Kapitola 4

Regulované funkce

4.1. Definice. Funkce $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ se nazývá *regulovaná* na $[a,b]$, jestliže pro každé $t\in(a,b]$ a každé $s\in[a,b)$ existují konečné limity

$$f(t-)=\lim_{\tau\to t-}f(\tau)\ \text{ a }\ f(s+)=\lim_{\tau\to s+}f(\tau)\,,$$

tj. má-li funkce f na intervalu $[a,b]$ nespojitosti nejvýše *1. druhu*. Množinu funkcí regulovaných na $[a,b]$ značíme $\mathbb{G}[a,b]$.

4.2. Poznámka. Zřejmě $\mathbb{BV}[a,b]\cup\mathbb{C}[a,b]\subset\mathbb{G}[a,b]$, přičemž

$$\mathbb{G}[a,b]\setminus\mathbb{C}[a,b]\neq\emptyset\ \text{ a }\ \mathbb{G}[a,b]\setminus\mathbb{BV}[a,b]\neq\emptyset\,.$$

Následující tvrzení plyne okamžitě z lemmatu 2.21.

4.3. Věta. *Každá funkce regulovaná na $[a,b]$ má na $[a,b]$ nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti.* □

4.4. Věta. *Jestliže posloupnost $\{f_n\}$ regulovaných funkcí konverguje stejnoměrně na intervalu $[a,b]$ k funkci f, potom $f\in\mathbb{G}[a,b]$.*

D ů k a z . Nechť $x\in[a,b)$, nechť $\{x_k\}\subset(x,b]$ je libovolná posloupnost taková, že $x_k>x$ pro všechna $k\in\mathbb{N}$ a $x_k\to x$ pro $k\to\infty$. Nechť je dáno libovolné $\varepsilon>0$. Zvolme $n_0\in\mathbb{N}$ a $k_0\in\mathbb{N}$ tak, aby platilo

$$\|f-f_{n_0}\|<\frac{\varepsilon}{3}\ \text{ a }\ |f_{n_0}(x_k)-f_{n_0}(x_\ell)|<\frac{\varepsilon}{3}\quad\text{pro všechna } k,\ell\geq k_0\,.$$

Potom budeme mít pro všechna $k,\ell\geq k_0$

$$\begin{aligned}&|f(x_k)-f(x_\ell)|\\&\quad\leq|f(x_k)-f_{n_0}(x_k)|+|f_{n_0}(x_k)-f_{n_0}(x_\ell)|+|f(x_\ell)-f_{n_0}(x_\ell)|<\varepsilon\,,\end{aligned}$$

tj. existuje konečná limita $f(x+)=\lim\limits_{k\to\infty}f(x_k)$. Podobně bychom ukázali, že pro každé $x\in(a,b]$ existuje konečná limita $f(x-)$. □

4.5. Definice. Pro libovolnou funkci $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, otevřený interval $(\alpha,\beta)\subset[a,b]$ a dělení $\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]$ definujeme

$$\omega_{(\alpha,\beta)}(f)=\sup_{x',x''\in J}|f(x')-f(x'')| \ \text{ a } \ \omega_D(f)=\max_{i=1,2,\dots,m}\omega_{(\sigma_{i-1},\sigma_i)}(f).$$

4.6. Věta. *Následující tři tvrzení jsou ekvivalentní*

(i) $f\in\mathbb{G}[a,b]$.

(ii) *Existuje posloupnost* $\{f_n\}\subset\mathbb{S}[a,b]$ *(jednoduchých skokových funkcí), která konverguje stenoměrně k* f *na* $[a,b]$.

(iii) *Pro každé* $\varepsilon>0$ *existuje dělení* $\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]$ *takové, že* $\omega_D(f)<\varepsilon$.

D ů k a z . a) Implikace (ii) $\Longrightarrow$ (i) je dokázána větou 4.4.

b) Předpokládejme, že platí (i) a nechť je dáno libovolné $\varepsilon>0$. Potom pro každé $x\in[a,b]$ existuje $\delta(x)>0$ takové, že platí

$$x-\delta(x)>a \text{ pro všechna } x\in(a,b],\quad x+\delta(x)<b \text{ pro všechna } x\in[a,b)$$

a

$$\left.\begin{aligned}&\omega_{(a,a+\delta(a))}(f)<\varepsilon,\ \omega_{(b-\delta(b),b)}(f)<\varepsilon,\\&\omega_{(x-\delta(x),x)}(f)<\varepsilon,\ \omega_{(x,x+\delta(x))}(f)<\varepsilon \text{ pro všechna } x\in(a,b)\,.\end{aligned}\right\}\tag{4.1}$$

