

Aplikace Stieltjesova integrálu ve funkcionální analýze

V této kapitole nejprve ukážeme jak se Stieltjesovy integrály uplatní při reprezentaci spojitých lineárních funkcionalů na některých prostorech funkcí. Nejprve připomeňme několik základních pojmů.

7.1 Několik základních pojmů z funkcionální analýzy

(i) Nechť \mathbb{X} a \mathbb{Y} jsou lineární (vektorové) prostory. Zobrazení

$$\beta : x \in \mathbb{X}, y \in \mathbb{Y} \rightarrow \beta(x, y) \in \mathbb{R}$$

je *bilineární*, jestliže platí

$$\begin{aligned} \beta(x_1 + x_2, y) &= \beta(x_1, y) + \beta(x_2, y) && \text{pro všechna } x_1, x_2 \in \mathbb{X}, y \in \mathbb{Y}, \\ \beta(\lambda x, y) &= \lambda \beta(x, y) && \text{pro všechna } x \in \mathbb{X}, y \in \mathbb{Y}, \lambda \in \mathbb{R}, \\ \beta(x, y_1 + y_2) &= \beta(x, y_1) + \beta(x, y_2) && \text{pro všechna } x \in \mathbb{X}, y_1, y_2 \in \mathbb{Y}, \\ \beta(x, \lambda y) &= \lambda \beta(x, y) && \text{pro všechna } x \in \mathbb{X}, y \in \mathbb{Y}, \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(ii) Prostory \mathbb{X} , \mathbb{Y} tvoří *duální pár* vzhledem k bilineárnímu zobrazení β , jestliže platí

$$\begin{aligned} \beta(x, y) = 0 \text{ pro všechna } x \in \mathbb{X} &\implies y = 0, \\ \beta(x, y) = 0 \text{ pro všechna } y \in \mathbb{Y} &\implies x = 0. \end{aligned}$$

(iii) Lineárním zobrazením lineárního prostoru \mathbb{X} do \mathbb{R} říkáme *lineární funkcionály* na \mathbb{X} . Pro libovolné lineární funkcionály Φ, Ψ na \mathbb{X} , $\lambda \in \mathbb{R}$ a $x \in \mathbb{X}$ definujeme

$$(\Phi + \Psi)(x) = \Phi(x) + \Psi(x) \quad \text{a} \quad (\lambda \Phi)(x) = \lambda \Phi(x).$$

Množina lineárních funkcionalů na prostoru \mathbb{X} je zřejmě vzhledem k takto zavedeným operacím také lineární prostor. (Nulovým prvkem množiny lineárních funkcionalů na prostoru \mathbb{X} je přirozeně funkcional $0 : x \in \mathbb{X} \rightarrow 0 \in \mathbb{R}$.)

(iv) Je-li \mathbb{X} Banachův prostor s normou $x \in \mathbb{X} \rightarrow \|x\|_{\mathbb{X}}$, pak lineární funkcionál Φ na \mathbb{X} je spojitý (vzhledem k topologii indukované normou $\|\cdot\|_{\mathbb{X}}$) právě tehdy, když je ohraničený, tj. existuje číslo $K \in [0, \infty)$ takové, že nerovnost $|\Phi(x)| \leq K \|x\|_{\mathbb{X}}$ platí pro každé $x \in \mathbb{X}$ (viz [15, IV.1.2]). Prostor spojitých lineárních funkcionálů na Banachově prostoru \mathbb{X} značíme \mathbb{X}^* a nazýváme *duální* (nebo též *adjungovaný prostor*) k \mathbb{X} . Předpisem

$$\Phi \in \mathbb{X}^* \rightarrow \|\Phi\|_{\mathbb{X}^*} = \sup \{ |\Phi(x)| : x \in \mathbb{X}, \|x\|_{\mathbb{X}} \leq 1 \}.$$

je přirozeně definována norma na \mathbb{X}^* a \mathbb{X}^* je vzhledem k této normě také Banachův prostor (viz [15, IV.2.1]). Pověsimě si též, že zobrazení

$$x \in \mathbb{X}, \Phi \in \mathbb{X}^* \rightarrow \Phi(x) \in \mathbb{R} \quad (7.1)$$

je bilineární.

Důležitou roli v teorii spojitých lineárních operátorů hraje věta Hahnova – Banachova, kterou zde připomeneme v obecnosti postačující pro naše účely. Důkaz lze najít ve většině učebnic funkcionální analýzy, viz např. [15, IV.1.3].

7.1. Věta (HAHN – BANACH). *Nechť \mathbb{X} je Banachův prostor a $\mathbb{Y} \subset \mathbb{X}$ je jeho podprostor. Potom pro každý spojitý lineární funkcionál Φ na \mathbb{Y} existuje spojitý lineární funkcionál $\tilde{\Phi}$ na \mathbb{X} takový, že*

$$\tilde{\Phi}(y) = \Phi(y) \quad \text{pro } y \in \mathbb{Y} \quad \text{a} \quad \|\tilde{\Phi}\|_{\mathbb{X}^*} = \|\Phi\|_{\mathbb{Y}^*}. \quad (7.2)$$

Známým a užitečným důsledkem věty Hahnovy – Banachovy je následující tvrzení (viz např. [15, IV.1.3]).

7.2. Důsledek. *Nechť \mathbb{X} je Banachův prostor a $\mathbb{Y} \subset \mathbb{X}$ je jeho podprostor. Potom pro každý prvek $z \in \mathbb{X} \setminus \mathbb{Y}$ existuje spojitý lineární funkcionál Φ na \mathbb{X} takový, že*

$$\|\Phi\|_{\mathbb{X}^*} = 1, \quad \Phi(y) = 0 \quad \text{pro } y \in \mathbb{Y} \quad \text{a} \quad \Phi(z) = \text{dist}(\mathbb{Y}, z),$$

kde $\text{dist}(\mathbb{Y}, z)$ značí vzdálenost prvku z od množiny \mathbb{Y} , tj.

$$\text{dist}(\mathbb{Y}, z) = \inf \{ \|y - z\|_{\mathbb{X}} : y \in \mathbb{Y} \}.$$

Pomocí důsledku 7.2 snadno dokážeme následující tvrzení.

7.3. Důsledek. *Je-li \mathbb{X} Banachův prostor a \mathbb{X}^* jeho duální prostor, pak \mathbb{X}, \mathbb{X}^* je duální pár vzhledem k bilineárnímu zobrazení (7.1).*

D ů k a z. a) Je-li $\Phi(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{X}$, znamená to, že Φ je nulový funkcionál, tj. $\Phi = 0 \in \mathbb{X}^*$.

b) Podle důsledku 7.2 pro libovolné $x \neq 0$ existuje funkcionál $\Phi \in \mathbb{X}^*$ takový, že $\|\Phi\|_{\mathbb{X}^*} = 1$ a $\Phi(x) = \|x\|$. (Položíme $\mathbb{Y} = \{0\}$.) Nemůže se tedy stát, že by bylo současně $\Phi(x) = 0$ pro každé $\Phi \in \mathbb{X}^*$ a $x \neq 0$. \square

7.2 Spojité lineární funkcionály na prostoru spojitých funkcí

Mezi významné výsledky funkcionální analýzy patří representace spojitých lineárních funkcionálů na některých často používaných prostorech funkcí. Speciálně v případě prostoru $\mathbb{C}[a, b]$ funkcí spojitých na $[a, b]$ se dobře uplatní klasický (δ) RS – integrál.

7.4. Věta (RIESZ). Φ je spojité lineární funkcionál na $\mathbb{C}[a, b]$ ($\Phi \in (\mathbb{C}[a, b])^*$) právě tehdy, když existuje funkce $p \in \mathbb{BV}[a, b]$ taková, že $p(a) = 0$ a

$$\Phi(x) = (\delta) \int_a^b x \, d p \quad \text{pro každou funkci } x \in \mathbb{C}[a, b]. \quad (7.3)$$

Potom také platí $\|\Phi\|_{\mathbb{X}^*} = \text{var}_a^b p$.

