x_0, x_0 + \delta).$$

Máme tedy

$$f(x) < F(x_0) + \varepsilon \quad \text{pro všechna } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Odtud plyne dále, že platí

$$f(x-) \leq F(x_0) + \varepsilon \quad \text{a} \quad f(x+) < F(x_0) + \varepsilon \quad \text{pro všechna } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

čili

$$F(x) \leq F(x_0) + \varepsilon \quad \text{pro všechna } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

T. zn., že f je polospojité shora v bodě x_0 . Podobně bychom postupovali také v případech $x_0 = a$ resp. $x_0 = b$. □

9.7. Lemma (RIESZ). *Nechť funkce f a $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ splňují předpoklady Tvzení 9.6. Potom je množina*

$$E = \{x \in (a, b) : \text{existuje } \xi > x \text{ tak, že } f(\xi) > F(x)\}$$

otevřená. Když je $E \neq \emptyset$, pak E sestává z nejvýše spočetného systému po dvou disjunktních otevřených intervalů (a_k, b_k) a pro každý z nich platí

$$f(a_k+) \leq F(b_k).$$

D ů k a z . Je-li $E = \emptyset$, není co dokazovat. Nechť tedy $x_0 \in E$. Potom existuje $\xi \in (x_0, b]$ takové, že platí

$$\varepsilon := f(\xi) - F(x_0) > 0.$$

Vzhledem k polospojivosti funkce F v bodě x_0 existuje $\delta > 0$ takové, že $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [a, b]$ a

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \implies F(x) < F(x_0) + \varepsilon = f(\xi).$$

To ovšem také znamená, že je

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset E,$$

tj. množina E je otevřená.

Je známo (viz [5, Věta 69]), že každá neprázdná otevřená množina je sjednocením nejvýše spočetného systému po dvou disjunktních otevřených intervalů. Tedy také množina E je sjednocením takového systému $\{(a_k, b_k)\}$. Zvolme libovolný interval (a_k, b_k) z tohoto systému a v něm libovolný bod x_0 . Podle Tvzení 9.4 existuje $x_1 \in [x_0, b]$ takové, že

$$F(x_1) = \max_{x \in [x_0, b]} F(x). \quad (9.2)$$

Kdyby bylo $x_1 < b_k$ pak by také bylo $x_1 \in E$ a tudíž by pro nějaké $\xi \in (x_1, b]$ bylo

$$F(\xi) \geq f(\xi) > F(x_1),$$

což je ovšem spor s (9.2). Máme tedy

$$x_1 \geq b_k.$$

Vzhledem k (9.2) máme také $F(b_k) \leq F(x_1)$. Předpokládejme, že je

$$F(b_k) < F(x_1) = \max\{f(x_1-), f(x_1), f(x_1+)\}.$$

Potom také musí být $x_1 > b_k$ a musí existovat $\xi \in (b_k, b)$ takové, že je $f(\xi) > F(b_k)$ čili $b_k \in E$, což ovšem není možné. Je tedy

$$F(b_k) = F(x_1) = \max_{x \in [x_0, b]} F(x) \geq F(x_0) \geq f(x_0)$$

pro každé $x_0 \in (a_k, b_k)$. Limitním přechodem $x_0 \rightarrow a_k+$ dostaneme konečně

$$F(b_k) \geq f(a_k+),$$

což uzavírá důkaz lemmatu. □

9.8. Poznámka. Funkce splňující předpoklady Tvrzení 9.6 a Lemmatu 9.7 nazýváme *regulované funkce*. Podrobněji o nich pojednáme v kapitole 3.

9.9. Definice. Nechť $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je daná funkce. Pro $x \in (a, b]$ definujeme *horní resp. dolní Diniho derivovaná čísla zleva* $D^-f(x)$ resp. $D_-f(x)$ takto :

$$D^-f(x) = \limsup_{t \rightarrow x-} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \quad \text{a} \quad D_-f(x) = \liminf_{t \rightarrow x-} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Podobně se definují *horní resp. dolní Diniho derivovaná čísla zprava* v bodech $x \in [a, b)$:

$$D^+f(x) = \limsup_{\xi \rightarrow x+} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \quad \text{a} \quad D_+f(x) = \liminf_{\xi \rightarrow x+} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}.$$

9.10. Poznámka. Pro libovolnou funkci $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a body $x \in (a, b]$ a $y \in [a, b)$ jsou její derivovaná čísla $D^-f(x)$, $D_-f(x)$, $D^+f(y)$, $D_+f(y)$ jednoznačně určena. Mohou ovšem nabývat také hodnot ∞ resp. $-\infty$. Funkce f má v bodě x vlastní derivaci zleva právě tehdy, když $D^-f(x) = D_-f(x) \in \mathbb{R}$. Podobně, f má v bodě x vlastní derivaci zprava právě tehdy, když $D^+f(x) = D_+f(x) \in \mathbb{R}$, a vlastní derivaci právě tehdy, když $D^-f(x) = D_-f(x) = D^+f(x) = D_+f(x) \in \mathbb{R}$.

