Kapitola 1

# Úvod

Tento text je věnován teorii Stieltjesova integrálu a některým jeho aplikacím.

### 1.1. Křivkové integrály.

KŘIVKOVÝ INTEGRÁL PRVNÍHO DRUHU.

Nechť $\varphi$ je spojité zobrazení uzavřeného a ohraničeného intervalu $[a,b]$ do třírozměrného vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$. Množina bodů

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)) \in \mathbb{R}^3,$$

kde $t$ probíhá interval $[a,b]$, se nazývá *cesta* v $\mathbb{R}^3$ definovaná na intervalu $[a,b]$ a značíme ji také symbolem $\varphi$. *Délkou cesty* $\varphi$ rozumíme délku křivky definované grafem $\{\varphi(t) : t \in [a,b]\}$ funkce $\varphi$ a značíme ji symbolem $\Lambda(\varphi;[a,b])$.

Buď $\varphi$ cesta v $\mathbb{R}^3$ definovaná na intervalu $[a,b]$, jejíž délka je konečná. Předpokládejme dále, že zobrazení $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ je prosté. Představme si, že $\varphi$ je drát a $f(x) \in \mathbb{R}$ je jeho hustota v bodě $x$. Hmota části drátu odpovídající intervalu $[c,d] \subset [a,b]$ je tedy přibližně vyjádřena číslem $f(\varphi(\xi))\,\Lambda(\varphi;[c,d])$. kde $\xi$ je nějaký bod intervalu $[c,d]$.

Nechť $\sigma_j,\ j = 0,1,\dots,m,$ jsou body intervalu $[a,b]$ takové, že

$$a = \sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_m = b\,.$$

Množinu bodů $\{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ s těmito vlastnostmi budeme nazývat dělení intervalu $[a,b]$ a značit $\boldsymbol{\sigma}$. Dále, v každém intervalu $[\sigma_{j-1}, \sigma_j],\ j = 1,2,\dots,m,$ vyberme nějaký bod $\xi_j$. Tento bod budeme nazývat *značka intervalu* $[\sigma_{j-1}, \sigma_j]$, vektor $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$ je *vektor značek dělení* $\boldsymbol{\sigma}$ a značíme ho symbolem $\boldsymbol{\xi}$.

Položme $v(t) = \Lambda(\varphi;[a,t])$ pro $t \in [a,b]$. Potom součet

$$\sum_{j=1}^{m} f(\varphi(\xi_j))\,[v(\sigma_j) - v(\sigma_{j-1})]$$

aproximuje hmotu celého drátu. Je přirozené očekávat, že tato aproximace bude tím přesnější, čím bude dělení jemnější, tj. čím více bodů bude obsahovat. Vede-li takový limitní proces k jednoznačně určené limitní veličině, bude tato veličina rovna hmotě celého drátu a budeme ji značit

$$\int_\varphi f \,\mathrm{d}\, s \quad \text{nebo také} \quad \int_a^b f(\varphi)\,\mathrm{d}\, v\,.$$

První symbol se nazývá *křivkový integrál prvního druhu* funkce $f$ podél cesty $\varphi$, zatímco druhý symbol představuje ekvivalentní pojem *Stieltjesova integrálu* skalární funkce $f(\varphi)$ vzhledem ke skalární funkci $v(t)=\Lambda(\varphi;[a,t])$.

KŘIVKOVÝ INTEGRÁL DRUHÉHO DRUHU.

Mějme hmotný bod, který se pohybuje po cestě $\varphi$ a v okamžiku $t\in[a,b]$ se nachází v bodě $\varphi(t)$. Dále nechť

$$f:\ x\in\varphi\subset\mathbb{R}^3 \to f(x)=(f_1(x),f_2(x),f_3(x))\in\mathbb{R}^3$$

je silové vektorové pole v $\mathbb{R}^3$. Potom $f(\varphi(t))\in\mathbb{R}^3$ je vektor síly, která na tento hmotný bod působí v čase $t$.

Nechť $\boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_0,\sigma_1,\dots,\sigma_m\}$ je dělení intervalu $[a,b]$ a $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m)$ je vektor jeho značek. Potom skalární součin

$$f(\varphi(\xi_j))\cdot\big[\varphi(\alpha_j)-\varphi(\alpha_{j-1})\big] = \sum_{k=1}^{3} f_k(\varphi(\xi_j))\,\big[\varphi_k(\sigma_j)-\varphi_k(\sigma_{j-1})\big]$$

představuje práci, kterou vykoná síla $f(\varphi(\xi_j))$, posune-li se náš hmotný bod z bodu $\varphi(\alpha_{j-1})$ do bodu $\varphi(\alpha_j)$. Součet

$$\sum_{j=1}^{m} f(\varphi(\xi_j))\cdot\big[\varphi(\alpha_j)-\varphi(\alpha_{j-1})\big] = \sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{m} f_k(\varphi(\xi_j))\,\big[\varphi_k(\alpha_j)-\varphi_k(\alpha_{j-1})\big]\,.$$

