Kapitola 5

Riemannův-Stieljesův integrál

Odpověď na některé úlohy zmíněné v úvodní kapitole dává integrál Riemannův – Stieltjesův, který je přirozeným zobecněním známého integrálu Riemannova.

5.1 Definice a základní vlastnosti

Připomeňme (viz definice 2.1), že konečnou množinu $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\}$ bodů intervalu $[a, b]$ nazýváme *dělením intervalu* $[a, b]$, jestliže platí

$$a = \sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_{\nu(\boldsymbol{\sigma})} = b\,.$$

Množinu všech dělení intervalu $[a, b]$ značíme $\mathscr{D}[a, b]$ a

$$|\boldsymbol{\sigma}| = \max_{j = 1,2,\ldots,\nu(\boldsymbol{\sigma})} (\sigma_j - \sigma_{j-1})$$

a říkáme, že $\boldsymbol{\sigma}'$ je *zjemnění* $\boldsymbol{\sigma}$ jestlie $\boldsymbol{\sigma}' \supset \boldsymbol{\sigma}$.

5.1. Definice. Dvojici $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{D}[a, b] \times \mathbb{R}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}$ nazveme *značeným dělením* intervalu $[a, b]$, jestliže platí

$$\sigma_{j-1} \le \xi_j \le \sigma_j \quad \text{pro všechna } j = 1, 2, \ldots, \nu(\boldsymbol{\sigma})\,.$$

$\mathscr{T}[a, b]$ je množina všech značených dělení intervalu $[a, b]$. Říkáme také, že ξ_j je *značka* podintervalu $[\sigma_{j-1}, \sigma_j]$ a $\boldsymbol{\xi}$ je *vektor značek*.

Pro dané dělení $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a, b]$ značíme symbolem $\tau(\boldsymbol{\sigma})$ množinu všech $\xi \in \mathbb{R}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}$ takových, že $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a, b]$.

Abychom zabránili záměně s elementy množin $\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\sigma}, \ldots$ či vektorů $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots$, budeme posloupnosti dělení resp. značených dělení zapisovat jako např. $\{\boldsymbol{\sigma}^n\}$ resp. $(\boldsymbol{\rho}^n, \boldsymbol{\eta}^n)$. Záměna s mocninami zde nehrozí.

5.2. Definice. Pro dané funkce $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ a značené dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a, b]$ definujeme

$$S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}; [a, b]) := \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} f(\xi_j)\,[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})]\,.$$

Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme psát krátce $S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}; [a, b])$ resp. $S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ místo $S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}; [a, b])$.

5.3. Definice. Nechť $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$.

(i) Řekneme, že existuje *Riemannův – Stieltjesův* (δ) *integrál* (krátce (δ) RS – integrál) funkce f vzhledem k funkci g

$$(\delta)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}[g(x)] \quad \Big(\text{značíme též } (\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\Big)$$

a má hodnotu $I \in \mathbb{R}$, jestliže

$$\left.\begin{aligned} &\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0 : \\ &\quad\Big((\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a,b] \text{ a } |\boldsymbol{\sigma}| < \delta\Big) \implies |S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - I| < \varepsilon\,. \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

(ii) Řekneme, že existuje *Riemannův– Stieltjesův* (σ) *integrál* (krátce (σ) RS – integrál) funkce f vzhledem k funkci g

$$(\sigma)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}[g(x)] \quad \Big(\text{značíme též } (\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\Big)$$

a má hodnotu $I \in \mathbb{R}$, jestliže

$$\left.\begin{aligned} &\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b] : \\ &\quad\Big((\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a,b] \text{ a } \boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon\Big) \implies |S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - I| < \varepsilon\,. \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

(iii) Jestliže $c \in [a,b]$ a funkce f, g jsou definovány v bodě c, klademe

$$(\delta)\int_c^c f\,\mathrm{d}g = (\sigma)\int_c^c f\,\mathrm{d}g = 0.$$

Existuje-li integrál $(\delta)\!\int f\,\mathrm{d}\,g$, pak definujeme $(\delta)\displaystyle\int_b^a f\,\mathrm{d}\,g = -(\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ a existuje-li integrál $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$, definujeme $(\sigma)\displaystyle\int_b^a f\,\mathrm{d}\,g = -(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$.

5.4. Poznámka. Pojem (δ) RS – integrálu odpovídá původní Stieltjesově definici, zatímco (σ) RS – integrál bývá někdy nazýván též *Mooreův–Pollardův* integrál.

Klasický Riemannův integrál je speciálním případem (δ) RS – integrálu pokud $g(x) \equiv x$ pro $x \in [a,b]$.

Vyskytne-li se v některých tvrzeních pojem RS – integrál, bez rozlišení zda se jedná o (δ) RS – integrál či o (σ) RS – integrál, bude to znamenat, že dané tvrzení platí pro oba pojmy. V takových a dalších případech, kdy nehrozí nedorozumění, také nepřipojujeme symboly (δ) či (σ) k symbolům integrálů. Funkce f v integrálu $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ se nazývá *integrand*, zatímco funkce g se nazývá *integrátor*.

Z definice 5.3 usoudíme, že (δ) RS – integrál je speciálním případem (σ) RS – integrálu.

5.5. Věta. *Je-li* $(\delta)\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g = I \in \mathbb{R}$, *pak platí také* $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g = I$.

D ů k a z . Pro každá dvě dělení $\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\sigma}'' \in \mathscr{D}[a,b]$ taková, že $\boldsymbol{\sigma}''$ je zjemnění $\boldsymbol{\sigma}'$, platí $|\boldsymbol{\sigma}''| \le |\boldsymbol{\sigma}'|$. Věta je tedy přímým důsledkem definice 5.3. $\square$

5.6. Poznámka. Budiž dáno libovolné $\delta_0 > 0$. Potom v definici 5.1 (i) můžeme podmínku (5.1) nahradit následující trochu zeslabenou podmínkou

$$\left.\begin{aligned} &\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta \in (0, \delta_0):\\ &\quad \Big((\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a,b] \ \text{ a } \ |\boldsymbol{\sigma}| < \delta\Big) \implies |S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - I| < \varepsilon\,. \end{aligned}\right\} \tag{5.1'}$$

Podobně, je-li dáno $\boldsymbol{\sigma}_0 \in \mathscr{D}[a,b]$, můžeme v definici 5.3 (ii) podmínku (5.2) nahradit podmínkou

$$\left.\begin{aligned} &\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b]:\\ &\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \supset \boldsymbol{\sigma}_0 \text{ a } \Big((\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a,b] \text{ a } \boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon\Big) \implies |S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - I| < \varepsilon\,. \end{aligned}\right\} \tag{5.2'}$$

5.7. Cvičení. Rozmyslete si podrobně proč platí tvrzení uvedená v poznámce 5.6.

5.8. Příklad. Nechť $a = -1,\ b = 1$ a

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{když } x \le 0,\\ 1 & \text{když } x > 0 \end{cases} \quad \text{a} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{když } x < 0,\\ 1 & \text{když } x \ge 0. \end{cases}$$

Položme $\boldsymbol{\sigma}_0 = \{-1, 0, 1\}$. Potom pro každé dělení $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[-1,1]$, které je zjemněním $\boldsymbol{\sigma}_0$ (a tedy $0 \in \boldsymbol{\sigma}$), a každé $\boldsymbol{\xi} \in \tau(\boldsymbol{\sigma})$ máme

$$S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) = f(\xi_k)\,[g(0) - g(\sigma_{k-1})] + f(\xi_{k+1})\,[g(\sigma_{k+2}) - g(0)] = 0,$$

kde $0 = \sigma_k,\ \xi_k \in [\sigma_{k-1}, 0],\ \xi_{k+1} \in [0, \sigma_{k+1}]$ a tudíž $f(\xi_k) = 0$ a $g(\sigma_{k+2}) - g(0) = 0$. Vzhledem ke druhé části poznámky 5.6, vidíme, že $(\sigma)\displaystyle\int_{-1}^1 f \,\mathrm{d}\, g = 0$.

Na druhou stranu, pro každé značené dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ intervalu $[-1,1]$ takové, že $0 \notin \boldsymbol{\sigma}$, tj. $\sigma_{k-1} < 0 < \sigma_k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$, platí

$$S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) = f(\xi_k)\,[g(\sigma_k) - g(\sigma_{k-1})] = -f(\xi_k) = -\begin{cases} 0 & \text{když } \xi_{k+1} \le 0,\\ 1 & \text{když } \xi_{k+1} > 0\,. \end{cases}$$

Odtud je zřejmé, že $(\delta)\displaystyle\int_{-1}^1 f \,\mathrm{d}\, g$ nemůže existovat.

Následující dvě lemmata platí pro oba typy RS – integrálů a jsou přímými důsledky definice 5.3. Jejich důkazy ponecháváme čtenáři jako cvičení.

5.9. Lemma. (i) *Jestliže existuje integrál* $\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g$, *pak platí*

$$\Big|\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g\Big| \le \|f\| \operatorname{var}_a^b g\,.$$

(ii) *Jestliže navíc existuje také integrál* $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}\big[\operatorname{var}_a^x g\big]$, *pak platí*

$$\Big|\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}\, g(x)\Big| \le \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}\big[\operatorname{var}_a^x g\big] \le \|f\| \operatorname{var}_a^b g\,. \qquad \square$$

5.10. Poznámka. Uvidíme později (viz důsledek 5.39), že pro oba typy RS – integrálů platí, že z existence integrálu $\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g$ už plyne, že také integrál $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}\big[\operatorname{var}_a^x g\big]$ existuje.

5.11. Lemma. *Nechť* $f,\ f_1,\ f_2,\ g,\ g_1,\ g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ *a nechť existují integrály :*

$$\int_a^b f_1 \, \mathrm{d}\, g,\ \int_a^b f_2 \, \mathrm{d}\, g,\ \int_a^b f \, \mathrm{d}\, g_1 \ \text{ a } \ \int_a^b f_2 \, \mathrm{d}\, g_2.$$

Potom pro libovolná $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *platí*

$$\int_a^b (c_1\, f_1 + c_2\, f_2) \, \mathrm{d}\, g = c_1 \int_a^b f_1 \, \mathrm{d}\, g + c_2 \int_a^b f_2 \, \mathrm{d}\, g,$$

a

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}[c_1\, g_1 + c_2\, g_2] = c_1 \int_a^b f \, \mathrm{d}\, g_1 + c_2 \int_a^b f \, \mathrm{d}\, g_2\,. \qquad \square$$

5.12. Cvičení. (i) Dokažte lemmata 5.9 a 5.11.

Dokažte, že následující tvrzení platí pro oba typy RS – integrálů:

(ii) *Jestliže* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *je neklesající na* $[a,b]$ *a* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *je taková, že existuje integrál* $\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g$, *pak*

$$\Big(\inf_{x \in [a,b]} f(x)\Big)\,[g(b) - g(a)] \le \Big|\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g\Big| \le \Big(\sup_{x \in [a,b]} f(x)\Big)\,[g(b) - g(a)]\,.$$

(iii) *definice 5.2 je korektní v tom smyslu, že určuje hodnotu integrálu jednoznačně. Jinak řečeno, jestliže* $I_1 \in \mathbb{R}$ *a* $I_2 \in \mathbb{R}$ *splňují* (5.1) $($*s* I_1 *resp.* I_2 *na místě* $I)$, *pak musí být* $I_1 = I_2$ $($*a podobně pro* (5.2)$)$.

Oba pojmy RS – integrálu představují jakési zobecněné limity posloupnosti integrálních součtů $S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ vzhledem k značeným dělením. Nepřekvapí tedy, že platí následující existenční tvrzení analogická klasické Bolzanově – Cauchyově podmínce.

5.13. Věta (BOLZANOVA – CAUCHYOVA PODMÍNKA)**.**
Pro dané funkce $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *existuje* $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *právě tehdy, když je splněna následující podmínka*

$$\left.\begin{aligned} &\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta_\varepsilon>0:\\ &\quad\Big((\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}),(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}},\widetilde{\boldsymbol{\xi}})\in\mathscr{T}[a,b],\ |\boldsymbol{\sigma}|<\delta_\varepsilon\ \ \text{a}\ \ |\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}|<\delta_\varepsilon\Big)\\ &\qquad\qquad\Longrightarrow\ |S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}},\widetilde{\boldsymbol{\xi}})|<\varepsilon. \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

Podobně, $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g \in \mathbb{R}$ *právě tehdy, když*

$$\left.\begin{aligned} &\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon\in\mathscr{D}[a,b]:\\ &\quad\Big((\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}),(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}},\widetilde{\boldsymbol{\xi}})\in\mathscr{T}[a,b],\ \boldsymbol{\sigma}\supset\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon\ \ \text{a}\ \ \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}\supset\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon\Big)\\ &\qquad\qquad\Longrightarrow\ |S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}},\widetilde{\boldsymbol{\xi}})|<\varepsilon. \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

D ů k a z . Nutnost splnění uvedených podmínek pro existenci příslušných integrálů je zřejmá z definice 5.3.

Dokážeme, že podmínka (5.4) zaručuje existenci integrálu $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$. Nechť tedy platí (5.4). Potom existuje posloupnost $\{(\boldsymbol{\sigma}^k,\boldsymbol{\xi}^k)\}$ značených dělení intervalu $[a,b]$ taková, že

$$|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S(\boldsymbol{\sigma}^k,\boldsymbol{\xi}^k)|<\tfrac{1}{k}\quad\text{pro každé }\boldsymbol{\sigma}\supset\boldsymbol{\sigma}^k\ \text{ a }\ \boldsymbol{\xi}\in\tau(\boldsymbol{\sigma}) \tag{5.5}$$

a přitom současně

$$\boldsymbol{\sigma}^k\subset\boldsymbol{\sigma}^\ell\ \text{ a }\ |S(\boldsymbol{\sigma}^k,\boldsymbol{\xi}^k)-S(\boldsymbol{\sigma}^\ell,\boldsymbol{\xi}^\ell)|<\frac{1}{k}\quad\text{pro každé }k\in\mathbb{N}\ \text{ a }\ \ell\geq k\,. \tag{5.6}$$

Posloupnost $\{S(\boldsymbol{\sigma}^k,\boldsymbol{\xi}^k)\}$ je cauchyovská posloupnost reálných čísel a existuje tedy reálné číslo $I\in\mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{k\to\infty} S(\boldsymbol{\sigma}^k,\boldsymbol{\xi}^k)=I\,.$$

Nyní, nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme k_ε tak, aby bylo současně

$$\frac{1}{k_\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad |S(\boldsymbol{\sigma}^{k_\varepsilon}, \boldsymbol{\xi}^{k_\varepsilon}) - I| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{5.7}$$

Potom, díky (5.5) a (5.7), odvodíme, že

$$|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - I| \le |S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S(\boldsymbol{\sigma}^{k_\varepsilon}, \boldsymbol{\xi}^{k_\varepsilon})| + |S(\boldsymbol{\sigma}^{k_\varepsilon}, \boldsymbol{\xi}^{k_\varepsilon}) - I| < \varepsilon$$

platí pro každé $\boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}^{k_\varepsilon}$ a $\boldsymbol{\xi} \in \tau(\boldsymbol{\sigma})$. To znamená, že

$$I = (\sigma)\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g\,.$$

Implikace (5.3) $\Longrightarrow (\delta)\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g \in \mathbb{R}$ by se dokazovala podobně a ponechává se čtenáři jako cvičení. □

5.14. Cvičení. (i) Dokažte větu 5.13 pro (δ) RS – integrály.

(ii) Dokažte, že podmínky (5.3) resp. (5.4) jsou ekvivalentní s podmínkami :

$$\left.\begin{array}{l} \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_\varepsilon > 0 : \\ \quad \Big((\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}'), (\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\xi}'') \in \mathscr{T}[a,b],\ |\boldsymbol{\sigma}'| < \delta_\varepsilon,\ \boldsymbol{\sigma}'' \supset \boldsymbol{\sigma}' \Big) \\ \qquad\qquad \Longrightarrow\ |S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') - S(\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\xi}'')| < \varepsilon \end{array}\right\} \tag{5.3'}$$

resp.

$$\left.\begin{array}{l} \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b] : \\ \quad \Big((\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}'), (\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\xi}'') \in \mathscr{T}[a,b],\ \boldsymbol{\sigma}'' \supset \boldsymbol{\sigma}' \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \Big) \\ \qquad\qquad \Longrightarrow\ |S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') - S(\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\xi}'')| < \varepsilon\,. \end{array}\right\} \tag{5.4'}$$

(Návod: nechť $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\rho} \in \mathscr{D}[a,b]$ a $\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} \cup \boldsymbol{\rho}$, potom $\boldsymbol{\sigma}' \in \mathscr{D}[a,b]$, $\boldsymbol{\sigma}' \supset \boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\sigma}' \supset \boldsymbol{\rho}$ a

$$\big|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})\big| \le \big|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}')\big| + \big|S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') - S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})\big|$$

pro libovolná $\boldsymbol{\xi} \in \tau(\boldsymbol{\sigma})$, $\boldsymbol{\eta} \in \tau(\boldsymbol{\rho})$ a $\boldsymbol{\xi}' \in \tau(\boldsymbol{\sigma}')$.)

