Stieltjesův integrál

(Kurzweilova teorie)

Milan Tvrdý

Obsah

Kapitola 1

Úvod

1.1 Předmluva

Tento text je věnován teorii Stieltjesova integrálu a některým jeho aplikacím.

****

1.2 Křivkové integrály

KŘIVKOVÝ INTEGRÁL PRVNÍHO DRUHU.

Nechť φ je spojité zobrazení uzavřeného a ohraničeného intervalu $[a,b]$ do třírozměrného vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$. Množina bodů

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)) \in \mathbb{R}^3,$$

kde t probíhá interval $[a,b]$, se nazývá *cesta* v $\mathbb{R}^3$ definovaná na intervalu $[a,b]$ a značíme ji také symbolem φ. *Délkou cesty* φ rozumíme délku křivky definované grafem $\{\varphi(t) : t \in [a,b]\}$ funkce φ a značíme ji symbolem $\Lambda(\varphi; [a,b])$.

Buď φ cesta v $\mathbb{R}^3$ definovaná na intervalu $[a,b]$, jejíž délka je konečná. Předpokládejme dále, že zobrazení $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ je prosté. Představme si, že φ je drát a $f(x) \in \mathbb{R}$ je jeho hustota v bodě x. Hmota části drátu odpovídající intervalu $[c,d] \subset [a,b]$ je tedy přibližně vyjádřena číslem $f(\varphi(\xi))\,\Lambda(\varphi; [c,d])$. kde ξ je nějaký bod intervalu $[c,d]$.

Nechť $\sigma_j,\ j = 0, 1, \dots, m$, jsou body intervalu $[a,b]$ takové, že

$$a = \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_m = b\,.$$

Množinu bodů $\{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ s těmito vlastnostmi budeme nazývat dělení intervalu $[a,b]$ a značit $\boldsymbol{\sigma}$. Dále, v každém intervalu $[\sigma_{j-1}, \sigma_j],\ j = 1, 2, \dots, m$, vyberme nějaký bod ξ_j. Tento bod budeme nazývat *značka intervalu* $[\sigma_{j-1}, \sigma_j]$, vektor $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$ je *vektor značek dělení* $\boldsymbol{\sigma}$ a značíme ho symbolem $\boldsymbol{\xi}$.

Položme $v(t)=\Lambda(\varphi;[a,t])$ pro $t\in[a,b]$. Potom součet

$$\sum_{j=1}^{m} f(\varphi(\xi_j))\,[v(\sigma_j)-v(\sigma_{j-1})]$$

aproximuje hmotu celého drátu. Je přirozené očekávat, že tato aproximace bude tím přesnější, čím bude dělení jemnější, tj. čím více bodů bude obsahovat. Vede-li takový limitní proces k jednoznačně určené limitní veličině, bude tato veličina rovna hmotě celého drátu a budeme ji značit

$$\int_\varphi f\,\mathrm{d}\,s \quad \text{nebo také} \quad \int_a^b f(\varphi)\,\mathrm{d}\,v\,.$$

První symbol se nazývá *křivkový integrál prvního druhu* funkce f podél cesty φ, zatímco druhý symbol představuje ekvivalentní pojem *Stieltjesova integrálu* skalární funkce $f(\varphi)$ vzhledem ke skalární funkci $v(t)=\Lambda(\varphi;[a,t])$.

KŘIVKOVÝ INTEGRÁL DRUHÉHO DRUHU.

Mějme hmotný bod, který se pohybuje po cestě φ a v okamžiku $t\in[a,b]$ se nachází v bodě $\varphi(t)$. Dále nechť

$$f:\ x\in\varphi\subset\mathbb{R}^3\to f(x)=(f_1(x),f_2(x),f_3(x))\in\mathbb{R}^3$$

je silové vektorové pole v $\mathbb{R}^3$. Potom $f(\varphi(t))\in\mathbb{R}^3$ je vektor síly, která na tento hmotný bod působí v čase t.

Nechť $\boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_0,\sigma_1,\dots,\sigma_m\}$ je dělení intervalu $[a,b]$ a $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m)$ je vektor jeho značek. Potom skalární součin

$$f(\varphi(\xi_j))\cdot\big[\varphi(\alpha_j)-\varphi(\alpha_{j-1})\big]=\sum_{k=1}^{3} f_k(\varphi(\xi_j))\,\big[\varphi_k(\sigma_j)-\varphi_k(\sigma_{j-1})\big]$$

představuje práci, kterou vykoná síla $f(\varphi(\xi_j))$, posune-li se náš hmotný bod z bodu $\varphi(\alpha_{j-1})$ do bodu $\varphi(\alpha_j)$. Součet

$$\sum_{j=1}^{m} f(\varphi(\xi_j))\cdot\big[\varphi(\alpha_j)-\varphi(\alpha_{j-1})\big]=\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{m} f_k(\varphi(\xi_j))\,\big[\varphi_k(\alpha_j)-\varphi_k(\alpha_{j-1})\big]\,.$$

tedy aproximuje práci, kterou vykoná silové pole f při přesunu daného hmotného bodu po cestě φ od okamžiku $t=a$ do okamžiku $t=b$. Jestliže se hodnoty těchto součtů budou při zjemňování dělení σ " libovolně blížit" k nějaké jednoznačně určené limitní hodnotě, bude tato hodnota rovna velikosti práce, kterou vykoná silové pole f při přesunu daného hmotného bodu po cestě φ od okamžiku $t=a$ do okamžiku $t=b$. Budeme ji značit

$$\int_{\varphi} f \quad \text{nebo také} \quad \int_a^b f(\varphi)\,\mathrm{d}\,\varphi = \sum_{k=1}^{3} \int_a^b f_k(\varphi)\,\mathrm{d}\,\varphi_k\,.$$

První symbol se nazývá *křivkový integrál druhého druhu* vektorové funkce f podél cesty φ, zatímco druhý symbol představuje ekvivalentní pojem *Stieltjesova integrálu* (složené) vektorové funkce $f(\varphi):[a,b]\to\mathbb{R}^3$ vzhledem k vektorové funkci $\varphi:\,[a,b]\to\mathbb{R}^3$.

****

1.3 Úmluvy a označení

(i) $\mathbb{N}$ je *množina přirozených čísel* (mezi něž nezahrnujeme nulu). $\mathbb{R}$ je *množina reálných čísel*, $\mathbb{R}^m$ je prostor reálných $m-$vektorů ($m-$tic reálných čísel). Je-li $x\in\mathbb{R}^m$, jeho i–tý prvek značíme x_i. Píšeme $x=\big(x_i\big)_{i=1,\ldots,m}$ nebo, nehrozí-li nedorozumění, $x=\big(x_i\big)$. Norma v $\mathbb{R}^m$ je definována předpisem

$$x=\big(x_i\big)_{i=1,\ldots,m}\in\mathbb{R}^m \to |x| = \sum i{=}1^m|x_i|\,.$$

(ii) $\{x\in A: B(x)\}$ značí, jak je zvykem, množinu všech prvků x množiny A, které vyhovují podmínce $B(x)$.

Pro dané množiny P, Q symbolem $P\setminus Q$ značíme množinu

$$P\setminus Q = \{x\in P: x\notin Q\}\,.$$

Jak je zvykem $P\subset Q$ znamená, že P je podmnožina množiny Q (každý prvek množiny P je též prvkem množiny Q).

Nehrozí-li nedorozumění, pak v případě nekonečných či konečných (tj. nejvýše spočetných) posloupností píšeme $\{x_n\}$ místo $\{x_n\in\mathbb{R}: n\in\mathbb{N}\}$ resp. $\{x_n\in\mathbb{R}: n=1,2,\ldots,m\}$. Řekneme, že posloupnost $\{x_k\}$ je *prostá* jestliže se v ní žádný prvek neopakuje $(x_k\neq x_n$ jestliže $k\neq n)$.

(iii) Je-li $-\infty<a<b<\infty$, pak $[a,b]$ značí *uzavřený* interval $\{t\in\mathbb{R}: a\le t\le b\}$ a (a,b) je *otevřený* interval $\{t\in\mathbb{R}: a<t<b\}$. Příslušné *polouzavřené*

(resp. *polootevřené* intervaly značíme $[a, b)$ a $(a, b]$. Ve všech těchto případech nazýváme body a, b krajní body intervalu. Jestliže $a = b \in \mathbb{R}$ říkáme, že interval $[a, b]$ *degeneruje* na jednobodovou množinu a píšeme $[a, b] = [a]$. Je-li I interval (uzavřený resp. otevřený resp. polootevřený) s krajními body a, b značíme symbolem $|I| = |b - a|$ jeho délku ($|[a]| = 0$).