D ů k a z. a) Nechť $x \in \mathbb{C}[a, b]$ a $p \in \mathbb{BV}[a, b]$. Potom podle věty 5.46 existuje integrál $(\delta) \int_a^b x \, d p$ a podle lemmatu 5.6 platí $\left| (\delta) \int_a^b x \, d p \right| \leq (\text{var}_a^b p) \|x\|$.
Zobrazení

$$\Phi_p : x \in \mathbb{C}[a, b] \rightarrow (\delta) \int_a^b x \, d p \in \mathbb{R}$$

je tedy ohraničený (tj. spojitý) lineární funkcionál na $\mathbb{C}[a, b]$, přičemž

$$\|\Phi_p\|_{(\mathbb{C}[a, b])^*} \leq \text{var}_a^b p. \quad (7.4)$$

b) Buď dán libovolný spojitý lineární funkcionál Φ na $\mathbb{C}[a, b]$.

Nechť $\mathbb{M}[a, b]$ značí množinu všech funkcí ohraničených na $[a, b]$. $\mathbb{M}[a, b]$ je zřejmě Banachův prostor vzhledem k operacím a normě definovaným stejně jako v $\mathbb{C}[a, b]$. Dále je zřejmé, že $\mathbb{C}[a, b]$ je uzavřený podprostor $\mathbb{M}[a, b]$.

Ve zbývající části tohoto důkazu budeme značit $\mathbb{X} = \mathbb{M}[a, b]$ a $\mathbb{Y} = \mathbb{C}[a, b]$.

Podle věty 7.1 můžeme funkcionál Φ rozšířit na celý prostor \mathbb{X} , tj. existuje funkcionál $\tilde{\Phi} \in X^*$ takový, že platí (7.2).

Položme

$$p(a) = 0 \quad \text{a} \quad p(t) = \tilde{\Phi}(\chi_{[a,t]}) \quad \text{pro } t \in (a, b]. \quad (7.5)$$

Dokážeme, že $p \in \mathbb{BV}[a, b]$.

Buď dáno dělení $\sigma \in \mathcal{D}[a, b]$. Položme $m = \nu(\sigma)$. Potom

$$V(p, \sigma) = \sum_{j=1}^m |p(\sigma_j) - p(\sigma_{j-1})| = \sum_{j=1}^m \alpha_j [p(\sigma_j) - p(\sigma_{j-1})],$$

kde $\alpha_j = \text{sign}[p(\sigma_j) - p(\sigma_{j-1})]$ pro $j = 1, 2, \dots, m$. Vzhledem k definici (7.5) tedy dostáváme

$$\begin{aligned} V(p, \sigma) &= \alpha_1 \tilde{\Phi}(\chi_{[a,\sigma_1]}) + \sum_{j=2}^m \alpha_j [\tilde{\Phi}(\chi_{[a,\sigma_j]}) - \tilde{\Phi}(\chi_{[a,\sigma_{j-1}]})] \\ &= \alpha_1 \tilde{\Phi}(\chi_{[a,\sigma_1]}) + \sum_{j=2}^m \alpha_j \tilde{\Phi}(\chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j]}) \\ &= \tilde{\Phi}(\alpha_1 \chi_{[a,\sigma_1]} + \sum_{j=2}^m \alpha_j \chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j]}) = \tilde{\Phi}(h), \end{aligned}$$

kde $h(t) = \alpha_1 \chi_{[a,\sigma_1]}(t) + \sum_{j=2}^m \alpha_j \chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j]}(t)$ pro $t \in [a, b]$. Zřejmě $\|h\| = 1$ a tedy

$$V(p, \sigma) \leq \|\tilde{\Phi}\|_{\mathbb{X}^*} = \|\Phi\|_{\mathbb{Y}^*} = \|\Phi\|_{(\mathbb{C}[a,b])^*} \quad \text{pro každé } \sigma \in \mathcal{D}[a, b].$$

To ovšem znamená, že

$$\text{var}_a^b p \leq \|\Phi\|_{(\mathbb{C}[a,b])^*}. \quad (7.6)$$

Zbývá dokázat, že platí (7.3) neboli $\Phi = \Phi_p$. Buďte dány libovolná $x \in \mathbb{C}[a, b]$ a $\varepsilon > 0$. Protože funkce x je stejnoměrně spojitá na $[a, b]$, existuje $\delta > 0$ takové, že platí

$$(t, s \in [a, b] \quad \text{a} \quad |t - s| < \delta) \implies |x(t) - x(s)| < \varepsilon.$$

Nechť $\sigma \in \mathcal{D}[a, b]$ je libovolné dělení takové, že $|\sigma| < \delta$. Položme $m = \nu(\sigma)$.

$$x_\sigma(t) = \begin{cases} x(\sigma_1) & \text{když } t = a, \\ x(\sigma_j) & \text{když } t \in (\sigma_{j-1}, \sigma_j]. \end{cases}$$

Snadno ověříme, že $|x(t) - x_\sigma(t)| < \varepsilon$ pro každé $t \in [a, b]$ neboli $\|x - x_\sigma\| < \varepsilon$. Dále,

$$x_\sigma(t) = x(\sigma_1) \chi_{[a]}(t) + \sum_{j=2}^m x(\sigma_j) \chi_{(\sigma_{j-1}, \sigma_j]}(t) \quad \text{pro } t \in [a, b].$$

Odtud, vzhledem k definici (7.5), dostaneme

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(x_\sigma) &= x(\sigma_1) \tilde{\Phi}(\chi_{[a, \sigma_1]}) + \sum_{j=2}^m x(\sigma_j) [\tilde{\Phi}(\chi_{[a, \sigma_j]}) - \tilde{\Phi}(\chi_{[a, \sigma_{j-1}]})] \\ &= x(\sigma_1) [p(\sigma - 1) - p(a)] + \sum_{j=2}^m x(\sigma_j) [p(\sigma_j) - p(\sigma_{j-1})] \\ &= \sum_{j=1}^m x(\sigma_j) [p(\sigma_j) - p(\sigma_{j-1})] = S_{x\Delta p}(\sigma, \xi_\sigma), \end{aligned}$$

kde $\xi_\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m)$. Protože existuje integrál $(\delta) \int_a^b x \, dp$, můžeme zvolit $\rho \in \mathcal{D}[a, b]$ a $\eta = \xi_\rho$ tak, aby platilo

$$\left| \tilde{\Phi}(x_\rho) - (\delta) \int_a^b x \, dp \right| = \left| S_{x\Delta p}(\rho, \eta) - (\delta) \int_a^b x \, dp \right| < \varepsilon.$$

Protože máme také $\|x - x_\rho\| < \varepsilon$, dostáváme

$$\begin{aligned} \left| \Phi(x) - (\delta) \int_a^b x \, dp \right| &= \left| \tilde{\Phi}(x) - (\delta) \int_a^b x \, dp \right| \\ &\leq \left| \tilde{\Phi}(x) - \tilde{\Phi}(x_\rho) \right| + \left| \tilde{\Phi}(x_\rho) - (\delta) \int_a^b x \, dp \right| \\ &< \|\tilde{\Phi}\|_{\mathbb{X}^*} \|x - x_\rho\| + \varepsilon < (\|\Phi\|_{\mathbb{Y}^*} + 1) \varepsilon. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že $\varepsilon > 0$ může být libovolně malé, znamená to, že platí

$$\Phi(x) = \Phi_p(x) = (\delta) \int_a^b x \, dp \quad \text{pro } x \in \mathbb{C}[a, b].$$

Konečně, podle (7.4) a (7.6) je $\|\Phi\|_{(\mathbb{C}[a,b])^*} = \text{var}_a^b p$. □

Jak ukazuje následující věta, není přiřazení $\Phi \in (\mathbb{C}[a,b])^* \rightarrow p \in \mathbb{BV}[a,b]$ určeno vztahem (7.3) jednoznačně.

7.5. Lemma. *Nechť $g \in \mathbb{BV}[a,b]$. Potom platí*

$$(\delta) \int_a^b f \, dg = 0 \quad \text{pro každou funkci } f \in \mathbb{C}[a,b] \quad (7.7)$$

tehdy a jen tehdy, když existuje nejvýše spočetná množina $W \subset (a,b)$ taková, že

$$g(t) = g(a) \quad \text{pro } t \in [a,b] \setminus W. \quad (7.8)$$

D ů k a z . a) Předpokládejme, že platí (7.8). Položme $g^C(t) = g(a)$ pro $t \in [a,b]$ a $g^B = g - g^C$. Potom $g^B(t) \neq 0$ právě tehdy, když $t \in W$. (g^C je spojitá část funkce g a g^B je skoková část g .)