Z Definice 9.9 ihned plyne, že pro $x \in (a, b]$ a $y \in [a, b)$ platí

$$-\infty \leq D_-f(x) \leq D^-f(x) \leq +\infty \quad \text{a} \quad -\infty \leq D_+f(y) \leq D^+f(y) \leq +\infty.$$

Podle Důsledku 1.6 a Lemmatu obsaženém v důkazu Věty 1.7 již víme, že každá monotonní funkce na intervalu $[a, b]$ má na tomto intervalu nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti. Nyní si ukážeme, že každá monotonní funkce má vlastní derivaci "téměř všude" na definičním intervalu.

9.11. Věta. *Každá funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monotonní na $[a, b]$ má pro s.v. $x \in [a, b]$ konečnou derivaci $f'(x)$.*

D ů k a z . Předpokládejme např., že f je neklesající. Potom pro všechna $x, \xi \in [a, b]$, $x \neq \xi$, máme

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \geq 0$$

a vzhledem k Definici 9.9 tedy také

$$0 \leq D_-f(x) \leq D_+f(x) \leq \infty \quad \text{a} \quad 0 \leq D_+f(x) \leq D^-f(x) \leq \infty \tag{9.3}$$

pro všechna $x, \in (a, b)$.

Důkaz věty bude rozdělen na 3 kroky :

- I. Nejprve ukážeme, že platí:

$$D^+ f(x) < \infty \quad \text{pro s.v. } x \in (a, b). \quad (9.4)$$

- II. Poté ukážeme, že platí

$$D^+ f(x) \leq D_- f(x) \quad \text{pro s.v. } x \in (a, b). \quad (9.5)$$

- III. Konečně, ukážeme, že důkaz věty je už snadným důsledkem tvrzení (9.4) a (9.5).

► I. Nejprve tedy dokážeme platnost tvrzení (9.4). Označme symbolem S množinu bodů nespojitosti funkce f v (a, b) a

$$E_\infty = \{x \in (a, b) \setminus S : D^+ f(x) = \infty\}.$$

Podle Věty 1.7 je množina S nanejvýše spočetná a tedy (viz Cvičení 1.14 a)) má nulovou míru ($\mu(S) = 0$). Je-li $E_\infty = \emptyset$, není co dokazovat. Předpokládejme tedy, že je $E_\infty \neq \emptyset$. Nechť je dáno libovolné $c > 0$. Máme

$$E_\infty \subset E_c = \{x \in (a, b) \setminus S : D^+ f(x) > c\}. \quad (9.6)$$

Jestliže $x \in E_c$, pak podle Definice 9.9 existuje $\xi \in (x, b)$ takové, že platí

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} > c,$$

tj.

$$\text{pro každé } x \in E_c \text{ existuje } \xi \in (a, b) \text{ takové, že } g(\xi) > G(x), \quad (9.7)$$

kde

$$g(x) := f(x) - cx \quad \text{pro } x \in [a, b], \quad (9.8)$$

a

$$G(x) := \begin{cases} g(a+) & \text{pro } x = a, \\ \max\{g(x-), g(x), g(x+)\} & \text{pro } x \in (a, b), \\ g(b-) & \text{pro } x = b. \end{cases} \quad (9.9)$$

(Zde jsme využili toho, že $E_c \cap S = \emptyset$ a tudíž $G(x) = g(x)$ pro každé $x \in E_c$.) Podle (9.7) máme dále

$$E_c \subset E := \{x \in (a, b) : \text{existuje } \xi > x \text{ tak, že } g(\xi) > G(x)\}. \quad (9.10)$$

