LINEÁRNÍ OKRAJOVÉ ÚLOHY

Milan Tvrdý

A. Úvod.

Předpoklady.

(i) $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$,

(ii) $a_i \in C^{(n-i)}(\alpha,\beta), i = 0,1,\dots,n; a_0(t) \neq 0$ pro všechna $t \in [\alpha,\beta]$.

Označení.

$$\begin{aligned}
\mathbb{K} &:= \text{těleso komplexních nebo reálných čísel},\\
z \in \mathbb{K} \to \overline{z} &= \text{číslo komplexně sdružené k } z,\\
\mathbb{K}^n &:= \text{vektorový prostor } n\text{-tic prvků z } \mathbb{K},\\
x \in \mathbb{K}^n \to x &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, x_i \in \mathbb{K},\\
\mathbb{K}^{m\times n} &:= \text{vektorový prostor } m \times n\text{-matic prvků z } \mathbb{K},\\
M \in \mathbb{K}^{m\times n} \to M &= \begin{bmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & \dots & M_{1,n} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & \dots & M_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{m,1} & M_{m,2} & \dots & M_{m,n} \end{bmatrix} = [M_{i,j}]_{\substack{j=1,2,\dots,m\\ i=1,2,\dots,n}},\\
M \in \mathbb{K}^{m\times n} &\to M^T = [M_{j,i}]_{\substack{j=1,2,\dots,n\\ i=1,2,\dots,m}} \quad \text{(matice transponovaná k } M\text{)},\\
M \in \mathbb{K}^{m\times n} &\to M^* = \overline{M}^T = [\overline{M}_{j,i}]_{\substack{j=1,2,\dots,n\\ i=1,2,\dots,m}},\\
AC^{(n-1)} &:= \left\{ x : [\alpha,\beta] \to \mathbb{K}; x^{(n-1)} \text{ je absolutně spojitá na } [\alpha,\beta] \right\},
\end{aligned}$$

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

$$x \in AC^{(n-1)} \to \xi(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n \to \widetilde{x} = \begin{bmatrix} \xi(\alpha) \\ \xi(\beta) \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{2n},$$

$$y \in AC^{(n-1)} \to \eta(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n \to \widetilde{y} = \begin{bmatrix} \eta(\alpha) \\ \eta(\beta) \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{2n},$$

$$\begin{aligned} x \in AC^{(n-1)} &\to \ell(x) = \ a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_n x = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{(n-i)}, \\ y \in AC^{(n-1)} &\to \ell^+(y) = (-1)^n (\overline{a_0} y)^{(n)} + (-1)^{n-1} (\overline{a_1} y)^{(n-1)} + \cdots + \overline{a_n} y \\ &\qquad\quad = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{(n-i)} (\overline{a_i} y)^{(n-i)}, \end{aligned}$$

$$\{E(t) \in \mathbb{K}^{m \times n}, t \in [\alpha, \beta]\} \to \widetilde{E} = \begin{bmatrix} -E(\alpha) & 0 \\ 0 & E(\beta) \end{bmatrix}.$$

Věta 1. *Existuje právě jedna $n \times n$-maticová funkce $E : [\alpha, \beta] \to \mathbb{K}^{n \times n}$ taková, že platí*

$$\int_{t_1}^{t_2} \overline{y}(t) \ell(x)(t) \mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2} \overline{\ell^+(y)}(t) x(t) dt = \\ = \eta^*(t_2) E(t_2) \xi(t_2) - \eta^*(t_1) E(t_1) \xi(t_1)$$

pro všechna $t_1, t_2 \in [\alpha, \beta], t_1 < t_2, x, y \in AC^{(n-1)}$ a dále

(i) $E_{i,j}(t) \equiv 0$ *pro* $i + j > n + 1$,

(ii) $E_{i,j}(t) = (-1)^{(i-1)} a_0(t)$ *pro* $i + j = n + 1$.

Důkaz. Nechť $t_1, t_2 \in [\alpha, \beta], t_1 < t_2, x, y \in AC^{(n-1)}$. Integrováním per-partes postupně dostáváme:

$$\int_{t_1}^{t_2} \overline{y} a_{n-1} x' \mathrm{d}t = [\overline{y} a_{n-1} x]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \overline{(y \overline{a}_{n-1})'} x \mathrm{d}t,$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \overline{y} a_{n-2} x'' \mathrm{d}t = \left[\overline{y} a_{n-2} x' - (\overline{y} a_{n-2})' x\right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \overline{(y \overline{a}_{n-2})''} x \mathrm{d}t,$$

$$\dots$$

$$\int_{t_1}^{t_2} y \overline{a}_{n-k} x^{(k)} \mathrm{d}t = \left[\sum_{l=0}^{k-1} (-1)^{k-1-l} (\overline{y} a_{n-k})^{(k-1-l)} x^{(l)}\right]_{t_1}^{t_2} + \\ + \int_{t_1}^{t_2} (-1)^k \overline{(y \overline{a}_{n-k})^{(k)}} x \mathrm{d}t, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Tudíž,

$$\int_{t_1}^{t_2} \overline{y} \ell(x) \mathrm{d}t = \\ \left[\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^{k-1-l} (\overline{y} a_{n-k})^{(k-1-l)} x^{(l)}\right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \overline{(y \overline{a}_{n-k})^{(k)}} x \mathrm{d}t = \\ = [\Phi(t)]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \overline{\ell^+(y)} x \mathrm{d}t,$$

kde

$$\Phi(t) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} (\overline{y}(t) a_{n-k}(t))^{(k-j)} x^{(j-1)}(t) = \\ = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=j}^{n} (-1)^{k-j} (\overline{y}(t) a_{n-k}(t))^{(k-j)}\right) x^{(j-1)}(t) = \\ = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n-j+1} \overline{y}^{(i-1)}(t) \left(\sum_{k=i+j-1}^{n} (-1)^{k-j} \binom{k-j}{i-1} a_{n-k}^{(k-j-i+1)}(t)\right) x^{(j-1)}(t) \\ = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \overline{y}^{(i-1)}(t) E_{i,j}(t) x^{(j-1)}(t), t \in [\alpha, \beta]$$

a

$$E_{i,j}(t) = \sum_{k=i+j-1}^{n} (-1)^{k-j} \binom{k-j}{i-1} a_{n-k}^{(k-j-i+1)}(t), t \in [\alpha, \beta], \\ \text{je-li} \quad i + j \leq n + 1,$$

$$E_{i,j}(t) \equiv 0 \quad \text{on} \quad [\alpha, \beta], \qquad\qquad \text{je-li} \quad i+j > n+1.$$

(Speciálně, pro $i + j = n + 1$ máme $i + j - 1 = n$, $n - j = i - 1$ a $n - j - i + 1 = 0$ a tudíž $E_{i,j}(t) = (-1)^{n-j} a_0(t) = (-1)^{i-1} a_0(t)$.)

Položme $E(t) = [E_{i,j}]_{\substack{i=1,2,\dots,n\\ j=1,2,\dots,n}}$ pro $t \in [\alpha, \beta]$. Takto definovaná maticová funkce $E(t)$ zřejmě má vlastnosti (i) a (ii) a platí

$$\int_{t_1}^{t_2} \overline{y} \ell(x) \mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2} \overline{\ell^+(y)} x \mathrm{d}t = \eta^*(t_2) E(t_2) \xi(t_2) - \eta^*(t_1) E(t_1) \xi(t_1).$$

□

Důsledek. *Nechť $E(t)$ je maticová funkce z Věty 1. Potom pro všechna $x, y \in AC^{(n-1)}$ platí*

$$\int_\alpha^\beta \overline{y}(t) \ell(x)(t) dt - \int_\alpha^\beta \overline{\ell^+(y)}(t) x(t) dt = \widetilde{y}^* \widetilde{E} \widetilde{x}.$$

B. Adjungované relace.

Nechť $\mathbb{X}, \mathbb{G}$ jsou lineární vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{K}$, pro něž je definováno zobrazení

$$x \in \mathbb{X}, g \in \mathbb{G} \longrightarrow < x, g >_{\mathbb{X}}$$

takové, že pro všechna $x, x_1, x_2 \in \mathbb{X}$ a všechna $g, g_1, g_2 \in \mathbb{G}$ platí

$$\begin{aligned} < x_1 + x_2, g >_{\mathbb{X}} &=< x_1, g >_{\mathbb{X}} + < x_2, g >_{\mathbb{X}} \\ < \lambda x, g >_{\mathbb{X}} &= \lambda < x, g >_{\mathbb{X}} \\ < x, g_1 + g_2 >_{\mathbb{X}} &=< x, g_1 >_{\mathbb{X}} + < x, g_2 >_{\mathbb{X}} \\ < x, \lambda g >_{\mathbb{X}} &= \overline{\lambda} < x, g >_{\mathbb{X}} . \end{aligned}$$

(říkáme, že $< ., . >_{\mathbb{X}}$ je *sesquilineární forma* na $\mathbb{X} \times \mathbb{G}$.)