Nechť f je libovolná funkce spojitá na $[a,b]$. Potom zřejmě

$$(\delta) \int_a^b f \, dg^C = 0. \quad (7.9)$$

Ukážeme, že platí také

$$(\delta) \int_a^b f \, dg^B = 0. \quad (7.10)$$

Je-li $W = \emptyset$, pak (7.10) evidentně platí. Nechť W je jednobodová množina, tj. $W = \{w\}$, kde $w \in (a,b)$. Buď dáno $\varepsilon > 0$ a nechť $\delta > 0$ je takové, že

$$\left(t, s \in [a,b] \text{ a } |t-s| < \delta \right) \implies |x(t) - x(s)| < \varepsilon.$$

Pro libovolné značené dělení $(\sigma, \xi) \in \mathcal{T}[a,b]$ takové, že $|\sigma| < \delta$, pak máme

$$|S(\sigma, \xi)| = \begin{cases} 0 & \text{když } w \notin \sigma, \\ |f(\xi_j) - f(\xi_{j+1})| |g(w)| < \varepsilon \|g\| & \text{když } w = \sigma_j. \end{cases}$$

Je-li W jednobodová množina, pak (7.10) platí. Snadno si rozmyslíme, že odtud plyne, že (7.10) platí i v případě, že množina W je konečná.

Předpokládejme nyní, že W je spočetná, $W = \{w_k\}$. Podle věty 2.24 je

$$\sum_{k=1}^{\infty} |g^{\mathbf{B}}(w_k)| = \sum_{k=1}^{\infty} (|\Delta^- g^{\mathbf{B}}(w_k)| + |\Delta^+ g^{\mathbf{B}}(w_k)|) < \infty.$$

Mějme dáno $\varepsilon > 0$. Potom existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |g^{\mathbf{B}}(w_k)| < \varepsilon. \quad (7.11)$$

Rozložme funkci $g^{\mathbf{B}}$ na součet $g^{\mathbf{B}} = h + \tilde{h}$, kde

$$h(t) = \begin{cases} g^{\mathbf{B}}(t) & \text{když } t \in \{w_1, w_2, \dots, w_N\}, \\ 0 & \text{když } t \in [a, b] \setminus \{w_1, w_2, \dots, w_N\} \end{cases}$$

a

$$\tilde{h}(t) = \begin{cases} g^{\mathbf{B}}(t) & \text{když } t \in \{w_k : k \geq N+1\}, \\ 0 & \text{když } t \in [a, b] \setminus \{w_k : k \geq N+1\}. \end{cases}$$

Podle předchozí části je

$$(\delta) \int_a^b f \, dh = 0. \quad (7.12)$$

Na druhou stranu, pro každé značené dělení $(\sigma, \xi) \in \mathcal{T}[a, b]$ máme podle (7.11)

$$\begin{aligned} |S_{f\Delta\tilde{h}}(\sigma, \xi)| &= \left| \sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} f(\xi_j) [\tilde{h}(\sigma_j) - \tilde{h}(\sigma_{j-1})] \right| \\ &\leq 2 \|f\| \sum_{j=N+1}^{\infty} |g^{\mathbf{B}}(\sigma_j)| < 2 \|f\| \varepsilon. \end{aligned}$$

Odtud, vzhledem k (7.9) a (7.11), plyne, že platí (7.10) a (7.7).

b) Nechť platí (7.7). Položme $f(t) = (\delta) \int_t^b (g(s) - g(a)) \, ds$ pro $t \in [a, b]$. Potom $f \in \mathbb{C}[a, b]$ a podle věty o integraci per-partes (věta 5.43) a věty o substituci

(věta 5.38) je

$$\begin{aligned} 0 &= (\delta) \int_a^b f \, dg = f(b)g(b) - f(a)g(a) - (\delta) \int_a^b g \, df \\ &= -f(a)g(a) + (\delta) \int_a^b g(t)(g(t) - g(a)) \, dt = (\delta) \int_a^b (g(t) - g(a))^2 \, dt \end{aligned}$$

Kdyby bylo $g(t_0) \neq g(a)$ v nějakém bodě t_0 spojitosti funkce g , muselo by existovat $\Delta > 0$ takové, že $(g(t) - g(a))^2 > 0$ pro $t \in (t_0 - \Delta, t_0 + \Delta)$. Potom bychom ovšem měli také

$$(\delta) \int_a^b f \, dg = (\delta) \int_a^b (g(t) - g(a))^2 \, dt \geq (\delta) \int_{t_0 - \Delta}^{t_0 + \Delta} (g(t) - g(a))^2 \, dt > 0,$$

což je ve sporu s předpokladem (7.7). Platí tedy (7.8). \square

7.6. Poznámka. Jestliže $f \in \mathbb{C}[a, b]$, pak podle Lemmatu 7.5 integrál $(\delta) \int_a^b f \, dg$ se nezmění, změníme-li hodnoty $g(t)$ v nejvýše spočetně mnoha bodech $t \in (a, b)$. Speciálně, nahradíme-li funkci g funkcí

$$\tilde{g}(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t = a, \\ g(t+) - g(a) & \text{pro } t \in (a, b), \\ g(b) - g(a) & \text{pro } t = b, \end{cases}$$

bude platit

$$(\delta) \int_a^b f \, dg = (\delta) \int_a^b f \, d\tilde{g} \quad \text{pro každé } f \in \mathbb{C}[a, b].$$

Odtud okamžitě plyne, že pro každý spojitý lineární funkcionál Φ na prostoru $\mathbb{C}[a, b]$ existuje právě jedna funkce $p \in \mathbb{BV}[a, b]$ taková, že

$$\left. \begin{aligned} &p(a) = 0, \quad p(t+) = p(t) \quad \text{pro } t \in (a, b) \\ &\Phi(x) = (\delta) \int_a^b x \, dp \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{C}[a, b]. \end{aligned} \right\} \quad (7.13)$$

Funkce $p \in \mathbb{BV}[a, b]$, které jsou zprava spojitě na (a, b) a takové, že $p(a) = 0$, se nazývají *normalizované funkce s konečnou variací* a tvoří uzavřený podprostor

v $\mathbb{BV}[a, b]$, který budeme značit $\mathbb{NBV}[a, b]$. Prostory $(\mathbb{C}[a, b])^*$ a $\mathbb{NBV}[a, b]$ jsou podle věty 7.4 a lemmatu 7.5 isomorfní, tj. zobrazení

$$\Phi \in \mathbb{X}^* \rightarrow p \in \mathbb{NBV}[a, b] \quad (7.14)$$

je vzájemně jednoznačné. To by zřejmě neplatilo, kdybychom $\mathbb{NBV}[a, b]$ nahradili prostorem $\mathbb{BV}[a, b]$ všech funkcí s konečnou variací na $[a, b]$. Na druhé stranu, $\mathbb{NBV}[a, b]$ lze nahradit např. prostorem funkcí s konečnou variací na $[a, b]$, které jsou spojité zleva na (a, b) a anulují se v nějakém pevně daném bodě $c \in [a, b]$.

Z následujícího lemmatu vyplyne, že je-li $\Phi \in (\mathbb{C}[a, b])^*$ a $p \in \mathbb{NBV}[a, b]$ je určeno vztahem (7.14), pak $\|\Phi\|_{(\mathbb{C}[a, b])^*} = \|p\|_{\mathbb{BV}}$, tj. prostory $(\mathbb{C}[a, b])^*$ a $\mathbb{NBV}[a, b]$ jsou isometricky isomorfní.