Protože funkce f je neklesající na $[a, b]$, je také g na tomto intervalu neklesající a tudíž také regulovaná (viz Důsledek 1.6). Podle Tvrzení 9.6 je G polospojité shora na $[a, b]$ a tudíž podle Lemmatu 9.7 je množina E z (9.10) sjednocením nejvýše spočetného systému

po dvou disjunktních otevřených intervalů (a_k, b_k) , $k \in K \subset \mathbb{N}$ a pro každý z nich platí $g(a_k+) \leq G(b_k)$. Vzhledem k (9.8) a (9.9) a vzhledem k tomu, že funkce f je neklesající na $[a, b]$, tedy máme

$$f(a_k+) - c a_k \leq G(b_k) = \max\{f(b_k-), f(b_k), f(b_k+)\} - c b_k \leq f(b_k+),$$

neboli

$$c(b_k - a_k) \leq f(b_k+) - f(a_k+).$$

Sečtením přes všechna k odtud dostaneme

$$c \sum_{k \in K} (b_k - a_k) \leq \sum_{k \in K} [f(b_k+) - f(a_k+)] \leq f(b) - f(a),$$

neboli

$$\sum_{k \in K} (b_k - a_k) \leq \frac{f(b) - f(a)}{c}.$$

Pokud tedy k danému $\varepsilon > 0$ zvolíme $c > 0$ tak velké, aby platilo

$$\frac{f(b) - f(a)}{c} < \varepsilon,$$

docílíme toho, že bude

$$\sum_{k \in K} (b_k - a_k) < \varepsilon,$$

což ovšem znamená, že množina E a tudíž také množina $E_\infty \cup S \cup [a] \cup [b]$ mají nulovou míru (viz (9.6), (9.10) a Cvičení 1.14b)). Tvrzení (9.4) je tedy dokázáno.

► II. Pro daná čísla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\alpha \geq 0 \quad \text{a} \quad \beta \geq \alpha, \tag{9.11}$$

definujeme

$$E_{\alpha\beta} = \{x \in (a, b) \setminus S : D^+ f(x) \alpha \quad \text{a} \quad D_- f(x) < \beta\}$$

a

$$E_\beta = \{x \in (a, b) : D_f(x) < \beta\}.$$

Nechť $y \in E_\beta$. Pak existuje $\eta \in (a, x)$ takové, že

$$f(\eta) - \beta \eta > f(y) - \beta y.$$

Pro $x \in [-b, -a]$ definujeme

$$g(x) = f(-x) + \beta x.$$

Je-li $y = -x \in (a, b) \cap E_\beta$, pak podle výše uvedeného existuje $\xi > x$ ($\xi = -\eta$) takové, že je

$$g(\xi) > G(x) = g(x),$$

kde funkce G je přiřazena k g opět relací (9.9). (Jelikož je $S \cap E_\beta = \emptyset$ a $x \in E_\beta$, je $G(x) = g(x)$.) Použitím Lemmatu 9.7 pro funkci g na intervalu $(-b, -a)$ dostaneme, že existuje nejvýše spočetně mnoho otevřených a navzájem disjunktních intervalů $(-b_k, -a_k)$, které obsahují ty body $x \in (-b, -a)$, pro které je $-x \in E_\beta$ a platí

$$g(-b_k+) \leq G(-a_k).$$

Protože f je neklesající na $[a, b]$, funkce g je nerostoucí na $[-b, -a]$. To má za následek, že $g(x-) \geq g(x) \geq g(x+)$ pro každé $x \in (a, b)$. Máme tedy

$$G(-a_k) = g(-a_k-) \quad \text{a tudíž} \quad f(b_k-) - \beta b_k \leq f(a_k+) = \beta a_k,$$

tj.

$$f(b_k-) - f(a_k+) \leq \beta(b_k - a_k) \quad \text{pro každé } k.$$

(a) Nyní, pro $\alpha \geq 0$ označme

$$\tilde{E}_\alpha = \{x \in [a, b] \setminus S : D^+ f(x) > \alpha\}.$$

Podobně jako v analogické situaci výše, pro každé $y \in \tilde{E}_\alpha$ můžeme najít $\eta \in (a, y)$ takové, že je

$$\frac{f(\eta) - f(y)}{\eta - y} < \alpha, \tag{9.12}$$

tj.

$$f(\eta) - \alpha \eta > f(y) - \alpha y. \tag{9.13}$$

Definujme

$$g(x) = f(-x) - \alpha(-x) \quad \text{pro } x \in [-b, -a]$$

a

$$G(x) = \begin{cases} g(-b+) & \text{pro } x = -b, \\ \max\{g(x-), g(x), g(x+)\} & \text{pro } x \in (-b, -a), \\ g(-a-) & \text{pro } x = -a. \end{cases}$$