Následující věta je přímým důsledkem věty 5.13. Platí ve stejném znění pro oba typy RS – integrálů.

5.15. Věta. *Jestliže existuje integrál* $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *a jestliže* $[c,d]\subset[a,b]$, *pak existuje také integrál* $\int_c^d f\,\mathrm{d}\,g$.

D ů k a z . Předpokládejme, že $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\in\mathbb{R}$. Podle věty 5.13 existuje dělení $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon\in\mathscr{D}[a,b]$ takové, že

$$|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')|<\varepsilon \tag{5.8}$$

platí pro všechna značená dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}),(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')\in\mathscr{T}[a,b]$ taková, že $\boldsymbol{\sigma}\supset\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$ a $\boldsymbol{\sigma}'\supset\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$. Vzhledem k tvrzení obsaženém ve cvičení 5.12 (iv), můžeme předpokládat, že $\{c,d\}\subset\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$ a můžeme tedy rozložit $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$ tak, že bude

$$\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon=\boldsymbol{\rho}^-\cup\boldsymbol{\rho}_\varepsilon\cup\boldsymbol{\rho}^+,\ \text{kde}\ \boldsymbol{\rho}^-\in\mathscr{D}[a,c],\ \boldsymbol{\rho}_\varepsilon\in\mathscr{D}[c,d],\ \boldsymbol{\rho}^+\in\mathscr{D}[d,b]\,.$$

Nyní, nechť $\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}'\in\mathscr{D}[c,d]$, $\boldsymbol{\rho}\supset\boldsymbol{\rho}_\varepsilon$, $\boldsymbol{\rho}'\supset\boldsymbol{\rho}_\varepsilon$ a $(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})$, $(\boldsymbol{\rho}',\boldsymbol{\eta}')\in\mathscr{T}[c,d]$. Definujme

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\rho}^-\cup\boldsymbol{\rho}\cup\boldsymbol{\rho}^+,\ \boldsymbol{\eta}=(\boldsymbol{\eta}^-,\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta}^+)\ \text{ a }\ \boldsymbol{\sigma}'=\boldsymbol{\rho}^-\cup\boldsymbol{\rho}'\cup\boldsymbol{\rho}^+,\ (\boldsymbol{\eta}^-,\boldsymbol{\eta}',\boldsymbol{\eta}^+)\,,$$

kde η^-,η^+ jsou takové vektory, že $(\boldsymbol{\rho}^-,\boldsymbol{\eta}^-)\in\mathscr{T}[a,c]$ a $(\boldsymbol{\rho}^+,\boldsymbol{\eta}^+)\in\mathscr{T}[d,b]$. Zřejmě je $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}),(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')\in\mathscr{T}[a,b]$,

$$\boldsymbol{\sigma}\supset\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon,\ \boldsymbol{\sigma}'\supset\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon,\ S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})=S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})\quad\text{a}\quad S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')=S(\boldsymbol{\rho}',\boldsymbol{\eta}')\,.$$

Podle (5.8) tedy máme

$$|S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})-S(\boldsymbol{\rho}',\boldsymbol{\eta}')|=|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')|<\varepsilon$$

a odtud podle věty 5.13 plyne existence integrálu $(\sigma)\int_c^d f\,\mathrm{d}\,g$.

Důkaz tvrzení věty pro (δ)RS – integrál se provede analogicky a je ponechán čtenáři jako cvičení. $\square$

5.16. Cvičení. Dokažte tvrzení věty 5.15 pro (δ)RS – integrály.

Také následující tvrzení platí ve stejné podobě pro oba typy RS – integrálu.

5.17. Věta. *Jestliže existuje integrál* $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *a* $c\in[a,b]$, *pak existují také integrály*

$$\int_a^c f\,\mathrm{d}\,g\quad a\quad\int_c^b f\,\mathrm{d}\,g$$

a platí

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = \int_a^c f\,\mathrm{d}\,g + \int_c^b f\,\mathrm{d}\,g\,.$$

D ů k a z . Je-li $c=a$ nebo $c=b$, je tvrzení věty triviální. Nechť je tedy $c\in(a,b)$. Dále, předpokládejme, že existuje integrál $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$. Potom existence integrálů $(\sigma)\int_a^c f\,\mathrm{d}\,g$ a $(\sigma)\int_c^b f\,\mathrm{d}\,g$ je zaručena větou 5.15.

Nechť $\varepsilon>0$. Zvolme značená dělení $(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')\in\mathscr{T}[a,c]$ a $(\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'')\in\mathscr{T}[c,b]$ tak, aby platilo

$$\left.\begin{aligned} &\Big|S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')-\int_a^c f\,\mathrm{d}\,g\Big|+\Big|S(\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'')-\int_c^b f\,\mathrm{d}\,g\Big|\\ &\qquad\qquad\qquad+\Big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\Big|<\varepsilon\,,\\ &\text{kde }\ \boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}'\cup\boldsymbol{\sigma}''\in\mathscr{D}[a,b]\ \text{ a }\ \boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\xi}',\boldsymbol{\xi}'')\in\tau(\boldsymbol{\sigma})\,. \end{aligned}\right\}\tag{5.9}$$

Zřejmě platí $S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})=S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')+S(\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'')$. Tudíž

$$\begin{aligned} &\Big|\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g-\int_a^c f\,\mathrm{d}\,g-\int_c^b f\,\mathrm{d}\,g\Big|\\ &\quad\le\Big|\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g-S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\Big|+\Big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')-S(\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'')\Big|\\ &\quad\quad+\Big|S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')-\int_a^c f\,\mathrm{d}\,g\Big|+\Big|S(\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'')-\int_c^b f\,\mathrm{d}\,g\Big|<\varepsilon\,. \end{aligned}$$

Protože $\varepsilon>0$ bylo libovolné, důkaz je dokončen. □

5.18. Cvičení. Rozmyslete si proč z existence integrálů

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g,\quad \int_a^c f\,\mathrm{d}\,g,\quad \int_c^b f\,\mathrm{d}\,g$$

plyne existence značených dělení $(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')\in\mathscr{T}[a,c]$ a $(\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'')\in\mathscr{T}[c,b]$ takových, že platí (5.9).

Důkaz implikace obrácené ke tvrzení věty 5.17 je pro (σ) RS – integrál poměrně lehký:

5.19. Věta. *Jestliže* $c \in [a,b]$ *a jestliže existují integrály*

$$I_1 = (\sigma)\int_a^c f \, \mathrm{d}\, g \quad a \quad I_2 = (\sigma)\int_c^b f \, \mathrm{d}\, g,$$

pak existuje také integrál $I = (\sigma)\displaystyle\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g$ *a platí* $I = I_1 + I_2$.

D ů k a z . Buď dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme dělení $\boldsymbol{\sigma}'_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,c]$ a $\boldsymbol{\sigma}''_\varepsilon \in \mathscr{D}[c,b]$ tak, aby platilo

$$\big|S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') - I_1\big| < \varepsilon \ \text{ pro } \ (\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') \in \mathscr{T}[a,c] \text{ takové, že } \boldsymbol{\sigma}' \supset \boldsymbol{\sigma}'_\varepsilon$$

a

$$\big|S(\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\xi}'') - I_2\big| < \varepsilon \ \text{ pro } \ (\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\xi}'') \in \mathscr{T}[c,b] \text{ takové, že } \boldsymbol{\sigma}'' \supset \boldsymbol{\sigma}''_\varepsilon \, .$$

Nyní, nechť $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon = \boldsymbol{\sigma}'_\varepsilon \cup \boldsymbol{\sigma}''_\varepsilon$. Protože $c \in \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$, každé značené dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a,b]$ splňující $\boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$ můžeme rozdělit

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' \cup \boldsymbol{\sigma}'' \quad \text{a} \quad \boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi}', \boldsymbol{\xi}'')$$

tak, že bude platit

$$(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') \in \mathscr{T}[a,c], \ (\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\xi}'') \in \mathscr{T}[c,b], \ \boldsymbol{\sigma}' \supset \boldsymbol{\sigma}'_\varepsilon \quad \text{a} \quad \boldsymbol{\sigma}'' \supset \boldsymbol{\sigma}''_\varepsilon.$$

Navíc, je

$$S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) = S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') + S(\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\xi}'').$$

Vzhledem k definici $\boldsymbol{\sigma}'_\varepsilon$ a $\boldsymbol{\sigma}''_\varepsilon$ tedy pro každé $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a,b]$, kde $\boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$, máme

$$\big|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - (I_1 + I_2)\big| \le \big|S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') - I_1\big| + \big|S(\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\xi}'') - I_2\big| < 2\,\varepsilon\,,$$

tj. dokázali jsme tvrzení věty. □

5.20. Poznámka. Aby mohlo platit analogické tvrzení také pro (δ)RS – integrál je třeba přidat předpoklad o pseudoaditivitě funkcí f, g v bodě c, viz cvičení 5.31.

Pro existenci (δ)RS – integrálu máme také následující přirozenou a lépe ověřitelnou nutnou a postačující podmínku.

5.21. Věta. *Pro dané funkce* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *integrál* $(\delta)\displaystyle\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g$ *existuje právě tehdy, když pro každou posloupnost* $\{(\boldsymbol{\sigma}^n, \boldsymbol{\xi}^n)\} \subset \mathscr{T}[a,b]$ *značených dělení intervalu* $[a,b]$ *takovou, že* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |\boldsymbol{\sigma}^n| = 0$, *má posloupnost* $\{S(\boldsymbol{\sigma}^n, \boldsymbol{\xi}^n)\}$ *konečnou limitu.*

D ů k a z . Nutnost uvedené podmínky je zřejmá. Zbývá dokázat její postačitelnost.

Předpokládejme tedy, že limita $\lim\limits_{n\to\infty} S(\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\xi}^n)$ existuje (a je konečná) pro každou posloupnost $\{(\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\xi}^n)\}\subset\mathscr{T}[a,b]$ takovou, že $\lim\limits_{n\to\infty}|\boldsymbol{\sigma}^n|=0.$

Nechť existují dvě posloupnosti značených dělení $\{(\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\xi}^n)\}\subset\mathscr{T}[a,b]$ a $\{(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^n,\widetilde{\boldsymbol{\xi}}^n)\}\subset\mathscr{T}[a,b]$ takové, že $\lim_{n\to\infty}|\boldsymbol{\sigma}^n|=\lim_{n\to\infty}|\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^n|=0$ a

$$\lim_{n\to\infty} S(\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\xi}^n)=I\in\mathbb{R}\quad\text{a}\quad\lim_{n\to\infty} S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^n,\widetilde{\boldsymbol{\xi}}^n)=\widetilde{I}\in\mathbb{R}\,.$$

Sestavme nyní novou posloupnost

$$\{S(\boldsymbol{\rho}^n,\boldsymbol{\eta}^n)\}=\Big\{S(\boldsymbol{\sigma}^1,\boldsymbol{\xi}^1),S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^1,\widetilde{\boldsymbol{\xi}}^1),S(\boldsymbol{\sigma}^2,\boldsymbol{\xi}^2),S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^2,\widetilde{\boldsymbol{\xi}}^2),\dots\Big\}$$

Podle našeho předpokladu má také posloupnost $\big\{S(\boldsymbol{\rho}^n,\boldsymbol{\eta}^n)\big\}$ konečnou limitu $J\in\mathbb{R}$ a, protože obsahuje obě posloupnosti

$$\{S(\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\xi}^n)\}\ \text{ a }\ \{S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^n,\widetilde{\boldsymbol{\xi}}^n)\}\,,$$

musí platit $I=\widetilde{I}=J.$ To znamená, že hodnota limity

$$I=\lim_{n\to\infty} S(\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\xi}^n)$$

nezávisí na volbě posloupnosti $\{(\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\xi}^n)\}$ značených dělení intervalu $[a,b]$ pro kterou platí $\lim\limits_{n\to\infty}|\boldsymbol{\sigma}^n|=0.$

Nyní, nechť $\{(\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\xi}^n)\}\subset\mathscr{T}[a,b]$ je libovolná posloupnost taková, že

$$\lim_{n\to\infty}|\boldsymbol{\sigma}^n|=0,\qquad\lim_{n\to\infty} S(\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\xi}^n)=I\in\mathbb{R}$$

a nechť

$$(\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\neq I.$$

Potom existuje $\widetilde{\varepsilon}>0$ takové, že pro každé $k\in\mathbb{N}$ lze najít $(\boldsymbol{\sigma}^{n_k},\boldsymbol{\xi}^{n_k})\in\mathscr{T}[a,b]$ pro něž platí

$$|\boldsymbol{\sigma}^{n_k}|<\frac{1}{k}\ \text{ a }\ |S(\boldsymbol{\sigma}^{n_k},\boldsymbol{\xi}^{n_k})-I|>\widetilde{\varepsilon}\,.$$

To znamená, že jsme našli podposloupnost $\{(\boldsymbol{\sigma}^{n_k},\boldsymbol{\xi}^{n_k}):k\in\mathbb{N}\}\subset\mathscr{T}[a,b]$ posloupnosti $\{(\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\xi}^n)\}$ pro kterou neplatí $\lim\limits_{k\to\infty} S(\boldsymbol{\sigma}^{n_k},\boldsymbol{\xi}^{n_k})=I.$ To je ale spor s naším předpokladem. Máme tedy

$$(\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g=I\,.$$

Tím je důkaz věty dokončen. $\square$

5.22. Poznámka. (i) Nechť $f \in \mathbb{G}[a,b]$, $x_0 \in (a,b)$, $c, d \in \mathbb{R}$ a $g(x) = c$ pro $x \in [a, x_0)$, $g(x_0) = (c+d)/2$, $g(x) = d$ pro $x \in (x_0, d]$. Dále, nechť $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ má jednostranné limity $f(x_0-), f(x_0+) \in \mathbb{R}$.