(iv) Pro dané $A \in \mathbb{R}$ značíme $A^+ = \max(A, 0)$ a $A^- = \max(-A, 0)$. (Připomeňme, že platí $A^+ + A^- = |A|$ a $A^+ - A^- = A$ pro každé $A \in \mathbb{R}$.) Dále,

$$\operatorname{sign}(A) = \begin{cases} 1 & \text{když } A > 0\,, \\ -1 & \text{když } A < 0\,, \\ 0 & \text{když } A = 0\,. \end{cases}$$

(v) Pro danou množinu $M \subset \mathbb{R}$ symbolem χ_M značíme její charakteristickou funkci, tj. funkci $\mathbb{R} \to \{0, 1\}$ definovanou předpisem

$$\chi_M(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \in M\,, \\ 0 & \text{pro } t \notin M\,. \end{cases}$$

(vi) Supremum (resp. infimum) množiny M značíme $\sup M$ $(resp. \inf M)$. Pokud $m = \sup M \in M$ $(m = \inf M \in M)$ (tj. m je maximum (resp. minimum) množiny M), píšeme též $m = \max M$ (resp. $m = \min M$).) Je-li M množina všech hodnot $F(x)$ nějakého zobrazení F, kde proměnná x probíhá množinu B $(M = \{F(x) : x \in B\})$, píšeme též $\sup\limits_{x \in A} F(x)$. Podobné pravidlo platí i pro infimum resp. maximum resp. minimum.

(vii) Zápis $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ znamená, že funkce f je definována pro každé $x \in [a, b]$ a každá její hodnota $f(x)$ je (konečné) reálné číslo. Pro libovolné funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ a $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ a reálné číslo λ definujeme

$$f + g : x \in [a, b] \to f(x) + g(x) \ \text{ a } \ \lambda\, f : x \in [a, b] \to \lambda\, f(x)\,.$$

(viii) Pro libovolnou funkci $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ značíme

$$\|f\| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|\,.$$

(Není-li funkce f ohraničená na intervalu $[a, b]$, pak ovšem $\|f\| = \infty$.)

(ix) Je-li $\{x_n\}$ nekonečná posloupnost reálných čísel, která má limitu

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{-\infty\},$$

píšeme též zkráceně $x_n \to A$.

Podobně, jestliže posloupnost funkcí $\{f_n\}$ konverguje k funkci f stejnoměrně na intervalu $[a,b]$, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$, píšeme též $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$.

(x) Jestliže $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $t\in[a,b)$ a $s\in(a,b]$ a jestliže existují konečné jednostranné limity $\lim\limits_{\tau\to t+} f(\tau)$ a $\lim\limits_{\tau\to s-} f(\tau)$, pak značíme

$$f(t+) = \lim_{\tau\to t+} f(\tau), \quad f(s-) = \lim_{\tau\to s-} f(\tau)\,,$$

$$\Delta^+ f(t) = f(t+) - f(t), \quad \Delta^- f(s) = f(s) - f(s-)\,,$$

$$\Delta f(x) = f(x+) - f(x-) \quad \text{pro } x\in(a,b)\,.$$

Zpravidla používáme následující úmluvu

$$f(a-) = f(a), \quad f(b+) = f(b), \quad \Delta^- f(a) = \Delta^+ f(b) = 0\,.$$

(xi) $\mathbb{C}[a,b]$ je prostor reálných funkcí spojitých na intervalu $[a,b]$ s normou definovanou přrdpisem

$$\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \quad \text{pro } f\in\mathbb{C}[a,b]\,.$$

definuje normu na $\mathbb{C}[a,b]$.

$\mathbb{L}^1[a,b]$ je prostor reálných funkcí lebesgueovsky integrovatelných na intervalu $[a,b]$ s rovností

$$f = g \in \mathbb{L}^1[a,b] \iff f(x) = g(x) \text{ pro s.v. } x\in[a,b]$$

a normou definovanou předpisem

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \quad \text{pro } f\in\mathbb{L}^1[a,b]\,.$$

Prostor vektorových funkcí zobrazujících interval $[a,b]$ do Banachova prostoru $\mathbb{Y}$ a spojitých na $[a,b]$ značíme $\mathbb{C}([a,b],\mathbb{Y})$, Podobný význam má symbol $\mathbb{L}^1([a,b],\mathbb{Y})$ i analogické symboly pro další prostory funkcí, které v textu zavedeme.

(xii) Je-li M podmnožina Banachova prostoru $\mathbb{X}$, pak symbolem $\overline{M}$ značíme její uzávěr v prostoru $\mathbb{X}$. Dále, Lin(M) je množina všech konečných lineárních kombinací prvků M, tj. množina všech prvků $x \in M$ tvaru $x = \sum_{j=1}^{m} c_j\, x_j$, kde $m \in \mathbb{N}$, $c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$ a $x_1, x_2, \ldots, x_m \in M$.

(xiii) Množinu všech spojitých lineárních zobrazení Banachova prostoru $\mathbb{X}$ do Banachova prostoru $\mathbb{Y}$ značíme $\mathscr{L}(X, Y)$. Je-li $\mathbb{X} = \mathbb{Y}$, píšeme jednodušeji $\mathscr{L}(\mathbb{X})$ místo $\mathscr{L}(\mathbb{X}, \mathbb{X})$. Speciálně, $\mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ je prostor reálných matic typu $m \times n$ neboli $m \times n$–matic.

(xiv) Je-li $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, pak její element v i–tém řádku a j–tém sloupci značíme $a_{i,j}$. Píšeme $A = \big(a_{i,j}\big)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$. Pro každé n značíme symbolem I jednotkovou matici typu $n \times n$, tj.

$$I = \big(e_{i,j}\big)_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}}, \quad \text{kde } e_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{když } \ i = j\,, \\ 0 & \text{když } \ i \neq j\,. \end{cases}$$

Norma v $\mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ je definována předpisem

$$|A| = \max_{j=1,\ldots,m} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \quad \text{pro } \ A = \big(a_{i,j}\big)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)\,.$$

Speciálně pro $x \in \mathbb{R}^n = \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ máme $|x| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, což souhlasí s bodem (i). Dále, $|A| = \sup\big\{|A\,x| : |x| \le 1\big\}$, tj. takto zavedená norma matice souhlasí s operátorovou normou v $\mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ (vzhledem k normě v $\mathbb{R}^n$ z bodu (i)).

(xv) V omezené míře, leč přece jen se to občas zdá být výhodné až nutné, používáme standardní logické symboly. Např.

$$\text{”}\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : (A \wedge B) \implies C\text{”}$$

znamená

”pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že platí-li současně A i B pak platí také C” .

Kapitola 2

Funkce s konečnou variací

V této kapitole definujeme variaci funkce a odvodíme základní vlastnosti třídy funkcí, které mají konečnou variaci na daném uzavřeném a konečném intervalu. Funkce s konečnou variací jsou užitečné v celé řadě fyzikálních a technických problémů, v teorii pravděpodobnosti, teorii Fourierových řad, v diferenciálních rovnicích rovnicích a v dalších oblastech matematiky.

2.1 Definice a základní vlastnosti

2.1. Definice. Nechť $-\infty < a < b < \infty$. Konečnou množinu bodů $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ intervalu $[a,b]$ nazveme *dělením intervalu* $[a,b]$, jestliže platí

$$a = \sigma_0 < \sigma_1 < \ \ldots \ < \sigma_m = b.$$

Množinu všech dělení intervalu $[a,b]$ značíme $\mathscr{D}[a,b]$.

Je-li $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$, pak, nebude-li uvedeno jinak, budeme jeho elementy značit σ_j, $\nu(\boldsymbol{\sigma})$ je počet podintervalů $[\sigma_{j-1}, \sigma_j]$ generovaných množinou $\boldsymbol{\sigma}$ a $|\boldsymbol{\sigma}|$ je délka nejdelšího z těchto podintervalů, tj.

$$\sigma_{\nu(\boldsymbol{\sigma})} = b \quad \text{a} \quad |\boldsymbol{\sigma}| = \max_{j=1,2,\ldots,\nu(\boldsymbol{\sigma})} (\sigma_j - \sigma_{j-1}) \quad \text{pro } \boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]\,.$$

Jestliže $\boldsymbol{\sigma}' \supset \boldsymbol{\sigma}$, pak říkáme, že $\boldsymbol{\sigma}'$ je *zjemnění* $\boldsymbol{\sigma}$.