Podobně, nechť $\mathbb{F}$ a $\mathbb{G}$ jsou lineární vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{K}$, pro něž je definována sesqui-lineární forma

$$f \in \mathbb{F}, y \in \mathbb{Y} \longrightarrow < f, y >_{\mathbb{F}} .$$

Označení.

$$\begin{aligned} M \subset \mathbb{F} &\to M^{\perp} = \{y \in \mathbb{Y} :< f, y >_{\mathbb{F}}= 0 \text{ pro každé } \ f \in M\} \subset \mathbb{Y}, \\ N \subset \mathbb{Y} &\to N^{\perp} = \{f \in \mathbb{F} :< f, y >_{\mathbb{F}}= 0 \text{ pro každé } \ y \in N\} \subset \mathbb{F}. \\ M \subset \mathbb{X} &\to M^{\perp} = \{g \in \mathbb{G} :< x, g >_{\mathbb{X}}= 0 \text{ pro každé } \ x \in M\} \subset \mathbb{G}, \\ N \subset \mathbb{G} &\to N^{\perp} = \{x \in \mathbb{X} :< x, g >_{\mathbb{X}}= 0 \text{ pro každé } \ g \in N\} \subset \mathbb{X}. \end{aligned}$$

Nechť $L : \mathcal{D}(L) \subset \mathbb{X} \to Lx \in \mathbb{F}$ je lineární zobrazení (*lineární operátor*) definované na lineárním podprostoru $\mathcal{D}(L)$ prostoru $\mathbb{X}$ a zobrazující $\mathcal{D}(L)$ do $\mathbb{F}$. Potom

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(L) &= \{x \in \mathcal{D}(L); Lx = 0\} \quad \text{je } \textit{nulový prostor} \text{ operátoru } \ L, \\ \mathcal{R}(L) &= \{Lx \in \mathbb{F}; x \in \mathcal{D}(L)\} \quad \text{je } \textit{obor hodnot} \text{ operátoru } \ L, \\ \mathcal{G}(L) &= \{(x, Lx) \in \mathbb{X} \times \mathbb{F}; x \in \mathcal{D}(L)\} \quad \text{je } \textit{graf} \text{ operátoru } \ L. \end{aligned}$$

Definice 1. *Adjungovanou relací* k operátoru L nazýváme lineární relaci L^* jejímž grafem je množina

$$\mathcal{G}(L^*) = \{(g, y) \in \mathbb{G} \times \mathbb{Y}; < Lx, y >_{\mathbb{F}}=< x, g >_{\mathbb{X}} \text{ pro všechna } \ x \in \mathcal{D}(L)\}.$$

Dále, *definiční obor* $\mathcal{D}(L^*)$, *nulový prostor* $\mathcal{N}(L^*)$ a *obor hodnot* $\mathcal{R}(L^*)$ adjungované relace L^* jsou množiny definované následujícími vztahy

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(L^*) &= \{y \in \mathbb{Y};\ \text{existuje } g \in \mathbb{G} \text{ takové, že } (g,y) \in \mathcal{G}(L^*)\},\\ \mathcal{N}(L^*) &= \{y \in \mathbb{Y}; (0,y) \in \mathcal{G}(L^*)\},\\ \mathcal{R}(L^*) &= \{g \in \mathbb{G};\ \text{existuje } y \in \mathbb{Y} \text{ takové, že } (g,y) \in \mathcal{G}(L^*)\}.\end{aligned}$$

Dále, pro každé $y \in \mathcal{D}(L^*)$ značíme

$$L^*y = \{g \in \mathbb{G}; (g,y) \in \mathcal{G}(L^*)\}.$$

Jestliže platí implikace

$$< x, g >_{\mathbb{X}} = 0 \text{ pro každé } x \in \mathcal{D}(L) \implies g = 0,$$

pak pro dané $y \in \mathcal{D}(L^*)$ může nastat situace, že $(g_1, y) \in \mathcal{G}(L^*)$ a současně $(g_2, y) \in \mathcal{G}(L^*)$ jenom tehdy, když $g_1 = g_2$, t.j. v takovém případě je pro každé $y \in \mathcal{D}(L^*)$ množina L^*y jednobodová, t.j. v takovém případě je L^* lineární operátor.

Následující tvrzení plynou přímo z definice nulového prostoru adjungované relace.

Lemma 1. *$\mathcal{R}(L)^\perp = \mathcal{N}(L^*)$, t.j. rovnice $Lx = f$ má řešení pouze tehdy, když $< f, y >_{\mathbb{F}} = 0$ platí pro všechna $y \in \mathcal{N}(L^*)$.*

Lemma 2. *Jestliže $(\mathcal{R}(L)^\perp)^\perp = \mathcal{R}(L)$, pak $\mathcal{R}(L) = \mathcal{N}(L^*)^\perp$, t.j. t.j. rovnice $Lx = f$ má řešení právě tehdy, když $< f, y >_{\mathbb{F}} = 0$ platí pro všechna $y \in \mathcal{N}(L^*)$.*

C. Okrajové úlohy pro skalární rovnice n-tého řádu.

Předpoklady. $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$, $a_i \in C^{(n-i)}(\alpha,\beta), i = 0,1,\dots,n$; $a_0(t) \neq 0$ pro všechna $t \in [\alpha,\beta]$; $M, N \in \mathbb{K}^{m\times n}$ jsou takové, že $0 \le m \le 2n$ a hodnost h $m \times 2n$ - matice $[M,N]$ je maximální (tj. $h = m$).

Definice 2. řekneme, že funkce $x : [\alpha,\beta] \to \mathbb{K}^n$ je řešením *okrajové úlohy* (P)

(1) $$\ell(x) = f,$$

(2) $$M\xi(\alpha) + N\xi(\beta) = 0 \in \mathbb{K}^m,$$

jestliže x je řešením diferenciální rovnice (1) na intervalu $[\alpha,\beta]$ a vektorová funkce ξ funkci x přiřazená dle výše zavedeného označení (viz A) splňuje (2).

Poznámka. Důkazy všech tvrzení tohoto odstavce lze nalézti v kapitole 9 knihy J.Kurzweila: *Ordinary Differential Equations, Elsevier & SNTL, 1986.*

Označme
$$\mathcal{X} = \left\{c \in \mathbb{K}^{2n}; [M,N]\, c = 0\right\}.$$

Okrajovou podmínku (2) pak můžeme zapsat též ve tvaru

(2') $$x \in \mathcal{X}.$$

Definujeme-li dále
$$\mathcal{D}(L) = \left\{x \in AC^{(n-1)}; \widetilde{x} \in \mathcal{X}\right\},$$
$$Lx = \ell(x) \quad \text{pro} \quad x \in \mathcal{D}(L),$$

pak okrajovou úlohu (P) můžeme zapsat jako operátorovou rovnici

(3) $$Lx = f.$$

Položme
$$\mathbb{X} = \mathbb{Y} = AC^{(n-1)}, \mathbb{F} = \mathbb{G} = L^1,$$

$$< x, g >_{\mathbb{X}} = \int_{\alpha}^{\beta} \overline{g}(t)x(t)\mathrm{d}t \quad \text{pro} \quad x \in \mathbb{X}, g \in \mathbb{G}$$

a

$$< f, y >_{\mathbb{Y}} = \int_{\alpha}^{\beta} \overline{y}(t)f(t)\mathrm{d}t \quad \text{pro} \quad f \in \mathbb{F}, y \in \mathbb{Y}.$$

Definice 3. $C_0^{(n)} = \left\{x \in C^{(n)}; \widetilde{x} = 0\right\}.$

Lemma 3. *Jestliže platí*

$$\int_{\alpha}^{\beta} \overline{g}x dt = 0 \quad \textit{pro všechna} \quad x \in C_0^{(n)},$$

pak $g(t) = 0$ *pro s.v.* $t \in [\alpha, \beta]$.

Důsledek. *Jestliže platí*

$$\int_{\alpha}^{\beta} \overline{g}x dt = 0 \quad \textit{pro všechna} \quad x \in \mathcal{D}(L),$$

pak $g(t) = 0$ *pro s.v.* $t \in [\alpha, \beta]$.

Důsledek. *Adjungovaná relace* L^* *k* L *(viz B) je operátor z* $\mathbb{Y}$ *do* $\mathbb{G}$.

Věta 2. $\mathcal{D}(L^*) = \left\{y \in AC^{(n-1)}; \widetilde{y} \in \left(\widetilde{E}\mathcal{X}\right)^{\perp}\right\}$ *a* $L^*y = \ell^+y$ *pro* $y \in \mathcal{D}(L^*)$.

Důsledek. $\mathcal{N}(L^*) = \left\{y \in AC^{(n-1)}; \ell^+(y) = 0, \widetilde{y} \in \left(\widetilde{E}\mathcal{X}\right)^{\perp}\right\}.$

Definice 4. Úlohu (P_0^*) nalézti řešení diferenciální rovnice

$$\ell^+(y) = 0, \tag{4}$$

pro které dále platí

$$\widetilde{y} \in \mathcal{Y} = \left(\widetilde{E}\mathcal{X}\right)^{\perp},$$

nazýváme *úloha adjungovaná* k okrajové úloze (P).

Důsledek. *Daná úloha (P) má řešení pouze tehdy, když platí*

$$\int_\alpha^\beta \overline{y} f \, dt = 0 \quad \text{pro všechna řešení } y \text{ úlohy } (P_0^*).$$

Definice 5. $L^{**} = (L^*)^*$ (tj.

$$\mathcal{G}(L^{**}) = \left\{(x,f) \in \mathbb{X} \times \mathbb{F}; y \in \mathcal{D}(L^*) \implies < x, \ell^+(y) >_{\mathbb{X}} = < f, y >_{\mathbb{F}}\right\}).$$

Lemma 4. $\dim \mathcal{X} + \dim \mathcal{Y} = 2n$.

Lemma 5. $\mathcal{X} = \left(\widetilde{E}^* \mathcal{Y}\right)^\perp$.

Věta 3. $L^{**} = L$.

Lemma 6. *Je-li* U *vektorový podprostor v* $\mathbb{K}^r$*, pak* $\left(U^\perp\right)^\perp = U$.

Lemma 7. *Jsou-li* U, V *vektorové podprostory v* $\mathbb{K}^r$*, pak* $(U+V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp$.

Lemma 8. *Jsou-li* U, V *vektorové podprostory v* $\mathbb{K}^r$*, pak* $(U \cap V)^\perp = U^\perp + V^\perp$.

Definice 6.

$$\mathcal{Z}(\ell) = \left\{p \in \mathbb{K}^{2n}; \exists_{x \in AC^{(n-1)}} \text{ takové, že } \ell(x) = 0, \widetilde{x} = p\right\},$$
$$\mathcal{Z}(\ell^+) = \left\{q \in \mathbb{K}^{2n}; \exists_{y \in AC^{(n-1)}} \text{ takové, že } \ell^+(y) = 0, \widetilde{y} = q\right\}.$$

Lemma 9.

a) $\dim \mathcal{Z}(\ell) = \dim \mathcal{Z}(\ell^+) = n$,

b) $\mathcal{Z}(\ell^+) = (\widetilde{E}\mathcal{Z}(\ell))^\perp$,

c) $\mathcal{Z}(\ell) = (\widetilde{E}^*\mathcal{Z}(\ell^+))^\perp$.