7.7. Lemma. *Jestliže $p \in \mathbb{NBV}[a, b]$ a $\Phi(x) = (\delta) \int_a^b x \, d p$ pro $x \in \mathbb{C}[a, b]$, pak $\|\Phi\|_{(\mathbb{C}[a, b])^*} = \|p\|_{\mathbb{BV}} = \text{var}_a^b p$.*

Důkaz. Podle věty 5.46 a lemmatu 5.6 platí $\left| (\delta) \int_a^b x \, d p \right| \leq (\text{var}_a^b p) \|x\|$ neboli

$$\|\Phi\|_{(\mathbb{C}[a, b])^*} \leq \|p\|_{\mathbb{BV}}. \quad (7.15)$$

Dokážeme, že existuje funkce $\tilde{x} \in \mathbb{C}[a, b]$ taková, že

$$\|\tilde{x}\| = 1 \quad \text{a} \quad (\delta) \int_a^b \tilde{x} \, d p = \text{var}_a^b p. \quad (7.16)$$

Buď dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Zvolme dělení $\sigma \in \mathcal{D}[a, b]$ tak, aby bylo

$$V(p, \tilde{\sigma}) > \text{var}_a^b p - \varepsilon \quad (7.17)$$

pro každé jeho zjemnění $\tilde{\sigma}$. Položme $m = \nu(\sigma)$. Vzhledem ke spojitosti funkce p na (a, b) zprava můžeme pro každé $j = 1, 2, \dots, m$ najít bod $t_j \in (\sigma_j, \sigma_{j+1})$ takový, že

$$|p(t_j) - p(\sigma_j)| < \frac{\varepsilon}{m}. \quad (7.18)$$

Položme

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} \text{sign}(p(\sigma_1) - p(a)) & \text{když } t \in [a, \sigma_1] \\ \text{sign}(p(\sigma_{j+1}) - p(t_j)) & \text{když } t \in [t_j, \sigma_{j+1}], j \in \{1, 2, \dots, m\}, \end{cases}$$

a dodefinujeme funkci \tilde{x} na intervalech $[t_j, \sigma_{j+1}]$ lineárně a tak, aby byla spojitá na $[a, b]$. Zřejmě je $\|\tilde{x}\| = 1$. Navíc

$$(\delta) \int_a^b \tilde{x} \, dp = |p(\sigma_1) - p(a)| + \sum_{j=1}^m |p(\sigma_{j+1}) - p(t_j)| + \sum_{j=1}^{m-1} (\delta) \int_{\sigma_j}^{t_j} \tilde{x} \, dp$$

Protože je $|\tilde{x}(t)| \leq 1$ pro $t \in [a, b]$, plyne odtud podle (7.18), že

$$\begin{aligned} \left| (\delta) \int_a^b \tilde{x} \, dp \right| &\geq |p(\sigma_1) - p(a)| + \sum_{j=1}^m |p(\sigma_{j+1}) - p(t_j)| - \sum_{j=1}^{m-1} |p(t_j) - p(\sigma_j)| \\ &= V(p, \rho) - 2 \sum_{j=1}^{m-1} |p(t_j) - p(\sigma_j)| > V(p, \rho) - 2\varepsilon, \end{aligned}$$

kde $\rho = \{a, t_1, \sigma_1, t_2, \sigma_2, \dots, \sigma_{m-1}, t_m, b\}$. Podle (7.17) dostáváme

$$\left| (\delta) \int_a^b \tilde{x} \, dp \right| > V(p, \rho) - 2\varepsilon > \text{var}_a^b p - 3\varepsilon.$$

Protože ε může být libovolné kladné číslo, znamená to, že platí (7.16) a tudíž $\sup_{\|\tilde{x}\| \leq 1} |\Phi(x)| \geq \text{var}_a^b p$. Odtud a z (7.15) plyne tvrzení lemmatu. \square

7.8. Věta. Zobrazení $\Phi \in (\mathbb{C}[a, b])^* \rightarrow p \in \mathbb{NBV}[a, b]$, kde p je určeno vztahem (7.13), je isometrický isomorfismus.

7.9. Poznámka. Můžeme tedy ztotožnit $(\mathbb{C}[a, b])^*$ s prostorem $\mathbb{NBV}[a, b]$.

7.10. Cvičení. Dokažte, že platí:

Pro každý spojitý lineární funkcionál Φ na prostoru $\mathbb{C}[a, b]$ existuje právě jedna funkce $p \in \mathbb{BV}[a, b]$ taková, že

$$\left. \begin{aligned} p(b) = 0, \quad p(t-) = p(t) \quad \text{pro } t \in (a, b) \\ \Phi(x) = (\delta) \int_a^b x \, dp \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{C}[a, b]. \end{aligned} \right\}$$

Ve větě 7.8 lze nahradit prostor $\mathbb{NBV}[a, b]$ prostorem funkcí zleva spojitých na (a, b) a takových, že $p(b) = 0$.

7.3 Spojité lineární funkcionály na prostorech integrovatelných funkcí

Další dobře známé reprezentace spojitých lineárních prostorů využívají Lebesgueova integrálu :

Pro $\alpha \in [1, \infty)$ označme symbolem $\mathbb{L}^\alpha[a, b]$ prostor funkcí x měřitelných na $[a, b]$ a takových, že $\int_a^b |x|^\alpha dt < \infty$, přičemž norma na $\mathbb{L}^\alpha[a, b]$ je definována předpisem

$$\|x\|_\alpha = \left(\int_a^b |x|^\alpha dt \right)^{1/\alpha} \quad \text{pro } x \in \mathbb{L}^\alpha[a, b]$$

a rovnost $x = y$ pro $x, y \in \mathbb{L}^\alpha[a, b]$ znamená, že $x(t) = y(t)$ pro s.v. $t \in [a, b]$. Jestliže položíme

$$\alpha^* = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha-1} & \text{jestliže } \alpha > 1, \\ \infty & \text{jestliže } \alpha = 1, \end{cases}$$

pak obecný tvar spojitého lineárního funkcionálu na $\mathbb{L}^\alpha[a, b]$ je dán předpisem

$$\begin{aligned} \Phi \in (\mathbb{L}^\alpha[a, b])^* &\iff \text{existuje } p \in \mathbb{L}^{\alpha^*}[a, b], \text{ takové, že} \\ \Phi(x) &= \int_a^b p x dt \quad \text{pro } x \in \mathbb{L}^\alpha[a, b], \end{aligned}$$

kde $\mathbb{L}^\infty[a, b]$ je prostor funkcí esenciálně omezených na $[a, b]$.

O tvaru spojitých lineárních funkcionálů na $\mathbb{AC}[a, b]$ jsme se již zmínili v Poznámce 3.19, je to

$$\begin{aligned} \Phi \in (\mathbb{AC}[a, b])^* &\iff \text{existují } q \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{L}^\infty[a, b] \text{ takové, že} \\ \Phi(x) &= q x(a) + \int_a^b p x' dt \quad \text{pro } x \in \mathbb{AC}[a, b]. \end{aligned}$$

Důkazy výše uvedených tvrzení a další podrobnosti lze nalézt ve většině učebnic funkcionální analýzy. Všeobecně dostupná je také on-line verze plzeňských skript [2].

7.4 Spojité lineární funkcionály na prostorech regulovaných funkcí

Naším cílem je nyní odvození obecného tvaru spojitých lineárních funkcionálů na některých podprostorech prostoru $\mathbb{G}[a, b]$. Pro začátek si připomeňme, že podle Věty 6.23 je výraz

$$\Phi_\eta(x) = qx(a) + \int_a^b p \, d[x] \quad (7.19)$$

definován pro každou funkci $x \in \mathbb{G}[a, b]$ a každý pár $\eta = (p, q) \in \mathbb{BV}[a, b] \times \mathbb{R}$. Navíc, pro každé $\eta \in \mathbb{BV}[a, b] \times \mathbb{R}$, předpis (7.19) definuje ohraničený (a tedy spojitý) lineární funkcionál na $\mathbb{G}[a, b]$.

Snadno ověříme, že předpisem

$$\eta = (p, q) \in \mathbb{BV}[a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \|\eta\|_{\mathbb{BV} \times \mathbb{R}} = |q| + \|p\|_{\mathbb{BV}}$$

je definována norma na prostoru $\mathbb{BV}[a, b] \times \mathbb{R}$ a $\mathbb{BV}[a, b] \times \mathbb{R}$ je Banachův prostor vzhledem k této normě. Z formulí uvedených v příkladech 6.15 (viz též příklady 6.38 resp. cvičení 6.39) také snadno odvodíme následující tvrzení.