Pro $n \in \mathbb{N}$ uvažujme posloupnost dělení $\{\boldsymbol{\sigma}^n\}$ intervalu $[a,b]$ takových, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje k_n, pro které platí $\sigma^n_{k_n-1} < x_0 < \sigma^n_{k_n}$. Dále, nechť vektory značek $\boldsymbol{\theta}^n$, $\boldsymbol{\eta}^n$ a $\boldsymbol{\zeta}^n$ jsou takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(\boldsymbol{\sigma}^n, \boldsymbol{\theta}^n),\ (\boldsymbol{\sigma}^n, \boldsymbol{\eta}^n),\ (\boldsymbol{\sigma}^n, \boldsymbol{\zeta}^n) \in \mathscr{T}[a,b],$$
$$\theta^n_{k_n} = x_0, \quad \sigma^n_{k_n-1} \le \eta^n_{k_n} < x_0 \quad \text{a} \quad x_0 < \zeta^n_{k_n} \le \sigma^n_k\,.$$

Máme

$$S(\boldsymbol{\sigma}^n, \boldsymbol{\theta}^n) = f(x_0)\,(d-c), S(\boldsymbol{\sigma}^n, \boldsymbol{\eta}^n) = f(\eta^n_{k_n})(d-c), S(\boldsymbol{\sigma}^n, \boldsymbol{\zeta}^n) = f(\zeta^n_{k_n})(d-c)$$

pro $n \in \mathbb{N}$ a tedy

$$\lim_{n\to\infty} S(\boldsymbol{\sigma}^n, \boldsymbol{\theta}^n) = f(x_0)\,(d-c), \quad \lim_{n\to\infty} S(\boldsymbol{\sigma}^n, \boldsymbol{\eta}^n) = f(x_0-)\,(d-c)\,,$$
$$\lim_{n\to\infty} S(\boldsymbol{\sigma}^n, \boldsymbol{\zeta}^n)) = f(x_0+)\,(d-c)\,,$$

Odtud plyne, že k tomu, aby každá posloupnost $S(\boldsymbol{\sigma}^n, \boldsymbol{\xi}^n)$ taková, že

$$(\boldsymbol{\sigma}^n, \boldsymbol{\xi}^n) \in \mathscr{T}[a,b] \quad \text{a} \quad |\boldsymbol{\sigma}^n| \to 0,$$

konvergovala pro $n \to \infty$ k nějaké konečné (a jednoznačně určené) hodnotě I, je nutné, aby platilo

$$\text{buď} \quad g(x_0-) = c = g(x_0) = d = g(x_0+) \quad \text{nebo} \quad f(x_0-) = f(x_0) = f(x_0+)\,.$$

Vzhledem ke větě 5.21 lze tedy očekávat, že pro existenci integrálu $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ bude nutné, aby funkce f a g neměly žádný společný bod nespojitosti.

(ii) Nyní, nechť $\boldsymbol{\sigma}_0 \in \mathscr{D}[a,b]$ je libovolné dělení obsahující x_0. Pro každé jeho zjemnění $\boldsymbol{\sigma}$ potom existuje $k = k(\boldsymbol{\sigma})$ takové, že $x_0 = \sigma_k$. Máme

$$S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} (f(\xi_{k-1}) + f(\xi_k)\,\dfrac{d-c}{2} & \text{jestliže } \xi_{k-1} < x_0 < \xi_k\,, \\[2mm] (f(x_0) + f(\xi_k))\,\dfrac{d-c}{2} & \text{jestliže } \xi_{k-1} = x_0 < \xi_k\,, \\[2mm] (f(\xi_{k-1}) + f(x_0))\,\dfrac{d-c}{2} & \text{jestliže } \xi_{k-1} < x_0 = \xi_k\,, \\[2mm] f(x_0)\,(d-c) & \text{jestliže } \xi_{k-1} = x_0 = \xi_k\,, \end{cases}$$

Bude-li tedy funkce f regulovaná na $[a,b]$, bude množina $\mathcal{Q}$ hromadných bodů množiny $\left\{S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) : (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a,b] \text{ a } \boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_0\right\}$ nejvýše čtyřbodová:

$$\begin{aligned}\mathcal{Q} = \Big\{ &(f(x_0-) + f(x_0+))\,\frac{d-c}{2},\ (f(x_0) + f(x_0+))\,\frac{d-c}{2},\\ &(f(x_0-) + f(x_0))\,\frac{d-c}{2}, \quad 2\,f(x_0)\,\frac{d-c}{2}\Big\}.\end{aligned}$$

Pro existenci integrálu $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ je ovšem přinejmenším nutné, aby se množina $\mathcal{Q}$ redukovala na jednobodovou množinu. Snadno se nahlédne, že toto nastane právě tehdy, když pro funkce f a g bude platit současně

$$\Delta^+ f(x_0)\,\Delta^+ g(x_{)}) = 0 \quad\text{a}\quad \Delta^- f(x_0)\,\Delta^- g(x_0) = 0\,.$$

5.2 Podmínka pseudoaditivity a její důsledky

Podrobněji vyjasnit vzájemný vztah mezi (δ)RS a (σ)RS – integrálem umožní pojem *pseudoaditivity*.

5.23. Definice. Řekneme, že funkce $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ splňují v bodě $x \in (a,b)$, podmínku pseudoaditivity, jestliže

$$\left.\begin{array}{l}\text{Pro každé } \varepsilon > 0 \text{ existuje } \delta_\varepsilon > 0 \text{ takové, že je-li}\\ \quad \delta', \delta'' \in (0,\delta_\varepsilon),\ \xi \in [x-\delta', x+\delta''],\ \xi' \in [x-\delta', x] \text{ a } \xi'' \in [x, x+\delta'']\\ \text{pak platí}\\ \quad \big| f(\xi)\,[g(x+\delta'') - g(x-\delta')] - f(\xi')\,[g(x) - g(x-\delta')]\\ \qquad\qquad\qquad\qquad - f(\xi'')\,[g(x+\delta'') - g(x)]\big| < \varepsilon\,.\end{array}\right\} \quad \text{(PA)}$$

5.24. Poznámka. Použití podmínky (PA) může být někdy pohodlnější, pokud ji přeformulujeme do následující ekvivalentní podoby.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Pro každé } \varepsilon > 0 \text{ existuje } \delta_\varepsilon > 0 \text{ takové, že je-li}\\ \quad x' \in (x-\delta_\varepsilon, x),\ x'' \in (x, x+\delta_\varepsilon),\ \xi \in [x', x''],\ \xi' \in [x', x] \text{ a } \xi'' \in [x, x'']\\ \text{pak platí}\\ \quad \big| f(\xi)\,[g(x'') - g(x')] - f(\xi')\,[g(x) - g(x')] - f(\xi'')\,[g(x'') - g(x)]\big| < \varepsilon\,.\end{array}\right\}$$

5.25. Příklad. Nechť

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{když } x\le 0,\\ 1 & \text{když } x>0\end{cases} \quad \text{a} \quad g(x)=\begin{cases}1 & \text{když } x\le 0,\\ 1 & \text{když } x>0\end{cases}$$

a $x'<0<x''$, $\xi\in[x',x'']$, $\xi'\in[x',0]$ a $\xi''\in[0,x'']$. Potom

$$\begin{aligned}&\big|f(\xi)\,[g(x'')-g(x')]-f(\xi')\,[g(0)-g(x')]-f(\xi'')\,[g(x'')-g(0)]\big|\\ &\qquad=\big|f(\xi)-f(\xi'')\big|=1\end{aligned}$$

vždy, když bude $\xi\le 0$ a $\xi''>0$. Vidíme, že funkce f,g nesplňují podmínku (PA) v bodě 0.

5.26. Lemma. *Jestliže funkce $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ splňují v bodě $x\in(a,b)$ podmínku pseudoaditivity, pak aspoň jedna z funkcí f,g je v bodě x spojitá.*

Na druhou stranu, je-li jedna z funkcí f,g spojitá v bodě x a druhá je ohraničená na jeho okolí, pak funkce f,g splňují podmínku pseudoaditivity v bodě x.

D ů k a z . a) Nechť f,g splňují podmínku (PA) pseudoaditivity v bodě x. Dosadíme-li $\xi=\xi'$, dostaneme

$$\begin{aligned}&\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta_\varepsilon>0:\\ &\qquad\Big(x'\in(x-\delta_\varepsilon,x),\ x''\in(x,x+\delta_\varepsilon),\ \xi'\in[x',x],\ \xi''\in[x,x'']\Big)\\ &\qquad\qquad\qquad\Longrightarrow\ \big|f(\xi')-f(\xi'')\big|\,\big|g(x'')-g(x)\big|<\varepsilon\,.\end{aligned}$$

Odtud je zřejmé, že není-li funkce g v bodě x spojitá zprava, musí být v bodě x spojitá funkce f. Podobně, položíme-li v (PA) $\xi=\xi''$ a $\delta'=\delta''$, dokážeme, že není-li g spojitá zleva v x, musí být f spojitá v x.

b) Nechť

$$\begin{aligned}&x\in(a,b),\ \delta>0,\ x'\in(x-\delta,x),\ x''\in(x,x+\delta),\\ &\xi\in[x',x''],\ \xi'\in[x',x] \quad \text{a} \quad \xi''\in[x,x''].\end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned}&\big|f(\xi)\,[g(x'')-g(x')]-f(\xi')\,[g(x)-g(x')]-f(\xi'')\,[g(x'')-g(x)]\big|\\ &\quad=\big|\big(f(\xi)-f(\xi')\big)\,\big(g(x)-g(x')\big)+\big(f(\xi'')-f(\xi)\big)\,\big(g(x'')-g(x)\big)\big|\\ &\quad\le\big|f(\xi)-f(\xi')\big|\,\big|g(x)-g(x')\big|+\big|f(\xi'')-f(\xi)\big|\,\big|g(x'')-g(x)\big|\\ &\quad\le\big(|f(\xi)-f(x)|+|f(x)-f(\xi')|\big)\,\big|g(x)-g(x')\big|\\ &\qquad\quad+\big(|f(\xi'')-f(x)|+|f(x)-f(\xi)|\big)\,\big|g(x'')-g(x)\big|\,.\end{aligned}$$

Odtud už plyne, že platí i druhé tvrzení lemmatu. □

Následující tvrzení je důsledkem věty 5.13 a lemmatu 5.26.

5.27. Věta. *Nechť* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *a nechť existuje integrál* $(\delta)\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g$. *Potom v každém bodě* $x \in (a,b)$ *je alespoň jedna z funkcí* f, g *spojitá.*

D ů k a z . Předpokládejme, že $(\delta)\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g \in \mathbb{R}$. Vzhledem k lemmatu 5.26 nyní stačí dokázat, že dvojice f, g splňují podmínku pseudoaditivity v každém bodě $x \in (a,b)$.

Předpokládejme tedy, že neplatí (PA), tj. existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $\delta > 0$ lze najít

$$x' \in (x-\delta, x), \;\; x'' \in (x, x+\delta), \;\; \eta \in [x', x''], \;\; \eta' \in [x', x] \text{ a } \eta'' \in [x, x'']$$

takové, že

$$\big| f(\eta)\,[g(x'') - g(x')] - f(\eta')\,[g(x) - g(x')] - f(\eta'')\,[g(x'') - g(x)]\big| \ge \varepsilon\,. \tag{5.10}$$

Buď dáno libovolné $\delta > 0$. Nechť $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{D}[a,b]$ je takové, že $|\boldsymbol{\sigma}| < \delta$ a pro nějaké $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ je $\sigma_{k-1} = x' < x < x'' = \sigma_k$ a $\xi_k = \eta$. Definujme

$$\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} \cup \{x\} \;\text{ a }\; \widetilde{\boldsymbol{\xi}} = (\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}, \eta', \eta'', \xi_{k+1}, \ldots, \xi_m)\,.$$

Podle (5.10) tedy máme

$$\begin{aligned} |S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, \widetilde{\boldsymbol{\xi}})| &= \big| f(\xi_k)\,[g(\sigma_k) - g(\sigma_{k-1})] \\ &\qquad - f(\eta')\,[g(x) - g(\sigma_{k-1})] - f(\eta'')\,[g(\sigma_k) - g(x)]\big| \\ &= \big| f(\eta)[g(x'') - g(x')] - f(\eta')\,[g(x) - g(x')] - f(\eta'')[g(x'') - g(x)]\big| \\ &\ge \varepsilon\,. \end{aligned}$$

To znamená, že není splněna podmínka (5.3’) a tudíž podle věty 5.13 a cvičení 5.14 neexistuje integrál $(\delta)\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g$. □

Víme, že (δ)RS – integrál je speciálním případem (σ)RS – integrálu (viz větu 5.5). Na druhou stranu, jak ukáže následující věta, pojem pseudoaditivity nám poskytuje možnost objasnit i vazbu mezi těmito integrály v opačném směru.

5.28. Věta. *Nechť* $f,\ g\colon [a,b]\to\mathbb{R}$. *Potom integrál* $(\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje právě tehdy, když existuje integrál* $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *a funkce* f,g *splňují podmínku pseudoaditivity v každém bodě* $x\in(a,b)$.

D ů k a z. Předpokládejme nejprve, že existuje $(\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$. Podle věty 5.5 potom existuje i $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ a má stejnou hodnotu. Dále, podle věty 5.27 funkce f,g musí splňovat podmínku pseudoaditivity v každém bodě $x\in(a,b)$. Stačí tedy dokázat, že když existuje integrál $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ a funkce f,g splňují podmínku pseudoaditivity v každém bodě $x\in(a,b)$, pak existuje i integrál $(\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$.

Předpokládejme tedy, že $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g=I\in\mathbb{R}$ a funkce f,g splňují podmínku pseudoaditivity v každém bodě $x\in(a,b)$. Nechť je dáno $\varepsilon>0$ a nechť dělení $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon=\{s_0,s_1,\dots,s_r\}\in\mathscr{D}[a,b]$ je takové, že platí

$$|S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})-I|<\varepsilon \quad \text{jakmile } \boldsymbol{\rho}\supset\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \text{ a } \boldsymbol{\eta}\in\tau(\boldsymbol{\rho})\,. \tag{5.11}$$

Označme

$$\delta_*:=\min\{s_i-s_{i-1}:\,i=1,2,\dots,r\}\,. \tag{5.12}$$

Protože funkce f,g splňují podmínku pseudoaditivity na (a,b), nutně existuje $\delta_\varepsilon\in(0,\delta_*)$ takové, že pro každé $i=1,2,\dots,r$ platí

$$\left.\begin{aligned}
&\big|f(\xi)\,[g(s_i'')-g(s_i')]\\
&\qquad -f(\xi')\,[g(s_i)-g(s_i')]-f(\xi'')\,[g(s_i'')-g(s_i)]\big|<\frac{\varepsilon}{r}\\
&\text{pro všechna } i\in\{1,2,\dots,r-1\}\,,\\
&\qquad s_i'\in(s_i-\delta_\varepsilon,s_i),\ s_i''\in(s_i,s_i+\delta_\varepsilon)\,,\\
&\qquad \xi\in[s_i',s_i''],\ \xi'\in[s_i',s_i],\ \xi''\in[s_i,s_i'']\,.
\end{aligned}\right\} \tag{5.13}$$

Nechť $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}[a,b]$, $\boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_m\}$ a $|\boldsymbol{\sigma}|<\delta_\varepsilon$.

Podle (5.12) je pro každé $j\in\{1,2,\dots,m\}$ množina $(\sigma_{j-1},\sigma_j)\cap\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$ buď jednobodová nebo prázdná. Nechť

$$U_1 \text{ je množina těch } j \in \{1,2,\dots,m\} \text{ pro která } (\sigma_{j-1},\sigma_j)\cap\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon=\emptyset,$$

$$U_2 = \{1,2,\dots,m\}\setminus U_1\,.$$

Potom pro každé $j\in U_2$ existuje právě jedno $i(j)\in\{1,2,\dots,r\}$ takové, že $s_{i(j)}\in(\sigma_{j-1},\sigma_j)$. Počet prvků množiny U_2 tedy není větší než r.