Vzhledem k (9.13), pro každé $x \in (a, b)$ takové, že $-x \in \tilde{E}_\alpha$ existuje $\xi \in (x, -a)$, pro které platí $g(\xi) > G(x)$. (Stačí najít k $y = -x$ $\eta \in (a, y)$ splňující (9.12) a pak položit $\xi = -\eta$.) Použitím Lemmatu 9.7 tedy můžeme ukázat, že existuje nejvýše spočetný systém po dvou disjunktních otevřených intervalů (a_k, b_k) , $k \in K \subset \mathbb{N}$, takový, že platí

$$\tilde{E}_\alpha \subset \bigcup_{k \in K} (-b_k, -a_k)$$

a

$$g(-b_k+) = f(b_k-) - \alpha b_k \leq G(-a_k) \leq f(a_k+) - \alpha a_k.$$

Poslední nerovnost ovšem znamená, že pro každé $k \in K$ platí

$$f(b_k-) - f(a_k+) \leq \alpha (b_k - a_k). \quad (9.14)$$

(b) Necht' $k \in K$ a $x \in E_\beta \cap (a_k, b_k)$. Potom máme $D^+ f(x) > \beta$ a tudíž existuje $\xi \in (x, b_k)$ takové, že platí

$$f(\xi) - \beta \xi > f(x) - \beta x.$$

Použijeme-li opět Rieszovo lemma (Lemma 9.7), dostaneme odtud existenci nejvýše spočetného systému po dvou disjunktních otevřených intervalů $(a_{k\ell}, b_{k\ell})$, $\ell \in L \subset \mathbb{N}$, takového, že platí

$$E_\beta \cap (a_k, b_k) \subset \bigcup_{\ell \in L} (a_{k\ell}, b_{k\ell})$$

a

$$f(a_{k\ell}+) - \beta a_{k\ell} \leq f(b_{k\ell}+) - \beta b_{k\ell},$$

tj.

$$\beta (b_{k\ell} - a_{k\ell}) \leq f(b_{k\ell}+) - f(a_{k\ell}+) \quad \text{pro každé } \ell \in L.$$

Po sečtení přes všechna $\ell \in L$ odtud a z (9.14) získáme vztahy

$$\beta \sum_{\ell \in L} (b_{k\ell} - a_{k\ell}) \leq \sum_{\ell \in L} (f(b_{k\ell}+) - f(a_{k\ell}+)) \leq f(b_k-) - f(a_k+) \leq \alpha (b_k - a_k)$$

a (sečtením přes všechna $k \in K$)

$$\beta \sum_{k \in K} \sum_{\ell \in L} (b_{k\ell} - a_{k\ell}) \leq \alpha \sum_{k \in K} (b_k - a_k). \quad (9.15)$$

Označíme-li tedy

$$|\mathfrak{L}_1| = \sum_{k \in K} (b_k - a_k) \quad \text{a} \quad |\mathfrak{L}_2| = \sum_{k \in K} \sum_{\ell \in L} (b_{k\ell} - a_{k\ell}),$$

budeme moci nerovnost (9.15) přepsat ve tvaru

$$|\mathfrak{L}_1| \leq \frac{\alpha}{\beta} |\mathfrak{L}_2|.$$

Když výše uvedené procedury (a) i (b) budeme provádět střídavě v postupně vznikajících intervalech, dostaneme posloupnost systémů intervalů $\mathfrak{L}_1 \supset \mathfrak{L}_2 \supset \dots \supset \mathfrak{L}_n \supset \dots$, z nichž každý obsahuje $E_{\alpha\beta} = E_\beta \cap \tilde{E}_\alpha$, přičemž

$$|\mathfrak{L}_{2n}| \leq \frac{\alpha}{\beta} |\mathfrak{L}_{2n-1}| \leq \frac{\alpha}{\beta} |\mathfrak{L}_{2n-2}|$$

platí pro každé $n \in \mathbb{N}$. Odtud pak dále odvodíme, že je

$$|\mathfrak{L}_{2n}| \leq \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n |\mathfrak{L}_1| \leq \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n (b-a).$$

Protože máme $0 \leq \frac{\alpha}{\beta} < 1$, plyne odtud, že je $|\mathfrak{L}_{2n}| \rightarrow 0$ pro $n \rightarrow \infty$.