2.2. Definice. Pro danou funkci $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ a dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a,b]$ definujeme

$$V(f, \boldsymbol{\sigma}) = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} |f(\sigma_j) - f(\sigma_{j-1})| \tag{2.1}$$

a

$$\operatorname{var}_a^b f = \sup_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]} V(f, \boldsymbol{\sigma})\,. \tag{2.2}$$

Je-li $a = b$, definujeme $\operatorname{var}_a^b f = \operatorname{var}_a^a f = 0$. Veličinu $\operatorname{var}_a^b f$ nazýváme *variace funkce* f na intervalu $[a,b]$. Je-li $\operatorname{var}_a^b f < \infty$, říkáme, že funkce f má *konečnou variaci* na $[a,b]$. Množinu funkcí s konečnou variací na $[a,b]$ značíme $\mathbb{BV}[a,b]$.

Geometrický význam pojmu variace nám přiblíží následující tvrzení, zpravidla nazývané DRUHÁ JORDANOVA VĚTA. Dříve než ho budeme formulovat, připomeňme, jak se definuje délka křivky, která je zadána jako graf spojité funkce f na intervalu $[a,b]$:

Pro každé dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a,b]$ je součet

$$\lambda(\boldsymbol{\sigma}, f) := \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \sqrt{\left(\sigma_j - \sigma_{j-1}\right)^2 + \left(f(\sigma_j) - f(\sigma_{j-1})\right)^2}\,.$$

roven délce lomené křivky proložené body $[\sigma_j, f(\sigma_j)], j = 1, 2, \ldots, m,$ ležícími na grafu funkce f. Délka grafu $\Lambda(f;[a,b])$ funkce f na intervalu $[a,b]$ se pak definuje jako

$$\Lambda(f;[a,b]) = \sup_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]} \lambda(\boldsymbol{\sigma}, f)\,.$$

2.3. Věta (DRUHÁ JORDANOVA VĚTA)**.** *Nechť f je spojitá na $[a,b]$. Potom má její graf na intervalu $[a,b]$ konečnou délku právě tehdy, když f má konečnou variaci na intervalu $[a,b]$.*

D ů k a z . Použijeme nerovnosti

$$|\beta| \le \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \le |\alpha| + |\beta|\,, \tag{2.3}$$

které platí pro libovolná reálná čísla α, β. (Odvodíme je odmocněním triviálních nerovností $\beta^2 \le \alpha^2+\beta^2 \le (|\alpha|+|\beta|)^2$.) Pro libovolné dělení $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$ máme podle (2.3)

$$\begin{aligned} V(f, \boldsymbol{\sigma}) &= \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} |f(\sigma_j) - f(\sigma_{j-1})| \\ &\le \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \sqrt{\left(\sigma_j - \sigma_{j-1}\right)^2 + \left(f(\sigma_j) - f(\sigma_{j-1})\right)^2} = \lambda(\boldsymbol{\sigma}, f) \\ &\le \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \Big[\left(\sigma_j - \sigma_{j-1}\right) + \left|f(\sigma_j) - f(\sigma_{j-1})\right|\Big] = (b-a) + V(f, \boldsymbol{\sigma}) \end{aligned}$$

neboli

$$V(f, \boldsymbol{\sigma}) \le \lambda(\boldsymbol{\sigma}, f) \le V(f, \boldsymbol{\sigma}) + (b-a)\,.$$

Přechodem k supremu dostaneme nerovnosti

$$\operatorname{var}_a^b\, f \le \Lambda(f,[a,b]) \le \operatorname{var}_a^b\, f + (b-a)\,,$$

ze kterých tvrzení věty okamžitě plyne. □

2.4. Příklad. Buď f funkce spojitá na intervalu $[a,b]$ a taková, že pro každé $x\in(a,b)$ platí $|f'(x)|\le M<\infty$, kde M nezávisí na x.

Podle věty o střední hodnotě tedy platí $|f(y)-f(x)|\le M\,|y-x|$ pro všechna $x,y\in[a,b]$ takové, že $x\neq y$. Pro každé dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a,b]$ tedy máme

$$V(f,\boldsymbol{\sigma}) \le M\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\left[\sigma_j-\sigma_{j-1}\right] = M\,[b-a]\,.$$

Vidíme, že *každá funkce spojitá na intervalu* $[a,b]$, *která má na jeho vnitřku* (a,b) *ohraničenou derivaci, má konečnou variaci*.

Jestliže navíc $|f'|$ je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a,b]$ (např. f' je spojitá na (a,b)), pak můžeme variaci funkce f na intervalu $[a,b]$ určit. Platí totiž

$$\operatorname{var}_a^b f = (\mathrm{R})\int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x\,, \tag{2.4}$$

kde na pravé straně je Riemannův integrál. Důkaz tohoto tvrzení pochopitelně předpokládá znalost Riemannova integrálu.

Buď dáno $\varepsilon>0$. Předpoklad o existenci a konečné hodnotě Riemannova integrálu $(\mathrm{R})\int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x$ znamená, že existuje $\delta>0$ takové, že

$$\Big|\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}|f'(\xi_j)|\,(\sigma_j-\sigma_{j-1}) - (\mathrm{R})\int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x\Big| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.5}$$

platí pro každé dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a,b]$ takové, že $|\boldsymbol{\sigma}|<\varepsilon$ a každý výběr bodů ξ_j takových, že

$$\xi_j\in[\sigma_{j-1},\sigma_j] \quad \text{pro}\ \ j=1,2,\dots,\nu(\boldsymbol{\sigma})\,. \tag{2.6}$$

Na druhou stranu, podle definice variace existuje $\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]$ takové, že $|\boldsymbol{\sigma}|<\varepsilon$ a

$$\operatorname{var}_a^b\, f \ge V(f,\boldsymbol{\sigma}) > \operatorname{var}_a^b\, f - \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{2.7}$$

Podle věty o střední hodnotě existují body $\xi_j,\ j=1,2,\dots,\nu(\boldsymbol{\sigma}),$ splňující (2.6) a takové, že

$$V(f,\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} |f'(\xi_j)|\,(\sigma_j-\sigma_{j-1})\,.$$

Odtud podle (2.5) a (2.7) dostáváme, že platí

$$\begin{aligned}&\left|\operatorname{var}_a^b f - (\mathrm{R})\int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x\right|\\ &\quad\le |\operatorname{var}_a^b f - V(f,\boldsymbol{\sigma})| + \left|\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} |f'(\xi_j)|\,(\sigma_j-\sigma_{j-1}) - (\mathrm{R})\int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x\right|\\ &\quad< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\,.\end{aligned}$$

Podle definice Riemannova integrálu to znamená, že platí (2.4).

2.5. Cvičení. (i) Dokažte, že pro libovolnou spojitou funkci f platí

$$\Big(\big(\operatorname{var}_a^b f\big)^2+(b-a)^2\Big)^{1/2} \le \Lambda(f,[a,b]) \le \operatorname{var}_a^b f + (b-a).$$

(ii) Určete $\operatorname{var}_a^b f$ a odhadněte délku grafu funkce f, jestliže

a) $f(x)=\sin^2 x$ pro $x\in[0,\pi]$,
b) $f(x)=x^3-3\,x+4$ pro $x\in[0,2]$,
c) $f(x)=\cos x + x \sin x$ pro $x\in[0,2\,\pi]$.

2.6. Poznámka. Z definice 2.2 je zřejmé, že pro každou funkci $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ je $\operatorname{var}_a^b f\ge 0$. Dále, je-li dáno libovolné dělení $\boldsymbol{\rho}\in\mathscr{D}[a,b]$, pak platí

$$\operatorname{var}_a^b f = \sup_{\boldsymbol{\sigma}\supset\boldsymbol{\rho}} V(f,\boldsymbol{\sigma}). \tag{2.8}$$

To plyne z několika elementárních pozorování: Zaprvé, protože

$$\{V(f,\boldsymbol{\sigma}):\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]\ \text{ a }\ \boldsymbol{\sigma}\supset\boldsymbol{\rho}\}\subset\{V(f,\boldsymbol{\sigma}):\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]\},$$

musí být $\sup_{\boldsymbol{\sigma}\supset\boldsymbol{\rho}} V(f,\boldsymbol{\sigma})\le\operatorname{var}_a^b f.$

Dále, díky trojúhelníkové nerovnosti pro libovolná dvě dělení $\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\sigma}'$ intervalu $[a,b]$ taková, že $\boldsymbol{\sigma}'\supset\boldsymbol{\sigma}$ a funkci $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ máme $V(f,\boldsymbol{\sigma})\le V(f,\boldsymbol{\sigma}')$.