Položme nyní $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\sigma}\cup\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$. Potom

$$|\boldsymbol{\rho}|<\delta_\varepsilon<\delta_*. \tag{5.14}$$

a pro každé $j\in U_1$ existuje právě jedno $k(j)\in\{1,2,\dots,\nu(\boldsymbol{\rho})\}$ takové, že

$$[\rho_{k(j)-1},\rho_k(j)]=[\sigma_{j-1},\sigma_j\,]\,. \tag{5.15}$$

Pokud $j\in U_2$, pak existuje právě jedno $\ell(j)\in\{1,2,\dots,\nu(\boldsymbol{\rho})-1\}$ takové, že

$$\rho_{\ell(j)-1}=\sigma_{j-1},\ \rho_{\ell(j)}=s_{i(j)},\ \rho_{\ell(j)+1}=\sigma_{j+1}\,. \tag{5.16}$$

Zvolme vektor $\boldsymbol{\eta}$ tak, aby bylo $(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})\in\mathscr{T}\,[a,b]$ a

$$\eta_{k(j)}=\xi_j \quad \text{když } j\in U_1 \tag{5.17}$$

a porovnejme integrální součty $S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ a $S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})$. Máme

$$S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})=\sum_{j\in U_1} f(\xi_j)\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})]+\sum_{j\in U_2} f(\xi_j)\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})]\,.$$

Nechť $V_1=\{k(j):j\in U_1\}$ a $V_2=\{1,2,\dots,\nu(\boldsymbol{\rho})\}\setminus V_1$. Pak podle (5.15)–(5.17)

$$\begin{aligned}
S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta}) &= \sum_{k\in V_1} f(\eta_k)\,[g(\rho_k)-g(\rho_{k-1})]+\sum_{k\in V_2} f(\eta_k)\,[g(\rho_k)-g(\rho_{k-1})]\\
&=\sum_{j\in U_1} f(\eta_{k(j)})\,[g(\rho_{k(j)})-g(\rho_{k(j)-1})]+\sum_{k\in V_2} f(\eta_k)\,[g(\rho_k)-g(\rho_{k-1})]\\
&=\sum_{j\in U_1} f(\xi_j)\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})]\\
&\quad+\sum_{j\in U_2}\left[f(\eta_{\ell(j)})[g(\rho_{\ell(j)})-g(\rho_{\ell(j)-1})]+f(\eta_{\ell(j)+1})\,[g(\rho_{\ell(j)+1})-g(\rho_{\ell(j)})]\right]\\
&=\sum_{j\in U_1} f(\xi_j)\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})]\\
&\quad+\sum_{j\in U_2}\left[f(\eta_{\ell(j)})\,[g(s_{i(j)})-g(s_{j-1})]+f(\eta_{\ell(j)+1})\,[g(\sigma_{j+1})-g(\beta_{i(j)})]\right].
\end{aligned}$$

Tudíž

$$S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})=\sum_{j\in U_2} f(\xi_j)\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})]$$
$$-\sum_{j\in U_2}\big[f(\eta_{\ell(j)})[g(s_{i(j)})-g(\sigma_{j-1})]+f(\eta_{\ell(j)+1})[g(\sigma_{j+1})-g(s_{i(j)})]\big]\,,$$

tj.

$$\big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})\big|\le\sum_{j\in U_2}\big|W_j\big|,$$

kde

$$W_j=f(\xi_j)\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})]$$
$$-f(\eta_{\ell(j)})\,[g(s_{i(j)})-g(\sigma_{j-1})]-f(\eta_{\ell(j)+1})\,[g(\sigma_{j+1})-g(s_{i(j)})]\,.$$

Připomeňme, že vzhledem k (5.14) a (5.16) máme

$$[\sigma_{j-1},\sigma_j\,]\subset(s_{i(j)}-\delta_\varepsilon,s_{i(j)}+\delta_\varepsilon),\ \ \xi_j\in[s_{i(j)}-\delta_\varepsilon,s_{i(j)}+\delta_\varepsilon]\,,$$
$$\eta_{\ell(j)}\in[s_{i(j)}-\delta_\varepsilon,s_{i(j)}],\ \ \eta_{\ell(j)+1}\in[s_{i(j)},s_{i(j)}+\delta_\varepsilon]\,.$$

Podle (5.13) je tedy $|W_j|<\dfrac{\varepsilon}{r}$ pro každé $j\in U_2$ a tudíž (také díky tomu, že počet elementů množiny U_2 není větší než r) dostáváme, že

$$\big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})\big|\le\sum_{j\in U_2}\big|W_j\big|<\varepsilon\,.$$

Konečně, vzhledem k (5.11) a k vzhledem k definici $\boldsymbol{\rho}$, dostáváme

$$\big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-I\big|\le\big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})\big|+\big|S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})-I\big|<2\,\varepsilon\,.$$

Dokázali jsme tedy, že $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g=I$. □

5.29. Důsledek. *Nechť* $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g=I\in\mathbb{R}$ *a nechť v každém bodě intervalu* (a,b) *je alespoň jedna z funkcí* $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ *spojitá a druhá je ohraničená na jeho okolí. Potom je také* $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g=I$.

D ů k a z . Podle lemmatu 5.26 splňují funkce f, g podmínku pseudoadivity v každém bodě $x \in (a,b)$ a tudíž podle věty 5.28 existuje také $(\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ a platí

$$(\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = (\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\,. \qquad \square$$

5.30. Poznámka. Speciálně, jestliže $g(x) \equiv x$ (tj. pro Riemannův integrál), jsou definice integrálů $(\delta)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a $(\sigma)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ekvivalentní.

5.31. Cvičení. Dokažte tvrzení:
Nechť $c \in [a,b]$, $(\delta)\int_a^c f\,\mathrm{d}\,g = I_1 \in \mathbb{R}$ *a* $(\delta)\int_c^b f\,\mathrm{d}\,g = I_2 \in \mathbb{R}$ *a nechť* f, g *splňují podmínku pseudoaditivity v* c. *Potom integrál* $I = (\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje a platí* $I = I_1 + I_2$.
(Návod: využijte věty 5.19 a 5.28.)

5.3 Absolutní integrovatelnost

Nyní potřebujeme další pomocný pojem.

5.32. Definice. Nechť $-\infty < c < d < \infty$ a $f, g : [c,d] \to \mathbb{R}$. Potom definujeme

$$\mathfrak{S}_{f\Delta g}[c,d] = \left\{ |S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta}) - S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\rho}',\boldsymbol{\eta}')| : (\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta}), (\boldsymbol{\rho}',\boldsymbol{\eta}') \in \mathscr{T}[c.d] \right\}$$

a

$$\omega\,(S_{f\Delta g};[c,d]) = \sup\,\mathfrak{S}_{f\Delta g}[c,d)\,. \tag{5.18}$$

Platí následující modifikace Bolzanových – Cauchyových podmínek.

5.33. Věta. *Nechť* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Potom :*

(i) *Integrál* $(\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje tehdy a jen tehdy, když platí*

$$\left.\begin{aligned} &\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta_\varepsilon > 0 : \\ &\quad \Big(\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b] \text{ a } |\boldsymbol{\sigma}| < \delta_\varepsilon\Big) \implies \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\,(S_{f\Delta g};[\sigma_{j-1},\sigma_j\,]) < \varepsilon\,. \end{aligned}\right\} \tag{5.19}$$

(i) *Integrál* $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje tehdy a jen tehdy, když platí*

$$\left.\begin{aligned}&\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon\in\mathscr{D}[a,b]:\\ &\quad\Big(\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]\ a\ \boldsymbol{\sigma}\supset\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon\Big)\implies\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\omega\left(S_{f\Delta g};[\sigma_{j-1},\sigma_j]\right)<\varepsilon\,.\end{aligned}\right\}\tag{5.20}$$

D ů k a z. a) Ukážeme, že podmínka (5.19) je ekvivalentní s Bolzanovou–Cauchyovou podmínkou pro existenci (δ) RS – integrálu.

α) Předpokládejme, že platí (5.3). Nechť $\widetilde{\varepsilon}>0$ je dáno, $\varepsilon=\widetilde{\varepsilon}/2$ a nechť δ_ε je určeno podmínkou (5.3). Mějme dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a,b]$ takové, že $|\boldsymbol{\sigma}|<\delta_\varepsilon$. Označme $m=\nu(\boldsymbol{\sigma})$ a pro každé $j\in\{1,2,\dots,m\}$ vyberme značená dělení $(\boldsymbol{\sigma}^j,\boldsymbol{\xi}^j)$, $(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^j,\widetilde{\boldsymbol{\xi}}^j)\in\mathscr{T}[\sigma_{j-1},\sigma_j]$ tak, aby platilo

$$0\le\omega\left(S_{f\Delta g},[\sigma_{j-1},\sigma_j]\right)<S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}^j,\boldsymbol{\xi}^j)-S_{f\Delta g}(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^j,\widetilde{\boldsymbol{\xi}}^j)+\frac{\varepsilon}{m}\,.\tag{5.21}$$

Definujme

$$\boldsymbol{\rho}=\bigcup_{j=1}^m\boldsymbol{\sigma}^j,\quad\widetilde{\boldsymbol{\rho}}=\bigcup_{j=1}^m\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^j,\quad\boldsymbol{\eta}=(\boldsymbol{\xi}^1,\boldsymbol{\xi}^2,\dots,\boldsymbol{\xi}^m)\ \text{ a }\ \widetilde{\boldsymbol{\eta}}=(\widetilde{\boldsymbol{\xi}}^1,\widetilde{\boldsymbol{\xi}}^2,\dots,\widetilde{\boldsymbol{\xi}}^m)\,.$$

Potom

$$(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})\in\mathscr{T}[a,b],\ (\widetilde{\boldsymbol{\rho}},\widetilde{\boldsymbol{\eta}})\in\mathscr{T}[a,b],\ |\boldsymbol{\rho}|<\delta_\varepsilon\ \text{ a }\ |\widetilde{\boldsymbol{\rho}}|<\delta_\varepsilon\,.$$

Tudíž podle (5.3) a (5.21) dostáváme

$$\begin{aligned}0&\le\sum_{j=1}^m\omega\left(S_{f\Delta g};[\sigma_{j-1},\sigma_j]\right)\\&<\sum_{j=1}^m\Big[S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}^j,\boldsymbol{\xi}^j)-S_{f\Delta g}(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^j,\widetilde{\boldsymbol{\xi}}^j)+\frac{\varepsilon}{m}\Big]\\&=S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})-S_{f\Delta g}(\widetilde{\boldsymbol{\rho}},\widetilde{\boldsymbol{\eta}})+\varepsilon<2\,\varepsilon=\widetilde{\varepsilon}\,.\end{aligned}$$

Protože $\widetilde{\varepsilon}>0$ mohlo být libovolné, plyne odtud, že podmínka (5.19) je splněna.

β) Pro důkaz obrácené implikace předpokládejme, že platí (5.19). Dokážeme, že potom je splněna podmínka (5.3’).

Buď dáno $\varepsilon > 0$. Nechť δ_ε je určeno podmínkou (5.19). Dále, mějme značené dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a,b]$ takové, že $|\boldsymbol{\sigma}| < \delta_\varepsilon$, Označme $m = \nu(\boldsymbol{\sigma})$. Nechť

$$\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} = \bigcup_{j=1}^{m} \boldsymbol{\sigma}^j, \quad \widetilde{\boldsymbol{\xi}} = (\boldsymbol{\xi}^1, \boldsymbol{\xi}^2, \dots, \boldsymbol{\xi}^m),$$

kde

$$(\boldsymbol{\sigma}^j, \boldsymbol{\xi}^j) \in \mathscr{T}[\sigma_{j-1}, \sigma_j\,] \text{ pro } j \in \{1, 2, \dots, m\}\,.$$

Potom $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} \supset \boldsymbol{\sigma}$. Díky předpokladu (5.19) a s přihlédnutím k (5.18) dostaneme

$$\begin{aligned} &|S_{f\Delta\,g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S_{f\Delta\,g}(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, \widetilde{\boldsymbol{\xi}})| \\ &\qquad \le \sum_{j=1}^{m} \big| f(\xi_j)\,[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] - S_{f\Delta\,g}(\boldsymbol{\sigma}^j, \boldsymbol{\eta}^j)\big| \\ &\qquad \le \sum_{j=1}^{m} \omega\,(S_{f\Delta\,g}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j\,]) < \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Platí tedy (5.3’).

b) Analogicky by se dokázala ekvivalence podmínky (5.20) s Bolzanovou – Cauchyovou podmínkou pro existenci (σ) RS – integrálu. Podrobný důkaz je ponechán čtenáři jako cvičení. □

5.34. Cvičení. Dokažte tvrzení věty 5.33 pro (σ) RS – integrály.

5.35. Lemma. *Nechť* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *a* $[c,d\,] \subset [a,b]$. *Potom*

$$\omega_{[c,d]}(f)\,|g(d) - g(c)| \le \omega\,(S_{f\Delta\,g}; [c,d\,]) \le \omega_{[c,d]}(f)\,\mathrm{var}_c^d\, g\,. \tag{5.22}$$

D ů k a z. a) Nechť $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\rho} = \{c,d\}$, $\xi, \eta \in [c,d\,]$ a $\boldsymbol{\xi} = (\xi), \boldsymbol{\eta} = (\eta)$. Potom $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}), (\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) \in \mathscr{T}[c,d\,]$ a $|f(\xi) - f(\eta)|\,|g(d) - g(c)| \in \mathfrak{S}_{f\Delta\,g}([c,d\,])$ a tudíž

$$\omega_{[c,d]}(f)\,|g(d) - g(c)| \le \sup\,\mathfrak{S}_{f\Delta\,g}[c,d\,) = \omega\,(S_{f\Delta\,g}; [c,d\,])\,.$$

b) Na druhou stranu, jestliže $(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}), (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\theta}) \in \mathscr{T}[c,d\,]$ a položíme-li $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\rho} \cup \boldsymbol{\tau}$, bude $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[c,d\,]$ a

$$\big|S_{f\Delta\,g}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) - S_{f\Delta\,g}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\theta})\big| = \Big|\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \big(f(\eta'_j) - f(\theta'_j)\big)\,[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})]\Big|\,,$$

kde $\eta_j' = \eta_k$ když $[\sigma_{j-1}, \sigma_j] \subset [\rho_{k-1}, \rho_k]$ a $\theta_j' = \theta_k$ když $[\sigma_{j-1}, \sigma_j] \subset [\tau_{k-1}, \tau_k]$. Odtud dostáváme dále

$$\begin{aligned}\left|S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) - S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\theta})\right| &\le \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \left|f(\eta_j') - f(\theta_j')\right| \left|g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})\right| \\ &\le \omega_{[c,d]}(f)\, V(g, \boldsymbol{\sigma})\end{aligned}$$

neboli

$$\omega\,(S_{f\Delta g}; [c,d]) = \sup\, \mathfrak{S}_{f\Delta g}[c,d) \le \omega_{[c,d]}(f)\, \mathrm{var}_c^d\, g\,.$$

Dokázali jsme platnost nerovností (5.22). □

5.36. Poznámka. Je-li $\mathrm{var}_c^d\, g = \infty$, pak je ovšem druhá z nerovností v (5.22) triviální.

Následující tvrzení poskytuje další nutnou a postačující podmínku pro existenci obou typů RS – integrálů.

5.37. Věta. *Nechť $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $g \in \mathbb{BV}[a,b]$ a $v(x) = \mathrm{var}_a^x\, g$ pro $x \in [a,b]$. Potom integrál $\int_a^b f\, \mathrm{d}\, g$ existuje tehdy a jen tehdy, když existuje integrál $\int_a^b f\, \mathrm{d}\, v$.*

D ů k a z . a) Pro každý interval $[c,d] \subset [a,b]$ máme $\mathrm{var}_c^d\, v = v(d) - v(c)$. Tudíž podle lemmatu 5.35 musí platit

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega_{[\sigma_{j-1},\sigma_j]}(f)\, \big[v(\sigma_j) - v(\sigma_{j-1})\big] = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\,(S_{f\,\Delta\, v}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j\,])$$

pro libovolné dělení $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$. Podle lemmatu 5.35 tedy dále dostáváme

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\,(S_{f\,\Delta\, g}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j\,]) &\le \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega_{[\sigma_{j-1},\sigma_j]}(f)\; \mathrm{var}_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j}\, g \\ &= \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega_{[\sigma_{j-1},\sigma_j]}(f)\, \big[v(\sigma_j) - v(\sigma_{j-1})\big] = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\,(S_{f\,\Delta\, v}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j\,])\,,\end{aligned}$$

tj. nerovnost

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\,(S_{f\,\Delta\, g}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j\,]) \le \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\,(S_{f\,\Delta\, v}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j\,])$$

platí pro každé dělení $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$. Pomocí věty 5.33 nyní už snadno dokážeme, že z existence integrálu $\int_a^b f \, \mathrm{d}\, v$ plyne existence integrálu $\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g$ (a to pro oba typy RS – integrálu).

b) Předpokládejme, že existuje integrál $(\sigma)\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g$.

Buď dáno $\varepsilon > 0$. Potom podle věty 5.33 existuje dělení $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b]$ takové, že

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\left(S_{f\Delta g}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j\,]\right) < \varepsilon \tag{5.23}$$

platí pro každé jeho zjemnění $\boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$. Zřejmě můžeme též předpokládat, že také

$$0 \le \operatorname{var}_a^b g - V(g, \boldsymbol{\sigma}) < \varepsilon \tag{5.24}$$

platí pro každé dělení $\boldsymbol{\sigma}$ takové, že $\boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$. (Zdůvodněte!)