Nyní, k danému $\varepsilon > 0$ zvolíme $n \in \mathbb{N}$ tak, aby bylo

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n (b-a) < \varepsilon.$$

Potom bude $E_{\alpha\beta} \subset \mathfrak{L}_{2n}$ a přitom také $|\mathfrak{L}_{2n}| \leq \varepsilon$, což podle Definice 1.13 znamená, že $\mu(E_{\alpha\beta}) = 0$ pro libovolnou dvojici $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ splňující (9.11).

Označme

$$E_* = \{x \in (a, b) \setminus S : D_-f(x) < D^+f(x)\}$$

Potom pro každé $x \in E_*$ existují racionální čísla $\alpha, \beta \in \mathbb{P}$ splňující (9.11) a

$$D_-f(x) < \alpha < \beta < D^+f(x).$$

To znamená, že je E_* obsažena v množině

$$\tilde{E} := \bigcup_{\substack{0 \leq \alpha < \beta \\ \alpha, \beta \in \mathbb{P}}} E_{\alpha, \beta},$$

která je sjednocením spočetně mnoha množin nulové míry a tudíž má také nulovou míru (viz Cvičení 1.14b). Tím spíše je $\mu(E_*) = 0$ a tedy také

$$\mu(E_* \cup S \cup [a] \cup [b]) = 0,$$

což dokazuje platnost tvrzení (9.5).

► III. Funkce

$$\tilde{f} : x \in [-b, -a] \rightarrow -f(-x)$$

je zřejmě neklesající na $[-b, -a]$ a platí

$$D_- \tilde{f}(-x) = D_+ f(x) \quad \text{a} \quad D^+ \tilde{f}(-y) = D^- f(y)$$

pro všechna $x \in [a, b]$ a $y \in (a, b]$. Použijeme-li tedy (9.5) na funkci \tilde{f} , dostaneme

$$D^- f(x) = D^+ \tilde{f}(-x) \leq D_- \tilde{f}(-x) = D_+ f(x) \quad \text{pro s.v. } x \in [a, b].$$

Vzhledem k (9.3) a (9.4) tedy pro s.v. $x \in [a, b]$ budeme mít

$$0 \leq D^+ f(x) \leq D_- f(x) \leq D^- f(x) \leq D_+ f(x) \leq D^+ f(x) < \infty,$$

tj.

$$0 \leq D^+ f(x) = D_- f(x) = D^- f(x) = D_+ f(x) = f'(x) < \infty.$$

□

Věta 1.15 je přímým důsledkem vět 9.11 a 1.4.

9.2 Alternativní důkaz Věty 5.28 (per-partes)

Důkaz bude současně alternativním důkazem existenčního tvrzení z Věty 5.22.

Nechť je tedy $f \in \mathbb{G}[a, b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a, b]$ a necht' je dáno $\varepsilon > 0$. Podle Věty 5.16 existuje integrál $\int_a^b f d[g]$ a můžeme tedy zvolit kalibr δ_1 tak, aby pro každé $(D, \xi) \in \mathcal{A}(\delta_1)$ platilo

$$|S(D, \xi) - \int_a^b f d[g]| < \varepsilon. \quad (9.16)$$

Dále, pro každé $x \in [a, b]$ můžeme zvolit $\delta_2(x) > 0$ tak, aby platilo

$$\begin{cases} s \in (x - \delta_2(x), x) \cap [a, b] \implies |f(s) - f(x-)| < \varepsilon & \text{a} & |g(s) - g(x-)| < \varepsilon, \\ s \in (x, x + \delta_2(x)) \cap [a, b] \implies |f(s) - f(x+)| < \varepsilon & \text{a} & |g(s) - g(x+)| < \varepsilon. \end{cases} \quad (9.17)$$

Podle tvrzení (ii) Důsledku 3.7 má množina

$$M_\varepsilon = \{x \in [a, b] : |\Delta^+ f(x)| \geq \varepsilon \vee |\Delta^- f(x)| \geq \varepsilon\}$$

nejvýše konečný počet prvků. Pro každý bod $x \in [a, b] \setminus M_\varepsilon$ je tedy kladná jeho vzdálenost

$$\text{dist}(x, M_\varepsilon) = \min\{|x - y| : y \in M_\varepsilon\}$$

od množiny M_ε . Definujme

$$\delta_3(x) = \begin{cases} \text{dist}(x, M_\varepsilon) & \text{když } x \in [a, b] \setminus M_\varepsilon, \\ \delta_2(x) & \text{když } x \in M_\varepsilon \end{cases} \quad (9.18)$$

a

$$\delta_\varepsilon(x) = \min\{\delta_1(x), \delta_2(x), \delta_3(x)\} \quad \text{pro } x \in [a, b]. \quad (9.19)$$