tedy aproximuje práci, kterou vykoná silové pole $f$ při přesunu daného hmotného bodu po cestě $\varphi$ od okamžiku $t=a$ do okamžiku $t=b$. Jestliže se hodnoty těchto součtů budou při zjemňování dělení $\sigma$ ” libovolně blížit” k nějaké jednoznačně určené limitní hodnotě, bude tato hodnota rovna velikosti práce, kterou vykoná silové pole $f$ při přesunu daného hmotného bodu po cestě $\varphi$ od okamžiku $t=a$ do okamžiku $t=b$. Budeme ji značit

$$\int_\varphi f \quad \text{nebo také} \quad \int_a^b f(\varphi)\,\mathrm{d}\,\varphi = \sum_{k=1}^{3}\int_a^b f_k(\varphi)\,\mathrm{d}\,\varphi_k\,.$$

První symbol se nazývá *křivkový integrál druhého druhu* vektorové funkce $f$ podél cesty $\varphi$, zatímco druhý symbol představuje ekvivalentní pojem *Stieltjesova integrálu* (složené) vektorové funkce $f(\varphi):[a,b]\to\mathbb{R}^3$ vzhledem k vektorové funkci $\varphi:\ [a,b]\to\mathbb{R}^3$.

**1.2. Úmluvy a označení.** (i) $\mathbb{N}$ je *množina přirozených čísel* (mezi něž nezahrnujeme nulu). $\mathbb{R}$ je *množina reálných čísel*, $\mathbb{R}^m$ je prostor reálných $m-$vektorů ($m-$tic reálných čísel). Je-li $x \in \mathbb{R}^m$, jeho $i$–tý prvek značíme $x_i$. Píšeme $x = \big(x_i\big)_{i=1,\dots,m}$ nebo, nehrozí-li nedorozumění, $x = \big(x_i\big)$. Norma v $\mathbb{R}^m$ je definována předpisem

$$x = \big(x_i\big)_{i=1,\dots,m} \in \mathbb{R}^m \to |x| = \max_{i=1,\dots,m} |x_i|\,.$$

(ii) $\{x \in A : B(x)\}$ značí, jak je zvykem, množinu všech prvků $x$ množiny $A$, které vyhovují podmínce $B(x)$.

Pro dané množiny $P$, $Q$ symbolem $P \setminus Q$ značíme množinu

$$P \setminus Q = \{x \in P : x \notin Q\}\,.$$

Jak je zvykem $P \subset Q$ znamená, že $P$ je podmnožina množiny $Q$ (každý prvek množiny $P$ je též prvkem množiny $Q$).

Nehrozí-li nedorozumění, pak v případě nekonečných či konečných (tj. nejvýše spočetných) posloupností píšeme $\{x_n\}$ místo $\{x_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ resp. $\{x_n \in \mathbb{R} : n = 1, 2, \dots, m\}$. Řekneme, že posloupnost $\{x_k\}$ je *prostá* jestliže se v ní žádný prvek neopakuje ($x_k \neq x_n$ jestliže $k \neq n$).

(iii) Je-li $-\infty < a < b < \infty$, pak $[a,b]$ značí *uzavřený* interval $\{t \in \mathbb{R} : a \le t \le b\}$ a $(a,b)$ je *otevřený* interval $\{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}$. Příslušné *polouzavřené* (resp. *polootevřené* intervaly značíme $[a,b)$ a $(a,b]$. Ve všech těchto případech nazýváme body $a, b$ krajní body intervalu. Jestliže $a = b \in \mathbb{R}$ říkáme, že interval $[a,b]$ *degeneruje* na jednobodovou množinu a píšeme $[a,b] = [a]$. Je-li $I$ interval (uzavřený resp. otevřený resp. polootevřený) s krajními body $a$, $b$ značíme symbolem $|I| = |b-a|$ jeho délku ($|[a]| = 0$).

(iv) Pro dané $A \in \mathbb{R}$ značíme $A^+ = \max(A, 0)$ a $A^- = \max(-A, 0)$. (Připomeňme, že platí $A^+ + A^- = |A|$ a $A^+ - A^- = A$ pro každé $A \in \mathbb{R}$.) Dále,

$$\operatorname{sign}(A) = \begin{cases} 1 & \text{když } A > 0\,, \\ -1 & \text{když } A < 0\,, \\ 0 & \text{když } A = 0\,. \end{cases}$$

(v) Pro danou množinu $M \subset \mathbb{R}$ symbolem $\chi_M$ značíme její charakteristickou funkci, tj. funkci $\mathbb{R} \to \{0,1\}$ definovanou předpisem

$$\chi_M(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \in M\,, \\ 0 & \text{pro } t \notin M\,. \end{cases}$$

(vi) Supremum (resp. infimum) množiny $M$ značíme $\sup M$ $(resp. \inf M)$. Pokud $m = \sup M \in M$ $(m = \inf M \in M)$ (tj. $m$ je maximum (resp. minimum) množiny $M$), píšeme též $m = \max M$ (resp. $m = \min M$).) Je-li $M$ množina všech hodnot $F(x)$ nějakého zobrazení $F$, kde proměnná $x$ probíhá množinu $B$ $(M = \{F(x) : x \in B\})$, píšeme též $\sup\limits_{x \in A} F(x)$. Podobné pravidlo platí i pro infimum resp. maximum resp. minimum.