Podle lemmatu 5.35 máme

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\left(S_{f\,\Delta\, v}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j\,]\right) \le \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega_{[\sigma_{j-1},\sigma_j]}(f) \, \operatorname{var}_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} g$$

a, dále, podle (5.24) a (5.23)

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\left(S_{f\,\Delta\, v}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j\,]\right) &\le \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega_{[\sigma_{j-1},\sigma_j]}(f) \left[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})\right] \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega_{[\sigma_{j-1},\sigma_j]}(f) \left(\operatorname{var}_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} g - [g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})]\right) \\ &< \varepsilon + \omega_{[a,b]}(f) \left(\operatorname{var}_a^b g - V(g, \boldsymbol{\sigma})\right) < \varepsilon\,(1 + \omega_{[a,b]}(f)) \,.\end{aligned}$$

Podle věty 5.33 můžeme tedy uzavřít, že existuje integrál $(\sigma)\int_a^b f \, \mathrm{d}\, v$.

c) Zbývá dokázat implikaci $\quad (\delta)\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g \in \mathbb{R} \implies (\delta)\int_a^b f \, \mathrm{d}\, v \in \mathbb{R}$.

Nechť tedy existuje integrál $(\delta)\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g$. Potom podle vět 5.5 a 5.27 existuje $(\sigma)\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g$ a funkce f, g nemají společný bod nespojitosti v (a,b). Dále, podle lemmatu 2.23 také funkce f, v nemají společný bod nespojitosti v (a,b). Konečně, protože podle části b) tohoto důkazu existuje integrál $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,v$, existence integrálu $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,v$ plyne z důsledku 5.29. (Protože $g\in\mathbb{BV}[a,b]$, je g ohraničená na $[a,b]$.) $\square$

5.38. Věta. *Nechť* $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$, $g\in\mathbb{BV}[a,b]$ *a existuje integrál* $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$. *Potom existuje také integrál* $\displaystyle\int_a^b |f|\,\mathrm{d}\,g$.

D ů k a z. Podle věty 2.14 a lemmatu 5.11 se můžeme omezit na případ, že g je neklesající na $[a,b]$. Potom je $\operatorname{var}_c^d g = g(d)-g(c)$ pro libovolná $c,d\in[a,b]$ taková, že $c\,le\,d$. Podle lemmatu 5.35 tedy pro libovolné dělení $\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]$ platí

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\omega\left(S_{f\Delta\,g};[\sigma_{j-1},\sigma_j\,]\right)=\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\omega_{[\sigma_{j-1},\sigma_j]}(f)\,\big[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})\big]$$

a

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\omega\left(S_{|f|\Delta\,g};[\sigma_{j-1},\sigma_j\,]\right)=\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\omega_{[\sigma_{j-1},\sigma_j]}(|f|)\,\big[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})\big]\,.$$

Na druhou stranu, zřejmě

$$\big||f(x)|-|f(y)|\big|\le|f(x)-f(y)|\quad\text{pro libovolná }\ x,y\in[a,b]\,.$$

Máme tedy $\omega_{[c,d]}(|f|)\le\omega_{[c,d]}(f)$ pro libovolný interval $[c,d\,]\subset[a,b]$. Tudíž

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\omega\left(S_{|f|\Delta\,g};[\sigma_{j-1},\sigma_j\,]\right)&=\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\omega_{[\sigma_{j-1},\sigma_j]}(|f|)\,\big[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})\big]\\&\le\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\omega_{[\sigma_{j-1},\sigma_j]}(f)\,\big[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})\big]=\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\omega\left(S_{f\Delta\,g};[\sigma_{j-1},\sigma_j\,]\right).\end{aligned}$$

Důkaz lemmatu nyní plyne okamžitě z věty 5.33. $\square$

Přímým důsledkem lemmatu 5.9 a vět 5.37 a 5.38 je následující tvrzení.

5.39. Důsledek. *Nechť* $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$, $g\in\mathbb{BV}[a,b]$, $v(x)=\operatorname{var}_a^x g$ *pro* $x\in[a,b]$ *a nechť existuje integrál* $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$. *Potom existuje také integrál* $\displaystyle\int_a^b |f|\,\mathrm{d}\,v$ *a platí*

$$\left|\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\right|\le\int_a^b|f|\,\mathrm{d}\,v\le\|f\|\operatorname{var}_a^b g\,.$$

□

5.4 Substituce

Všechna tvrzení tohoto odstavce platí ve stejném znění pro oba typy RS – integrálu

Začneme dalším důsledkem definice 5.32.

5.40. Lemma. *Jestliže* $\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g \in \mathbb{R}$ *a* $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ *je libovolné značené dělení intervalu* $[a, b]$, *pak platí*

$$\Big|\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g - S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})\Big| \leq \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\left(S_{f\Delta g}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j]\right). \tag{5.25}$$

D ů k a z . Označme $m = \nu(\boldsymbol{\sigma})$. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Nezávisle na tom o jaký typ RS – integrálu se jedná můžeme zvolit značené dělení $(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}) \in \mathscr{T}[a, b]$ tak, aby bylo $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} \supset \boldsymbol{\sigma}$ a

$$\Big|\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g - S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, \widetilde{\boldsymbol{\xi}})\Big| < \varepsilon.$$

Protože $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}$ je zjemněním $\boldsymbol{\sigma}$, můžeme ho rozdělit tak, že bude

$$\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} = \bigcup_{j=1}^{m} \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^j, \quad \text{kde } \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^j \in \mathscr{D}[\sigma_{j-1}, \sigma_m] \text{ pro } j = 1, 2, \ldots, m.$$

Podobně $\widetilde{\boldsymbol{\xi}} = (\widetilde{\boldsymbol{\xi}}^1, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}^2, \ldots, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}^j)$, kde $\widetilde{\boldsymbol{\xi}}^j$ jsou reálné vektory takové, že

$$(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^j, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}^j) \in \mathscr{T}[\sigma_{j-1}, \sigma_j] \text{ pro } j = 1, 2, \ldots, m.$$

Máme tedy

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g - S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})\Big| \\
&\qquad \leq \Big|\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g - S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, \widetilde{\boldsymbol{\xi}})\Big| + \Big|S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}) - S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})\Big| \\
&\qquad < \varepsilon + \sum_{j=1}^{m} \Big| f(\xi_j)\,[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] - S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^j, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}^j)\Big|
\end{aligned}$$

$$< \varepsilon + \sum_{j=1}^{m} \omega\left(S_{f\Delta g}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j]\right).$$

Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, znamená to, že platí (5.25). □

5.41. Důsledek. *Jestliže* $\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g \in \mathbb{R}$ *a* $[c,d] \subset [a,b]$, *pak pro každé* $\xi \in [c,d]$ *platí*

$$\Big|\int_c^d f \,\mathrm{d}\, g - f(\xi)\,[g(d) - g(c)]\Big| \le \omega\left(S_{f\Delta g}; [c,d]\right).$$

Následující speciální forma věty o substituci je také důsledkem lemmatu 5.40.

5.42. Věta (SUBSTITUCE). *Nechť* $f, g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$, *přičemž* f *je ohraničená na intervalu* $[a,b]$ *a* $\int_a^b g \,\mathrm{d}\, h \in \mathbb{R}$. *Potom jeden z integrálů*

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}\Big[\int_a^x g \,\mathrm{d}\, h\Big] \quad a \quad \int_a^b f\, g \,\mathrm{d}\, h$$

existuje (má konečnou hodnotu) právě tehdy, když existuje i ten druhý. V takovém případě pak platí

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}\Big[\int_a^x g \,\mathrm{d}\, h\Big] = \int_a^b f\, g \,\mathrm{d}\, h. \tag{5.26}$$

D ů k a z . Nejprve si povšimněme, že z existence integrálu $\int_a^b g \,\mathrm{d}\, h \in \mathbb{R}$ plyne, že

$$w(x) := \int_a^x g \,\mathrm{d}\, h \in \mathbb{R} \quad \text{pro každé } x \in [a,b]$$

(viz věta 5.15). Funkce w je tedy definovaná na celém intervalu $[a,b]$ a zobrazuje interval $[a,b]$ do $\mathbb{R}$.

Pro libovolné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a,b]$ máme

$$\begin{aligned}
&|S_{fg\Delta h}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S_{f\Delta w}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})| \\
&\quad = \Big|\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} f(\xi_j)\, g(\xi_j)\,[h(\sigma_j) - h(\sigma_{j-1})] - \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} f(\xi_j)\,[w(\sigma_j) - w(\sigma_{j-1})]\Big| \\
&\quad \le \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} |f(\xi_j)|\,\Big|g(\xi_j)\,[h(\sigma_j) - h(\sigma_{j-1})] - \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} g \,\mathrm{d}\, h\Big|
\end{aligned}$$

$$\leq \|f\| \left(\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \left| g(\xi_j)\,[h(\sigma_j) - h(\sigma_{j-1})] - \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} g\,\mathrm{d}\,h \right| \right).$$

Podle důsledku 5.41 dostáváme dále

$$\left| S_{fg\Delta\,h}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - S_{f\Delta\,w}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \right| \leq \|f\| \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\left(S_{g\Delta\,h};[\sigma_{j-1},\sigma_j\,]\right).$$

Odtud podle věty 5.33 už plyne relace (5.26). (Přesvědčete se, že důkaz opravdu umíte dokončit.) □

5.43. Důsledek. Je-li f ohraničená na $[a,b]$, $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ je riemannovsky integrovatelná na $[a,b]$ a $g(x)=\displaystyle\int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t$, pak jeden z integrálů

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g \quad \text{a} \quad \int_a^b f(x)\,h(x)\,\mathrm{d}x$$

existuje právě tehdy, když existuje i ten druhý. V takovém případě pak platí

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = \int_a^b f(x)\,h(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

□

5.44. Věta (DRUHÁ O SUBSTITUCI). *Předpokládejme, že funkce $\phi:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ je ryze monotonní a spojitá na $[\alpha,\beta]$ a zobrazuje $[\alpha,\beta]$ na interval $[a,b]$. Potom pro libovolné funkce f, $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ platí*

$$\textit{existuje-li} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,g(x),\ \textit{existuje také} \int_\alpha^\beta f(\phi(x))\,\mathrm{d}\,g(\phi(x))$$

a

$$\pm\int_\alpha^\beta f(\phi(x))\,\mathrm{d}\,g(\phi(x)) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,g(x)\,, \tag{5.27}$$

kde "+" platí, je-li ϕ rostoucí a "-" platí, je-li ϕ klesající.

D ů k a z . Předpokládejme např., že ϕ je klesající. Potom $\alpha=\phi(b)$ a $\beta=\phi(a)$. Pro dané značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$, intervalu $[\alpha,\beta]$ položme

$$\rho_{\nu(\boldsymbol{\sigma})-j}=\phi(\sigma_j) \text{ pro } j=0,1,\ldots,\nu(\boldsymbol{\sigma}),\ \eta_{\nu(\boldsymbol{\sigma})-j} = \phi(\xi_j) \text{ pro } j=1,2,\ldots,\nu(\boldsymbol{\sigma})\,.$$

Potom $(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})$, $\boldsymbol{\rho}=\{\rho_0,\rho_1,\ldots,\rho_{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\}$, $\boldsymbol{\eta}=(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_{\nu(\boldsymbol{\sigma})}$ je značené dělení intervalu $[a,b]$. Píšeme $\boldsymbol{\rho}=\phi(\boldsymbol{\sigma})$ a $\boldsymbol{\eta}=\phi(\boldsymbol{\xi})$. Zřejmě, je-li $\boldsymbol{\sigma}\supset\boldsymbol{\sigma}'$, pak je také $\phi(\boldsymbol{\sigma}) \supset \phi(\boldsymbol{\sigma}')$. Podobně, protože ϕ je stejnoměrně spojitá na $[\alpha, \beta]$, platí $|\phi(\boldsymbol{\sigma})| \to 0$ jakmile $|\boldsymbol{\sigma}| \to 0$. Navíc

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} f(\phi(\xi_j)) \left[g(\phi(\sigma_j)) - g(\phi(\sigma_{j-1})\right] = -\sum_{i=1}^{\nu(\boldsymbol{\rho})} f(\eta_j) \left[g(\phi(\rho_j)) - g(\phi(\rho_{j-1})\right]$$

platí pro každé $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[\alpha, \beta]$. Teď už zajisté každý čtenář, který pozorně prostudoval většinu důkazů této kapitoly, samostatně dokončí důkaz rovnosti (5.27) pro oba integrály (včetně případu, že ϕ je nrostoucí). $\square$

Další variantou věty o substituci je následující věta. Její důkaz můžeme ponechat čtenáři jako cvičení.

5.45. Věta. *Nechť funkce* $\phi : [a, b] \to [\phi(a), \phi(b)]$ *je rostoucí a spojitá na* $[a, b]$, $\psi : [\phi(a), \phi(b)] \to [a, b]$ *je inversní k* ϕ *a nechť* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Pak existuje-li jeden z integrálů*

$$(\sigma)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x, \quad (\sigma)\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(\psi(x))\,\mathrm{d}\,\psi(x)\,,$$

existuje i ten druhý a platí rovnost

$$(\sigma)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = (\sigma)\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(\psi(x))\,\mathrm{d}\,\psi(x)\,,$$

5.46. Cvičení. Dokažte větu 5.45. Zformulujte a dokažte analogické tvrzení pro (δ) RS – integrály.

5.5 Integrace per-partes

Následující tvrzení je zobecněním věty o integraci per-partes pro Riemannův integrál. Platí ve stejném znění pro oba typy RS – integrálu.

5.47. Věta (VĚTA O INTEGRACI PER-PARTES)**.** *Existuje-li jeden z integrálů*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g, \quad \int_a^b g\,\mathrm{d}\,f\,,$$

existuje i druhý a platí

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g + \int_a^b g\,\mathrm{d}\,f = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a)\,. \tag{5.28}$$

D ů k a z . a) Buď dáno libovolné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$. Přeorganizováním členů v součtu $S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ dostaneme

$$\begin{aligned} S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) &= f(\xi_1)\,[g(\sigma_1)-g(a)] + f(\xi_2)\,[g(\sigma_2)-g(\sigma_1)] \\ &\quad + \cdots + f(\xi_m)\,[g(b)-g(\sigma_{m-1})] \\ &= -f(a)\,g(a) - [f(\xi_1)-f(a)]\,g(a) - [f(\xi_2)-f(\sigma_1)]\,g(\sigma_1) \\ &\quad -[f(\sigma_1)-f(\xi_1)]\,g(\sigma_1) - \cdots - [f(\xi_m)-f(\sigma_{m-1})]\,g(\sigma_{m-1}) \\ &\quad -[f(\sigma_{m-1})-f(\xi_{m-1})]\,g(\sigma_{m-1}) \\ &\quad -[f(b)-f(\xi_m)]\,g(b) + f(b)\,g(b) \\ &= f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - S_{g\Delta f}(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}') \end{aligned}$$

neboli

$$S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - S_{g\Delta f}(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}') \tag{5.29}$$

kde

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}' &= \{a,\xi_1,\sigma_1,\xi_2,\sigma_2,\ldots,\sigma_{m-1},\ \xi_m,\ b\}\,, \\ \boldsymbol{\xi}' &= (a,\sigma_1,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_2,\ldots,\sigma_{m-1},\sigma_{m-1},b)\,, \end{aligned}$$

$(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')\in\mathscr{T}[a,b]$ a $\boldsymbol{\sigma}'$ je zjemněním $\boldsymbol{\sigma}$. (Stane-li se, že $\xi_j=\sigma_{j-1}$ resp. $\xi_j=\sigma_j$ pro nějaké j, musíme ovšem tyto body ξ_j v $\boldsymbol{\sigma}'$ a $\boldsymbol{\xi}'$ vynechat.)

b) Předpokládejme, že existuje integrál $(\sigma)\displaystyle\int_a^b g\,\mathrm{d}\,f$.