Nechť

$$(D, \xi) = (\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}, (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)) \in \mathcal{A}(\delta_\varepsilon).$$

Potom, vzhledem k (9.18) a (9.19), musí být $M_\varepsilon \subset \Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m\}$. Jednoduchými úpravami zjistíme, že platí

$$\begin{aligned} & S_{f\Delta g}(D, \xi) + S_{g\Delta f}(D, \xi) \\ &= \sum_{j=1}^m (f(\xi_j)g(\alpha_j) - f(\xi_j)g(\alpha_{j-1}) + f(\alpha_j)g(\xi_j) - f(\alpha_{j-1})g(\xi_j)) \\ &= f(b)g(b) + \sum_{j=1}^m (f(\xi_j)g(\alpha_j) + f(\alpha_j)g(\xi_j) - f(\xi_j)g(\xi_j) - f(\alpha_j)g(\alpha_j)) \\ &\quad - f(a)g(a) - \sum_{j=1}^m (f(\xi_j)g(\alpha_{j-1}) + f(\alpha_{j-1})g(\xi_j) - f(\xi_j)g(\xi_j) - f(\alpha_{j-1})g(\alpha_{j-1})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \sum_{j=1}^m (f(\alpha_j) - f(\xi_j))(g(\alpha_j) - g(\xi_j)) \\
&\quad + \sum_{j=1}^m (f(\xi_j) - f(\alpha_{j-1}))(g(\xi_j) - g(\alpha_{j-1})).
\end{aligned}$$

Dále,

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{a < x \leq b} \Delta^+ f(x) \Delta^+ g(x) - \sum_{a \leq x < b} \Delta^- f(x) \Delta^- g(x) \right| \\
&\leq \sum_{x \in M_\varepsilon \cap (a,b)} |\Delta^+ f(x)| |\Delta^+ g(x)| + \sum_{x \in (a,b) \setminus M_\varepsilon} |\Delta^+ f(x)| |\Delta^+ g(x)| \\
&\quad + \sum_{x \in M_\varepsilon \cap (a,b)} |\Delta^- f(x)| |\Delta^- g(x)| + \sum_{x \in (a,b) \setminus M_\varepsilon} |\Delta^- f(x)| |\Delta^- g(x)| \\
&\leq \left(\sum_{x \in M_\varepsilon \cap (a,b)} |\Delta^+ f(x)| + \sum_{x \in M_\varepsilon \cap (a,b)} |\Delta^- f(x)| + 2\varepsilon \right) \text{var}_a^b g < \infty.
\end{aligned}$$

Máme tedy

$$\begin{aligned}
&\left| S_{g\Delta f}(D, \xi) - f(b)g(b) + f(a)g(a) + \int_a^b f \, d[g] \right. \\
&\quad \left. + \sum_{a < x \leq b} \Delta^+ f(x) \Delta^+ g(x) - \sum_{a \leq x < b} \Delta^- f(x) \Delta^- g(x) \right| \\
&\leq \left| \int_a^b f \, d[g] - S_{f\Delta g}(D, \xi) \right| \\
&\quad + \left| \sum_{j=1}^m (f(\xi_j) - f(\alpha_{j-1}))(g(\xi_j) - g(\alpha_{j-1})) - \sum_{a < x \leq b} \Delta^- f(x) \Delta^- g(x) \right| \\
&\quad + \left| \sum_{j=1}^m (f(\alpha_j) - f(\xi_j))(g(\alpha_j) - g(\xi_j)) - \sum_{a \leq x < b} \Delta^+ f(x) \Delta^+ g(x) \right|.
\end{aligned} \tag{9.20}$$