Věta 4. *Daná okrajová úloha (P) má řešení právě tehdy, když platí*

$$\int_\alpha^\beta \overline{y} f \, dt = 0 \quad \text{pro všechna řešení } y \text{ adjungované úlohy } (P_0^*).$$

Důsledek. $\mathcal{R}(L) = \mathcal{N}(L^*)^\perp$, *tj.* $(\mathcal{R}(L)^\perp)^\perp = \mathcal{R}(L)$.

Věta 5. *Následující tvrzení jsou ekvivalentní*

(i) $\mathcal{N}(L^*) = \{0\}$,

(ii) $\mathcal{Y} \cap \mathcal{Z}(\ell^+) = \{0\}$,

(iii) pro každou funkci $g \in L^1$ *má úloha* $\ell^+(y) = g, \widetilde{y} \in \mathcal{Y}$ *nejvýše jedno řešení,*

(iv) pro každou funkci $f \in L^1$ *má úloha* $\ell(x) = f, \widetilde{x} \in \mathcal{X}$ *řešení.*

Věta 6. *Následující tvrzení jsou ekvivalentní*

(i) $\mathcal{N}(L) = \{0\}$,

(ii) $\mathcal{X} \cap \mathcal{Z}(\ell) = \{0\}$,

(iii) pro každou funkci $f \in L^1$ *má úloha* $\ell(x) = f, \widetilde{x} \in \mathcal{X}$ *nejvýše jedno řešení,*

(iv) pro každou funkci $g \in L^1$ *má úloha* $\ell^+(y) = g, \widetilde{y} \in \mathcal{Y}$ *řešení.*

Důsledek. *Daná úloha (P) má právě jedno řešení pro každou funkci* $f \in L^1$ *právě tehdy, když platí současně* $\mathcal{N}(L) = \{0\}$ *a* $\mathcal{N}(L^*) = \{0\}$.

Důsledek. *Daná úloha (P) má právě jedno řešení pro každou funkci* $f \in L^1$ *právě tehdy, když platí současně* $\mathcal{Y} \cap \mathcal{Z}(\ell^+) = \{0\}$ *a* $\mathcal{X} \cap \mathcal{Z}(\ell) = \{0\}$.

Věta 7. *Daná úloha (P) má právě jedno řešení pro každou funkci* $f \in L^1$ *právě tehdy, když platí současně* $\mathcal{N}(L) = \{0\}$ *a* $\dim \mathcal{X} = n$.

Věta 8. *Daná úloha (P) má právě jedno řešení pro každou funkci* $f \in L^1$ *právě tehdy, když platí současně* $m = n$ *a* $\det[MU(\alpha) + NU(\beta)] \neq 0$, *kde* U *značí fundamentální matici řešení homogenní rovnice* $\ell(x) = 0$.

Definice 7. Funkce $g : [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta] \to \mathbb{K}$ se nazývá *Greenova funkce* problému (P), jestliže splňuje následující podmínky:

(i) Je-li $n = 1$, pak je g spojitá a ohraničená na $\Delta = [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta] \setminus \{(t, t); t \in [\alpha, \beta]\}$,

(ii) Je-li $n > 1$, pak je g spojitá na $[\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta]$,

(iii) Pro každou funkci $f \in L^1$ je funkce

$$x(t) = \int_\alpha^\beta g(t,s)f(s)\mathrm{d}s, t \in [\alpha,\beta]$$

jediným řešením úlohy (P).

Věta 9. *Nechť platí*

$$m = n \quad \text{a} \quad \det\left[MU(\alpha) + NU(\beta)\right] \neq 0,$$

kde U značí fundamentální matici řešení homogenní rovnice $\ell(x) = 0$. Potom existuje Greenova funkce úlohy (P).

Věta 10. *Nechť platí*

$$m = n \quad \text{a} \quad \det\left[MU(\alpha) + NU(\beta)\right] \neq 0,$$

kde U značí fundamentální matici řešení homogenní rovnice $\ell(x) = 0$. Potom existuje Greenova funkce $h(t,s)$ adjungované úlohy (P) $\ell^+(y) = g, \widetilde{y} \in \mathcal{Y}$ a platí $h(t,s) = \overline{g}(s,t)$.*

Definice 8. Operátor L (viz (3)) se nazývá *samoadjungovaný*, jestliže $L^* = L$. Je-li L samoadjungovaný, pak okrajová úloha (P) se nazývá samoadjungovaná.

Věta 11. *Operátor L je samoadjungovaný právě tehdy, když platí*

$$\ell^+(x) = \ell(x) \quad \textit{pro každé } x \in AC^{(n-1)} \quad \text{a} \quad \mathcal{X} = \left(\widetilde{E}\mathcal{X}\right)^\perp.$$

Definice 9. Jestliže $\lambda \in \mathbb{K}$ a jestliže existuje nenulové řešení x okrajové úlohy

$$\ell(x) = \lambda x, \widetilde{x} \in \mathcal{X},$$

pak λ se nazývá *vlastní číslo úlohy* (P) a funkce x je *vlastní funkce úlohy* (P). Dvojice (λ, x) se pak nazývá též *vlastní pár úlohy* (P).

Lemma 10. *Nechť je úloha (P) samoadjungovaná a nechť (μ_1, x_1) a (μ_2, x_2) jsou vlastní páry této úlohy, $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, $\mu_1 \neq \mu_2$. Potom*

$$\int_\alpha^\beta x_1 x_2 dt = 0.$$

Lemma 11. *Nechť je úloha (P) samoadjungovaná. Potom existuje* $\sigma \in \mathbb{R}$ *takové, že úloha*

$$\ell(x) - \sigma x = 0, x \in \mathfrak{X}$$

má pouze triviální řešení $x \equiv 0$.

Věta 12. *Nechť funkce* $g : [\alpha,\beta] \times [\alpha,\beta] \to \mathbb{K}$ *je spojitá a ohraničená na* $\Delta = [\alpha,\beta] \times [\alpha,\beta] \setminus \{(t,t); t \in [\alpha,\beta]\}$ *a nechť platí*

$$g(t,s) = \overline{g}(s,t) \quad \text{na} \quad \begin{cases} [\alpha,\beta] \times [\alpha,\beta], & \text{je-li } n > 1 \\ \Delta, & \text{je-li } n = 1 \end{cases}$$

a

$$w \in L^1, \int_\alpha^\beta g(t,s) w(s) ds = 0 \quad \text{na} \;\; [\alpha,\beta] \implies w(t) = 0 \;\; \text{s.v. na} \;\; [\alpha,\beta].$$

Potom existuje posloupnost $\{(\gamma_k, x_k)\}_{k=1,2,\dots} \in \mathbb{R} \times AC^{(n-1)}$, *taková, že platí*

(i) $\gamma_k \neq 0, x_k \neq 0$, *pro všechna* $k = 1,2,\dots,$

(ii) $\lim_{k\to\infty} \gamma_k = 0,$

(iii)

$$\int_\alpha^\beta x_j x_k dt = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}, \quad j,k = 1,2,\dots \quad ,$$

(iv) jestliže $w \in L^1$ *a*

$$\int_\alpha^\beta w x_k dt = 0 \quad \text{pro všechna} \;\; k = 1,2,\dots,$$

pak $w(t) = 0$ *s.v. na* $[\alpha,\beta]$,

(v)

$$\gamma_k x_k(t) = \int_\alpha^\beta g(t,s) x_k(s) ds, t \in [\alpha,\beta], k = 1,2,\dots \quad .$$

Věta 13. *Je-li úloha (P) samoadjungovaná, pak existuje posloupnost vlastních párů* $\{(\lambda_k, x_k)\}_{k=1,2,\dots}$ *úlohy (P) taková, že platí*

(i) $\lambda_k \in \mathbb{R}$ *pro* $k = 1, 2, \dots$ a $\lim_{k\to\infty} |\lambda_k| = \infty$,

(ii)

$$\int_\alpha^\beta x_j x_k dt = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}, \quad j, k = 1, 2, \dots \quad ,$$

(iii) jestliže $w \in L^1$ a

$$\int_\alpha^\beta w x_k dt = 0 \quad \text{pro všechna} \;\; k = 1, 2, \dots \quad ,$$

pak $w(t) = 0$ *s.v. na* $[\alpha, \beta]$.

Poznaámka. Posloupnost $\{x_k\}$ vlastních funkcí úlohy (P) z Věty 13 má následující vlastnost:

Pro každé $\varepsilon > 0$ a *každou funkci* $f \in L^2$ *existuje přirozené číslo* N a *čísla* $\kappa_k \in \mathbb{K}, k = 1, 2, \dots, N$ *taková, že platí*

$$\int_\alpha^\beta \left| f - \sum_{k=1}^{N} \kappa_k x_k \right|^2 dt < \varepsilon.$$

Věta 14. *Nechť* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ a *nechť funkce* $p_{2k} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}, k = 0, 1, \dots, m$ *mají spojité derivace do řádu* $2k$. *Položme*

$$g_{2k}(x) = \left(p_{2k} x^{(k)}\right)^{(k)} \quad \text{pro} \;\; k = 0, 1, \dots, m \quad \text{a} \quad x \in AC^{(2k-1)}$$

a

$$\ell(x) = \sum_{k=0}^{m} g_{2k}(x) \quad \text{pro} \;\; x \in AC^{(2m-1)}.$$

Potom je operátor ℓ^+ *definován a platí*

$$\ell(x) = \ell^+(x) \quad \text{pro všechna} \;\; x \in AC^{(2m-1)}.$$

Věta 15. *Nechť $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ a nechť funkce $p_k : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}, k = 0,1,\dots,n$ mají spojité derivace do řádu k. Položme pro $x \in AC^{(n-1)}$ a $k = 0,1,\dots,n$*

$$g_k(x) = \begin{cases} \frac{i}{2}\left[p_{2j+1}x^{(j+1)}\right]^{(j)} + \frac{i}{2}\left[p_{2j+1}x^{(j)}\right]^{(j+1)}, & \text{je-li } k = 2j+1, \\ \left(p_{2j}x^{(j)}\right)^{(j)}, & \text{je-li } k = 2j \end{cases}$$

a

$$\ell(x) = \sum_{k=0}^{m} g_k(x).$$

Potom je operátor ℓ^+ definován a platí

$$\ell(x) = \ell^+(x) \quad \text{pro všechna } x \in AC^{(n-1)}.$$

Věta 16. *Nechť $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ a nechť pro diferenciální výraz n-tého řádu $\ell : AC^{(n-1)} \to L^1$ platí $\ell^+ = \ell$. Potom je číslo n sudé, $n = 2m$ a existují funkce $p_{2k} : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}, k = 0,1,\dots,m$, které mají spojité derivace do řádu $2k$ a jsou takové, že platí*

$$\ell(x) = \sum_{k=0}^{m} \left(p_{2k}x^{(k)}\right)^{(k)} \quad \text{pro } x \in AC^{(n-1)}.$$

Věta 17. *Nechť $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ a nechť pro diferenciální výraz n-tého řádu $\ell : AC^{(n-1)} \to L^1$ platí $\ell^+ = \ell$. Potom existují funkce $p_k : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}, k = 0,1,\dots,n$, které mají spojité derivace do řádu k a jsou takové, že platí*

$$\ell(x) = \sum_{k=0}^{n} g_k(x) \quad \text{pro } x \in AC^{(n-1)},$$

kde diferenciální výrazy g_k jsou definovány jako ve Větě 15.