Buď dáno $\varepsilon>0$. Zvolme dělení $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon\in\mathscr{D}[a,b]$ tak, aby pro každé jeho zjemnění $\boldsymbol{\sigma}'$ a všechna příslušná značená dělení $(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')\in\mathscr{T}[a,b]$ platilo

$$\left|S_{g\Delta f}(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}') - (\sigma)\int_a^b g\,\mathrm{d}\,f\right| < \varepsilon\,.$$

Podle (5.29) pro každé $\boldsymbol{\sigma}\supset\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$ a příslušné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ platí

$$\begin{aligned} S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - f(b)\,g(b) + f(a)\,g(a) + (\sigma)\int_a^b g\,\mathrm{d}\,f \\ = (\sigma)\int_a^b g\,\mathrm{d}\,f - S_{g\Delta f}(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')\,, \end{aligned}$$

kde $\boldsymbol{\sigma}' \supset \boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$ a tudíž

$$\Big|S_{f\Delta\, g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - f(b)\,g(b) + f(a)\,g(a) + (\sigma)\int_a^b g\,\mathrm{d}\,f\Big| = \Big|(\sigma)\int_a^b g\,\mathrm{d}\,f - S_{g\Delta f}(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}\,')\Big| < \varepsilon\,.$$

Odtud plyne existence integrálu $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ a relace (5.28). To, že z existence integrálu $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ plyne existence integrálu $(\sigma)\int_a^b g\,\mathrm{d}\,f$ a platí rovnost (5.28) by se dokazovalo analogicky.

c) Tvrzení věty pro (δ)RS – integrály plyne ze vztahu (5.29) podobně jako v druhé části důkazu pro (σ)RS – integrály a detailní důkaz můžeme nechat čtenáři jako cvičení. □

5.48. Cvičení. Dokažte tvrzení věty 5.47 pro (δ)RS – integrály.

5.6 Stejnoměrná konvergence a existence integrálu

Až na větu 5.51, všechna tvrzení tohoto odstavce platí ve stejném znění pro oba typy RS – integrálu.

5.49. Věta. *Nechť $g \in \mathbb{BV}[a,b]$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ je ohraničená a nechť posloupnost funkcí $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, je taková, že $\int_a^b f_n\,\mathrm{d}\,g \in \mathbb{R}$ pro všechna $n\in\mathbb{N}$ a*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0\,. \tag{5.30}$$

Potom existuje také integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ a platí

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,\mathrm{d}\,g = \int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\,. \tag{5.31}$$

D ů k a z . a) Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Vzhledem k předpokladu ((5.30)) můžeme zvolit $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tak, aby platilo

$$n \geq n_\varepsilon \implies \Big(\|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{\mathrm{var}_a^b\, g}\Big) \ \text{a}\ \Big(\|f_n\| < \|f\| + 1\Big)\,. \tag{5.32}$$

Dále, za našich předpokladů je podle lemmatu 5.9

$$\Big|\int_a^b f_n \,\mathrm{d}\, g\Big| \le \|f_n\| \operatorname{var}_a^b g \le (\|f\|+1) \operatorname{var}_a^b g$$

pro $n \ge n_\varepsilon$. Můžeme tedy vybrat podposloupnost $\{n_k\} \subset \mathbb{N}\}$ a $I \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_{n_k} \,\mathrm{d}\, g = I\,.$$

Speciálně, existuje $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takové, že

$$n_{k_\varepsilon} \ge n_\varepsilon \quad \text{a} \quad \Big(k \ge k_\varepsilon \implies \Big|\int_a^b f_{n_k} \,\mathrm{d}\, g - I\Big| < \varepsilon\Big)\,. \tag{5.33}$$

Dále, nechť $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$ je takové dělení intervalu $[a,b]$, že

$$\Big((\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a,b] \ \text{ a } \ \boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon\Big) \implies \Big|S_{f_{n_{k_\varepsilon}} \Delta\, g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - \int_a^b f_{n_{k_\varepsilon}} \,\mathrm{d}\, g\Big| < \varepsilon\,. \tag{5.34}$$

Protože je $n_{k_\varepsilon} \ge n_\varepsilon$ (viz ((5.33))), plyne z (5.32), že pro každé značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$, kde $\boldsymbol{\sigma}$ je zjemněním $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$, platí

$$\big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - S_{f_{n_{k_\varepsilon}} \Delta\, g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\big| \le \|f - f_{n_{k_\varepsilon}}\| \operatorname{var}_a^b g < \varepsilon\,.$$

Vzhledem k (5.33)–(5.34) tedy dostáváme

$$\begin{aligned}\big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - I\big| \le \big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - S_{f_{n_{k_\varepsilon}} \Delta\, g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\big| + \Big|S_{f_{n_{k_\varepsilon}} \Delta\, g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - \int_a^b f_{n_{k_\varepsilon}} \,\mathrm{d}\, g\Big| \\ + \Big|\int_a^b f_{n_{k_\varepsilon}} \,\mathrm{d}\, g - I\Big| < 3\,\varepsilon\,.\end{aligned}$$

Odtud okamžitě plyne, že platí

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g = I.$$

Konečně, protože podle lemmatu 5.9 máme

$$\Big|\int_a^b f_n \,\mathrm{d}\, g - \int_a^b f \,\mathrm{d}\, g\Big| \le \|f_n - f\| \,(\operatorname{var}_a^b g)\,,$$

rovnost (5.31) nyní plyne z předpokladu (5.30). Důkaz byl proveden pro (σ) RS – integrál.

b) Modifikace důkazu pro (δ) RS – integrál je zřejmá. $\square$

5.50. Věta. *Nechť* $f \in \mathbb{C}[a,b]$ *a* $g \in \mathbb{BV}[a,b]$. *Potom existují oba integrály*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g \quad a \quad \int_a^b g\,\mathrm{d}\,f\,.$$

D ů k a z. Vzhledem ke větám 2.14, 5.5 a 5.47 stačí dokázat existenci integrálu $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ pro případ, že f je spojitá na $[a,b]$ a g neklesající na $[a,b]$.

Nechť je tedy f spojitá na $[a,b]$, g neklesající na $[a,b]$ a $\varepsilon > 0$ je dáno.

Je-li $g(b) = g(a)$, pak je g je nutně konstantní na $[a,b]$ a tudíž $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = 0$. Bez újmy na obecnosti můžeme tedy předpokládat, že $g(b) - g(a) > 0$. Dále využijeme toho, že každá funkce spojitá na kompaktním intervalu je na tomto intervalu také stejnoměrně spojitá. Existuje tedy $\delta_\varepsilon > 0$ takové, že

$$\left.\begin{aligned} &|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{g(b) - g(a)} \\ &\qquad\text{pro všechna } x, y \in [a,b] \text{ taková, že } |x-y| < \delta_\varepsilon\,. \end{aligned}\right\} \tag{5.35}$$

Dokážeme, že pro libovolná dvě značená dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}), (\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}')$ intervalu $[a,b]$ taková, že $|\boldsymbol{\sigma}| < \delta_\varepsilon$ a $\boldsymbol{\sigma}' \supset \boldsymbol{\sigma}$ platí $|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}')| < \varepsilon$. Podle věty 5.13 to už bude znamenat, že existuje $(\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$.

Nechť $\nu(\boldsymbol{\sigma}) = m$. Označme prvky dělení $\boldsymbol{\sigma}'$ a složky vektoru $\boldsymbol{\xi}'$ tak, že bude

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}' &= \left\{\sigma_0, \sigma_1^1, \ldots, \sigma_{n_1-1}^1, \sigma_1, \sigma_1^2, \ldots, \sigma_{m-1}, \sigma_1^m, \ldots, \sigma_{n_m-1}^m, \sigma_m\right\} \\ \boldsymbol{\xi}' &= \left(\xi_1^1, \quad \ldots, \quad \xi_{n_1}^1, \xi_1^2, \quad \ldots, \quad \xi_1^m, \quad \ldots, \quad \xi_{n_m}^m\right). \end{aligned}$$

Potom

$$S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^m f(\xi_j)\,[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] = \sum_{j=1}^m f(\xi_j) \sum_{i=1}^{n_j} [g(\alpha_i^j) - g(\alpha_{i-1}^j)]$$

a

$$|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}')| \le \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} |f(\xi_j) - f(\xi_i^j)|\,[g(\alpha_i^j) - g(\alpha_{i-1}^j)]\,.$$

Protože

$$|\xi_j - \xi_i^j| < |\boldsymbol{\sigma}| < \delta_\varepsilon \ \text{ pro všechna } j \in \{1, 2, \ldots, m\} \text{ a } i \in \{1, 2, \ldots, n_j\}\,,$$

odvodíme pomocí nerovnosti (5.35) vztah

$$\begin{aligned}|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')| &< \frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j}[g(\alpha_i^j)-g(\alpha_{i-1}^j)]\\ &= \frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}\,[g(b)-g(a)]=\varepsilon\,.\end{aligned}$$

Důkaz se dokončí pomocí cvičení 5.18. □

5.51. Věta. (i) *Jestliže* $f\in\mathbb{BV}[a,b]$ *je zleva spojitá na intervalu* $(a,b]$, *pak pro každou funkci* $g\in\mathbb{G}[a,b]$ *zprava spojitou na intervalu* $[a,b)$ *existují oba integrály*

$$(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}g \quad a \quad (\sigma)\int_a^b g\,\mathrm{d}f\,.$$

(ii) *Jestliže* $f\in\mathbb{BV}[a,b]$ *je zprava spojitá na intervalu* $[a,b)$, *pak pro každou funkci* $g\in\mathbb{G}[a,b]$ *zleva spojitou na intervalu* (a,b) *existují oba integrály*

$$(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}g \quad a \quad (\sigma)\int_a^b g\,\mathrm{d}f\,.$$

D ů k a z. Díky větě o integraci per-partes (věta 5.47) stačí v obou případech dokázat existenci integrálu $(\sigma)\int_a^b g\,\mathrm{d}\,f$.

Nechť $g\in\mathbb{G}[a,b]$ je zprava spojitá na intervalu $[a,b)$, tj. $g\in\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{R}}[a,b]$ (viz (4.2)). Podle lemmat 4.13 a 4.14 máme

$$\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{R}}[a,b]=\overline{\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{R}}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]}=\overline{\mathrm{Lin}\Big(\chi_{[\tau,b]},\tau\in[a,b)\Big)}\,.$$

Podle lemmatu 5.11 a věty 5.49 tedy stačí dokázat, že integrál $(\sigma)\int_a^b g\,\mathrm{d}\,f$ existuje jestliže $g=\chi_{[a,\tau]}$ pro nějaké $\tau\in(a,b]$.

Zřejmě je $(\sigma)\int_a^\tau g\,\mathrm{d}f=f(\tau)-f(a)$ a pro každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}[\tau,b]$ máme

$$S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})=\begin{cases}0 & \text{je-li } \xi_1>\tau\,,\\ f(\sigma_1)-f(\tau) & \text{je-li } \xi_1=\tau\,.\end{cases}$$

Díky spojitosti funkce f v bodě τ zprava můžeme tedy k danému $\varepsilon > 0$ vždy najít dělení $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$ takové, že bude

$$|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})| < \varepsilon \ \text{ pro všechna } (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[\tau,b] \text{ taková, že } \boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \text{ , tj.}$$

$$(\sigma)\int_\tau^b g\,\mathrm{d}f = 0 \quad \text{a} \quad (\sigma)\int_a^b g\,\mathrm{d}f = f(\tau) - f(a)\,.$$

Platí tedy tvrzení (i). Druhé tvrzení by se dokazovalo podobně. □

5.52. Cvičení. (i) Pro oba typy RS – integrálu dokažte:

Jestliže $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *má konečnou variaci na* $[a,b]$ *a je spojitá na* $[a,b]$, *pak integrál* $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ *existuje pro každou funkci* g *regulovanou na* $[a,b]$.

(ii) Proveďte podrobný důkaz tvrzení (ii) věty 5.51.

5.53. Poznámka. Připomeňme ještě bez důkazu jeden ze známých zajímavých existenčních výsledků. Důkaz náleží L.C. Youngovi, jednomu z klasiků teorie integrace, a lze ho najít v jeho práci [54] z roku 1936.

Jestliže funkce $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ a $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ splňují podmínky

$$|f(x)-f(y)| \le K\,|x-y|^\alpha \quad \text{a} \quad |g(x)-g(y)| \le L\,|x-y|^\beta \quad \text{pro } \ x,y\in[a,b]\,,$$

kde $K,L\in[0,\infty)$, $\alpha,\beta\in(0,\infty)$, $\alpha+\beta>1$, pak existuje integrál $(\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}g$.

5.7 Bodová konvergence

Důkaz věty o konvergenci posloupnosti integrálů $\int_a^b f_n\,\mathrm{d}g$, ve které by nebyla nutná stejnoměrná konvergence $f_n \rightrightarrows f$ nám usnadní zavedení Darbouxových horních a dolních integrálů.

5.54. Definice. Nechť $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ je neklesající na $[a,b]$. Pro libovolné dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a,b]$ a funkci $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ položme

$$\overline{S}_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \Big(\sup_{x\in[\sigma_{j-1},\sigma_j]} f(x)\Big)\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})]$$

a

$$\underline{S}_{\,f\Delta\, g}(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \big(\inf_{x\,\in\,[\sigma_{j-1},\sigma_j]} f(x) \big) \, [g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})]$$

a definujme

$$\overline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}\, g = \inf \Big\{ \overline{S}_{f\Delta\, g}(\boldsymbol{\sigma}) : \boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b] \Big\}$$

a

$$\underline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}\, g = \sup \Big\{ \underline{S}_{\,f\Delta\, g}(\boldsymbol{\sigma}) : \boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b] \Big\}\,.$$

Veličiny $\overline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}\, g$ resp. $\underline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}\, g$ nazýváme *horní resp. dolní integrál* f vzhledem ke g.

5.55. Lemma. *Nechť* $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ *je neklesající na* $[a,b]$ *a* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. *Potom platí*

$$\overline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}\, g = \underline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}\, g = I \in \mathbb{R} \tag{5.36}$$

právě tehdy, když

$$(\sigma)\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g = I\,.$$

D ů k a z . a) Protože g je neklesající, plyne přímo z definice 5.54, že

$$\underline{S}_{\,f\Delta\, g}(\boldsymbol{\sigma}) \le S_{f\Delta\, g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \le \overline{S}_{f\Delta\, g}(\boldsymbol{\sigma}) \quad \text{pro } \boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b] \text{ a } \boldsymbol{\xi}\in\tau(\boldsymbol{\sigma})\,,$$

a

$$\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} \supset \boldsymbol{\sigma} \implies \Big(\underline{S}\, f\Delta\, g(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}) \ge \underline{S}_{\,f\Delta\, g}(\boldsymbol{\sigma}) \text{ a } \overline{S}_{f\Delta\, g}(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}) \le \overline{S}_{f\Delta\, g}(\boldsymbol{\sigma}) \Big)\,.$$

Pomocí těchto základních faktů není obtížné ověřit (proveďte !), že platí-li (5.36), pak pro každé $k\in\mathbb{N}$ existuje dělení $\boldsymbol{\sigma}^k\in\mathscr{D}[a,b]$ takové, že nerovnosti

$$I - \frac{1}{k} < \underline{S}_{\,f\Delta\, g}(\boldsymbol{\sigma}^k) \le S_{f\Delta\, g}(\boldsymbol{\sigma}^k,\boldsymbol{\xi}^k) \le \overline{S}_{f\Delta\, g}(\boldsymbol{\sigma}^k) < I + \frac{1}{k}\,.$$

platí pro každé $\boldsymbol{\xi}^k\in\tau(\boldsymbol{\sigma}^k)$. Pro dané $\varepsilon>0$ zvolme $k_\varepsilon > \dfrac{1}{\varepsilon}$ a položme $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon = \boldsymbol{\sigma}^{k_\varepsilon}$. Potom bude pro každé $\boldsymbol{\sigma}\supset\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$ a $\boldsymbol{\xi}\in\tau(\boldsymbol{\sigma})$ platit

$$I - \varepsilon < \underline{S}(\boldsymbol{\sigma}^{k_\varepsilon}) \le \underline{S}(\boldsymbol{\sigma}) \le S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \le \overline{S}(\boldsymbol{\sigma}) \le \overline{S}(\boldsymbol{\sigma}^{k_\varepsilon}) < I + \varepsilon\,.$$

Odtud plyne rovnost $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = I.$

b) Předpokládejme nyní, že existuje $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g.$

Buď dáno $\varepsilon > 0.$ Podle věty 5.13 existuje dělení $\boldsymbol{\sigma}$ takové, že nerovnost

$$\left|S_{f\Delta\,g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - S_{f\Delta\,g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\eta})\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

neboli

$$\Big|\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\big(f(\xi_j) - f(\eta_j)\big)\,\big[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})\big]\Big| < \frac{\varepsilon}{2}$$

platí pro jakákoliv $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\in\tau(\boldsymbol{\sigma}).$ Přechodem k supremům a infimům na každém intervalu $[\sigma_{j-1},\sigma_j]$ získáme nerovnost

$$\begin{aligned}
0 &\le \overline{S}_{f\Delta\,g}(\boldsymbol{\sigma}) - \underline{S}_{\,f\Delta\,g}(\boldsymbol{\sigma})\\
&= \Big|\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\Big(\sup_{x\in[\sigma_{j-1},\sigma_j]} f(x) - \inf_{x\in[\sigma_{j-1},\sigma_j]} f(x)\Big)\,\big[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})\big]\Big|\\
&\le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Odtud a s pomocí zřejmých nerovností

$$\underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}\,g \le \underline{S}_{\,f\Delta\,g}(\boldsymbol{\sigma}) \le \overline{S}_{f\Delta\,g}(\boldsymbol{\sigma}) \le \overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}\,g$$

dostáváme

$$\overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}\,g \le \overline{S}_{f\Delta\,g}(\boldsymbol{\sigma}) < \underline{S}_{\,f\Delta\,g}(\boldsymbol{\sigma}) + \varepsilon \le \underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}\,g + \varepsilon$$

a tudíž

$$0 \le \overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}\,g - \underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}\,g < \varepsilon\,.$$

Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, znamená to, že platí (5.36). $\square$

5.56. Poznámka. Jestliže $\overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}\, g = \underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}\, g = I \in \mathbb{R}$, bývá jejich společná hodnota I nazývána *Darbouxův – Stieltjesův integrál*. Lemma 5.55 říká, že tento integrál je ekvivalentní se (σ) RS – integrálem.