Intervaly

$$[a,a+\delta(a)),\ (x-\delta(x),x+\delta(x)),\ x\in(a,b),\ (b-\delta(b),b]$$

tvoří otevřené pokrytí intervalu $[a,b]$, ze kterého lze podle Vitaliovy věty (viz např. [16, věta 81]) vybrat pokrytí konečné, tj. konečný systém intervalů

$$[a,a+\delta(a)),\ (x_i-\delta(x_i),x_i+\delta(x_i))\,,\ i=1,2,\dots,m-1,\ (b-\delta(b),b],$$

takový, že

$$[a,a+\delta(a))\cup\bigcup_{j=1}^{m}(x_i-\delta(x_i),x_i+\delta(x_i))\cup(b-\delta(b),b]\supset[a,b]\,,$$

Současně, vzhledem k (4.1), platí

$$\omega_{(x_i-\delta(x_i),x_i)}(f)<\varepsilon \ \text{ a } \ \omega_{(x_i,x_i+\delta(x_i))}(f)<\varepsilon \text{ pro všechna } i=1,2,\dots m-1\,.$$

Označme $x_0 = a$ a $x_m = b$ a nechť

$$\boldsymbol{\sigma} = \Big\{x_0, \sigma_1, x_1, \dots \sigma_{m-1}, x_{m-1}, \sigma_m, x_m\Big\},$$

kde

$$\sigma_i \in (x_i - \delta(x_i), x_{i-1} + \delta(x_{i-1})) \cap (x_{i-1}, x_i), \quad i = 1, 2, \dots, m-1.$$

Potom

$$\omega_{(a,\sigma_1)}(f) \le \omega_{(a,a+\delta(a))}(f) < \varepsilon, \quad \omega_{(\sigma_m,b)}(f) \le \omega_{(b-\delta(b),b)}(f) < \varepsilon$$

a

$$\omega_{(\sigma_i,x_i)}(f) \le \omega_{(x_i-\delta(x_i),x_i)}(f) < \varepsilon,\ \omega_{(x_i,\sigma_{i+1})}(f) \le \omega_{(x_i,x_i+\delta(x_i))}(f) < \varepsilon$$

pro každé $i = 1, 2, \dots, m-1$, tj.

$$\omega_D(f) < \varepsilon.$$

c) Předpokládejme, že platí (iii). Nechť je dáno $\varepsilon > 0$ a nechť

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m\} \in \mathscr{D}[a, b]$$

je dělení $[a, b]$ takové, že $\omega_D(f) < \varepsilon$. Pro každé $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ zvolme libovolně $\xi_i \in (\sigma_{i-1}, \sigma_i)$ a definujme

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} f(\sigma_i) & \text{pro } x = \sigma_i, \\ f(\xi_i) & \text{pro } x \in (\sigma_{i-1}, \sigma_i). \end{cases}$$

Pro každé $x \in [a, b]$ máme $|f(x) - g_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ a tudíž také $\|f - g_\varepsilon\| < \varepsilon$. Jestliže tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme $f_n = g_{1/n}$, bude $f_n \in \mathbb{S}[a, b]$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$ pro $n \to \infty$. $\square$

4.7. Důsledek. *Každá funkce regulovaná na $[a, b]$ je na $[a, b]$ ohraničená.*

D ů k a z. Podle tvrzení (iii) z věty 4.6 existuje dělení $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ intervalu $[a, b]$ takové, že

$$|f(x)| \le |f(\frac{\sigma_{j-1} + \sigma_j}{2})| + 1 \quad \text{pro } x \in (\sigma_{j-1}, \sigma_j),\ j \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Odtud plyne, že $|f(x)| \le M$ pro všechna $x \in [a, b]$, kde

$$M = \max\Big\{|f(a)|, |f(\frac{\sigma_{j-1} + \sigma_j}{2})| + 1, |f(\sigma_j)| : j = 1, 2, \dots, m\Big\} < \infty.$$

$\square$

4.8. Důsledek. *Pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje nejvýše konečně mnoho* $x \in [a,b]$ *takových, že platí*

$$|\Delta^+ f(x)| > \varepsilon \quad \textit{nebo} \quad |\Delta^- f(x)| > \varepsilon\,.$$