7.11. Lemma.

(i) Pro libovolnou dvojici $\eta = (p, q) \in \mathbb{BV}[a, b] \times \mathbb{R}$ platí

$$\left. \begin{aligned} \Phi_\eta(1) &= q, \\ \Phi_\eta(\chi_{(\tau, b)}) &= p(\tau) \quad \text{když } \tau \in [a, b], \\ \Phi_\eta(\chi_{[\tau]}) &= 0 \quad \text{když } \tau \in (a, b), \\ \Phi_\eta(\chi_{[b]}) &= p(b). \end{aligned} \right\} (7.20)$$

(ii) Pro libovolnou funkci $x \in \mathbb{G}[a, b]$ platí

$$\left. \begin{aligned} \Phi_\eta(x) &= x(a) \quad \text{když } p \equiv 0 \text{ na } [a, b], q = 1, \\ \Phi_\eta(x) &= x(b) \quad \text{když } p \equiv 1 \text{ na } [a, b], q = 1, \\ \Phi_\eta(x) &= x(\tau-) \quad \text{když } p = \chi_{[a, \tau)} \text{ na } [a, b], \tau \in (a, b], q = 1, \\ \Phi_\eta(x) &= x(\tau+) \quad \text{když } p = \chi_{[a, \tau]} \text{ na } [a, b], \tau \in [a, b), q = 1. \end{aligned} \right\} (7.21)$$

□

Přímým důsledkem vztahů (7.20), (7.21) a lemmatu 4.14 je následující tvrzení.

7.12. Lemma.

(i) Jestliže $\eta = (p, q) \in \mathbb{BV}[a, b] \times \mathbb{R}$ a

$$\Phi_\eta(x) = 0 \text{ pro každé } x \in \text{Lin}\left(1, \chi_{(\tau, b]}, \tau \in [a, b), \chi_{[b]}\right),$$

pak $p(t) \equiv 0$ na $[a, b]$ a $q = 0$.

(ii) Jestliže $x \in \mathbb{G}[a, b]$ a

$$\Phi_\eta(x) = 0 \text{ pro všechny dvojice } \eta = (p, q) \in \mathbb{BV}[a, b] \times \mathbb{R},$$

pak

$$x(a) = x(a+) = x(\tau-) = x(\tau+) = x(b-) = x(b) \quad (7.22)$$

platí pro $\tau \in (a, b)$. □

7.13. Poznámka. Všimněme si, že vzhledem k třetímu vztahu v (7.20), můžeme v tvrzení (i) předešlého lemmatu nahradit množinu $\text{Lin}\left(1, \chi_{(\tau, b]}, \tau \in [a, b), \chi_{[b]}\right)$ množinami

$$\text{Lin}\left(1, \chi_{[\tau, b]}, \tau \in [a, b), \chi_{[b]}\right) \text{ resp. } \text{Lin}\left(1, \frac{1}{2} \chi_{[\tau]} + \chi_{(\tau, b]}, \tau \in [a, b), \chi_{[b]}\right).$$

Odtud okamžitě plyne též následující tvrzení, kde symboly $\mathbb{G}_L[a, b]$, $\mathbb{G}_R[a, b]$ a $\mathbb{G}_{\text{reg}}[a, b]$ byly definovány v (4.3).

7.14. Věta. Každý z následujících párů prostorů

$$(\mathbb{G}_L[a, b], \mathbb{BV}[a, b] \times \mathbb{R}), (\mathbb{G}_{\text{reg}}[a, b], \mathbb{BV}[a, b] \times \mathbb{R}), (\mathbb{G}_R[a, b], \mathbb{BV}[a, b] \times \mathbb{R})$$

tvoří duální pár vzhledem k bilineární formě

$$x \in X, \eta \in \mathbb{BV}[a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \Phi_\eta(x). \quad \square$$

Na druhou stranu, máme také

7.15. Lemma. *Jestliže Φ je lineární ohraničený funkcionál na $\mathbb{G}_L[a, b]$ a*

$$p(t) = \begin{cases} \Phi(\chi_{(t,b)}) & \text{když } t \in [a, b), \\ \Phi(\chi_{[b]}) & \text{když } t = b, \end{cases} \quad (7.23)$$

pak $p \in \mathbb{BV}[a, b]$ a

$$\left. \begin{aligned} |p(a)| + |p(b)| + \text{var}_a^b p &\leq 2 \|\Phi\|_{\mathbb{G}_L^*[a,b]}, \\ \text{kde } \|\Phi\|_{\mathbb{G}_L^*[a,b]} &= \sup\{|\Phi(x)| : x \in \mathbb{G}_L[a, b], \|x\| \leq 1\}. \end{aligned} \right\} \quad (7.24)$$

D ů k a z . Pro libovolné dělení $\sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ intervalu $[a, b]$ a libovolný vektor $(c_0, c_1, \dots, c_m, c_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+2}$ platí

$$\begin{aligned} &\left| c_0 p(a) + c_{m+1} p(b) + \sum_{j=1}^m c_j [p(\sigma_j) - p(\sigma_{j-1})] \right| \\ &= \left| \Phi \left(c_0 \chi_{(a,b]} + c_{m+1} \chi_{[b]} - \sum_{j=1}^{m-1} c_j \chi_{(\sigma_{j-1}, \sigma_j]} + c_m \chi_{(\sigma_{m-1}, b)} \right) \right| = |\Phi(h)|, \end{aligned}$$

kde

$$h = c_0 \chi_{(a,b]} + c_{m+1} \chi_{[b]} - \sum_{j=1}^{m-1} c_j \chi_{(\sigma_{j-1}, \sigma_j]} + c_m \chi_{(\sigma_{m-1}, b)}.$$

Snadno ověříme, že bude-li $|c_j| \leq 1$ pro $j = 0, 1, \dots, m+1$, pak bude $\|h\| \leq 2$. Položíme-li tedy

$$c_0 = \text{sign } p(a), \quad c_{m+1} = \text{sign } p(b), \quad c_j = \text{sign}(p(\sigma_j) - p(\sigma_{j-1}))$$

pro $j = 1, 2, \dots, m$, získáme vztah

$$|p(a)| + |p(b)| + V(p, \sigma) \leq 2 \|\Phi\|_{\mathbb{G}_L^*[a,b]} \quad \text{pro každé } \sigma \in \mathcal{D}[a, b].$$

Odtud už plyne, že platí i (7.24). □

Analogicky předchozímu lemmatu máme také

7.16. Lemma. *Nechť Φ je libovolný lineární ohraničený funkcionál na $\mathbb{G}_{reg}[a, b]$. Položme*

$$p(t) = \begin{cases} \Phi(\chi_{(a,b)}) & \text{když } t = a, \\ \Phi(\frac{1}{2}\chi_{[t]} + \chi_{(t,b)}) & \text{když } t \in (a, b), \\ \Phi(\chi_{[b]}) & \text{když } t = b. \end{cases} \quad (7.25)$$

Potom $\text{var}_a^b p \leq \sup\{|\Phi(x)| : x \in \mathbb{G}_{reg}[a, b], \|x\| \leq 1\} < \infty$, tj. $p \in \mathbb{BV}[a, b]$.