Nyní dokážeme dvě hlavní věty tohoto odstavce: Osgoodovu větu o dominované konvergenci a Hellyovu větu o konvergenci. Obě tyto věty platí ve stejném znění pro oba typy RS – integrálů.

5.57. Věta (OSGOODOVA KONVERGENČNÍ VĚTA)**.** *Předpokládejme, že funkce* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *a posloupnost* $\{f_n\}$ *funkcí definovaných na* $[a, b]$ *splňují*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{a} \quad |f_n(x)| \le M < \infty \;\; \text{pro} \;\; x \in [a, b] \;\; \text{a} \;\; n \in \mathbb{N}\,. \tag{5.37}$$

Dále, nechť funkce $g \in \mathbb{BV}[a, b]$ *je taková, že integrály* $\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$ *a* $\int_a^b f_n \,\mathrm{d}\, g$ *existují pro libovolné* $n \in \mathbb{N}$. *Potom*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f \,\mathrm{d}\, g = \int_a^b f \,\mathrm{d}\, g\,. \tag{5.38}$$

D ů k a z . a) Podle důsledku 5.39 integrál $\int_a^b |f_n(x) - f(x)| \,\mathrm{d}\, [\mathrm{var}_a^x\, g]$ existuje pro každé $n \in \mathbb{N}$ a platí nerovnost

$$\Big|\int_a^b f_n(x) \,\mathrm{d}\, g(x) - \int_a^b f(x) \,\mathrm{d} g(x)\Big| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)| \,\mathrm{d}\, [\mathrm{var}_a^x\, g]\,. \tag{5.39}$$

Stačí tedy dokázat, tvrzení věty je pravdivé, když funkce f_n jsou nezáporné, $f = 0$ a g je neklesající. K tomu budeme potřebovat následující tvrzení z teorie množin známé jako Arzelàovo lemma. Jeho důkaz lze nalézti např. v [13, lemma II.15.8].

Lemma. (ARZELÀ). *Nechť* $\big\{ \{J_{k,j}\} : k \in \mathbb{N},\; j \in U_k \big\}$ *je posloupnost konečných množin podintervalů* $[a, b]$ *takových, že*

$$\sum_{j \in U_k} |J_{k,j}| > C > 0 \quad \text{pro každé} \;\; k \in \mathbb{N}\,.$$

Potom existují posloupnosti indexů $\{k_\ell\}$ *a* $\{j_\ell\}$ *takové, že* $j_\ell \in U_{k_\ell}$ *pro každé* $\ell \in \mathbb{N}$ *a* $\bigcap_{\ell \in \mathbb{N}} J_{k_\ell, j_\ell} \ne \emptyset$.

b) Předpokládejme tedy, že g je neklesající na $[a,b]$ a $\{f_n\}$ je posloupnost funkcí definovaných na $[a,b]$ a takových, že

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \text{a} \quad 0 \le f_n(x) \le M < \infty \ \text{ pro } \ x \in [a,b] \ \text{ a } \ n \in \mathbb{N}\,.$$

Dokážeme, že musí platit

$$\lim_{n\to\infty} \underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}\, g = 0\,. \tag{5.40}$$

Důkaz provedeme sporem. Nechť tedy neplatí (5.40). Potom existují $\varepsilon > 0$ a posloupnost $\{n_k\}$ takové, že

$$\underline{\int_a^b} f_{n_k} \,\mathrm{d}\, g > \varepsilon \quad \text{pro všechna } \ k \in \mathbb{N}\,.$$

Vzhledem k definici 5.54 to znamená, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $\boldsymbol{\sigma}^k \in \mathscr{D}[a,b]$ takové že $\underline{S}_{\ k}(\boldsymbol{\sigma}^k) > \varepsilon$, kde značíme $\underline{S}_{\ k}(\boldsymbol{\sigma}^k) = \underline{S}_{\ f_{n_k}\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}^k)$. Položme ještě $m_k = \nu(\boldsymbol{\sigma}^k)$ a $\varphi_{k,j} = \inf\limits_{x \in [\sigma^k_{j-1}, \sigma^k_j]} f_{n_k}(x)$ pro $k \in \mathbb{N}$ a $j \in \{1, 2, \dots, m_k\}$.

Pro dané $\eta > 0$ označme U_k množina indexů j takových, že $\varphi_{k,j} > \eta$, zatímco $V_k = \{1, 2, \dots, m_k\} \setminus U_k$. Zřejmě

$$M \sum_{j \in U_k} [g(\sigma^k_j) - g(\sigma^k_{j-1})] + \eta \sum_{j \in V_k} [g(\sigma^k_j) - g(\sigma^k_{j-1})] > \varepsilon$$

neboli

$$M \sum_{j \in U_k} [g(\sigma^k_j) - g(\sigma^k_{j-1})] > \varepsilon - \eta\, [g(b) - g(a)]\,.$$

Pro $\eta = \dfrac{\varepsilon}{2\,[g(b) - g(a)]}$ dostaneme

$$\sum_{j \in U_k} [g(\sigma^k_j) - g(\sigma^{j-1})] > \frac{\varepsilon}{2\,M} > 0$$

neboli

$$\sum_{j \in U_k} |J_{k,j}| > \frac{\varepsilon}{2\,M} > 0, \quad \text{kde } \ J_{k,j} = [g(\sigma^k_{j-1}), g(\sigma^k_j)\,] \quad \text{pro } \ j \in U_k\,.$$

Podle Arzelàova lemmatu tedy existují bod y_0 a posloupnosti $\{k_\ell\}$ a $\{j_\ell\}$ takové, že $j_\ell \in U_{k_\ell}$ pro každé $\ell \in \mathbb{N}$ a $y_0 \in \bigcap\limits_{\ell \in \mathbb{N}} J_{k_\ell, j_\ell}$ neboli

$$y_0 \in [g(\sigma^{k_\ell}_{j_\ell - 1}), g(\sigma^{k_\ell}_{j_\ell})], \quad \text{kde } j_\ell \in U_{k_\ell} \text{ pro každé } \ell \in \mathbb{N}.$$

Protože g je neklesající na $[a,b]$, existuje právě jeden bod $x_0 \in [a,b]$ takový, že

$$y_0 \in [g(x_0-), g(x_0+)], \; x_0 \in [\sigma^{k_\ell}_{j_\ell - 1}, \sigma^{k_\ell}_{j_\ell}] \text{ a } j_\ell \in U_{k_\ell} \text{ pro každé } \ell \in \mathbb{N}.$$

Podle definice množin U_k to znamená, že $f_{n_{k_\ell}}(x_0) > \eta$ pro každé $\ell \in \mathbb{N}$. To ale není možné vzhledem k předpokladu $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Platí tedy (5.39).

c) Podle části b) důkazu máme

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)| \,\mathrm{d}\,[\operatorname{var}_a^x g] = 0$$

a tudíž ze vztahu (5.39) bezprostředně vyplývá, že platí také

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \,\mathrm{d}\, g = \int_a^b f| \,\mathrm{d}\, g\,.$$

Tím je důkaz dokončen. $\square$

Další věta o konvergenci posloupnosti integrálů $\left\{\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g_n\right\}$ je svým způsobem symetrická ke větě Osgoodově.

5.58. Věta (HELLYOVA VĚTA O KONVERGENCI)**.** *Nechť funkce* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *a posloupnost* $\{g_n\} \subset \mathbb{BV}[a,b]$ *jsou takové, že*

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x) \text{ pro } x \in [a,b] \quad a \quad \operatorname{var}_a^b g_n \le \gamma < \infty.$$

Potom $\operatorname{var}_a^b g \le \gamma$ *a* $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f \,\mathrm{d}\, g_n = \int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$ *platí pro každou funkci* f *spojitou na* $[a,b]$.

D ů k a z . a) Pro každé dělení $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$ a každé $n \in \mathbb{N}$ máme

$$V(g_n, \boldsymbol{\sigma}) \le \operatorname{var}_a^b g_n \le \gamma\,.$$

Proto také

$$V(g, \boldsymbol{\sigma}) = \lim_{n\to\infty} V(g_n, \boldsymbol{\sigma}) \le \gamma$$

a tudíž $\operatorname{var}_a^b g \le \gamma$.

b) Všechny integrály $\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g_n$, $n \in \mathbb{N}$, a $\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$ existují podle věty 5.50.

Buď dáno $\varepsilon > 0$. Ze spojitosti funkce f na $[a,b]$ plyne, že existuje dělení $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m\} \in \mathscr{D}$ takové, že pro každé $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ platí

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3\,\gamma} \quad \text{pro všechny } x, y \in [\sigma_{j-1}, \sigma_j\,]\,. \tag{5.41}$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^m \Big(\int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} f(x)\,\mathrm{d}\, g_n(x) - f(\sigma_j) \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} \mathrm{d}\, g_n(x) \Big) \\ = \sum_{j=1}^m \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} \big(f(x) - f(\sigma_j) \big)\,\mathrm{d}\, g_n(x)\,,\end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\, g_n(x) - \sum_{j=1}^m f(\sigma_j)\,[g_n(\sigma_j) - g_n(\sigma_{j-1})] \\ = \sum_{j=1}^m \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} \big(f(x) - f(\sigma_j) \big)\,\mathrm{d}\, g_n(x)\,.\end{aligned}$$

Pomocí (5.41) a lemmatu 5.9 tedy dostaneme

$$\begin{aligned}\Big| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\, g_n(x) - S_{f\,\Delta g_n}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \Big| \\ \le \frac{\varepsilon}{3\,\gamma} \sum_{j=1}^m \big| [g_n(\sigma_j) - g_n(\sigma_{j-1})] \big| \le \frac{\varepsilon}{3\,\gamma}\,\gamma = \frac{\varepsilon}{3}\,.\end{aligned}$$

Podobně odvodíme i analogickou nerovnost s funkcí g na místě g_n, tj.

$$\Big| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}[g(x)] - S_{f\,\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \Big| < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Protože $g_n(x) \to g(x)$ pro každé $x \in [a,b]$, snadno ověříme také rovnost

$$\lim_{n \to \infty} \big| S_{f\,\Delta g_n}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S_{f\,\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \big| = 0\,.$$

Existuje tedy $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\big| S_{f\,\Delta g_n}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S_{f\,\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \big| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pro } n \ge n_0\,.$$

Pomocí posledních tří nerovností konečně uzavřeme důkaz:

$$\Big|\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g_n - \int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\Big| \le \Big|\int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} f\,\mathrm{d}\,g_n - S_{f\,\Delta g_n}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\Big|$$
$$+\big|S_{f\,\Delta g_n}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - S_{f\,\Delta g_n}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\big| + \Big|S_{f\,\Delta g_n}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - \int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\Big| < \varepsilon\,. \qquad \square$$

5.8 Další věty o existenci integrálu

5.59. Věta. *Jestliže integrál* $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje pro každou funkci* f *spojitou na* $[a,b]$, *pak* g *má konečnou variaci na* $[a,b]$.

Důkaz se opírá o následující dvě pomocná tvrzení.

Tvrzení 1. *Je-li* $a_n \ge 0$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *a* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, *pak existuje posloupnost* $\{c_n\}$ *taková, že platí*

$$c_n > 0 \ \text{ pro všechna } n \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} c_n = 0 \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,a_n = \infty\,. \tag{5.42}$$

D ů k a z . Označíme-li $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ pro $n \in \mathbb{N}$, bude posloupnost $\{s_n\}$ neklesající a

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty\,. \tag{5.43}$$

Speciálně, pro dostatečně velká n $(n \ge n_0)$ bude $s_n > 0$. Můžeme tudíž definovat

$$c_n = \begin{cases} 1 & \text{pro } n < n_0\,, \\ \dfrac{1}{s_n} & \text{pro } n \ge n_0\,. \end{cases}$$

Zřejmě je $c_n > 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. Na druhou stranu, pro libovolná $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n \ge n_0$ máme

$$\sum_{k=n}^{m} c_k\,a_k = \sum_{k=n}^{m} \frac{a_k}{s_k} \ge \frac{\sum_{k=n}^{m} a_k}{s_m} = 1 - \frac{s_{n-1}}{s_m}\,.$$

Vzhledem k (5.43), pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $m_n > n$ takové, že je $\frac{s_{n-1}}{s_{m_n}} < \frac{1}{2}$, tj.

$$\sum_{k=n}^{m_n} c_k\, a_k > \frac{1}{2}\,.$$

To ovšem znamená, že musí platit ((5.42)).

Tvrzení 2. *Nechť* $g : [a, b] \to \mathbb{R},\ x_0 \in (a, b]$ *a*

$$\mathrm{var}_x^{x_0} g = \infty \quad \textit{pro každé } x \in [a, x_0)\,. \tag{5.44}$$

Potom existuje rostoucí posloupnost $\{x_k\}$ *bodů v* $(0, x_0)$ *taková, že*

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x_0 \ \textit{ a } \ \sum_{k=1}^{\infty} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| = \infty. \tag{5.45}$$

Důkaz. $\alpha)$ Předpokládejme nejprve, že je

$$\sup\{|g(x)| : x \in [y, x_0]\} = \infty \quad \text{pro všechna } y \in [a, x_0)\,. \tag{5.46}$$

Všimněme si, že pro libovolné $y \in [a, x_0)$ je

$$\sup\{|g(x)| : x \in [y, x_0]\} = \infty \iff \sup\{|g(x)| : x \in (y, x_0)\} = \infty\,.$$

(Kdyby bylo $\sup\{|g(x)| : x \in [y, x_0]\} = \infty$, musel by existovat bod $x \in (y, x_0)$ takový, že

$$|g(x)| \geq \max\{|g(y)|, |g(x_0)|\}.)$$

(Připomeňme si, že hodnoty $g(x)$ jsou konečné pro každé $x \in [a, b]$.) Vzhledem k (5.46) můžeme vybrat body $x_k \in (y, x_0),\ k \in \mathbb{N},$ tak, aby bylo

$$|g(x_1)| > 1,\ \ x_k > \max\{x_{k-1}, x_0 - \tfrac{1}{k}\}$$

a

$$|g(x_k)| > |g(x_{k-1})| + 1 \ \text{ pro } k = 2, 3, \ldots\,.$$

Zřejmě $\{x_k\}$ je rostoucí, $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ a

$$\sum_{k=1}^{\infty} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| \geq \sum_{k=1}^{\infty} \big(|g(x_{k+1})| - |g(x_k)|\big) > \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty\,.$$

Posloupnost $\{x_k\}$ je neklesající a splňuje (5.45).