D. Okrajové úlohy pro vektorové rovnice.

Označení. Pro $\mathbb{Z} = \mathbb{K}^n$ nebo $\mathbb{Z} = \mathbb{K}^{n \times n}$ značí $L^1([\alpha, \beta], \mathbb{Z})$ prostor všech funkcí $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{Z}$ integrovatelných na intervalu $[\alpha, \beta]$ (tj. každá složka vektorové resp. maticové funkce f má konečný Lebesgueův integrál přes interval $[\alpha, \beta]$). Analogický význam mají symboly $AC([\alpha, \beta], \mathbb{Z}), L^p([\alpha, \beta], \mathbb{Z})$ a p.

V tomto odstavci budeme vyšetřovat okrajové úlohy tvaru

(5) $$\xi' + A(t)\xi = b(t),$$

(6) $$M\xi(\alpha) + N\xi(\beta) = 0.$$

Následující předpoklady budou platit v celém odstavci.

Předpoklady. $-\infty < \alpha < \beta < \infty$, $A \in L^1([\alpha, \beta], \mathbb{K}^{n \times n})$, $b \in L^1([\alpha, \beta], \mathbb{K}^n)$, $M, N \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $0 \le m \le 2n$ a $m \times 2n$ - matice $[M, N]$ má maximální hodnost (tj. m).

Definice 10. řekneme, že funkce $\xi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{K}^n$ je *řešení okrajové úlohy* (π), je-li ξ řešení systému (5) na intervalu $[\alpha, \beta]$ takové, že platí (6).

Označení. V dalším textu značíme symbolem $U(t)$ fundamentální matici řešení homogenního systému

(7) $$\xi' + A(t)\xi = 0$$

na intervalu $[\alpha, \beta]$, tj. $U(t)$ je $n \times n$-maticová funkce absolutně spojitá na $[\alpha, \beta]$ a taková, že platí

$$U(\alpha) = I \quad \text{a} \quad U'(t) + A(t)U(t) = 0 \quad \text{pro s.v.} \ \ t \in [\alpha, \beta].$$

Je známo, že pro každý vektor $c \in \mathbb{K}^n$ je jediné řešení $\xi(t)$ systému (1) na intervalu $[\alpha, \beta]$ takové, že $\xi(\alpha) = c$ dáno výrazem

(8) $$\xi(t) = U(t)c + U(t) \int_\alpha^t U^{-1}(s)b(s)\mathrm{d}s, \quad t \in [\alpha, \beta],$$

maticová funkce $U^{-1}(t)$ je definována a absolutně spojitá na intervalu $[\alpha, \beta]$ a platí

$$U^{-1}(\alpha) = I \quad \text{a} \quad (U^{-1})'(t) = U^{-1}(t)A(t) \quad \text{pro s.v.} \ \ t \in [\alpha, \beta].$$

Dosazením (8) do (2) dostaneme ihned následující tvrzení:

Tvrzení 1. *Okrajová úloha* (π) *má řešení právě tehdy, když má řešení lineární (algebraický) systém*

$$[MU(\alpha) + NU(\beta)]\, c = -NU(\beta) \int_\alpha^\beta U^{-1}(s) b(s) ds.$$

Je známo, že lineární algebraický systém $Dc = w$ má řešení, právě když se hodnost $h(D)$ matice systému rovná hodnosti rozšířené matice $[D, w]$ systému. Snadno se ověří, že toto je pravda právě tehdy, když platí implikace

$$\gamma^* D = 0 \implies \gamma^* w = 0.$$

Z Tvrzení 1 tedy okamžitě plyne

Tvrzení 2. *Okrajová úloha* (π) *má řešení právě tehdy, když*

$$\gamma^* NU(\beta) \int_\alpha^\beta U^{-1}(s) b(s) ds = 0$$

platí pro každé řešení $\gamma \in \mathbb{K}^m$ *lineárního algebraického systému*

$$\gamma^* \left[MU(\alpha) + NU(\beta)\right] = 0. \tag{9}$$

Pro $\gamma \in \mathbb{K}^m$ a $t \in [\alpha, \beta]$ označme

$$\zeta_\gamma^*(t) = \gamma^* NU(\beta) U^{-1}(t).$$

Potom pro každé $\gamma \in \mathbb{K}^m$ je funkce $\zeta = \zeta_\gamma$ řešením systému

$$\zeta' = A^*(t)\zeta \tag{10}$$

na intervalu $[\alpha, \beta]$. Dále, pro každé $\gamma \in \mathbb{K}^m$ splňující (9) máme

$$\zeta^*(\alpha) = \gamma^* NU(\beta) = -\gamma^* M$$

a

$$\zeta^*(\beta) = \gamma^* N.$$

Z Tvrzení 2 tedy plyne

Tvrzení 3. *Okrajová úloha (π) má řešení jestliže*

$$\int_\alpha^\beta \zeta^*(s)b(s)ds = 0 \tag{11}$$

platí pro každou dvojici $(\zeta,\gamma), \zeta : [\alpha,\beta] \to \mathbb{K}^n, \gamma \in \mathbb{K}^m$ *takovou, že* ζ *je řešením systému* (10) *na* $[\alpha,\beta]$ *a*

$$\zeta(\alpha) = -M^*\gamma, \quad \zeta(\beta) = N^*\gamma. \tag{12}$$

Definice 11. Úlohu nalézti řešení ζ systému (10) na $[\alpha,\beta]$ a vektor $\gamma \in \mathbb{K}^m$ takové, že platí (12) nazýváme *adjungovaná okrajová úloha* k úloze (π) a značíme (π_0^*).

Integrací per-partes snadno ověříme, že je-li ξ řešení daného problému (π) a ζ,γ řešení úlohy (π_0^*), pak platí

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta \zeta^*(t)b(t)\mathrm{d}t &= \int_\alpha^\beta \zeta^*(t)b(t)\mathrm{d}t - \gamma^*\left[M\xi(\alpha) + N\xi(\beta)\right] = \\
&= \int_\alpha^\beta \zeta^*(t)\left[\xi'(t) + A(t)\xi(t)\right]\mathrm{d}t - \gamma^*\left[M\xi(\alpha) + N\xi(\beta)\right] = \\
&= \zeta^*(\beta)\xi(\beta) - \zeta^*(\alpha)\xi(\alpha) + \int_\alpha^\beta \left[-\zeta^{*\prime}(t) + \zeta^*(t)A(t)\right]\xi(t)\mathrm{d}t - \\
&\qquad -\gamma^*\left[M\xi(\alpha) + N\xi(\beta)\right] = \\
&= \int_\alpha^\beta \left[-\zeta^{*\prime}(t) + \zeta^*(t)A(t)\right]\xi(t)\mathrm{d}t + \\
&\quad + \left[\zeta^*(\beta) - \gamma^*N\right]\xi(\beta) - \left[\zeta^*(\alpha) + \gamma^*M\right]\xi(\alpha) = 0.
\end{aligned}$$

T.zn., že podmínka (11) z Tvrzení 3 je také podmínka nutná pro existenci řešení úlohy (π). Platí tedy následující tvrzení, jež je analogií Věty 4 z odstavce C.

Věta 18. *Okrajová úloha (π) má řešení právě tehdy, když* (11) *platí pro každé řešení* (ζ,γ) *úlohy* (π_0^*) *k* (π) *adjungované.*

Podle našich předpokladů má $m \times 2n$-matice $[-M, N]$ lineárně nezávislé řádky. Existují tedy $(2n-m) \times n$- matice $\widetilde{M}$ a $\widetilde{N}$ takové, že platí

$$\det \begin{bmatrix} -M & N \\ -\widetilde{M} & \widetilde{N} \end{bmatrix} \neq 0.$$

Existuje tedy inversní matice k matici

$$\begin{bmatrix} -M & N \\ -\widetilde{M} & \widetilde{N} \end{bmatrix}.$$

Označme bloky v této inversní matici tak, že platí

$$\begin{bmatrix} -M & N \\ -\widetilde{M} & \widetilde{N} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \widetilde{P} & P \\ \widetilde{Q} & Q \end{bmatrix},$$

kde P, Q jsou $n \times (2n-m)$- matice a $\widetilde{P}, \widetilde{Q}$ jsou $n \times m$- matice. T.zn., že platí vztahy

$$\begin{aligned} -M\widetilde{P} + N\widetilde{Q} &= I, \\ -\widetilde{M}\widetilde{P} + \widetilde{N}\widetilde{Q} &= 0, \\ -MP + NQ &= 0, \\ -\widetilde{M}P + \widetilde{N}Q &= I. \end{aligned} \tag{13}$$

a

$$\begin{aligned} \widetilde{P}M + P\widetilde{M} &= -I, \\ \widetilde{P}N + P\widetilde{N} &= 0, \\ \widetilde{Q}M + Q\widetilde{M} &= 0, \\ \widetilde{Q}N + Q\widetilde{N} &= I. \end{aligned} \tag{14}$$

Z těchto vztahů plyne následující tvrzení

Věta 19. *Dvojice $\zeta : [\alpha, \beta] \to \mathbb{K}^n$, $\gamma \in \mathbb{K}^m$ splňuje okrajové podmínky* (12) *právě tehdy, když platí*

$$P^*\zeta(\alpha) + Q^*\zeta(\beta) = 0 \quad \text{a} \quad \widetilde{P}^*\zeta(\alpha) + \widetilde{Q}^*\zeta(\beta) = \gamma.$$

Důkaz. Platí-li (12), pak podle (13) je

$$\zeta^*(\alpha)P + \zeta^*(\beta)Q = \gamma^*\left[-MP + NQ\right] = 0$$

a

$$\zeta^*(\alpha)\widetilde{P} + \zeta^*(\beta)\widetilde{Q} = \gamma^*\left[-M\widetilde{P} + N\widetilde{Q}\right] = \gamma^* I = \gamma^*.$$

Na druhou stranu, řádky $m \times n$- matice $[-M, N]$ tvoří bázi prostoru řešení lineárního algebraického systému

$$\delta^* \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = 0.$$

(Dimenze tohoto prostoru je $n - (2n - m) = m$.) Tudíž, je-li $\zeta^*(\alpha)P + \zeta^*(\beta)Q = 0$, pak nutně existuje $\gamma \in \mathbb{K}^m$ tak, že $\zeta^*(\alpha) = -\gamma^* M$ a $\zeta^*(\beta) = \gamma^* N$, tj.platí (12). $\square$

Následující tvrzení je analogií Věty 1 z odstavce A.