Konečně, je-li $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$ libovolné a $\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} \cup \boldsymbol{\rho}$, pak $\boldsymbol{\sigma}' \supset \boldsymbol{\rho}$ a tedy $V(f,\boldsymbol{\sigma}) \leq V(f,\boldsymbol{\sigma}')$. To znamená, že pro každé $d \in \{V(f,\boldsymbol{\sigma}) : \boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]\}$ existuje $d' \in \{V(f,\boldsymbol{\sigma}) : \boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$ a $\boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\rho}\}$ takové, že $d \leq d'$ a tedy

$$\operatorname{var}_a^b f \leq \sup_{\boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\rho}} V(f,\boldsymbol{\sigma}).$$

Platí tedy (2.8).

2.7. Cvičení. Dokažte následující vlastnosti variace a funkcí s konečnou variací.

(i) *Je-li* $[c,d] \subset [a,b]$, *pak pro každou funkci* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *platí*

$$|f(d) - f(c)| \leq \operatorname{var}_c^d f \leq \operatorname{var}_a^b f\,.$$

(ii) *Funkce* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *má konečnou variaci na* $[a,b]$ *právě tehdy, když existuje taková neklesající funkce* φ *na* $[a,b]$, *že*

$$|f(x) - f(y)| \leq \varphi(x) - \varphi(y) \quad \textit{pro } x,y \in [a,b],\ y \leq x\,.$$

(iii) $\operatorname{var}_a^b f = d \in \mathbb{R}$
$$\iff \Big(\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b] : \boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \implies d - \varepsilon \leq V(f,\boldsymbol{\sigma}) \leq d\Big).$$

(iv) $\operatorname{var}_a^b f = \infty \iff \big(\forall\, K > 0\ \ \exists\, \boldsymbol{\sigma}_K \in \mathscr{D}[a,b] : V(f, D_K) \geq K\big)$.

(v) *Jestliže pro funkci* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *existuje* $L \in \mathbb{R}$ *takové, že*

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y| \quad \textit{platí pro všechna } x,y \in [a,b]\,,$$

pak $\operatorname{var}_a^b f \leq L\,(b-a)$.

(V takovém případě říkáme, že f splňuje *Lipschitzovu podmínku* na $[a,b]$ nebo též, že je *lipschitzovská* na $[a,b]$.)

2.8. Příklad. Nechť

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x = 0\,, \\ x\,\sin(\dfrac{\pi}{x}) & \text{pro } x \in (0,2]\,. \end{cases}$$

Všimněme si, že $f(x) = 0$ právě když $x = 0$ nebo $x = \dfrac{1}{k}$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ a pro $x \in (0,2]$ platí

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{právě když } x = y_k = \dfrac{2}{4\,k+1}\,,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,, \\[2ex] -x & \text{právě když } x = z_k = \dfrac{2}{4\,k-1}\,,\ k \in \mathbb{N}\,. \end{cases}$$

Pro dané $n \in \mathbb{N}$ a dělení $\boldsymbol{\sigma}^n = \{0, y_n, z_n, \dots, y_1, z_1, 2\}$ dostaneme

$$\begin{aligned} V(f, \boldsymbol{\sigma}^n) &= |f(0) - f(y_n)| + \sum_{k=1}^{n} |f(y_{k-1}) - f(z_k)| + \sum_{k=1}^{n} |f(y_k) - f(z_k)| \\ &= \sum_{k=1}^{n} \big(y_{k-1} + z_k\big) + y_n + \sum_{k=1}^{n} \big(y_k + z_k\big) \\ &= y_0 + 2 \sum_{k=1}^{n} \big(y_k + z_k\big) = 2 + 4 \sum_{k=1}^{n} \frac{8\,k}{16\,k^2 - 1} \geq 2\Big(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\Big) . \end{aligned}$$

Je známo, že $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$. Tudíž $\displaystyle\lim_{n \to \infty} V(f, \boldsymbol{\sigma}^n) = \infty$ a $\operatorname{var}_0^2 f = \infty$.

Snadno určíme variaci monotonních funkcí.

2.9. Věta. *Pro každou funkci f monotonní na $[a, b]$ platí*

$$\operatorname{var}_a^b f = |f(b) - f(a)| .$$

D ů k a z . Je-li f nerostoucí na $[a, b]$ a $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a, b]$, pak

$$\begin{aligned} V(f, \boldsymbol{\sigma}) &= \sum_{j=1}^{m} \big[f(\sigma_{j-1}) - f(\sigma_j)\big] \\ &= \big[f(a) - f(\sigma_1)\big] + \big[f(\sigma_1) - f(\sigma_2)\big] + \dots \\ &\qquad + \big[f(\sigma_{m-2}) - f(\sigma_{m-1})\big] + \big[f(\sigma_{m-2}) - f(b)\big] \\ &= f(a) - f(b) , \end{aligned}$$

tj. $\operatorname{var}_a^b f = f(a) - f(b) = \big|f(b) - f(a)\big|$.

Podobně bychom ukázali, že je-li f neklesající na $[a, b]$, pak

$$\operatorname{var}_a^b f = f(b) - f(a) = \big|f(b) - f(a)\big|.$$

□

2.10. Příklady. (i) Příkladem jednoduché funkce, která nemá ohraničenou derivaci na intervalu $[0, 1]$ (a tudíž tvrzení z příkladu 2.4 (i) nezaručuje, že má konečnou variaci na $[0, 1]$) je $f(x) = \sqrt{x}$. Protože je ale f rostoucí, tak podle věty 2.9, platí $\operatorname{var}_0^1 f = \sqrt{1}$.

(ii) Konečnou variaci mohou mít i funkce podstatně nespojité, jak ukazuje příklad

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{je-li } x = 0\,, \\ \dfrac{1}{k} & \text{je-li } x \in (0,1] \quad \text{a} \quad x \in (\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\,] \text{ pro nějaké } k \in \mathbb{N}\,. \end{cases}$$

Tato funkce je zřejmě definovaná a neklesající na intervalu $[0,1]$. Podle věty 2.9 je tedy $\operatorname{var}_0^1 f = 1$.

2.11. Věta. *Pro každé $c \in [a,b]$ a každou funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ platí*

$$\operatorname{var}_a^b f = \operatorname{var}_a^c f + \operatorname{var}_c^b f\,.$$

D ů k a z. Buďte dány funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ a bod $c \in [a,b]$. Pokud $c = a$ nebo $c = b$, je tvrzení věty triviální. Nechť tedy $c \in (a,b)$.

Nechť $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} = \{a, c, b\}$ a nechť $\boldsymbol{\sigma}$ je libovolné dělení intervalu $[a,b]$ takové, že $\boldsymbol{\sigma} \supset \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}$. Pak nutně $c \in \boldsymbol{\sigma}$. Dělení $\boldsymbol{\sigma}$ lze tudíž rozdělit na dělení $\boldsymbol{\sigma}'$ intervalu $[a,c]$ a dělení $\boldsymbol{\sigma}''$ intervalu $[c,b]$, tj. $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' \cup \boldsymbol{\sigma}''$, kde $\boldsymbol{\sigma}' \in \mathscr{D}[a,c]$ a $\boldsymbol{\sigma}'' \in \mathscr{D}[c,b]$. Zřejmě pak také platí

$$V(f, \boldsymbol{\sigma}) = V(f, \boldsymbol{\sigma}') + V(f, \boldsymbol{\sigma}'')\,. \tag{2.9}$$

Podle poznámky 2.6 dostáváme tedy

$$\operatorname{var}_a^b f = \sup_{\boldsymbol{\sigma} \supset \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}} V(f, \boldsymbol{\sigma}) \le \operatorname{var}_a^c f + \operatorname{var}_c^b f\,.$$

Na druhou stranu pro každá dvě dělení $\boldsymbol{\sigma}' \in \mathscr{D}[a,c]$ a $\boldsymbol{\sigma}'' \in \mathscr{D}[c,b]$ je jejich sjednocení $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' \cup \boldsymbol{\sigma}''$ dělením intervalu $[a,b]$ a platí opět (2.9). Odtud plyne, že

$$\operatorname{var}_a^c f + \operatorname{var}_c^b f = \sup_{\boldsymbol{\sigma}' \in \mathscr{D}[a,c]} V(f, \boldsymbol{\sigma}') + \sup_{\boldsymbol{\sigma}'' \in \mathscr{D}[c,b]} V(f, \boldsymbol{\sigma}'') \le \operatorname{var}_a^b f\,.$$