$\beta)$ Nechť (5.46) neplatí. Potom existuje $y_1 \in [a, x_0)$ takové, že

$$0 \le g^* := \sup\{|g(x)| : x \in [y_1, x_0]\} < \infty. \tag{5.47}$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $y_1 > x_0 - 1.$ Podle (5.44) máme také

$$\operatorname{var}_{y_1}^{x_0} g = \infty\,.$$

Existuje tedy dělení $\boldsymbol{\sigma}^1 = \{\sigma_0^1, \sigma_1^1, \ldots, \sigma_{m_1}^1\}$ intervalu $[y_1, x_0]$ takové, že

$$V(g, \boldsymbol{\sigma}^1) > 1 + 2\,g^*.$$

Vzhledem k (5.47) tedy máme

$$\sum_{j=1}^{m_1-1} |g(\sigma_j^1) - g(\sigma_{j-1}^1)| \\ > 1 + 2\,g^* - |g(x_0)| - |g(\sigma_{m_1-1}^1)| \ge 1 + 2\,g^* - 2\,g^* = 1\,.$$

Položme

$$x_1 = y_1,\ \ x_k = \sigma_{k-1}^1 \ \text{ pro } k = 2, \ldots, m_1,$$
$$y_2 = \max\{x_{m_1-1}, x_0 - \frac{1}{2}\} \ \text{ a } \ r_1 = m_1 - 1.$$

Máme opět

$$\operatorname{var}_{y_2}^{x_0} g = \infty.$$

Existuje tedy $\boldsymbol{\sigma}^2 = \{\sigma_0^2, \sigma_1^2, \ldots, \sigma_{m_2}^2\} \in \mathscr{D}[y_2, x_0]$ pro něž

$$V(g, \boldsymbol{\sigma}^2) > 1 + 2\,g^*.$$

Tudíž, podle (5.47), dostaneme

$$\sum_{j=1}^{m_2-1} |g(\sigma_j^2) - g(\sigma_{j-1}^2)| \ge 1 + 2\,g^* - |g(x_0)| - |g(\sigma_{m_2-1}^2)| \ge 1\,.$$

Položme $r_2 = m_1 + m_2 - 1,$ $x_k = \sigma_{k-r_1}^2$ pro $k = r_1 + 1, r_1 + 2, \ldots, r_2,$ a $y_3 = \max\{x_{r_2}, x_0 - \frac{1}{3}\}.$ (Všimněme si, že $x_{r_1+1} = y_2 = \sigma_0^2$.)

Nyní, nechť $n\in\mathbb{N},\ n>2$ a $r_i,\ y_i,\ i=1,2,\dots,n-1$ a $x_k,\ k=1,2,\dots r_{n-1},$ jsou takové, že $x_{r_{i-1}+1}=y_{i-1},\ x_k\in(y_{i-1},y_i]$ pro $k=r_{i-1}+2,\dots,r_i$ a

$$y_i=\max\{x_{r_{i-1}},x_0-\tfrac{1}{i}\},\qquad \sum_{k=r_{i-1}}^{r_i-1}|g(x_{k+1})-g(x_k)|\ge 1$$

pro $i=1,2,\dots,n-1$. Položme $y_n=\max\{x_{r_{n-1}},x_0-\frac{1}{n}\}$. Opět $\operatorname{var}_{y_n}^{x_0}g=\infty$ a v důsledku nerovností (5.47) existuje také $\boldsymbol{\sigma}^n\in\mathscr{D}[y_n,x_0]$, takové, že

$$\sum_{j=1}^{m_n-1}|g(\sigma_j^n)-g(\sigma_{j-1}^n)|\ge 1\,,$$

kde $m_n=\nu(bsigma^n)$. Položíme-li

$$r_n=r_{n-1}+m_n-1\quad\text{a}\quad x_k=\sigma_{k-r_{n-1}}^n\text{ pro }k=r_{n-1}+1,\dots,r_n\,,$$

bude platit

$$\sum_{k=r_{n-1}}^{r_n-1}|g(x_{k+1})-g(x_k)|\ge 1\ \text{ a }\ x_k\ge y_n\ge x_0-\tfrac{1}{n}\ \text{ pro }k=r_{n-1},\dots,r_n\,.$$

Indukcí jsme tedy zkonstruovali rostoucí posloupnosti $\{r_n\},\ \{y_n\}$ a $\{x_k\}$ takové, že

$$y_n\in(x_0-\tfrac{1}{n},x_0),\qquad \sum_{k=r_{n-1}}^{r_n-1}|g(x_{k+1})-g(x_k)|\ge 1\text{ pro }\ n\in\mathbb{N}$$

a $x_k\ge y_n\ge x_0-\frac{1}{n}$ pro $k\ge r_{n-1}$. Odtud plyne, že

$$\sum_{k=1}^{\infty}|g(x_{k+1})-g(x_k)|=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=r_{n-1}}^{r_n-1}|g(x_{j+1})-g(x_j)|\Big)\ge\sum_{n=1}^{\infty}1=\infty$$

a $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=x_0$. Dokázali jsme tedy, že posloupnost $\{x_k\}$ je rostoucí a splňuje (5.45).

D ů k a z věty 5.59.

Vzhledem k větě 5.5 se můžeme omezit na $(\sigma)-$integrál.

Předpokládejme, že $\operatorname{var}_a^b g = \infty$. Díky Vitaliově větě o konečném pokrytí a větě 2.11 víme, že funkce $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ má konečnou variaci na $[a,b]$ právě tehdy, když platí

$$\left.\begin{aligned} &\forall\, x \in (a,b]\ \exists\, \delta_1 \in (0, x-a) : \operatorname{var}_{x-\delta_1}^{x} g < \infty \\ \text{a} \\ &\forall\, x \in (a,b]\ \exists\, \delta_2 \in (0, b-x) : \operatorname{var}_{x}^{x+\delta_2} g < \infty\,. \end{aligned}\right\} \tag{5.48}$$

Předpoklad, že $\operatorname{var}_a^b g = \infty$ znamená, že existuje $x_0 \in [a,b]$ takové, že pro $x = x_0$ není splněna jedna z podmínek (5.48). Nechť tedy např. $x_0 \in (a,b]$ a nechť pro každé $x \in [a, x_0)$ platí (5.44). Podle tvrzení 2 tedy existuje rostoucí posloupnost $\{x_k\}$ bodů v $(0, x_0)$ taková, že

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x_0 \ \text{ a } \ \sum_{k=1}^{\infty} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| = \infty.$$

Dále, podle tvrzení 1 existuje posloupnost $\{c_k\}$ kladných čísel taková, že platí

$$\lim_{k\to\infty} c_k = 0 \ \text{ a } \ \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, |g(x_k) - g(x_{k-1})| = \infty.$$

Položme

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \le x_1 \text{ resp. } x \ge x_0 \text{ resp. } x \in \{x_k\}_{k=1}^{\infty}\,, \\ c_k\, \operatorname{sign}(g(x_k) - g(x_{k-1})) & \text{pro } x = \xi_k := \dfrac{x_k + x_{k-1}}{2} \end{cases}$$

a ve zbývajících bodech intervalu $[a,b]$ dodefinujme funkci f lineárně. Takto definovaná funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je zřejmě spojitá na $[a,b]$ a přitom pro ní platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(\xi_k)\, [g(x_{k+1}) - g(x_k)] = \infty\,.$$

Speciálně, pro každé $M > 0$ existuje $N_M \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{k=1}^{N_M} f(\xi_k)\, [g(x_{k+1}) - g(x_k)] > M.$$

Pro dané $M > 0$, označme

$$\boldsymbol{\sigma}_M = \{a, x_1, x_2, \ldots, x_{N_M}, x_0, b\},\ \ \boldsymbol{\xi}_M = (a, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{N_M}, x_0, b).$$

Potom je $(\boldsymbol{\sigma}_M, \boldsymbol{\xi}_M) \in \mathscr{T}\,[a,b]$ a

$$S(\boldsymbol{\sigma}_M, \boldsymbol{\xi}_M) = \sum_{k=1}^{N_M} f(\xi_k)\,[g(x_{k+1}) - g(x_k)] > M\,.$$

(Připomeňme si, že $f(a) = f(x_1) = f(x_0) = f(b) = 0.$)

To ale znamená, že integrál $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ nemůže mít konečnou hodnotu.

Není-li splněna druhá z podmínek v (5.48), tj. existuje $x_0 \in [a,b)$ takové, že a $\mathrm{var}_{x_0}^{x}\, g = \infty$ pro každé $x \in [x_0, b)$, je třeba místo tvrzení 2 použít jeho vhodnou úpravu. □

5.60. Cvičení. Zformulujte a dokažte analogii tvrzení 2 potřebnou k dokončení důkazu věty 5.59.

5.61. Věta. *Nechť* $f \in \mathbb{G}[a,b]$ *a nechť integrál* $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje pro každou konečnou skokovou funkci* g. *Potom* f *je spojitá na* $[a,b]$.

D ů k a z. Opět se můžeme omezit na $(\sigma)\,$RS – integrál. Nechť $x_0 \in (a,b)$, $c,\, d \in \mathbb{R}$, $c + d \neq 0$ a nechť funkce $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ je definována podobně jako v Poznámce 5.22, tj.

$$g(x) = c\,\chi_{[a,x_0)}(x) + \frac{c+d}{2}\,\chi_{[x_0]}(x) + d\,\chi_{(x_0,b]}(x) \quad \text{pro } x \in [a,b]\,.$$

Podle poznámky 5.22 může integrál $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ existovat pouze tehdy, když $f(x_0-) = f(x_0) = f(x_0+)$. Podobně bychom dokázali, že f musí být spojitá i v bodě a zprava a v bodě b zleva. □

5.9 Věty o střední hodnotě

Věty tohoto odstavce platí ve stejném znění pro oba typy RS – integrálu.

5.62. Věta (O STŘEDNÍ HODNOTĚ). *Je-li* f *spojitá na* $[a,b]$ *a* g *neklesající na* $[a,b]$, *pak existuje* $x_0 \in [a,b]$ *takové, že*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = f(x_0)\,[g(b) - g(a)]\,. \tag{5.49}$$

D ů k a z . věta 5.50 zaručuje existenci integrálu $\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$ v obou smyslech. Protože je g neklesající na $[a,b]$, pro každé značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}\,[a,b]$ platí

$$m\,[g(b)-g(a)] \le S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \le M\,[g(b)-g(a)]\,,$$

kde $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ a $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Podobně jako při důkazu lemmatu 5.9 plyne odtud, že platí také

$$m\,[g(b)-g(a)] \le \int_a^b f \,\mathrm{d}\, g \le M\,[g(b)-g(a)]\,,$$

Dále, protože f je spojitá, nabývá všech hodnot z intervalu $[m,M]$. Speciálně, existuje $x_0 \in [a,b]$ takové, že platí (5.49). □

5.63. Věta (DRUHÁ O STŘEDNÍ HODNOTĚ)**.** *Je-li f spojitá na $[a,b]$ a g neklesající na $[a,b]$, pak existuje $x_0 \in [a,b]$ takové, že*

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g = g(a)\int_a^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x + g(b)\int_{x_0}^b f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{5.50}$$

D ů k a z . Funkce f je riemannovsky integrovatelná na $[a,b]$. Označme

$$h(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{pro } x\in[a,b].$$

Potom podle věty o substituci (věta 5.42, viz též důsledek 5.43), věty o integraci per-partes (věta 5.47) a věty o střední hodnotě (věta 5.62) existuje $x_0 \in [a,b]$ takové, že platí

$$\begin{aligned}\int_a^b f\,\mathrm{d}g &= \int_a^b g\,\mathrm{d}h = h(b)\,g(b) - \int_a^b h\,\mathrm{d}\,g\\ &= \Big(\int_a^b f\,\mathrm{d}x\Big)\,g(b) - \Big(\int_a^{x_0} f\,\mathrm{d}x\Big)\,[g(b)-g(a)]\\ &= g(a)\int_a^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x + g(b)\int_{x_0}^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,\end{aligned}$$

tj. platí (5.50). □

5.10 Další integrály Stieltjesova typu

Buďte dány funkce $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ a dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a, b]$. Položme

$$S_M(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \frac{f(\sigma_j) + f(\sigma_{j-1})}{2} \left[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})\right],$$

$$S_{CL}(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} f(\sigma_{j-1}) \left[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})\right],$$

$$S_{CR}(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} f(\sigma_j) \left[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})\right].$$

Dosadíme-li do definice 5.3 $S_M(\boldsymbol{\sigma})$ resp. $S_{CL}(\boldsymbol{\sigma})$ resp. $S_{CR}(\boldsymbol{\sigma})$ místo $S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ dostaneme po řadě integrály *střední* resp. *levý Cauchyův* resp. *pravý Cauchyův*. Podle způsobu limitního procesu se ovšem rozlišují (δ) nebo (σ) varianty. Je zřejmé, že všechny zobecňují příslušné RS – integrály, pokud jde o třídy integrovatelných funkcí. Ne vždy však zůstanou zachovány všechny vlastnosti RS – integrálů. Např. pro střední integrál neplatí obdoba věty 5.42 o substituci.

Více podrobností lze najít v odstavci II.19 monografie [13] T.H. Hildebrandta.

5.11 Cvičení na závěr

Není-li uvedeno jinak, v následujících cvičeních proveďte diskusi o existenci, případně určete hodnotu, pro každý typ Stieltjesova integrálu z této kapitoly, tj pro integrály (δ) RS, (δ) RS, střední, levý Cauchyův a pravý Cauchyův.

- (i) Nechť $g(x) = \sin x$ pro $x \in [0, \pi]$. Určete hodnotu integrálu $\displaystyle\int_0^\pi x \,\mathrm{d}g$.

- (ii) Nechť $g(x) = \exp(|x|)$ pro $x \in [-1, 1]$. Určete hodnotu integrálu $\displaystyle(\delta)\int_{-1}^1 x \,\mathrm{d}g$.

- (iii) Nechť $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in [0, \frac{1}{2}), \\ c & \text{pro } x = \frac{1}{2}, \\ d & \text{pro } x \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$ Zkoumejte existenci a hodnotu integrálu $\displaystyle\int_0^1 f \,\mathrm{d}g$ pro různé funkce f v závislosti na c, d.

- (iv) Nechť $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0\,, \\ 1 & \text{pro } x \geq 0\,, \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0\,, \\ 1 & \text{pro } x > 0\,, \end{cases}$

  Zkoumejte existenci a hodnotu integrálů

$$\int_{-1}^{1} g\,\mathrm{d}f,\ \int_{-1}^{0} g\,\mathrm{d}f,\ \int_{0}^{1} g\,\mathrm{d}f,\ \int_{-1}^{1} g\,\mathrm{d}g,\ \int_{-1}^{0} g\,\mathrm{d}g,\ \int_{0}^{1} g\,\mathrm{d}g\,.$$

- (v) Nechť $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x = -1\,, \\ 1 & \text{pro } x \in (-1, 2)\,, \\ -1 & \text{pro } x \in (\frac{1}{2}, 1]\,. \end{cases}$

  Určete hodnotu integrálu $\displaystyle\int_{1}^{3} x\,\mathrm{d}g$.

- (vi) Nechť $g(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \in [0, \frac{1}{2}]\,, \\ \frac{1}{x} & \text{pro } x \in (\frac{1}{2}, 1]\,. \end{cases}$

  Určete hodnotu integrálu $(\delta)\displaystyle\int_{0}^{1} x^2\,\mathrm{d}g$.

V této kapitole jsme čerpali z kapitoly II Hildebrandtovy monografie [13], ve které je možno najít i další informace.