D ů k a z. Nechť $\Phi \in \mathbb{G}_{reg}^*[a, b]$, $\sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ je dělení intervalu $[a, b]$ a nechť reálná čísla c_j , $j = 1, 2, \dots, m$, jsou taková, že je $|c_j| \leq 1$ pro všechna $j = 1, 2, \dots, m$. Potom

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{j=1}^m c_j [p(\sigma_j) - p(\sigma_{j-1})] \\ &= c_1 \left[\Phi(\frac{1}{2}\chi_{[\sigma_1]} + \chi_{(\sigma_1,b)}) - \Phi(\chi_{(a,b)}) \right] \\ &+ \sum_{j=2}^{m-1} c_j \left[\Phi(\frac{1}{2}\chi_{[\sigma_j]} + \chi_{(\sigma_j,b)}) - \Phi(\frac{1}{2}\chi_{[\sigma_{j-1}]} + \chi_{(\sigma_{j-1},b)}) \right] \\ &+ c_m \left[\Phi(\chi_{[b]}) - \Phi(\frac{1}{2}\chi_{[\sigma_{m-1}]} + \chi_{(\sigma_{m-1},b)}) \right] = \Phi(h), \end{aligned} \right\} \quad (7.26)$$

kde

$$\begin{aligned} h &= c_1 \left[\frac{1}{2}\chi_{[\sigma_1]} + \chi_{(\sigma_1,b)} - \chi_{(a,b)} \right] + c_m \left[\chi_{[b]} - \frac{1}{2}\chi_{[\sigma_{m-1}]} - \chi_{(\sigma_{m-1},b)} \right] \\ &+ \sum_{j=2}^{m-1} c_j \left[\frac{1}{2}\chi_{[\sigma_j]} + \chi_{(\sigma_j,b)} - \frac{1}{2}\chi_{[\sigma_{j-1}]} - \chi_{(\sigma_{j-1},b)} \right] \\ &= c_1 \left[\frac{1}{2}\chi_{[\sigma_1]} - \chi_{(a,\sigma_1)} \right] - c_m \left[\frac{1}{2}\chi_{[\sigma_{m-1}]} + \chi_{(\sigma_{m-1},b)} \right] \\ &+ \sum_{j=2}^{m-1} c_j \left[\frac{1}{2}\chi_{[\sigma_j]} - \chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j)} - \frac{1}{2}\chi_{[\sigma_{j-1}]} \right] \\ &= -c_1 \left[\frac{1}{2}\chi_{[\sigma_1]} + \chi_{(a,\sigma_1)} \right] - c_m \left[\frac{1}{2}\chi_{[\sigma_{m-1}]} + \chi_{(\sigma_{m-1},b)} \right] \\ &- \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{m-1} c_j \chi_{[\sigma_j]} - \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{m-1} c_j \chi_{[\sigma_{j-1}]} - \sum_{j=2}^{m-1} c_j \chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j)} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m-1} c_j \chi_{[\sigma_j]} - \frac{1}{2} \sum_{j=2}^m c_j \chi_{[\sigma_{j-1}]} - \sum_{j=1}^m c_j \chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{c_j + c_{j+1}}{2} \chi_{[\sigma_j]} - \sum_{j=1}^m c_j \chi_{(\sigma_{j-1}, \sigma_j)} \\
&= -c_1 \chi_{(a, \sigma_1)} - \sum_{j=2}^{m-1} \left(\frac{c_j + c_{j+1}}{2} \chi_{[\sigma_j]} + c_j \chi_{(\sigma_{j-1}, \sigma_j)} \right) - c_m \chi_{(\sigma_{m-1}, b)}.
\end{aligned}$$

Z tohoto vyjádření snadno nahlédneme, že

$$h(\sigma_j-) = -c_j, \quad h(\sigma_j+) = -c_{j+1}, \quad h(\sigma_j) = -\frac{1}{2}(c_j + c_{j+1}) \quad \text{pro } j = 1, 2, \dots, m$$

čili $h \in \mathbb{S}[a, b] \cap \mathbb{G}_{\text{reg}}[a, b]$ a $|h(t)| \leq 1$ pro všechna $t \in [a, b]$. Vzhledem k (7.26) tedy dostáváme, že nerovnost

$$\begin{aligned}
&\sup \left\{ \left| \sum_{j=1}^m c_j [p(\sigma_j) - p(\sigma_{j-1})] \right| : |c_j| \leq 1, j = 1, 2, \dots, m \right\} \\
&\leq \sup \{ |\Phi(x)| : x \in \mathbb{G}_{\text{reg}}[a, b], \|x\| \leq 1 \}
\end{aligned}$$

platí pro každé dělení $\sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ intervalu $[a, b]$. Zvolíme-li nyní

$$c_j = \text{sign} [p(\sigma_j) - p(\sigma_{j-1})] \quad \text{pro } j = 1, 2, \dots, m,$$

zjistíme, že platí

$$V(p, \sigma) \leq \sup \{ |\Phi(x)| : x \in \mathbb{G}_{\text{reg}}[a, b], \|x\| \leq 1 \} < \infty \quad \text{pro každé } \sigma \in \mathcal{D}[a, b],$$

$$\text{tj. } \text{var}_a^b p \leq \|\Phi\|_{\mathbb{G}_{\text{reg}}^*[a, b]} < \infty. \quad \square$$

Prvním hlavním výsledkem této kapitoly je následující věta.

7.17. Věta. Φ je lineární ohraničený funkcionál na $\mathbb{G}_L[a, b]$ ($\Phi \in \mathbb{G}_L^*[a, b]$) právě tehdy, když existuje dvojice $\eta = (p, q) \in \mathbb{BV}[a, b] \times \mathbb{R}$ taková, že

$$\Phi(x) = q x(a) + \int_a^b p \, dx \quad \text{pro } x \in \mathbb{G}_L[a, b]. \quad (7.27)$$

Navíc, zobrazení

$$\eta \in \mathbb{BV}[a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \Phi_\eta \in \mathbb{G}_L^*[a, b] \quad (7.28)$$

je isomorfismus.

D ů k a z . Nechť Φ je spojité lineární funkcionál na $\mathbb{G}_L[a, b]$ a nechť Φ_η je funkcionál definovaný předpisem (7.19), kde $\eta = (p, q)$, $q = \Phi(1)$ a funkce p je definovaná v (7.23). Podle lemmatu 7.15 $\eta = (p, q) \in \mathbb{BV}[a, b] \times \mathbb{R}$ a podle (7.20) a (7.23) máme

$$\begin{aligned} \Phi(1) &= q = \Phi_\eta(1), \\ \Phi(\chi_{(\tau, b]}) &= p(\tau) = \Phi_\eta(\chi_{(\tau, b]}) \quad \text{pro } \tau \in [a, b), \\ \Phi(\chi_{[b]}) &= p(b) = \Phi_\eta(\chi_{[b]}). \end{aligned}$$

Protože podle lemmatu 4.14 je každá funkce z $\mathbb{S}[a, b] \cap \mathbb{G}_L[a, b]$ lineární kombinací funkcí

$$1, \chi_{(\tau, b]}, \tau \in [a, b), \chi_{[b]},$$

plyne odtud, že $\Phi(x) = \Phi_\eta(x)$ pro každé $x \in \mathbb{G}_L[a, b] \cap \mathbb{S}[a, b]$. Konečně, protože podle lemmatu 4.13 je množina $\mathbb{G}_L[a, b] \cap \mathbb{S}[a, b]$ hustá v $\mathbb{G}_L[a, b]$, plyne odtud, že platí

$$\Phi(x) = \Phi_\eta(x) \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{G}_L[a, b].$$

Podle věty 7.14 je (7.28) vzájemně jednoznačné zobrazení $\mathbb{BV}[a, b] \times \mathbb{R}$ na $\mathbb{G}_L^*[a, b]$. Dále, podle věty 6.23 máme

$$|\Phi_\eta(x)| \leq (|p(a)| + |p(b)| + \text{var}_a^b p + |q|) \|x\| \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{G}_L[a, b]$$

a tudíž

$$\|\Phi_\eta\|_{\mathbb{G}_L^*[a, b]} \leq |p(a)| + |p(b)| + \text{var}_a^b p + |q| \leq 2 (\|p\|_{\mathbb{BV}} + |q|) = 2 \|\eta\|_{\mathbb{BV} \times \mathbb{R}}.$$

Na druhou stranu, podle (7.25) a podle lemmatu 7.15 je

$$|q| = |\Phi(1)| \leq \|\Phi_\eta\|_{\mathbb{G}_L^*[a, b]}$$

a

$$\|p\|_{\mathbb{BV}} \leq (|p(a)| + |p(b)| + \text{var}_a^b p) \leq 2 \|\Phi_\eta\|_{\mathbb{G}_L^*[a, b]}.$$

Souhrnem máme

$$\frac{1}{2} \|\Phi_\eta\|_{\mathbb{G}_L^*[a, b]} \leq \|\eta\|_{\mathbb{BV} \times \mathbb{R}} \leq 3 \|\Phi_\eta\|_{\mathbb{G}_L^*[a, b]},$$

čili, zobrazení

$$\eta \in \mathbb{BV}[a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \Phi_\eta \in \mathbb{G}_L^*[a, b]$$

je isomorfismus. □

7.18. Věta. Φ je lineární ohraničený funkcionál na $\mathbb{G}_{\text{reg}}[a, b]$ ($\Phi \in \mathbb{G}_{\text{reg}}^*[a, b]$) právě tehdy, když existuje dvojice $\eta = (p, q) \in \mathbb{BV}[a, b] \times \mathbb{R}$ taková, že

$$\Phi(x) = q x(a) + \int_a^b p \, dx \quad \text{pro } x \in \mathbb{G}_{\text{reg}}[a, b]. \quad (7.29)$$

Navíc, zobrazení

$$\eta \in \mathbb{BV}[a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \Phi_\eta \in \mathbb{G}_{\text{reg}}^*[a, b] \quad (7.30)$$

je isomorfismus.