Věta 20 (Lagrangeova identita). *Pro libovolné funkce $\xi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{K}^n$ a $\zeta : [\alpha, \beta] \to \mathbb{K}^n$ absolutně spojité na $[\alpha, \beta]$ platí*

$$(15)\quad \int_\alpha^\beta \zeta^*(t)\left[\xi'(t) + A(t)\xi(t)\right]dt - \int_\alpha^\beta \left[-\zeta^{*\prime}(t) + \zeta^*(t)A(t)\right]\xi(t)dt =$$
$$= \left[\zeta^*(\alpha)\widetilde{P} + \zeta^*(\beta)\widetilde{Q}\right]\left[M\xi(\alpha) + N(\beta)\right] +$$
$$+ \left[\zeta^*(\alpha)P + \zeta^*(\beta)Q\right]\left[\widetilde{M}\xi(\alpha) + \widetilde{N}\xi(\beta)\right].$$

Důkaz. Integrováním per-partes na levé straně vztahu (15) dostaneme snadno

$$\int_\alpha^\beta \zeta^*(t)\left[\xi'(t) + A(t)\xi(t)\right]\mathrm{d}t - \int_\alpha^\beta \left[-\zeta^{*\prime}(t) + \zeta^*(t)A(t)\right]\xi(t)\mathrm{d}t =$$
$$= \zeta^*(\beta)\xi(\beta) - \zeta^*(\alpha)\xi(\alpha) = \left[\zeta^*(\alpha), \zeta^*(\beta)\right]\begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi(\alpha) \\ \xi(\beta) \end{bmatrix}.$$

Podle definice matic $\widetilde{M}, \widetilde{N}, P, Q, \widetilde{P}$ a $\widetilde{Q}$ je ovšem

$$\begin{bmatrix} \widetilde{P} & P \\ \widetilde{Q} & Q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M & N \\ \widetilde{M} & \widetilde{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

a odtud už plyne vztah (15). $\square$

Následující věta je analogií Věty 8 z odstavce C.

Věta 21. *Okrajová úloha* (π) *má jedině řešení pro každou pravou stranu* $b \in L^1([\alpha,\beta],\mathbb{K}^n)$ *právě tehdy, když platí*

$$m = n \quad \text{a} \quad \det\left[MU(\alpha) + NU(\beta)\right] \neq 0. \tag{16}$$

Důkaz. a) Jestliže platí (16), pak existuje inversní matice D^{-1} k matici

$$D = \left[MU(\alpha) + NU(\beta)\right]$$

a pro každé $b \in L^1([\alpha,\beta],\mathbb{K}^n)$ je

$$c = -D^{-1}NU(\beta)\int_\alpha^\beta U^{-1}(s)b(s)\mathrm{d}s \tag{17}$$

jediným řešením systému

$$\left[MU(\alpha) + NU(\beta)\right]c = -NU(\beta)\int_\alpha^\beta U^{-1}(s)b(s)\mathrm{d}s. \tag{18}$$

Podle Tvrzení 1 je tedy pro každé $b \in L^1([\alpha,\beta],\mathbb{K}^n)$ funkce $\xi(t)$ definovaná pro $t \in [\alpha,\beta]$ vztahem

$$\xi(t) = U(t)\left(-D^{-1}NU(\beta)\int_\alpha^\beta U^{-1}(s)b(s)\mathrm{d}s + \int_\alpha^t U^{-1}(s)b(s)\mathrm{d}s\right) \tag{19}$$

jediným řešením dané okrajové úlohy (π).

b) Je-li buďto $m = n$ a $\det\left[MU(\alpha) + NU(\beta)\right] = 0$ nebo $m > n$, pak matice $D = \left[MU(\alpha) + NU(\beta)\right]$ má hodnost $h(D) < m$ a tudíž existuje vektor $\gamma \in \mathbb{K}^m$, $\gamma \neq 0$ takový, že platí

$$\gamma^*\left[MU(\alpha) + NU(\beta)\right] = 0.$$

Kdyby bylo $\gamma^* N = 0$, bylo by také $\gamma^* M = 0$ a tedy $\gamma^*[M,N] = 0$, což by znamenalo spor s předpokladem, že matice $[M,N]$ má maximální hodnost (tj. m). T.zn., že je $\gamma^* N \neq 0$. Položme

$$b(t) = U(t)U^{-1}(\beta)N^*\gamma.$$

Potom

$$\gamma^* NU(\beta)\int_\alpha^\beta U^{-1}(s)b(s)\mathrm{d}s = \gamma^* NU(\beta)\,(\beta-\alpha)\,U^{-1}(\beta)N^*\gamma = \\ = (\beta-\alpha)\,(\gamma^* N)\,(N^*\gamma) \neq 0$$

a podle Tvrzení 2 tedy nemá daná úloha (π) řešení.

c) Je-li $m < n$, pak systém $[MU(\alpha) + NU(\beta)]\,c = 0$ má nenulové řešení. Vzhledem k Tvrzení 1 tedy má-li daný okrajový problém (π) nějaké řešení, není toto řešení určeno jednoznačně. □

Do konce tohoto odstavce budeme předpokládat, že platí (16). T.zn., že pro každé $b \in L^1([\alpha,\beta],\mathbb{K}^n)$ je funkce (19) jediným řešením dané okrajové úlohy (π). Pravá strana vztahu (19) se snadno upraví do tvaru

$$\xi(t) = \int_\alpha^\beta G(t,s)b(s)\mathrm{d}s,$$

kde

$$G(t,s) = U(t)\left(-D^{-1}NU(\beta) + \left\{\begin{array}{ll} I, & s<t \\ 0, & s>t \end{array}\right\}\right)U^{-1}(s).$$

Protože $D^{-1}\,[MU(\alpha)+NU(\beta)] = I$, je $I - D^{-1}NU(\beta) = D^{-1}MU(\alpha)$ a tudíž

$$G(t,s) = U(t)D^{-1}\left\{\begin{array}{ll} MU(\alpha), & s<t \\ -NU(\beta), & s>t \end{array}\right\}U^{-1}(s).$$

Věta 22. *Nechť platí* (16). *Potom pro každé $b \in L^1([\alpha,\beta],\mathbb{K}^n)$ má úloha (π) právě jedno řešení*

(20) $$\xi(t) = \int_\alpha^\beta G(t,s)b(s)ds, t \in [\alpha,\beta],$$

kde

(21) $$G(t,s) = U(t)D^{-1}\left\{\begin{array}{ll} MU(\alpha), & s<t \\ -NU(\beta), & s>t \end{array}\right\}U^{-1}(s).$$

Definice 12. Funkce $G : [\alpha,\beta]\times[\alpha,\beta] \to \mathbb{K}^{n\times n}$ se nazývá *Greenova funkce úlohy* (π), jestliže je spojitá a ohraničená na množině $\Delta = [\alpha,\beta]\times[\alpha,\beta] \setminus \{(t,t); t \in [\alpha,\beta]\}$ a pro každé $b \in L^1([\alpha,\beta],\mathbb{K}^n)$ má úloha (π) jediné řešení ξ a toto řešení je dáno výrazem (20).

Věta 23. *Nechť platí* (16) *a nechť funkce* $G : [\alpha,\beta]\times[\alpha,\beta] \to \mathbb{K}^{n\times n}$ *je dána výrazem* (21)*. Potom* $G(t,s)$ *je Greenova funkce úlohy* (π) *a má dále tyto vlastnosti :*

(i) $G(t,s)$ *je spojitá a ohraničená na* $\Delta = [\alpha,\beta]\times[\alpha,\beta] \setminus \{(t,t); t \in [\alpha,\beta]\}$;

(ii) $G(s+,s) - G(s-,s) = \lim_{t\to s+} G(t,s) - \lim_{t\to s-} G(t,s) = I$ *pro každé* $s \in (\alpha,\beta)$;

(iii) $\frac{\partial}{\partial t}G(t,s) + A(t)G(t,s) = 0$ *platí pro každé* $s \in [\alpha,\beta]$ *a* $t \in [\alpha,\beta], t \neq s$;

(iv) $MG(\alpha,s) + NG(\beta,s) = 0$ *platí pro každé* $s \in (\alpha,\beta)$.