Tím je důkaz věty hotov. □

2.12. Příklad. Buď dáno $n \in \mathbb{N}$. Vyšetřujme funkci

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 \le x \le \frac{1}{n}\,, \\ x\,\sin(\dfrac{\pi}{x}) & \text{pro } \frac{1}{n} \le x \le 2\,. \end{cases}$$

Její derivace

$$f_n'(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 \le x < \frac{1}{n}\,, \\ \sin(\dfrac{\pi}{x}) - \dfrac{\pi}{x}\,\cos(\dfrac{\pi}{x}) & \text{pro } \frac{1}{n} > x \le 2 \end{cases}$$

je ohraničená na $(0,\frac{1}{n})$ a na $(\frac{1}{n},2)$. Zřejmě je $\operatorname{var}_0^{1/n} f_n = 0$. Podle příkladu 2.4 (i) je dále $\operatorname{var}_{1/n}^2 f_n < \infty$. Věta 2.11 tedy implikuje, že je také $\operatorname{var}_0^1 f_n < \infty$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Na množině $\mathbb{BV}[a,b]$ jsou přirozeným způsobem definovány operace sčítání a násobení skalárem (viz úmluvy a označení 1.3 (x)). Funkci identicky nulovou na $[a,b]$ nazveme nulovým prvkem množiny $\mathbb{BV}[a,b]$. Následující tvrzení je zřejmé.

2.13. Lemma. *Pro libovolné dvě funkce* $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ *a reálné číslo* c *platí*

$$\operatorname{var}_a^b (f_1 + f_2) \le \operatorname{var}_a^b f_1 + \operatorname{var}_a^b f_2 \quad \textit{a} \quad \operatorname{var}_a^b (c\, f_1) = |c| \operatorname{var}_a^b f_1 \,. \tag{2.10}$$

Dále, $\operatorname{var}_a^b f = 0$, *tehdy a jen tehdy, když* f *je konstantní na* $[a,b]$.

(Stačí si totiž uvědomit, že pro každé dělení $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$ platí

$$V(f_1 + f_2, \boldsymbol{\sigma}) \le V(f_1, \boldsymbol{\sigma}) + V(f_2, \boldsymbol{\sigma}) \quad \text{a} \quad V(c\, f, \boldsymbol{\sigma}) = |c|\, V(f, \boldsymbol{\sigma})$$

a, dále, že je-li $\operatorname{var}_a^b f = 0$, musí pro každé $x \in (a,b]$ platit $|f(x) - f(a)| = 0$.)

2.14. Věta. $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ *tehdy a jen tehdy, když existují funkce* f_1 *a* f_2 *neklesající na* $[a,b]$ *a takové, že platí* $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ *pro každé* $x \in [a,b]$.

Důkaz. Jestliže f_1 a f_2 jsou neklesající na $[a,b]$ a $f = f_1 - f_2$, pak podle věty 2.9 mají f_1 i f_2 konečnou variaci na $[a,b]$ a podle (2.10) je také $\operatorname{var}_a^b f < \infty$.

Stačí tedy dokázat, že pro každou funkci $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ existují funkce f_1 a f_2 neklesající na $[a,b]$ a takové, že $f = f_1 - f_2$.

Nechť tedy $f \in \mathbb{BV}[a,b]$. Položme

$$f_1(x) = \operatorname{var}_a^x f \quad \text{a} \quad f_2(x) = f_1(x) - f(x) \quad \text{pro } x \in [a,b]\,.$$

Nechť $x, y \in [a,b]$ a $y \ge x$. Potom, podle věty 2.11 je $f_1(y) = f_1(x) + \operatorname{var}_x^y f$ a protože variace je vždy nezáporná, znamená to, že funkce f_1 je neklesající na $[a,b]$. Dále, podle věty 2.11 máme

$$f_2(y) = f_1(x) + \operatorname{var}_x^y f - f(y)$$

a

$$f_2(y) - f_2(x) = \operatorname{var}_x^y f - (f(y) - f(x)) \ge 0$$

(viz cvičení 2.7 (i)). To znamená, že funkce f_2 je také neklesající na $[a,b]$ a důkaz je hotov. □

2.15. Cvičení. Nechť $f \in \mathbb{BV}[a,b]$. Dokažte, že obě funkce

$$\mathfrak{p}\,(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \ x = a\,, \\ \sup\limits_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,x]} \sum\limits_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \big(f(\sigma_j) - f(\sigma_{j-1})\big)^+ & \text{pro } \ x \in (a,b] \end{cases}$$

a

$$\mathfrak{n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \ x = a\,, \\ \sup\limits_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,x]} \sum\limits_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \big(f(\sigma_j) - f(\sigma_{j-1})\big)^- & \text{pro } \ x \in (a,b] \end{cases}$$

jsou neklesající a nezáporné na $[a,b]$ a platí

$$f(x) = f(a) + \mathfrak{p}\,(x) - \mathfrak{n}(x) \quad \text{a} \quad \operatorname{var}_a^x f = \mathfrak{p}\,(x) + \mathfrak{n}(x) \ \text{ pro } x \in [a,b]\,.$$

2.16. Důsledek. *Pro každou funkci f s konečnou variací na $[a,b]$ a pro všechna $t \in [a,b)$ a $s \in (a,b]$ existují konečné limity*

$$f(t+) = \lim_{\tau \to t+} f(\tau) \quad \textit{a} \quad f(s-) = \lim_{\tau \to s-} f(\tau)$$

(tj. f může mít v $[a,b]$ pouze nespojitosti prvního druhu).

Důkaz. Podle věty 2.14 můžeme předpokládat, že f je neklesající na $[a,b]$. Pro každé $x \in [a,b]$ je $f(a) \le f(x) \le f(b)$ a tudíž platí také

$$f(a) \le \sup_{x \in [a,s)} f(x) \le f(b) \quad \text{pro každé } \ s \in (a,b]$$

a

$$f(a) \le \inf_{x \in (t,b])} f(x) \le f(b) \quad \text{pro každé } \ t \in [a,b\,)$$

Ukážeme, že

$$f(t+) = \inf_{x \in (t,b])} f(x) \quad \text{jestliže } \ t \in [a,b) \tag{2.11}$$

Označme $d = \inf\limits_{x \in (t,b])} f(x)$ a zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Potom podle definice infima existuje $t' \in (d,b]$ takové, že je $d \le f(t') < d + \varepsilon$. Vzhledem k monotónnosti funkce f odtud plyne, že nerovnost $d \le f(x) < d + \varepsilon$ platí pro každé $x \in (t,t']$. Dokázali jsme tedy vztah (2.11).

Podobně bychom ukázali, že platí také

$$f(s-) = \sup_{x \in [a,s)])} f(x) \quad \text{jestliže } \ s \in (a,b\,]\,. \tag{2.12}$$

□

2.2 Prostor funkcí s konečnou variací

Podle lemmatu 2.13 každá lineární kombinace funkcí s konečnou variací má také konečnou variaci. Z toho plyne, že množina $BV[a,b]$ je lineární prostor. Ukážeme, že při vhodně zvolené normě se $\mathbb{BV}[a,b]$ stane lineárním normovaným prostorem.

2.17. Věta. $BV[a,b]$ *je lineární normovaný prostor vzhledem k normě definované předpisem*

$$\|f\|_{\mathbb{BV}} = |f(a)| + \operatorname{var}_a^b f \quad \textit{pro } f \in \mathbb{BV}[a,b]\,. \tag{2.13}$$

D ů k a z . $\mathbb{BV}[a,b]$ je lineární prostor podle lemmatu 2.13. Dále, pro každou funkci $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ a každé $x \in [a,b]$ platí

$$|f(x)| \le |f(a)| + |f(x) - f(a)| \le |f(a)| + \operatorname{var}_a^b f \quad \text{pro } x \in [a,b]\,.$$

(Rozmyslete si proč tomu tak je.) Tudíž

$$\|f\| \le \|f\|_{\mathbb{BV}} < \infty \text{ pro } f \in \mathbb{BV}\,. \tag{2.14}$$

Podle lemmatu 2.13 relace

$$\|f+g\|_{\mathbb{BV}} \le \|f\|_{\mathbb{BV}} + \|g\|_{\mathbb{BV}} \quad \text{a} \quad \|c\,f\|_{\mathbb{BV}} = |c|\,\|f\|_{\mathbb{BV}}$$

platí pro všechny funkce $f, g \in \mathbb{BV}[a,b]$ a každé reálné číslo $c \in \mathbb{R}$.