D ů k a z . Podle tvrzení (iii) z věty 4.6 ke každému $\varepsilon > 0$ můžeme najít dělení $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ intervalu $[a,b]$ takové, že

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{pro} \;\; x, y \in (\sigma_{j-1}, \sigma_j),\; j \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Speciálně, $|\Delta^+ f(x)| = |f(x+) - f(x)| \le \varepsilon$ a $|\Delta^- f(x)| = |f(x) - f(x-)| \le \varepsilon$ pro všechna $x \in [a,b] \setminus \boldsymbol{\sigma}$. Platí tedy tvrzení tohoto důsledku. $\square$

4.9. Věta. $\mathbb{G}[a,b]$ *je Banachův prostor vzhledem k normě*

$$\|f\|_{\mathbb{G}} = \|f\| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|\,.$$

D ů k a z . Předpokládejme, že posloupnost $\{f_n\} \subset \mathbb{G}[a,b]$ je cauchyovská v prostoru $\mathbb{G}[a,b]$. Jako v částech a) a b) důkazu věty 2.19 můžeme dokázat, že existuje funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ taková, že $\lim\limits_{n \to \infty} \|f_n - f\| = 0$. Podle věty 4.4 je $f \in \mathbb{G}[a,b]$ a tím je věta dokázána. $\square$

4.10. Poznámky.

(i) Podle definice 2.32 $f \in \mathbb{S}[a,b]$ právě tehdy, když existuje dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a,b]$ takové, že f je konstantní na každém podintervalu (σ_{j-1}, σ_j). Každá funkce z $\mathbb{S}[a,b]$ je konečná lineární kombinace funkcí tvaru $\chi_{(\alpha,\beta)}$ a $\chi_{[\tau]}$, kde (α,β) může být libovolný podinterval v $[a,b]$ a τ může být libovolný bod z $[a,b]$. Platí ovšem $\chi_{(\alpha,\beta)} = \chi_{(\alpha,b]} - \chi_{[\beta,b]}$ pro libovolná $\alpha, \beta \in [a,b]$, $\alpha < \beta$ a $\chi_{[\tau]} = \chi_{[\tau,b]} - \chi_{(\tau,b]}$ pro každé $\tau \in [a,b)$.

Tudíž $f \in \mathbb{S}[a,b]$ tehdy a jen tehdy, když f je konečná lineární kombinace charakteristických funkcí intervalů $[\tau,b]$, $(\tau,b]$, $\tau \in [a,b]$, a charakteristické funkce jednobodového intervalu $[b]$, tj.

$$\mathbb{S}[a,b] = \mathrm{Lin}\Big(\chi_{[\tau,b]},\; \chi_{(\tau,b]},\, \tau \in [a,b),\; \chi_{[b]}\Big)\,,$$

kde (Lin (M) značí lineární obal množiny M. Podobně bychom ukázali, že je také

$$\mathbb{S}[a,b] = \mathrm{Lin}\Big(\chi_{[a,\tau]},\; \chi_{[a,\tau)]},\, \tau \in (a,b],\; \chi_{[a]}\Big)\,,$$

(ii) Množina $\mathbb{S}[a,b]$ je podle tvrzení (ii) věty 4.6 hustá v $\mathbb{G}[a,b]$, tj. $\overline{\mathbb{S}[a,b]} = \mathbb{G}[a,b]$, kde $\overline{\mathbb{S}[a,b]}$ značí uzávěr $\mathbb{S}[a,b]$ v $\mathbb{G}[a,b]$.

4.11. Lemma. *Nechť* $\{f_n\} \subset \mathbb{G}[a,b]$ *a* $f_n \rightrightarrows f$ *na* $[a,b]$. *Potom platí též*

$$f_n(x-) \rightrightarrows f(x-) \;\; a \;\; f_n(x+) \rightrightarrows f(x+) \;\; na \; [a,b]\,,$$

kde $f(a-) = f(a),\ f(b+) = f(b)$ *a* $f_k(a-) = f_k(a),\ f_k(b+) = f_k(b)$ *pro* $k \in \mathbb{N}$.
D ů k a z . Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$\widetilde{f}_n(x) = \begin{cases} f_n(x+) & \text{když } x \in [a,b)\,, \\ f_n(b) & \text{když } x = b \end{cases}$$

a

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x+) & \text{když } x \in [a,b)\,, \\ f(b) & \text{když } x = b\,. \end{cases}$$

Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Existuje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takové, že je $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$ pro každé $n \ge n_\varepsilon$ a každé $t \in [a,b]$. Odtud ovšem limitním přechodem $t \to x+$ dostaneme, že také pro každé $x \in [a,b)$ a každé $n \ge n_\varepsilon$ platí

$$|\widetilde{f}_n(x) - \widetilde{f}(x)| = \lim_{t \to x+} |f_n(t) - f(t)| \le \varepsilon\,,$$

tj.

$$\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{f}_n - \widetilde{f}\| = 0 \text{ neboli } f_n(x+) \rightrightarrows f(x+) \quad \text{na } [a,b]\,.$$

Podobně bychom ukázali, že platí i $f_n(x-) \rightrightarrows f(x-)$ na $[a,b]$. □

Ve zbývající části kapitoly uvedeme několik tvrzení, které budou později (zejména v kapitolách 6 a 7) užitečné. Nejprve shrneme důsledky lemmatu 4.11 pro některé důležité podmnožiny prostoru $\mathbb{G}[a,b]$.

4.12. Důsledky. *Množiny*

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b] &= \{f \in \mathbb{G}[a,b] : f(x-) = f(x) \text{ na } (a,b)\}\,, \\ \widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{L}}[a,b] &= \{f \in \mathbb{G}[a,b] : f(x-) = f(x) \text{ na } (a,b]\}, \\ \mathbb{G}_{\mathrm{R}}[a,b] &= \{f \in \mathbb{G}[a,b] : f(x+) = f(x) \text{ na } (a,b)\}, \\ \widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{R}}[a,b] &= \{f \in \mathbb{G}[a,b] : f(x-) = f(x) \text{ na } [a,b)\}, \\ \mathbb{G}_{reg}[a,b] &= \{f \in \mathbb{G}[a,b] : f(x-) + f(x+) = 2\,f(x) \text{ na } (a,b)\} \end{aligned}\right\} \qquad (4.2)$$

jsou uzavřené v $\mathbb{G}[a,b]$ *a tudíž jsou to také Banachovy prostory vzhledem k operacím a normě indukovaným z* $\mathbb{G}[a,b]$.

□

4.13. Lemma.

$$\overline{\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]}=\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b],\quad \overline{\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{L}}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]}=\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{L}}[a,b],$$

$$\overline{\mathbb{G}_{\mathrm{R}}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]}=\mathbb{G}_{\mathrm{R}}[a,b],\quad \overline{\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{R}}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]}=\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{R}}[a,b],$$

$$\overline{\mathbb{G}_{reg}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]}=\mathbb{G}_{reg}[a,b].$$

D ů k a z . Dokážeme pouze první a poslední tvrzení. Zbývající vztahy se dokážou analogicky.

a) Nechť $f\in\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$ a $\varepsilon>0.$ Podle věty 4.6 (ii) existuje $\varphi\in\mathbb{S}[a,b]$ takové, že

$$|f(x)-\varphi(x)|\le\|f-\varphi\|<\varepsilon\quad\text{pro }\ x\in[a,b]\,. \tag{4.3}$$

Dále, pro každé $x\in(a,b)$ existuje $\delta(x)>0$ takové, že $x-\delta(x)>a$ a

$$|f(x)-f(t)|=|f(x-)-f(t)|<\varepsilon\quad\text{pro }\ t\in(x-\delta(x),x)\,.$$

Pro každé $x\in(a,b)$ a $t\in(x-\delta(x),x]$ tedy máme

$$|\varphi(x)-\varphi(t)|\le|\varphi(x)-f(x)|+|f(x)-f(t)|+|f(t)-\varphi(t)|<3\,\varepsilon\,,$$

tj.

$$|\varphi(x)-\varphi(x-)|\le3\,\varepsilon.$$

Položme

$$\widetilde{\varphi}(x)=\begin{cases}\varphi(x) & \text{pro }\ x=a \text{ nebo } x=b\,,\\ \varphi(x-) & \text{pro }\ x\in(a,b)\,.\end{cases}$$

Potom $\widetilde{\varphi}\in\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b],$

$$|f(x)-\widetilde{\varphi}(x)|=|f(x)-\varphi(x)|<\varepsilon\quad\text{když } x=a \text{ nebo } x=b$$

a

$$|f(x)-\widetilde{\varphi}(x)|$$
$$\le|f(x)-\varphi(x)|+|\varphi(x)-\varphi(x-)|<4\,\varepsilon\quad\text{když } x\in(a,b)\,.$$