(vii) Zápis $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ znamená, že funkce $f$ je definována pro každé $x \in [a,b]$ a každá její hodnota $f(x)$ je (konečné) reálné číslo. Pro libovolné funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ a $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ a reálné číslo $\lambda$ definujeme

$$f + g : x \in [a,b] \to f(x) + g(x) \text{ a } \lambda f : x \in [a,b] \to \lambda f(x)\,.$$

(viii) Pro libovolnou funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ značíme

$$\|f\| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|\,.$$

(Není-li funkce $f$ ohraničená na intervalu $[a,b]$, pak ovšem $\|f\| = \infty$.)

(ix) Je-li $\{x_n\}$ nekonečná posloupnost reálných čísel, která má limitu

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{-\infty\},$$

píšeme též zkráceně $x_n \to A$.

Podobně, jestliže posloupnost funkcí $\{f_n\}$ konverguje k funkci $f$ stejnoměrně na intervalu $[a,b]$, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$, píšeme též $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$.

(x) Jestliže $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $t \in [a,b)$ a $s \in (a,b]$ a jestliže existují konečné jednostranné limity $\lim\limits_{\tau\to t+} f(\tau)$ a $\lim\limits_{\tau\to s-} f(\tau)$, pak značíme

$$f(t+) = \lim_{\tau\to t+} f(\tau), \quad f(s-) = \lim_{\tau\to s-} f(\tau)\,,$$

$$\Delta^+ f(t) = f(t+) - f(t), \quad \Delta^- f(s) = f(s) - f(s-)\,,$$

$$\Delta f(x) = f(x+) - f(x-) \quad \text{pro } x \in (a,b)\,.$$

Zpravidla používáme následující úmluvu

$$f(a-) = f(a), \quad f(b+) = f(b), \quad \Delta^- f(a) = \Delta^+ f(b) = 0\,.$$

(xi) $\mathbb{C}[a,b]$ je prostor reálných funkcí spojitých na intervalu $[a,b]$ s normou definovanou přrdpisem

$$\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \quad \text{pro } f\in\mathbb{C}[a,b]\,.$$

definuje normu na $\mathbb{C}[a,b]$.

$\mathbb{L}^1[a,b]$ je prostor reálných funkcí lebesgueovsky integrovatelných na intervalu $[a,b]$ s rovností

$$f=g\in\mathbb{L}^1[a,b] \iff f(x)=g(x) \text{ pro s.v. } x\in[a,b]$$

a normou definovanou předpisem

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \quad \text{pro } f\in\mathbb{L}^1[a,b]\,.$$

Prostor vektorových funkcí zobrazujících interval $[a,b]$ do Banachova prostoru $\mathbb{Y}$ a spojitých na $[a,b]$ značíme $\mathbb{C}([a,b],\mathbb{Y})$, Podobný význam má symbol $\mathbb{L}^1([a,b],\mathbb{Y})$ i analogické symboly pro další prostory funkcí, které v textu zavedeme.

(xii) Je-li $M$ podmnožina Banachova prostoru $\mathbb{X}$, pak symbolem $\overline{M}$ značíme její uzávěr v prostoru $\mathbb{X}$.

(xiii) Množinu všech spojitých lineárních zobrazení Banachova prostoru $\mathbb{X}$ do Banachova prostoru $\mathbb{Y}$ značíme $\mathscr{L}(X,Y)$. Je-li $\mathbb{X}=\mathbb{Y}$, píšeme jednodušeji $\mathscr{L}(\mathbb{X})$ místo $\mathscr{L}(\mathbb{X},\mathbb{X})$. Speciálně, $\mathscr{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ je prostor reálných matic typu $m\times n$ neboli $m\times n$–matic.

(xiv) Je-li $A\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$, pak její element v $i$–tém řádku a $j$–tém sloupci značíme $a_{i,j}$. Píšeme $A=\big(a_{i,j}\big)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$. Pro každé $n$ značíme symbolem $I$ jednotkovou matici typu $n\times n$, tj.

$$I=\big(e_{i,j}\big)_{\substack{i=1,\dots,n,\\ j=1,\dots,n}} \quad \text{kde } e_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{když } i=j\,,\\ 0 & \text{když } i\neq j\,. \end{cases}$$

Norma v $\mathscr{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ je definována předpisem

$$|A| = \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \quad \text{pro } A=\big(a_{i,j}\big)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}} \in L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)\,.$$

(Speciálně pro $x\in\mathbb{R}^n=\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ dostáváme $|x|=\max_{j=1,2,\dots,n}|x_j|$, což souhlasí s bodem (i).)

(xv) V omezené míře, leč přece jen se to občas zdá být výhodné až nutné, používáme standardní logické symboly. Např.

$$"\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : (A \wedge B) \implies C"$$

znamená

"pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že platí-li současně $A$ i $B$ pak platí také $C$".