Konečně, jestliže $\|f\|_{\mathbb{BV}} = 0$, musí být $f(a) = 0$ a $\operatorname{var}_a^b f = 0$ Podle lemmatu 2.13 je tedy $f(x) \equiv f(a) = 0$ na $[a,b]$, tj. f je nulový prvek $\mathbb{BV}[a,b]$.

Dokázali jsme tedy, že rovnost (2.13) definuje normu na $\mathbb{BV}[a,b]$. □

2.18. Poznámka. Nerovnost (2.14) implikuje, že každá funkce, která má ohraničenou variaci na $[a,b]$ je také ohraničená na $[a,b]$.

Následující tvrzení usnadňuje použití metod funkcionální analýzy při práci s funkcemi s konečnou variací.

2.19. Věta. $\mathbb{BV}[a,b]$ *je Banachův prostor.*

D ů k a z . Podle věty 2.17 je $\mathbb{BV}[a,b]$ lineární normovaný prostor vzhledem k normě

$$f \in \mathbb{BV}[a,b] \to \|f\|_{\mathbb{BV}} = |f(a)| + \operatorname{var}_a^b f\,.$$

Zbývá tedy dokázat, že $\mathbb{BV}[a,b]$ je úplný, tj. že každá posloupnost cauchyovská v $\mathbb{BV}[a,b]$ má v $\mathbb{BV}[a,b]$ limitu. Předpokládejme tedy, že posloupnost $\{f_n\} \subset \mathbb{BV}[a,b]$ je cauchyovská v $\mathbb{BV}[a,b]$. Potom platí

$$\left.\begin{aligned}&\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,n_\varepsilon:\\&n,m\ge n_\varepsilon \Longrightarrow |f_n(x)-f_m(x)|\le \|f_n-f_m\|_{\mathbb{BV}}<\varepsilon \text{ pro } x\in[a,b]\,.\end{aligned}\right\}\qquad(2.15)$$

a) Podle (2.15) je pro každé $x\in[a,b]$ posloupnost reálných čísel $\{f_n(x)\}$ cauchyovská. Pro každé $x\in[a,b]$ tedy existuje konečná limita

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)\,.$$

b) Nechť je dáno libovolné $\varepsilon>0$ a nechť $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ je určeno podmínkou (2.15). Potom pro každé $x\in[a,b]$ máme také

$$|f(x)-f_{n_\varepsilon}(x)|=\lim_{n\to\infty}|f_n(x)-f_{n_\varepsilon}(x)|\le\varepsilon$$

a tudíž pro každé $n\ge n_\varepsilon$ a každé $x\in[a,b]$ platí

$$|f(x)-f_n(x)|\le|f(x)-f_{n_\varepsilon}(x)|+|f_{n_\varepsilon}(x)-f_n(x)|<2\,\varepsilon.$$

To ovšem znamená, že

$$\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|=0$$

neboli posloupnost $\{f_n\}$ konverguje k f stejnoměrně na $[a,b]$.

c) Podle (2.15) existuje $n_1\in\mathbb{N}$ takové, že

$$\operatorname{var}_a^b f_n\le\|f_n\|_{\mathbb{BV}}\le\|f_{n_1}\|_{\mathbb{BV}}+1 \text{ pro } n\ge n_1\,.$$

Číselná posloupnost $\{\operatorname{var}_a^b f_n\}$ je tedy ohraničená. Podle Bolzanovy–Weierstraßovy věty z ní lze vybrat podposloupnost $\{\operatorname{var}_a^b f_{n_k}: k\in\mathbb{N}\}$, pro kterou platí

$$\lim_{k\to\infty}\operatorname{var}_a^b f_{n_k}=d<\infty,$$

tj.

$$\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,k_\varepsilon\in\mathbb{N}:\Big(k\ge k_\varepsilon \text{ a } \boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]\implies V(f_{n_k},\boldsymbol{\sigma})<d+\varepsilon\Big)$$

a

$$\forall\,\varepsilon>0\ \forall\,\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]:V(f,\boldsymbol{\sigma})=\lim_{k\to\infty}V(f_{n_k},\boldsymbol{\sigma})\le d+\varepsilon\,.$$

Odtud ovšem už plyne, že je

$$\operatorname{var}_a^b f = \sup_{\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]} V(f,\boldsymbol{\sigma}) \le d < \infty, \quad \text{tj. } f\in\mathbb{BV}[a,b]\,.$$

d) Podle ((2.15)) tedy pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takové. že

$$n,m \ge n_\varepsilon \Longrightarrow V(f_n - f_m,\boldsymbol{\sigma}) \le \operatorname{var}_a^b\,(f_n - f_m) < \varepsilon \text{ pro } \boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]\,.$$

Tudíž, je-li $m \ge n_\varepsilon$, pak pro každé $\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]$ platí

$$V(f-f_m,\boldsymbol{\sigma}) = \lim_{n\to\infty} V(f_n - f_m,\boldsymbol{\sigma}) \le \varepsilon \text{ neboli } \operatorname{var}_a^b\,(f-f_m) \le \varepsilon\,.$$

To ovšem znamená, že $\lim_{m\to\infty} \|f-f_m\|_{\mathbb{BV}} = 0$, což zbývalo ještě dokázat. □

2.3 Konečná variace a spojitost

Podle důsledku 2.16 mohou mít funkce s konečnou variací nespojitosti pouze prvního druhu. Podívejme se nyní trochu podrobněji vlastnosti funkcí s konečnou variací související se spojitostí.

2.20. Věta. *Každá funkce $f\in\mathbb{BV}[a,b]$ má nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti na intervalu $[a,b]$.*

D ů k a z plyne z důsledku 2.16 a z následujícího lemmatu. □

2.21. Lemma. *Nechť $J\subset\mathbb{R}$ je otevřený interval, $f: J\to\mathbb{R}$ a M je množina bodů nespojitosti 1. druhu funkce f v J. Potom M je nejvýše spočetná.*

D ů k a z . Označme

$$M^+ = \{x\in J : f(x+) \ne f(x)\}, \qquad M^- = \{x\in J : f(x-) \ne f(x)\}$$

a

$$M_1^+ = \{x\in M^+ : f(x) < f(x+)\},\ M_2^+ = \{x\in M^+ : f(x) > f(x+)\}\,.$$

Potom je $M = M^+\cup M^-$ a $M^+ = M_1^+ \cup {M_2}^+$. Uspořádejme množinu $\mathbb{P}$ racionálních čísel tak, aby platilo $\mathbb{P} = \{r_k\}$. (Uvědomte si však, že množinu $\mathbb{P}$ nelze uspořádat "podle velikosti", tj. tak aby platilo $r_k < r_{k+1}$ pro každé $k\in\mathbb{N}$.)
Nechť r značí zobrazení, které každému $x\in M_1^+$ přiřadí první (při daném uspořádání množiny $\mathbb{P}$) racionální číslo, které leží v intervalu $(f(x), f(x+))$. Přesněji řečeno,

$$r(x) = r_j \Longleftrightarrow r_j\in (f(x), f(x+)) \text{ a } \{r_1,r_2,\dots,r_{j-1}\}\cap (f(x),f(x+)) = \emptyset\,.$$

Dále, pro každé $q \in \mathbb{P}$ označme symbolem $r_{-1}(q)$ jeho vzor při zobrazení r, tj.

$$r_{-1}(q) = \{x \in M_1^+ : r(x) = q\} .$$

Máme

$$M_1^+ = \bigcup_{q \in \mathbb{P}} r_{-1}(q) .$$

Ukážeme-li tedy, že každá množina $r_{-1}(q),\ q \in \mathbb{P},$ je spočetná, budeme mít současně také dokázáno, že i množina M_1^+ je spočetná.