Odtud už plyne, že množina $\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]$ je hustá v $\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b].$

b) Nechť $f\in\mathbb{G}_{\text{reg}}[a,b]$. Nechť je dáno $\varepsilon>0$ a funkce $\varphi\in\mathbb{S}[a,b]$ je taková, že platí ((4.3)). Potom musí být také

$$\left.\begin{aligned}&|f(x-)-\varphi(x-)|\le\varepsilon \quad \text{pro } x\in[a,b)\,,\\ \text{a}\qquad&\\ &|f(x+)-\varphi(x+)|\le\varepsilon \quad \text{pro } x\in(a,b]\,.\end{aligned}\right\}\tag{4.4}$$

Položme

$$\widetilde{\varphi}(x)=\begin{cases}\varphi(a) & \text{když }\ x=a\,,\\ \frac{1}{2}\Big(\varphi(x+)+\varphi(x-)\Big) & \text{když }\ x\in(a,b)\,,\\ \varphi(b) & \text{když }\ x=b\,.\end{cases}\tag{4.5}$$

Potom $\widetilde{\varphi}\in\mathbb{S}[a,b]\cap\mathbb{G}_{\text{reg}}[a,b]$. Dále, vzhledem k ((4.4)) a ((4.5)),

$$\begin{aligned}|f(x)-\widetilde{\varphi}(x)|&=\left|\tfrac{1}{2}\,[f(x+)+f(x-)]-\tfrac{1}{2}\,[\varphi(x+)+\varphi(x-)]\right|\\ &\le\tfrac{1}{2}\,\Big(\big|f(x+)-\varphi(x+)\big|+\big|f(x-)-\varphi(x-)\big|\Big)\le\varepsilon\end{aligned}$$

když $x\in(a,b)$. Konečně, podle (4.3) a (4.5) máme

$$|f(x)-\widetilde{\varphi}(x)|=|f(x)-\varphi(x)|<\varepsilon \text{ když }\ x=a \text{ nebo } x=b\,.$$

Odtud už plyne, že platí $\overline{\mathbb{G}_{\text{reg}}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]}=\mathbb{G}_{\text{reg}}[a,b]$. □

4.14. Lemma.

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]&=\mathrm{Lin}\Big(1,\ \chi_{(\tau,b]},\tau\in[a,b),\ \chi_{[b]}\Big)\,,\\
\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{L}}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]&=\mathrm{Lin}\Big(\chi_{[a,\tau]},\tau\in(a,b]\Big)\,,\\
\mathbb{G}_{\mathrm{R}}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]&=\mathrm{Lin}\Big(1,\ \chi_{[a]},\chi_{[\tau,b]},\tau\in[a,b)\Big)\,,\\
\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{R}}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]&=\mathrm{Lin}\Big(\chi_{[\tau,b]},\tau\in[a,b)\Big)\,,\\
\mathbb{G}_{reg}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]&=\mathrm{Lin}\Big(1,\ \chi_{(a,b]},\ \frac{1}{2}\,\chi_{[\tau]}+\chi_{(\tau,b]},\tau\in(a,b),\ \chi_{[b]}\Big)\,,\\
\widetilde{\mathbb{G}}_{reg}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]&=\mathrm{Lin}\Big(1,\ \frac{1}{2}\,\chi_{[\tau]}+\chi_{(\tau,b]},\ \tau\in(a,b)\Big)\,.
\end{aligned}$$

D ů k a z . První tvrzení je obsaženo v poznámce 4.10 (i). Dokážeme ještě např. předposlední z uvedených relací.

Nechť tedy $f\in\mathbb{S}[a,b]\cap\mathbb{G}_{\text{reg}}[a,b]$. Potom existují

$$m\in\mathbb{N},\ \ c_0,c_1,\dots,c_{m+1}\in\mathbb{R}\ \text{ a }\ \boldsymbol{\sigma}=\big\{\sigma_0,\sigma_1,\dots,\sigma_m\big\}\in\mathscr{D}[a,b]$$

takové, že

$$f(x)=\begin{cases} c_0 & \text{když } x=a, \\ c_j & \text{když } x\in(\sigma_{j-1},\sigma_j) \text{ pro nějaké } j=1,2,\dots,m\,, \\ \frac{c_j+c_{j+1}}{2} & \text{když } x=\sigma_j \text{ pro nějaké } j=1,2,\dots,m{-}1\,, \\ c_{m+1} & \text{když } x=b, \end{cases}$$

tj.