D ů k a z . Předpokládejme, že $\Phi \in \mathbb{G}_{\text{reg}}^*[a, b]$, Φ_η je funkcionál definovaný vztahem (7.19), kde $\eta = (p, q)$, $q = \Phi(1)$ a p je funkce definovaná vztahem (7.25). Podle lemmatu 7.16 je $\eta = (p, q) \in \mathbb{BV}[a, b] \times \mathbb{R}$ a podle (7.20) a (7.25) máme

$$\begin{aligned} \Phi(1) &= q = \Phi_\eta(1), \\ \Phi\left(\frac{1}{2}\chi_{[\tau]} + \chi_{(\tau, b]}\right) &= p(\tau) = \Phi_\eta\left(\frac{1}{2}\chi_{[\tau]} + \chi_{(\tau, b]}\right) \quad \text{pro každé } \tau \in [a, b), \\ \Phi(\chi_{[b]}) &= p(b) = \Phi_\eta(\chi_{[b]}). \end{aligned}$$

Pomocí lemmatu 4.14 odtud odvodíme, že platí

$$\Phi(x) = \Phi_\eta(x) \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{G}_{\text{reg}}[a, b] \cap \mathbb{S}[a, b].$$

Podle lemmatu 4.13 je ovšem množina $\mathbb{G}_{\text{reg}}[a, b] \cap \mathbb{S}[a, b]$ hustá v $\mathbb{G}_{\text{reg}}[a, b]$ a tudíž dostáváme konečně, že platí $\Phi(x) = \Phi_\eta(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{G}_{\text{reg}}[a, b]$.

Podobně jako jsme dokázali analogickou nerovnost v závěru důkazu věty 7.17 dokázali bychom nyní, že platí také

$$\frac{1}{2} \|\Phi_\eta\|_{\mathbb{G}_{\text{reg}}^*[a, b]} \leq \|\eta\|_{\mathbb{BV} \times \mathbb{R}} \leq 3 \|\Phi_\eta\|_{\mathbb{G}_{\text{reg}}^*[a, b]}. \quad \square$$

7.19. Cvičení. Postupem použitým v důkazech vět 7.17 a 7.18 ukažte, že také platí

(i) Φ je lineární ohraničený funkcionál na

$$\tilde{\mathbb{G}}_L[a, b] = \{x \in \mathbb{G} : x(t-) = x(t) \text{ pro } t \in (a, b)\},$$

(viz (4.2)) právě tehdy, když existuje funkce $p \in \mathbb{BV}[a, b]$ taková, že

$$\Phi(x) = p(b)x(b) - \int_a^b p \, d[x] \quad \text{pro } x \in \tilde{\mathbb{G}}_L[a, b].$$

(ii) Φ je lineární ohraničený funkcionál na

$$\tilde{\mathbb{G}}_{\mathbb{R}}[a, b] = \{x \in \mathbb{G} : x(t+) = x(t) \text{ pro } t \in [a, b)\},$$

(viz (4.2)) právě tehdy, když existuje funkce $p \in \mathbb{BV}[a, b]$ taková, že

$$\Phi(x) = p(a)x(a) + \int_a^b p \, d[x] \quad \text{pro } x \in \tilde{\mathbb{G}}_{\mathbb{R}}[a, b].$$

7.5 Aplikace Stieltjesova integrálu v teorii distribucí

V tomto odstavci naznačíme možnosti použití KS–integrálu v teorii distribucí. Distribuce zde budeme chápat ve smyslu L. Schwartz. Připomeňme si nejprve několik základních pojmů a definic.

7.20. Definice. Množinu funkcí $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, které mají pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ derivaci $\varphi^{(k)}$ k –tého řádu spojitou na \mathbb{R} a takovou, že $\varphi^{(k)}(t) = 0$ pro $t \in \mathbb{R} \setminus (a, b)$ označíme symbolem $\mathcal{D}[a, b]$. Funkcím z $\mathcal{D}[a, b]$ říkáme *testovací funkce* na $[a, b]$.

Množina $\mathcal{D}[a, b]$ je lineární prostor vzhledem k přirozeným operacím sčítání a násobení skalárem. Množina $\mathcal{D}[a, b]$ se stane topologickým vektorovým prostorem, zavedeme-li na ní topologii, ve které posloupnost $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}[a, b]$ konverguje k $\varphi \in \mathcal{D}[a, b]$ tehdy a jen tehdy, když

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n^{(k)} - \varphi^{(k)}\| = 0 \quad \text{pro každé } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Typickými příklady funkcí z prostoru $\mathcal{D}[a, b]$ jsou funkce tvaru

$$\varphi_{c,d}(t) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{t-c} + \frac{1}{d-t}\right) & \text{pro } t \in (c, d), \\ 0 & \text{pro } t \in \mathbb{R} \setminus (c, d), \end{cases}$$

kde $[c, d]$ může být libovolný podinterval v (a, b) .

7.21. Definice. Spojité lineární funkcionály na topologickém vektorovém prostoru $\mathcal{D}[a, b]$ se nazývají *distribuce* na $[a, b]$. Množina všech distribucí na $[a, b]$ je tedy duálním prostorem k $\mathcal{D}[a, b]$. Značíme ji symbolem $\mathcal{D}^*[a, b]$.

Pro danou distribuci $f \in \mathcal{D}^*[a, b]$ a testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}[a, b]$, hodnotu funkcionálu f na φ značíme symbolem $\langle f, \varphi \rangle$.

7.22. Poznámka. Je-li $f \in \mathbb{L}^1[a, b]$, pak předpisem $\varphi \in \mathcal{D}[a, b] \rightarrow \int_a^b f(t) \varphi(t) dt$ je definována distribuce

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_a^b f(t) \varphi(t) dt$$

na $[a, b]$, kterou budeme značit také symbolem f . Říkáme, že distribuce f je určena funkcí f .

Nulový prvek prostoru $\mathcal{D}^*[a, b]$ je určen libovolnou měřitelnou funkcí, která se anuluje s.v. na intervalu $[a, b]$. Speciálně, je-li $f \in \mathbb{G}[a, b]$, pak $f = 0 \in \mathcal{D}^*[a, b]$ tehdy a jen tehdy, když $f(t-) = f(s+) = 0$ pro všechna $t \in (a, b)$ a $s \in [a, b)$. Tudíž, je-li $f \in \mathbb{G}_{\text{reg}}[a, b]$, pak $f = 0 \in \mathcal{D}^*[a, b]$ tehdy a jen tehdy, když $f(t) = 0$ pro všechna $t \in [a, b]$. Pro libovolné distribuce $f, g \in \mathcal{D}^*[a, b]$ rovnost $f = g$ znamená, že $f - g = 0 \in \mathcal{D}^*[a, b]$. Z výše uvedeného plyne, že je-li $g \in \mathbb{L}^1[a, b]$, pak existuje nejvýše jedna funkce $f \in \mathbb{G}_{\text{reg}}[a, b]$ taková, že $f = g$ s.v. na $[a, b]$. Dále, pro reálné funkce $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ platí rovnost $f = g$ ve smyslu $\mathcal{D}^*[a, b]$ tehdy a jen tehdy, když $f = g$ s.v. na $[a, b]$.