Nechť je tedy dáno libovolné $q \in \mathbb{P}.$ Vzhledem k definici množiny M_1^+ a zobrazení $r,$ pro každé $x \in r_{-1}(q)$ existuje $\delta(x) > 0$ takové, že

$$x < y < x + \delta(x) \implies f(y) > r(x) .$$

Jsou-li $x_1, x_2 \in r_{-1}(q)$ takové, že $x_1 < x_2$ a $r(x_1) = r(x_2) = q,$ pak musí platit

$$(x_1, x_1 + \delta(x_1)) \cap (x_2, x_2 + \delta(x_2)) = \emptyset .$$

Vskutku, kdyby bylo $x_1 < x_2 < x_1 + \delta(x_1),$ bylo by též (vzhledem k definici δ)

$$q = r(x_1) < f(x_2) < r(x_2) = q ,$$

což není možné. Systém intervalů $\big\{(x, x + \delta(x)),\ x \in r_{-1}(q)\big\}$ je tedy disjunktní. Každému $x \in r_{-1}(q)$ lze tedy přiřadit jediné racionální číslo $r \in (x, x + \delta(x))$ a tím definovat prosté zobrazení $r_{-1}(q)$ do $\mathbb{P}.$ To znamená, že pro každé $q \in \mathbb{P}$ je množina $r_{-1}(q)$ spočetná.

b) Protože $M_2^+ = \{x \in J :\ - f(x) <\ - f(x+)\},$ můžeme použít část a) tohoto důkazu k důkazu spočetnosti množiny $M_2{}^+.$

c) Konečně, $M^- = \{x \in J : f(-x) \neq f(-x+)\},$ takže podle částí a)–b) tohoto důkazu je také M^- spočetná množina. $\square$

2.22. Cvičení. Přesvědčete se, že důkaz lemmatu 2.21 v sobě obsahuje též důkaz tvrzení: *Každý disjunktní systém intervalů v* $\mathbb{R}$ *je spočetný.*

Nechť $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ a

$$v(x) = \operatorname{var}_a^x f \quad \text{pro } x \in [a,b] . \tag{2.16}$$

Podle důkazu věty 2.14 víme, že funkce v a $v - f$ jsou definovány a neklesající na $[a,b].$ Ukážeme nyní, že funkce v ”kopíruje” spojitost funkce $f.$

2.23. Lemma. *Nechť* $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ *a* $v:[a,b] \to \mathbb{R}$ *je definována vztahem* (2.16) . *Potom je* f *spojitá v bodě* $x \in [a,b)$ *zprava právě tehdy, když je v tomto bodě spojitá zprava i funkce* v. *Podobně,* f *je spojitá v bodě* $x \in (a,b]$ *zleva právě tekdy, když je v tomto bodě spojitá zleva i funkce* v.

D ů k a z . a) Nechť $x \in (a,b]$ a $f(x-) = f(x)$. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme $\delta > 0$ tak, aby platilo

$$|f(x) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pro každé } t \in (x-\delta, x]\,.$$

Zvolme dělení $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,x]$ tak, aby platilo

$$v(x) - V(f,\boldsymbol{\sigma}) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad \sigma_{m-1} \in (x-\delta, x).$$

Máme $|f(x) - f(\sigma_{m-1})| < \frac{\varepsilon}{2}$ a tedy

$$v(x) - \sum_{j=1}^{m-1} |f(\sigma_j) - f(\sigma_{j-1})| < |f(x) - f(\sigma_{m-1})| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,.$$

Odtud snadno odvodíme, že platí $v(x) - v(\sigma_{m-1}) < \varepsilon$. Protože v je neklesající na $[a,b]$, dostáváme dále

$$v(x) - v(t) < \varepsilon \quad \text{pro každé } t \in (\sigma_{m-1}, x]\,.$$

Tím je dokázána spojitost zleva funkce v.

b) Podobně dokážeme, že funkce v je spojitá zprava v každém bodě $x \in [a,b)$, ve kterém je zprava spojitá funkce f.

c) Pravdivost zbývajících implikací plyne okamžitě z nerovností

$$|f(x) - f(y)| \le |v(x) - v(y)|$$

platných pro všechna $x, y \in [a,b]$ (viz cvičení 2.7 (i)). □

Z následujícího tvrzení vyplyne, že součet absolutních hodnot skoků funkce s konečnou variací je vždy konečný.

2.24. Věta. *Nechť* $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ *a nechť* $W = \{s_k\}$ *je prostá posloupnost bodů z intervalu* (a,b). *Potom*

$$|\Delta^+ f(a)| + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(|\Delta^+ f(s_k)| + |\Delta^- f(s_k)| \Big) + |\Delta^- f(b)| \le \operatorname{var}_a^b f. \tag{2.17}$$

D ů k a z . a) Předpokládejme nejprve, že f je neklesající. Potom

$$|\Delta^+ f(a)| + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(|\Delta^+ f(s_k)| + |\Delta^- f(s_k)|\Big) + |\Delta^- f(b)|$$
$$= \Delta^+ f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \Delta f(s_k) + \Delta^- f(b)\,.$$

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{n+1},$ jsou body intervalu $[a, b]$ takové, že

$$a = \sigma_0 < \sigma_1 < \, \dots < \sigma_n < \sigma_{n+1} = b$$

a

$$\big\{\sigma_k : k = 0, \dots n+1\big\} = \{a\} \cup \{s_k : k = 1, \dots, n\} \cup \{b\}\,.$$

Zvolme dále $t_k,\ k = 1, 2, \dots, n+1,$ tak, aby platilo

$$a < t_1 < \sigma_1 < t_2 < \sigma_2 < \cdots < \sigma_n < t_{n+1} < b\,.$$

Potom je

$$0 \le \Delta^+ f(a) \le f(t_1) - f(a),\ \ 0 \le \Delta^- f(b) \le f(b) - f(t_{n+1})$$

a

$$0 \le \Delta f(\sigma_k) \le f(t_{k+1}) - f(t_k) \quad \text{pro } \ k = 1, 2, \dots, n\,.$$

Tudíž

$$\Delta^+ f(a) + \sum_{k=1}^{n} \Delta f(s_k) + \Delta^- f(b) = \Delta^+ f(a) + \sum_{k=1}^{n} \Delta f(\sigma_k) + \Delta^- f(b)$$
$$\le \big(f(t_1) - f(a)\big) + \sum_{k=1}^{n} \big(f(t_{k+1}) - f(t_k)\big) + \big(f(b) - f(t_{k+1})\big)$$
$$= f(b) - f(a)\,.$$

Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ tedy máme

$$\Delta^+ f(a) + \sum_{k=0}^{n} \Delta f(s_k) + \Delta^- f(b) \le f(b) - f(a) = \operatorname{var}_a^b\, f.$$

Nerovnost ((2.17)) tedy platí pro každou funkci f neklesající na $[a, b]$.

b) Nyní nechť f je libovolná funkce s konečnou variací na $[a,b]$ a nechť funkce $\mathfrak{p}$ a $\mathfrak{n}$ jsou definovány jako ve cvičení 2.15. Potom $f = f(a) + \mathfrak{p} - \mathfrak{n}$,

$$\begin{aligned}&\Delta^+ f(t) = \Delta^+\mathfrak{p}(t) - \Delta^+\mathfrak{n}(t),\ \ \Delta^- f(t) = \Delta^-\mathfrak{p}(s) - \Delta^-\mathfrak{n}(s)\\ &|\Delta^+ f(t)| = \Delta^+\mathfrak{p}(t) + \Delta^+\mathfrak{n}(t) \ \text{ a } \ |\Delta^- f(t)| = \Delta^-\mathfrak{p}(s) + \Delta^-\mathfrak{n}(s)\end{aligned}$$

pro $t \in (a,b]$, $s \in [a,b)$. Podle první části důkazu máme

$$\Delta^+\mathfrak{p}(a) + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\Delta^+\mathfrak{p}(s_k) + \Delta^-\mathfrak{p}(s_k)\Big) + \Delta^-\mathfrak{p}(b) \le \mathfrak{p}(b)$$

a

$$\Delta^+\mathfrak{n}(a) + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\Delta^+\mathfrak{n}(s_k) + \Delta^-\mathfrak{n}(s_k)\Big) + \Delta^-\mathfrak{n}(b) \le \mathfrak{n}(b)\,.$$

Sečteme-li tyto nerovnosti, dostaneme

$$|\Delta^+ f(a)| + \sum_{k=0}^{n}\Big(|\Delta^+ f(s_k)| + |\Delta^- f(s_k)|\Big) + |\Delta^- f(b)| \le \mathfrak{p}(b) + \mathfrak{n}(b) = \operatorname{var}_a^b f\,.$$

□

2.25. Poznámka. Nechť $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ má konečnou variaci a nechť množina W jejích bodů nespojitosti v (a,b) je nekonečná. Podle věty 2.20 existuje vzájemně jednoznačné zobrazení $k \in \mathbb{N} \to s_k \in W$ takové, že $W = \{s_k\}$. Takových zobrazení je ovšem nekonečně mnoho. Podle věty 2.24 je však řada