Důkaz. Zbývá dokázat, že funkce G má vlastnosti (i)-(iv). Vlastnosti (i) a (iii) plynou okamžitě z definice funkce G a z toho, že U je fundamentální matice řešení pro systém $\xi' + A(t)\xi = 0$. Dále, podle definice funkce $G(t,s)$ je pro každé $s \in (\alpha,\beta)$

$$G(s+,s) = U(s)D^{-1}MU(\alpha)U^{-1}(s)$$

a

$$G(s-,s) = -U(s)D^{-1}NU(\beta)U^{-1}(s)$$

a tudíž

$$G(s+,s) - G(s-,s) = U(s)D^{-1}\left(MU(\alpha) + NU(\beta)\right)U^{-1}(s) = I,$$

tj. platí (ii). Konečně dosazením

$$G(\alpha,s) = -U(\alpha)D^{-1}NU(\beta)U^{-1}(s)$$

a

$$G(\beta,s) = U(\beta)D^{-1}MU(\alpha)U^{-1}(s)$$

do výrazu $MG(\alpha,s)+NG(\beta,s)$ a využitím zřejmého vztahu

$$I - NU(\beta)D^{-1} = MU(\alpha)D^{-1}$$

dostaneme

$$\begin{aligned} &MG(\alpha,s)+NG(\beta,s) = \\ &\quad = \left[-MU(\alpha)D^{-1}NU(\beta)+NU(\beta)D^{-1}MU(\alpha)\right]U^{-1}(s) = \\ &\qquad = \left[NU(\beta)D^{-1}\left(MU(\alpha)+NU(\beta)\right)-NU(\beta)\right]U^{-1}(s) = 0. \end{aligned}$$

□

Mějme nyní libovolnou funkci $H:[\alpha,\beta]\times[\alpha,\beta]\to\mathbb{K}^{n\times n}$, která má také vlastnosti (ii)-(iv) z Věty 23. Potom z vlastnosti (iii) plyne okamžitě, že existují funkce $V(s)$ a $W(s)$ takové, že platí

$$H(t,s) = \begin{cases} U(t)V(s), & t<s \\ U(t)W(s), & t>s. \end{cases}$$

Potom je zřejmě pro každé $s\in(\alpha,\beta)$

$$H(s+,s)=U(s)W(s) \quad \text{a} \quad H(s-,s)=U(s)V(s)$$

a tudíž podle vlastnosti (ii) máme

$$I = H(s+,s)-H(s-,s) = U(s)\left(W(s)-V(s)\right),$$

tj.

$$W(s) = V(s)+U^{-1}(s).$$

Podle (iv) máme pro každé $s\in(\alpha,\beta)$

$$\begin{aligned} 0 &= MH(\alpha,s)+NH(\beta,s) = \left[MU(\alpha)+NU(\beta)\right]V(s)+NU(\beta)U^{-1}(s) = \\ &= DV(s)+NU(\beta)U^{-1}(s). \end{aligned}$$

Odtud ovšem plyne,že

$$V(s) = -D^{-1}NU(\beta)U^{-1}(s),$$

tj.

$$H(t,s)=G(t,s) \quad \text{pro všechna} \quad (t,s)\in[\alpha,\beta]\times[\alpha,\beta]\setminus\{(t,t);t\in[\alpha,\beta]\}.$$

Dokázali jsme tedy následující tvrzení:

Věta 24. *Jestliže platí (16) a jestliže funkce* $H : [\alpha,\beta] \times [\alpha,\beta] \to \mathbb{K}^{n\times n}$, *má vlastnosti (ii)-(iv) z Věty 23 (na místě* $G(t,s)$*), pak* $H(t,s) = G(t,s)$ *platí pro všechna* $(t,s) \in \Delta = [\alpha,\beta] \times [\alpha,\beta] \setminus \{(t,t); t \in [\alpha,\beta]\}$.

Položme nyní

$$H(t,s) = -G^*(s,t) \tag{22}$$

t.zn., že

$$H(t,s) = U^{-1*}(t) \left\{ \begin{array}{ll} -U^*(\alpha)M^*D^{*-1}, & t < s \\ U^*(\beta)N^*D^{*-1}, & t > s \end{array} \right\} U^*(s).$$

Snadno se ověří, že následující vztahy jsou pravdivé:

$$\begin{aligned} H(s+,s) - H(s,s-) = {} & U^{-1*}(s)U^*(\beta)N^*D^{-1*}U^*(s) + \\ & + U^{-1*}(s)U^*(\alpha)M^*D^{-1*}U^*(s) = I, \quad s \in (\alpha,\beta), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}H(t,s) - A^*(t)H(t,s) = 0, \quad s \in [\alpha,\beta], t \in [\alpha,\beta], t \neq s,$$

$$\begin{aligned} H(\alpha,s) = & - U^{-1*}(\alpha)U^*(\alpha)M^*D^{-1*}U^*(s) = -M^*\Lambda^*(s), \\ & \Lambda(s) = U(s)D^{-1}, \quad s \in (\alpha,\beta), \\ H(\beta,s) = & N^*\Lambda^*(s), \quad s \in (\alpha,\beta). \end{aligned}$$

Vzhledem k definici matic $P, Q, \widetilde{P}, \widetilde{Q}$ a speciálně vzhledem ke vztahům (13) tedy platí také

$$P^*H(\alpha,s) + Q^*H(\beta,s) = 0, \quad s \in (\alpha,\beta).$$

Dále

$$\det\left[P^*U^{-1*}(\alpha) + Q^*U^{-1*}(\beta)\right] \neq 0.$$

(Kdyby totiž bylo pro nějaké $c \in \mathbb{K}^n$

$$\left[P^*U^{-1*}(\alpha) + Q^*U^{-1*}(\beta)\right] c = 0,$$

bylo by také

$$\left[c^*U^{-1}(\alpha), c^*U^{-1}(\beta)\right]\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = 0$$

a odtud by podobně jako v důkaze Věty ze strany 12 plynulo, že existuje $d \in \mathbb{K}^n$ takové, že platí

$$c^*U^{-1}(\alpha) = -d^*M \quad \text{a} \quad c^*U^{-1}(\beta) = d^*N,$$

tj.

$$d^*\left[MU(\alpha) + NU(\beta)\right] = 0.$$

To je však podle předpokladu (16) možné jedině tehdy, když $d = 0$ neboli $c = 0$.)

Podle Věty 24 je tedy funkce $H(t,s)$ definovaná vztahy (21) a (22) Greenova funkce úlohy

$$\zeta' - A^*(t)\zeta = b(t),$$

$$P^*\zeta(\alpha) + Q^*\zeta(\beta) = 0,$$

tj. pro každou funkci $b \in L^1([\alpha,\beta], \mathbb{K}^n)$ má úloha (π^*) právě jedno řešení $\zeta(t)$ a toto řešení je dáno výrazem

$$\zeta(t) = -\int_\alpha^\beta G^*(s,t)b(s)\mathrm{d}s, \quad , t \in [\alpha,\beta].$$

Odtud už okamžitě plyne následující tvrzení.

Věta 25. *Nechť platí* (16) *a nechť funkce* $G(t,s)$ *je Greenova funkce úlohy* (π). *Potom* $G^*(s,t)$ *je Greenova funkce úlohy* (π^*)

(23) $$-\zeta' + A^*(t)\zeta = b(t),$$

(24) $$P^*\zeta(\alpha) + Q^*\zeta(\beta) = 0.$$

E. Okrajové úlohy pro skalární rovnice n-tého řádu jako speciální případ okrajových úloh pro vektorové rovnice.

Okrajovou úlohu (P) (tj. (1), (2)) můžeme přepsat do tvaru (π) jestliže položíme

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{bmatrix}, b(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{f(t)}{a_0(t)} \end{bmatrix} \tag{25}$$

a

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \\ \frac{a_n(t)}{a_0(t)} & \frac{a_{n-1}(t)}{a_0(t)} & \frac{a_{n-2}(t)}{a_0(t)} & \dots & \frac{a_3(t)}{a_0(t)} & \frac{a_2(t)}{a_0(t)} & \frac{a_1(t)}{a_0(t)} \end{bmatrix}. \tag{26}$$

Adjungovaný systém $-\zeta' + A^*(t)\zeta = 0$ má tedy v tomto speciálním případě tvar

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} -\zeta_1' & & & + & \overline{\frac{a_n(t)}{a_0(t)}}\zeta_n & = 0 \\ -\zeta_2' & - & \zeta_1 & + & \overline{\frac{a_{n-1}(t)}{a_0(t)}}\zeta_n & = 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -\zeta_n' & - & \zeta_{n-1} & + & \overline{\frac{a_1(t)}{a_0(t)}}\zeta_n & = 0. \end{array} \right. \tag{27}$$

Označme

$$y(t) = \frac{\zeta_n(t)}{\overline{a_0(t)}}.$$

Potom $\zeta = [\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n]^T$ je řešením systému (27) (tj. $-\zeta' + A^*(t)\zeta = 0$) právě tehdy, když

(28)

$$\begin{aligned}
\zeta_n &= (\overline{a_0}y) \\
\zeta_{n-1} &= -(\overline{a_0}y)' + (\overline{a_1}y) \\
\zeta_{n-2} &= (\overline{a_0}y)'' - (\overline{a_1}y)' + (\overline{a_2}y) \\
\vdots \quad & \vdots \qquad \ddots \\
\zeta_1 &= (-1)^{n-1}(\overline{a_0}y)^{(n-1)} + (-1)^{n-2}(\overline{a_1}y)^{(n-2)} + \ldots + (\overline{a_{n-1}}y)
\end{aligned}$$

a

$$(\ell^+(y))(t) = (-1)^n(\overline{a_0}y)^{(n)}(t) + (-1)^{n-1}(\overline{a_1}y)^{(n-1)}(t) + \cdots + (\overline{a_n}y)(t) = 0.$$

Označíme-li tedy

(29) $$(\ell^+_{n-j}(y))(t) = \sum_{r=0}^{n-j} (\overline{a_{n-j-r}}y)^{(r)}(t), \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

dostaneme následující tvrzení:

Lemma 12. *Nechť platí (26). Potom funkce $\zeta : [\alpha, \beta] \to \mathbb{K}^n$ je řešením rovnice $-\zeta' + A^*(t)\zeta = 0$ na intervalu $[\alpha, \beta]$ právě tehdy, když*

$$\zeta = \begin{bmatrix} \ell^+_{n-1}y \\ \ell^+_{n-2}y \\ \vdots \\ \ell^+_0 y \end{bmatrix}$$

(viz (29)) a

$$y = \frac{\zeta_n}{\overline{a_0}}$$

je řešením rovnice (4), tj.