7.23. Definice. Pro danou distribuci $f \in \mathcal{D}^*[a, b]$, definujeme její (*distributivní*) *derivaci* f' předpisem

$$f' : \varphi \in \mathcal{D}[a, b] \rightarrow \langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle.$$

Podobně, pro každé $k \in \mathbb{N}$,

$$f^{(k)} : \varphi \in \mathcal{D}[a, b] \rightarrow \langle f^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle f, \varphi^{(k)} \rangle.$$

7.24. Poznámka. Distributivní derivace absolutně spojitých funkcí jsou určeny jejich klasickými derivacemi.

7.25. Poznámka. Definujme

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{pro } t = 0, \\ 1 & \text{pro } t > 0. \end{cases}$$

Nechť $\tau \in (a, b)$ a $h_\tau(t) = H(t - \tau)$ pro $t \in [a, b]$. Potom použitím věty 6.31 a s přihlédnutím k (6.10) a (6.14) dostaneme

$$\langle h'_\tau, \varphi \rangle = -\langle h_\tau, \varphi' \rangle = -\int_a^b h_\tau d\varphi = \int_a^b dh_\tau \varphi = \varphi(\tau).$$

Funkce h_τ se nazývá *Heavisideova funkce* (se středem v bodě τ) a její distribu-
tivní derivace h'_τ se značí δ_τ a nazývá se *Diracova δ -distribuce* (se středem v
bodě τ).

7.26. Věta. *Nechť $f \in \mathcal{D}^*[a, b]$. Potom f' je nulová distribuce tehdy a jen tehdy,
když existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že $f(t) = c$ pro s.v. $t \in [a, b]$.*

D ů k a z. Jestliže $f(t) = c$ pro s.v. $t \in [a, b]$ a $\varphi \in \mathcal{D}[a, b]$, pak

$$\langle f', \varphi \rangle = -\langle c, \varphi' \rangle = -c \int_a^b \varphi'(s) \, ds = -c(\varphi(b) - \varphi(a)) = 0.$$

Naopak, nechť $\langle f, \varphi' \rangle = 0$ pro každou $\varphi \in \mathcal{D}[a, b]$. Nechť je dána libovolná
testovací funkce $\rho \in \mathcal{D}[a, b]$. Položme

$$\varphi(t) = \begin{cases} \int_a^t (\rho(s) - a_0 \Theta(s)) \, ds & \text{pro } t \in [a, b], \\ 0 & \text{pro } t \in \mathbb{R} \setminus [a, b], \end{cases}$$

kde

$$a_0 = \int_a^b \rho(s) \, ds \quad \text{a} \quad \Theta(t) = \frac{\varphi_{a,b}(t)}{\int_a^b \varphi_{a,b}(s) \, ds}.$$

Potom

$$\int_a^b \Theta(s) \, ds = 1.$$

Odtud snadno plyne, že $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ a také, že $\varphi \in \mathcal{D}[a, b]$. Dále,

$$\varphi'(t) = \rho(t) - a_0 \Theta(t) \quad \text{pro } t \in [a, b].$$

Tudíž

$$0 = \langle f, \varphi' \rangle = \langle f, \rho \rangle - \left(\int_a^b \rho(s) \, ds \right) \langle f, \Theta \rangle.$$

To znamená, že pro každé $\rho \in \mathcal{D}[a, b]$ platí

$$\langle f, \rho \rangle = \left(\int_a^b \rho(s) \, ds \right) \langle f, \Theta \rangle = \int_a^b c \rho(s) \, ds,$$

kde $c = \langle f, \Theta \rangle \in \mathbb{R}$ je konstanta. Tedy $f = c$ ve smyslu distribucí. □

7.27. Cvičení. Dokažte, že je-li $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pak $f^{(k)} = 0 \in \mathfrak{D}^*[a, b]$ tehdy a jen tehdy, když existují $c_0, c_1, \dots, c_{k-1} \in \mathbb{R}$ takové, že

$$f(t) = c_0 + c_1 t + \dots + c_{k-1} t^{k-1} \quad \text{pro s.v. } t \in [a, b].$$

Vážným problémem v teorii distribucí je jak definovat jejich součin. Následující dvě klasické definice se týkají jen speciálních typů distribucí.

7.28. Definice. (i) jestliže f, g a $f g \in \mathbb{L}^1[a, b]$, pak

$$\langle f g, \varphi \rangle = \int_a^b f g \varphi \, dt.$$

(ii) jestliže $f \in \mathfrak{D}^*[a, b]$ a g má na $[a, b]$ spojitě derivace libovolného řádu, pak

$$\langle f g, \varphi \rangle = \langle f, g \varphi \rangle.$$

Definice 7.28 zahrnuje součin $f g$, kde $f \in \mathbb{G}[a, b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a, b]$. Nevztahuje se ale např. na případy, které se objevují v následující definici.

7.29. Definice. Jestliže $f \in \mathbb{G}[a, b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a, b]$, pak definujeme

$$\langle f' g, \varphi \rangle = \int_a^b \varphi g \, df \tag{7.31}$$

a

$$\langle f g', \varphi \rangle = \int_a^b \varphi f \, dg. \tag{7.32}$$

7.30. Lemma. Necht' $f \in \mathbb{G}[a, b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a, b]$ splňují

$$\Delta^+ f(t) \Delta^+ g(t) = \Delta^- f(t) \Delta^- g(t) \quad \text{pro každé } t \in (a, b), \tag{7.33}$$

Potom

$$f' g = F', \quad \text{kde } F(t) = \int_a^t g \, df \quad \text{pro } t \in [a, b] \tag{7.34}$$

a

$$f g' = G', \quad \text{kde } G(t) = \int_a^t f \, dg \quad \text{pro } t \in [a, b]. \tag{7.35}$$

D ů k a z . Použitím věty o substituci (věta 6.41) a věty o integraci per-partes (věta 6.31) pro libovolné $\varphi \in \mathfrak{D}[a, b]$ dostaneme

$$\begin{aligned} \langle f' g, \varphi \rangle &= \int_a^b \mathbf{d} \left[\int_a^t g \mathbf{d} f \right] \varphi(t) = - \int_a^b \left(\int_a^t g \mathbf{d} f \right) \varphi'(t) \mathbf{d} t \\ &= \left\langle \left(\int_a^t g \mathbf{d} f \right)', \varphi \right\rangle, \end{aligned}$$

t.j. platí (7.34). Vztah (7.35) se dokazuje analogicky. □

7.31. Důsledek. Jestliže funkce $f \in \mathbb{G}[a, b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a, b]$ splňují (7.33), pak

$$(f g)' = f g' + f' g.$$

D ů k a z . Podle definice 7.23, věty o integraci per-partes (viz věta 6.31) a lemmatu 7.30 dostáváme

$$\begin{aligned} \langle (f g)', \varphi \rangle &= - \langle f g, \varphi' \rangle \\ &= - \int_a^b f g \varphi' \mathbf{d} t = \int_a^b \varphi(t) \mathbf{d} [f(t) g(t) - f(a) g(a)] \\ &= \int_a^b \varphi(t) \mathbf{d} \left[\int_a^t g \mathbf{d} f + \int_a^t f \mathbf{d} g \right] = \int_a^b \varphi g \mathbf{d} f + \int_a^b \varphi f \mathbf{d} g \\ &= \langle f g', \varphi \rangle + \langle f' g, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

□

7.32. Poznámka. Nechť $f \in \mathbb{G}[a, b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a, b]$. Podmínka (7.33) je pak zřejmě splněna např. v následujících případech :

- (i) obě funkce jsou regulární,
- (ii) alespoň jedna z nich je spojitá na (a, b) ,
- (iii) jedna z nich zleva spojitá na (a, b) a druhá je zprava spojitá na (a, b) .

7.33. Cvičení. Dokažte, že jestliže $\tau \in (a, b)$ a h_τ resp. δ_τ jsou Heavisideova funkce resp. Diracova distribuce se středem v τ , pak $h_\tau \delta_\tau = \frac{1}{2} \delta_\tau$. (Návod: Použijte cvičení 6.29.)