Dále,

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{j=1}^m (f(\alpha_j) - f(\xi_j))(g(\alpha_j) - g(\xi_j)) - \sum_{a \leq x < b} \Delta^+ f(x) \Delta^+ g(x) \right| \\
&= \left| \sum_{j=1}^m (f(\alpha_j) - f(\xi_{j+}) + \Delta^+ f(\xi_j))(g(\alpha_j) - g(\xi_{j+}) + \Delta^+ g(\xi_j)) \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{j=1}^m \Delta^+ f(\xi_j) \Delta^+ g(\xi_j) - \sum_{x \in [a,b] \setminus \Xi} \Delta^+ f(x) \Delta^+ g(x) \Big| \\
& = \left| \sum_{j=1}^m (f(\alpha_j) - f(\xi_{j+})) (g(\alpha_j) - g(\xi_{j+})) + \sum_{j=1}^m (f(\alpha_j) - f(\xi_{j+})) \Delta^+ g(\xi_j) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{j=1}^m \Delta^+ f(\xi_j) (g(\alpha_j) - g(\xi_{j+})) - \sum_{x \in [a,b] \setminus \Xi} \Delta^+ f(x) \Delta^+ g(x) \right|
\end{aligned}$$

Předposlední součet přitom můžeme rozdělit do dvou součtů: jeden, ve kterém se sčítá přes ta j , pro která je $t_j \in M_\varepsilon$ a druhý, který obsahuje všechny ostatní sčítance. Odtud, vzhledem k (9.17) a vzhledem k definici množiny M_ε , plyne, že je

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{j=1}^m (f(\alpha_j) - f(\xi_j)) (g(\alpha_j) - g(\xi_j)) - \sum_{a \leq x < b} \Delta^+ f(x) \Delta^+ g(x) \right| \\
& \leq \left(2 \sum_{j=1}^m |g(\alpha_j) - g(\xi_{j+})| + 2 \sum_{j=1}^m |\Delta^+ g(\xi_j)| + \sum_{x \in M_\varepsilon} |\Delta^+ f(x)| \right) \varepsilon \leq K^+ \varepsilon,
\end{aligned}$$

kde

$$K^+ = 4 \operatorname{var}_a^b g + \sum_{x \in M_\varepsilon \cap (a,b)} |\Delta^+ f(x)| < \infty.$$

Podobně bychom ověřili, že platí

$$\left| \sum_{j=1}^m (f(\xi_j) - f(\alpha_{j-1})) (g(\xi_j) - g(\alpha_{j-1})) - \sum_{a < x \leq b} \Delta^- f(x) \Delta^- g(x) \right| \leq K^- \varepsilon,$$

kde

$$K^- = 4 \operatorname{var}_a^b g + \sum_{x \in M_\varepsilon \cap (a,b)} |\Delta^- f(x)| < \infty.$$

Dosazením do (9.20) a využitím (9.16) získáme odhad

$$\begin{aligned}
& \left| S_{g\Delta f}(D, \xi) - f(b)g(b) + f(a)g(a) + \int_a^b f \, d[g] \right. \\
& \quad \left. + \sum_{a < x \leq b} \Delta^+ f(x) \Delta^+ g(x) - \sum_{a \leq x < b} \Delta^- f(x) \Delta^- g(x) \right| \leq (1 + K^+ K^-) \varepsilon.
\end{aligned}$$

Protože (D, ξ) bylo libovolné δ_ε -jemné dělení, plyne odtud už, že existuje integrál $\int_a^b g \, d[f]$ a platí (5.37). \square

Literatura

- [1] P. DRÁBEK, A. KUFNER. *Úvod do funkcionální analýzy*. (Učební text, ZČU Plzeň, 1993)
[dostupné z: http://www.kma.zcu.cz/0000_DATA/eBOOKs/Drabek/UFA.pdf].
- [2] I. HALPERIN. *Introduction to the Theory of Distributions*. (University of Toronto Press, Toronto, 1952).
- [3] T. H. HILDEBRANDT. *Theory of Integration*. (Academic Press, New York-London, 1963).
- [4] CH. S. HÖNIG. *Volterra Stieltjes-Integral Equations*, (North Holland and American Elsevier, Mathematics Studies 16, Amsterdam and New York, 1975).
- [5] V. JARNÍK. *Diferenciální počet II*.
- [6] V. JARNÍK. *Integrální počet II*.
- [7] W. RUDIN. *Functional Analysis*. (McGraw-Hill Series in Higher Mathematics, New York, 1973).
- [8] M. TVRDÝ. *Differential and integral equations in the space of regulated functions*. *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics* vol.25 (2002), pp. 1–104.
- [9] Š. SCHWABIK. *Integrace v R (Kurzweilova teorie)*. (Karolinum, Universita Karlova v Praze, 1999)