$$\ell^+(y) = 0.$$

Lemma 13. *Nechť platí* (26). *Nechť* $\zeta : [\alpha, \beta] \to \mathbb{K}^n$ *je řešení diferenciální rovnice* $-\zeta' + A^*(t)\zeta = 0$ *na intervalu* $[\alpha, \beta]$, $y = \frac{\zeta_n}{\overline{a}_0}$ *a nechť vektorová funkce* $\eta : [\alpha, \beta] \to \mathbb{K}^n$ *je přiřazena k* y *vztahem* (31). *Potom* $P^*\zeta(\alpha) + Q^*\zeta(\beta) = 0$ *platí právě tehdy, když* $\widetilde{y} = \begin{bmatrix} \eta(\alpha) \\ \eta(\beta) \end{bmatrix} \in \left(\widetilde{E}\mathcal{X}\right)^{\perp}$, *kde* E *a* $\widetilde{E}$ *mají stejný význam jako ve Větě 1.*

Důkaz. Pro $j = 1, 2, \dots, n$ je

$$\begin{aligned}
\ell^+_{n-j} y &= \sum_{r=0}^{n-j} (-1)^r (\overline{a_{n-j-r}} y)^{(r)} = \\
&= \sum_{r=0}^{n-j} (-1)^r \left(\sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} \overline{a_{n-j-r}}^{(r-s)} y^{(s)} \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{s=0}^{n-j} \left(\sum_{r=s}^{n-j} (-1)^r \binom{r}{s} \overline{a_{n-j-r}}^{(r-s)} \right) y^{(s)} = \\
&= \sum_{i=1}^{n-j+1} \left(\sum_{r=i-1}^{n-j} (-1)^r \binom{r}{i-1} \overline{a_{n-j-r}}^{(r-i+1)} \right) y^{(i-1)} = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=i+j-1}^{n-j} (-1)^{k-j} \binom{k-j}{i-1} \overline{a_{n-k}}^{(k-j-i+1)} \right) y^{(i-1)} = \\
&= \sum_{i=1}^{n-j+1} E_{i,j} y^{(i-1)},
\end{aligned}$$

kde $E_{i,j}$ má stejný význam jako ve Větě 1 a jejím důkazu (viz strany 2-3 tohoto textu).

T.zn., že

$$\zeta^*(t) = \eta^*(t) E(t), \tag{30}$$

kde E má stejný význam jako ve Větě 1 a

$$\eta(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} \tag{31}$$

(viz str.1).

Podle (30) je

$$\zeta^*(\alpha)P + \zeta^*(\beta)Q = 0$$

právě tehdy, když je

$$\eta^*(\alpha)E(\alpha)P + \eta^*(\beta)E(\beta)Q = 0$$

neboli

$$\widetilde{y}^*\widetilde{E}\begin{bmatrix} -P \\ Q \end{bmatrix} = 0.$$

Protože podle definice matic P, Q tvoří sloupce matice

$$\begin{bmatrix} -P \\ Q \end{bmatrix}$$

bázi prostoru $\mathcal{X}$, plyne odtud už důkaz lemmatu. □

Z lemmat 12 a 13 okamžitě plyne následující věta.

Věta 26. *Funkce* $\zeta : [\alpha, \beta] \to \mathbb{K}^n$ *je řešením úlohy* (π_0^*) *právě tehdy, když*

$$\zeta = \begin{bmatrix} \ell_{n-1}^+ y \\ \ell_{n-2}^+ y \\ \vdots \\ \ell_0^+ y \end{bmatrix}$$

a

$$y = \frac{\zeta_n}{\overline{a_0}}$$

je řešením úlohy (P_0^*)*, tj.*

$$\ell^+(y) = 0, \widetilde{y} \in \left(\widetilde{E}\mathcal{X}\right)^{\perp}.$$

Poznaámka. Je zřejmě, že z Věty 26 vyplývá např., že Věta 4 je důsledkem Věty 18 a Věta 8 je důsledkem Věty 21.

Nechť platí (16), tj.

$$m = n \quad \text{a} \quad \det [MU(\alpha) + NU(\beta)] \neq 0.$$

Potom podle Věty 22 (viz též Větu 23) existuje Greenova funkce $G : [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta] \to \mathbb{K}^{n \times n}$. úlohy (π). Pro každou funkci $b \in L^1([\alpha, \beta], \mathbb{K}^n)$ má tedy úloha (π) jediné řešení $\xi(t)$ a toto řešení je dáno výrazem (20). Jestliže $G_{i,j}(t,s)$ značí element matice $G(t,s)$ v i-tém řádku a j-tém sloupci, pak za našich předpokladů (25) a (26) je pro každou funkci $f \in L^1$ funkce

$$x(t) = \xi_1(t) = \int_\alpha^\beta \frac{G_{1,n}(t,s)}{a_0(s)} f(s) \mathrm{d}s, \quad t \in [\alpha, \beta]$$

jediným řešením dané úlohy (P). T.zn., že funkce

$$g(t,s) = \frac{G_{1,n}(t,s)}{a_0(s)}, \quad (t,s) \in [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta]$$

je Greenovou funkcí úlohy (P) a Věta 9 je důsledkem Věty 22 (nebo také Věty 23).

Z vět 22,23 a 26 dále plyne i následující tvrzení

Věta 27. *Nechť platí (16). Potom existuje Greenova funkce $g(t,s)$ úlohy (P) a tato funkce má navíc následující vlastnosti*

(i) *Je-li $n = 1$, pak je g spojitá a ohraničená na $\Delta = [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta] \setminus \{(t,t); t \in [\alpha, \beta]\}$;*

Je-li $n > 1$, pak jsou parciální derivace $\frac{\partial^j}{\partial t^j} g, j = 0, 1, \ldots, n-2$ spojité a ohraničené na $[\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta]$ a parciální derivace $\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} g$ je spojitá a ohraničená na $\Delta = [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta] \setminus \{(t,t); t \in [\alpha, \beta]\}$;

(ii)

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} g(s+, s) - \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} g(s-, s) = \frac{1}{a_0(s)} \quad \text{pro každé} \ \ s \in (\alpha, \beta);$$

(iii) $\ell(g(., s)) = 0$ *pro každé* $s \in [\alpha, \beta]$ *a* $t \in [\alpha, \beta], t \neq s$;

(iv) $\widetilde{g}(., s) \in \mathfrak{X}$ *pro každé* $s \in [\alpha, \beta]$.

Následující věta je důsledkem Věty 24.

Věta 28. *Nechť platí (16) a nechť funkce* $h : [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta] \to \mathbb{K}$ *splňuje následující podmínky*

(i) *Je-li* $n = 1$, *pak je* h *spojitá a ohraničená na* $\Delta = [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta] \setminus \{(t, t); t \in [\alpha, \beta]\}$;

Je-li $n > 1$, *pak jsou parciální derivace* $\frac{\partial^j}{\partial t^j} h, j = 0, 1, \dots, n-2$ *spojité a ohraničené na* $[\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta]$ *a parciální derivace* $\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} h$ *je spojitá a ohraničená na* $\Delta = [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta] \setminus \{(t, t); t \in [\alpha, \beta]\}$;

(ii)

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} h(s+, s) - \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} h(s-, s) = \frac{1}{a_0(s)} \quad \textit{pro každé} \ \ s \in (\alpha, \beta);$$

(iii) $\ell(h(., s)) = 0$ *pro každé* $s \in [\alpha, \beta]$ *a* $t \in [\alpha, \beta], t \neq s$;

(iv) $\widetilde{h}(., s) \in \mathcal{X}$ *pro každé* $s \in [\alpha, \beta]$.

Potom platí

$$\begin{aligned} h(t,s) &= g(t,s) && \text{na} \ \ \Delta, \quad \textit{je-li } n = 1 \\ \frac{\partial^j h}{\partial t^j}(t,s) &= \frac{\partial^j g}{\partial t^j}(t,s), j = 0, 1, \dots, n-2, && \text{na} \ \ [\alpha,\beta] \times [\alpha, \beta] \end{aligned}$$

a

$$\frac{\partial^{n-1} h}{\partial t^{n-1}}(t,s) = \frac{\partial^{n-1} g}{\partial t^{n-1}}(t,s), \qquad \text{na} \ \ \Delta \quad je - li \ n > 1.$$

Poznaámka. Snadno se nahlédne, že Věta 10 je důsledkem vět 25, 26 a 28.

F. Příklady.

Příklad 1. Vyšetřujme okrajovou úlohu

$$x'' - 3x' + 2x = f(t), x(0) = x'(0), x(1) = x'(1).$$

Jest

$$\begin{aligned} m &= n = 2 \\ \ell(x) &= x'' - 3x' + 2x, \\ \ell^+(y) &= y'' + 3y' + 2y, \end{aligned}$$

$$\mathcal{X} = \left\{z \in \mathbb{K}^4; z_1 = z_2, z_3 = z_4\right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ a \\ b \\ b \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{K} \right\}.$$

T.zn.,že $\dim \mathcal{X} = n = 2$. Dále

$$\int_\alpha^\beta \overline{y}\ell(x)\mathrm{d}t - \int_\alpha^\beta \overline{\ell^+(y)}x\mathrm{d}t = [\overline{y}x' - \overline{y}'x - 3\overline{y}x]_0^1 =$$

$$= [\, y(0), \quad y'(0), \quad y(1), \quad y'(1)\,] \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x'(0) \\ x(1) \\ x'(1) \end{bmatrix} = \widetilde{y}\widetilde{E}\widetilde{x},$$

kde

$$\widetilde{E} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tudíž

$$\widetilde{E}\mathcal{X} = \left\{ \widetilde{E} \begin{bmatrix} a \\ a \\ b \\ b \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{K} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 2a \\ a \\ -2b \\ -b \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{K} \right\}$$

a

$$\mathcal{Y} = \left(\widetilde{E}\mathcal{X}\right)^\perp =$$

$$= \left\{v \in \mathbb{K}^4; a(2v_1 + v_2) - b(2v_3 + v_4) = 0 \quad \text{pro všechna} \quad a, b \in \mathbb{K}\right\} =$$

$$= \left\{v \in \mathbb{K}^4; 2v_1 + v_2 = 0, 2v_3 + v_4 = 0\right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ -2a \\ b \\ -2b \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{K} \right\}.$$