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= c_0\,\chi_{[a]}(x)+\sum_{j=1}^{m} c_j\,\chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j)}(x) \\ &+\frac{1}{2}\Big(\sum_{j=1}^{m-1}\big(c_j+c_{j+1}\big)\,\chi_{[\sigma_j\,]}(x)\Big)+c_{m+1}\chi_{[b]}(x) \text{ pro } x\in[a,b\,]\,. \end{aligned}\right\} \quad (4.6)$$

Pravou stranu vztahu ((4.6)) můžeme upravit takto

$$\begin{aligned} f = {} & c_0\,\chi_{[a,b\,]}-c_0\,\chi_{(a,b]}+\sum_{j=1}^{m} c_j\,\chi_{(\sigma_{j-1},b]}-\sum_{j=1}^{m-1} c_j\,\chi_{[\sigma_j,b]}-c_m\,\chi_{[b]} \\ + {} & \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1} c_j\,\chi_{[\sigma_j\,]}+\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1} c_{j+1}\,\chi_{[\sigma_j\,]}+c_{m+1}\,\chi_{[b]} \\ = {} & c_0\,\chi_{[a,b\,]}-c_0\,\chi_{(a,b]}+\sum_{j=1}^{m} c_j\,\chi_{(\sigma_{j-1},b]}-\sum_{j=1}^{m-1} c_j\,\big(\chi_{(\sigma_j,b]}+\chi_{[\sigma_j\,]}\big) \\ + {} & \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1} c_j\,\chi_{[\sigma_j\,]}+\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1} c_{j+1}\,\chi_{[\sigma_j\,]}+\big(c_{m+1}-c_m\big)\,\chi_{[b]} \\ = {} & c_0\,\chi_{[a,b\,]}-c_0\,\chi_{(a,b]}+\sum_{j=0}^{m-1} c_{j+1}\,\chi_{(\sigma_j,b]}-\sum_{j=1}^{m-1} c_j\,\chi_{(\sigma_j,b]} \\ - {} & \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1} c_j\,\chi_{[\sigma_j\,]}+\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1} c_{j+1}\,\chi_{[\sigma_j\,]}+\big(c_{m+1}-c_m\big)\,\chi_{[b]} \\ = {} & c_0\chi_{[a,b\,]}+\big(c_1-c_0\big)\,\chi_{(a,b]}+\sum_{j=1}^{m-1}\big(c_{j+1}-c_j\big)\,\Big(\chi_{(\sigma_j,b]}+\tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_j\,]}\Big) \\ + {} & \big(c_{m+1}-c_m\big)\,\chi_{[b]} \\ = {} & d_0\chi_{[a,b\,]}+d_1\,\chi_{(a,b]}+\sum_{j=2}^{m} d_j\,\Big(\chi_{(\sigma_j,b]}+\tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_j\,]}\Big)+d_{m+1}\,\chi_{[b]}\,, \end{aligned}$$

kde

$$d_0 = c_0,\ \ d_j = c_j - c_{j-1} \text{ pro } \ j = 1, 2, \ldots, m+1\,. \tag{4.7}$$

Dokázali jsme tedy, že

$$f \in \mathrm{Lin}\Big(1, \chi_{(a,b]}, \frac{1}{2}\,\chi_{[\tau]} + \chi_{[\tau,b]}, \tau \in (a,b), \chi_{[b]}\Big)\,.$$

Protože vztahy ((4.7)) definují vzájemně jednoznačnou korespondenci mezi vektory

$$(c_0, c_1, \ldots, c_m, c_{m+1}) \ \text{ a } \ (d_0, d_1, \ldots, d_m, d_{m+1})\,,$$

znamená to, že platí

$$\mathbb{G}_{\text{reg}}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b] = \mathrm{Lin}\Big(1, \chi_{(a,b]}, \chi_{[\tau]}, \chi_{[\tau,b]}, \tau \in (a,b), \chi_{[b]}\Big)\,. \qquad \square$$

Další podrobnosti týkající se regulovaných funkcí lze najít zejména v monografii *Volterra Stieltjes-Integral Equations* [14, sec.3] Ch. Höniga. Užitečné speciální dodatky (např. charakterizace prekompaktních množin v prostoru $\mathbb{G}[a,b]$, zobecnění Hellyovy věty o výběru) jsou obsaženy také v práci D. Fraňkové [6].