Speciálně, $\dim\mathcal{Y} = 2$ a $\widetilde{y} \in \mathcal{Y}$ právě tehdy, když

$$2y(0) + y'(0) = 0 \quad \text{a} \quad 2y(1) + y'(1) = 0.$$

Funkce y je řešením formálně adjungované rovnice

$$y'' + 3y' + 2y = 0,$$

právě tehdy, když existují konstanty $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$ takové, že

$$y(t) = c_1 \mathrm{e}^{-t} + c_2 \mathrm{e}^{-2t} \quad \text{na} \ [\alpha, \beta].$$

Odtud plyne, že pro prostor $\mathcal{N}(L^*)$ řešení úlohy

$$y'' + 3y' + 2y = 0, \quad 2y(0) + y'(0) = 0, \quad 2y(1) + y'(1) = 0$$

adjungované k dané úloze platí

$$\mathcal{N}(L^*) = \left\{ c\mathrm{e}^{-2t}; c \in \mathbb{K} \right\}.$$

Daná úloha má tedy řešení právě tehdy, když pravá strana f splňuje podmínku

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t = 0.$$

Příklad 2. Nechť jako v příkladě 1 $\ell(x) = x'' - 3x' + 2x$ (a tudíž také $\ell^+(y) = y'' + 3y' + 2y$). Nechť ale nyní

$$\mathcal{X} = \left\{ z \in \mathbb{K}^4; z_1 = z_3, z_2 = z_4 \right\},$$

tj. okrajové podmínky mají tvar

$$x(0) = x(1), \quad x'(0) = x'(1).$$

Matice $\widetilde{E}$ je stejná jako v příkladě 1 a

$$\widetilde{E}\mathcal{X} = \left\{ \begin{bmatrix} 3a - b \\ a \\ -3a + b \\ -b \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{K} \right\},$$

$$\mathcal{Y} = \left\{ v \in \mathbb{K}^4; 3v_1 + v_2 - 3v_3 - v_4 = 0, -v_1 + v_3 = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ v \in \mathbb{K}^4 ; v_2 = v_4, v_1 = v_3 \right\}.$$

Adjungovanou okrajovou úlohou je tedy úloha

$$y'' + 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = y(1), \quad , y'(0) = y'(1).$$

Dosazením obecného řešení

$$y(t) = c_1 \mathrm{e}^{-t} + c_2 \mathrm{e}^{-2t}, \quad t \in [\alpha, \beta]$$

rovnice $y'' + 3y' + 2y = 0$ do okrajových podmínek

$$y(0) = y(1), \quad , y'(0) = y'(1)$$

dostaneme, že y je řešením adjungované okrajové úlohy právě tehdy, když c_1, c_2 vyhovují soustavě rovnic

$$\begin{array}{ccccc} (1 - \mathrm{e}^{-1})c_1 & + & (1 - \mathrm{e}^{-2})c_2 & = & 0 \\ (1 - \mathrm{e}^{-1})c_1 & + & 2(1 - \mathrm{e}^{-2})c_2 & = & 0 \end{array},$$

tj. $c_1 = c_2 = 0$, tj. adjungovaná úloha má pouze triviální řešení $y(t) \equiv 0$. Daná úloha má tedy řešení pro každou pravou stranu f.

Dále, protože je $\dim \mathcal{X} = \dim \mathcal{Y} = 2$ a $\mathcal{N}(L^*) = \{0\}$, je také $\mathcal{N}(L) = \{0\}$. T.zn., že pro danou úlohu existuje Greenova funkce $g(t,s)$. Podle Věty 27, pro každé $s \in (0,1)$ je $g(.,s)$ řešením rovnice $\ell(g(.,s)) = 0$ na intervalech $[0,s)$ a $(s,1]$. Greenovu funkci tedy budeme hledat ve tvaru

$$g(t,s) = \begin{cases} a_1(s)\mathrm{e}^t + b_1(s)\mathrm{e}^{2t}, & \text{je-li } t < s, \\ a_2(s)\mathrm{e}^t + b_2(s)\mathrm{e}^{2t}, & \text{je-li } t > s. \end{cases}$$

Podle Věty 28 je $g(t,s)$ jednoznačně určena vlastnostmi (i)-(iv) z Věty 27. Vlastnost (iii) jsme již využili. Podle (i) platí pro $s \in (0,1)$

$$\text{(F1)} \qquad a_1(s)\mathrm{e}^s + b_1 \mathrm{e}^{2s} = a_2(s)\mathrm{e}^s + b_2 \mathrm{e}^{2s}.$$

Jelikož

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t,s) = \begin{cases} a_1(s)\mathrm{e}^t + 2b_1(s)\mathrm{e}^{2t}, & \text{je-li } t < s, \\ a_2(s)\mathrm{e}^t + 2b_2(s)\mathrm{e}^{2t}, & \text{je-li } t > s, \end{cases}$$

dostáváme dále podle (ii) rovnici

$$\text{(F2)} \qquad a_2(s)\mathrm{e}^s + 2b_2 \mathrm{e}^{2s} - a_1(s)\mathrm{e}^s - 2b_1 \mathrm{e}^{2s} = 1.$$

Dosazením za $g(t,s)$ a $\frac{\partial}{\partial t}g(t,s)$ do okrajových podmínek

$$g(0,s) = g(1,s), \quad \frac{\partial}{\partial t}g(0,s) = \frac{\partial}{\partial t}g(1,s)$$

dostaneme konečně další dvě rovnice pro koeficienty $a_1(s)$,$a_2(s)$,$b_1(s)$,$b_2(s)$

$$\text{(F3)} \qquad \begin{array}{rcrcrcr} a_1(s) & + & b_1(s) & = & a_2(s)\mathrm{e} & + & b_2(s)\mathrm{e}^2 \\ a_1(s) & + & 2b_1(s) & = & a_2(s)\mathrm{e} & + & 2b_2(s)\mathrm{e}^2. \end{array}$$

Z rovnic (F1)-(F2) plyne

$$b_2(s) = b_1(s) + \mathrm{e}^{-2s}$$
$$a_2(s) = a_1(s) - \mathrm{e}^{-s}.$$

Po dosazení do rovnic (F3) dostáváme systém pro $a_1(s), b_1(s)$

$$\begin{array}{rcrcl} (1-\mathrm{e})a_1(s) & + & (1-\mathrm{e}^2) & = & \mathrm{e}^{1-s}(\mathrm{e}^{1-s}-1) \\ (1-\mathrm{e})a_1(s) & + & 2(1-\mathrm{e}^2) & = & \mathrm{e}^{1-s}(2\mathrm{e}^{1-s}-1), \end{array}$$

jehož jediným řešením je

$$a_1(s) = -\frac{\mathrm{e}^{1-s}}{1-\mathrm{e}}, \quad b_1(s) = \frac{\mathrm{e}^{2(1-s)}}{1-\mathrm{e}^2}.$$

Odtud plyne

$$a_2(s) = -\frac{\mathrm{e}^{-s}}{1-\mathrm{e}}, \quad b_2(s) = \frac{\mathrm{e}^{-2s}}{1-\mathrm{e}^2}$$

a tudíž

$$g(t,s) = \begin{cases} -\mathrm{e}^t\frac{\mathrm{e}}{1-\mathrm{e}}\mathrm{e}^{-s} + \mathrm{e}^{2t}\frac{\mathrm{e}^2}{1-\mathrm{e}^2}\mathrm{e}^{-2s}, & \text{je-li } t < s, \\ -\mathrm{e}^t\frac{\mathrm{e}}{1-\mathrm{e}}\mathrm{e}^{-s} + \mathrm{e}^{2t}\frac{1}{1-\mathrm{e}^2}\mathrm{e}^{-2s}, & \text{je-li } t > s. \end{cases}$$

Příklad 3. Pro úlohu

$$u'' + u = f, \quad u(0) = u(\pi) = 0$$

máme

$$\mathcal{X} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ b \end{bmatrix}; a,b \in \mathbb{K} \right\}, \quad \dim\mathcal{X} = 2 \quad \text{a} \quad \mathcal{N}(L) = \{b\sin t; b \in \mathbb{K}\} \neq \{0\}.$$

(Obecně řešení u rovnice $u''+u = 0$ má tvar $u(t) = a\cos t + b\sin t$, $a, b \in \mathbb{K}$.)

Daná úloha tudíž nemá Greenovu funkci.

Příklad 4. Pro úlohu

$$u'' + u = f, \quad u(0) = u'(0), \quad u(\pi) = u'(\pi)$$

máme

$$\mathcal{X} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ a \\ b \\ b \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{K} \right\},$$

$$\dim \mathcal{X} = 2$$

a

$$\mathcal{N}(L) = \{a(\sin t + \cos t); a \in \mathbb{K}\} \neq \{0\}.$$

Daná úloha tudíž nemá Greenovu funkci.

Příklad 5. Pro úlohu

$$u'' + u = f, \quad u(0) = u(\pi), \quad u'(0) = u'(\pi)$$

máme

$$\mathcal{X} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ a \\ b \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{K} \right\}, \quad \dim \mathcal{X} = 2 \quad \text{a} \quad \mathcal{N}(L) = \{0\}.$$

Tato úloha tudíž má Greenovu funkci. Podle Věty 28 má tato Greenova funkce $g(t,s)$ tvar

$$g(t,s) = \begin{cases} a_1(s)\cos t + b_1(s)\sin t, & \text{je-li } t < s, \\ a_2(s)\cos t + b_2(s)\sin t, & \text{je-li } t > s, \end{cases}$$

kde koeficienty $a_1(s), b_1(s), a_2(s), b_2(s)$ splňují rovnice

$$\begin{array}{rcrcl} (\cos s)(a_1(s) - a_2(s)) & + & (\sin s)(b_1(s) - b_2(s)) & = & 0, \\ (\sin s)(a_1(s) - a_2(s)) & - & (\cos s)(b_1(s) - b_2(s)) & = & 1 \end{array}$$

a

$$\begin{array}{rcrcl} a_1(s) & + & a_2(s) & = & 0, \\ b_1(s) & + & b_2(s) & = & 0. \end{array}$$

Odtud plyne, že

$$g(t,s) = \begin{cases} \frac{\sin(s-t)}{2}, & \text{je-li } t < s, \\ \frac{\sin(t-s)}{2}, & \text{je-li } t > s. \end{cases}$$

Milan Tvrdý, MÚ AVČR, Žitná 25,115 67 Praha 1

E-mail address: tvrdy@math.cas.cz