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(|\Delta^+ f(s_k)| + |\Delta^- f(s_k)|\Big)$$

(absolutně) konvergentní a její součet nezávisí na volbě uspořádání množiny W. Protože pro $x \in (a,b)$ je $\Big(|\Delta^+ f(x)| + |\Delta^- f(x)|\Big) \ne 0$ pouze tehdy, když $x \in W$, má tedy smysl definovat

$$\sum_{x \in (a,b)}\Big(|\Delta^+ f(x)| + |\Delta^- f(x)|\Big) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big(|\Delta^+ f(s_k)| + |\Delta^- f(s_k)|\Big)\,, \tag{2.18}$$

kde $\{s_k\}$ je libovolná prostá posloupnost bodů z (a,b) taková, že $W = \{s_k\}$. Podobně, budeme též psát

$$\sum_{x \in [a,b)} |\Delta^+ f(x)| = |\Delta^+ f(a)| + \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta^+ f(s_k)|$$

a

$$\sum_{x\,\in\,(a,b]} |\Delta^- f(x)| = \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta^+ f(s_k)| + |\Delta^- f(b)|.$$

Větu 2.24 můžeme nyní přeformulovat do následující podoby.

2.26. Důsledek. Pro každou funkci $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ platí

$$\sum_{x\,\in\,[a,b)} |\Delta^+ f(x)| + \sum_{x\,\in\,(a,b]} |\Delta^- f(x)| \leq \operatorname{var}_a^b f\,. \tag{2.19}$$

2.4 Derivace funkcí s konečnou variací

Nyní se budeme věnovat vlastnostem funkcí s konečnou variací vzhledem k derivování. Nejprve připomeňme pojem množin s nulovou mírou.

2.27. Definice. Množina $M \subset \mathbb{R}$ má *nulovou míru* ($\mu(M) = 0$), když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje nejvýše spočetný systém otevřených intervalů $I_j,\ j \in \mathbb{N},$ takový, že je

$$M \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \quad \text{a} \quad \sum_{j=1}^{\infty} |I_j| < \varepsilon\,.$$

Řekneme, že nějaká vlastnost platí *skoro všude* (s.v.) na intervalu $[a,b]$, jestliže existuje množina $M \subset [a,b]$ nulové míry taková, že tato vlastnost platí pro každé $x \in [a,b] \setminus M$.

2.28. Cvičení. Dokažte, že platí:

(i) *Každá spočetná množina $S \subset \mathbb{R}$ má nulovou míru.*

(ii) *Sjednocení spočetně mnoha množin nulové míry má nulovou míru.*

2.29. Věta (LEBESGUEOVA VĚTA O DERIVACI FUNKCE S KONEČNOU VARIACÍ)**.** *Každá funkce $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ má vlastní derivaci $f'(x)$ pro s.v. $x \in [a,b]$.*

Důkaz věty 2.29 je rozsáhlý, technicky komplikovaný a do značné míry závislý na pojmech, které se do tohoto textu nevejdou. Pro důkaz odkazujeme na učebnice, které obsahují důkladný přehled této tématiky (viz např. [17, věta 84], [18, věta VI.1.2], [31, Theorems 22.5].

2.30. Poznámka. Je dokonce známo (viz věta 3.10), že derivace funkcí s konečnou variací jsou lebesgueovsky integrovatelné. **ALE !!!!** Obecně neplatí pro každou funkci $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ zdánlivě přirozená rovnost

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Existují totiž funkce $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ nekonstantní na $[a,b]$ a takové, že $f' = 0$ s.v. na $[a,b]$.

2.31. Definice. Funkce $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ se nazývá *singulární*, jestliže $f'(x) = 0$ pro s.v. $x \in [a,b]$.

2.5 Skokové funkce

Nejjednodušším příkladem nekonstantních singulárních funkcí jsou funkce typu $f(x) = \chi_{[a,c]}(x)$, kde $c \in (a,b)$. Jejich zobecněním jsou třídy *jednoduchých skokových funkcí* (anglicky *step functions*) resp. *skokových funkcí* (anglicky *break functions*).

2.32. Definice. Funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je *jednoduchá (též konečná) skoková funkce na* $[a,b]$, jestliže existuje dělení $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$ takové, že na každém jeho dílčím otevřeném intervalu (σ_{j-1}, σ_j) je f konstantní. Množinu jednoduchých skokových funkcí na intervalu $[a,b]$ značíme $\mathbb{S}[a,b]$.

Funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je *skoková funkce na* $[a,b]$, jestliže buďto $f \in \mathbb{S}[a,b]$ nebo existují $c, c_0, d \in \mathbb{R}$, prostá posloupnost $\{s_k\} \subset (a,b)$ a posloupnosti $\{c_k\} \subset \mathbb{R}$ a $\{d_k\} \subset \mathbb{R}$ takové, že platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|c_k| + |d_k|) < \infty \tag{2.20}$$

a

$$\left.\begin{aligned} & f(x) = c + c_0\,\chi_{(a,b]}(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(c_k\,\chi_{(s_k,b]}(x) + d_k\,\chi_{[s_k,b]}(x)\Big) + d\,\chi_{[b]}(x) \\ & \text{pro } x \in [a,b]\,. \end{aligned}\right\} \tag{2.21}$$

Množinu skokových funkcí na intervalu $[a,b]$ značíme $\mathbb{B}[a,b]$.

2.33. Cvičení. Dokažte, že platí:

(i) $f \in \mathbb{S}[a,b]$ *právě tehdy, když existují* $m \in \mathbb{N}$, $c, c_0, d \in \mathbb{R}$, *množiny*

$$\{c_k : k = 1, 2, \ldots, m\} \subset \mathbb{R}, \ \{d_k : k = 1, 2, \ldots, m\} \subset \mathbb{R}$$

a prostá množina $\{s_k : k=1,2,\dots,m\} \subset (a,b)$ *takové, že platí*

$$f(x) = c + c_0\,\chi_{(a,b]}(x) + \sum_{k=1}^{m}\Big(c_k\,\chi_{(s_k,b]}(x) + d_k\,\chi_{[s_k,b]}(x)\Big) + d\,\chi_{[b]}$$

pro $x \in [a,b]$.

(ii) $f \in \mathbb{B}[a,b]$ *právě tehdy když buďto* $f \in \mathbb{S}[a,b]$ *nebo existují* $c \in \mathbb{R}$, *posloupnosti* $\{c_k\} \subset \mathbb{R}$, $\{d_k\} \subset \mathbb{R}$ *a prostá posloupnost* $\{s_k\} \subset [a,b]$ *takové, že platí* (2.20) *a*

$$f(x) = c + \sum_{a \le s_k < x} c_k + \sum_{a < s_k \le x} d_k \quad \textit{pro}\ \ x \in [a,b]\,, \tag{2.22}$$

kde součtové symboly mají smysl zavedený v poznámce 2.25 (tj. v první sumě se sčítá přes všechny indexy k pro které $s_k \in (a,x]$ a ve druhé se sčítá přes všechny indexy k pro které $s_k \in [a,x)$). (POZOR na jemné rozdíly mezi posloupnostmi $\{s_k\}$, $\{c_k\}$, $\{d_k\}$ zde a v definici 2.32.)

(iii) *Pro každou funkci* $f \in \mathbb{B}[a,b]$ *tvaru* (2.22) *platí*

$$f(x-) = c + \sum_{a \le s_k < x} c_k + \sum_{a < s_k < x} d_k \quad \textit{jestliže}\ \ x \in (a,b]$$

a

$$f(x+) = c + \sum_{a \le s_k \le x} c_k + \sum_{a < s_k \le x} d_k \quad \textit{jestliže}\ \ x \in [a,b)\,.$$

(Jak bude vypadat vyjádření jednostranných limit funkcí z $\mathbb{B}[a,b]$ vyjdeme-li z tvaru (2.21)?)

2.34. Věta. *Pro každou skokovou funkci* $f \in \mathbb{B}[a,b]$ *platí*

$$\operatorname{var}_a^b f = |\Delta^+ f(a)| + \sum_{x \in (a,b)} \Big(|\Delta^+ f(x)| + |\Delta^- f(x)|\Big) + |\Delta^- f(b)| < \infty\,. \tag{2.23}$$

Speciálně, $\mathbb{S}[a,b] \subset \mathbb{B}[a,b] \subset \mathbb{BV}[a,b]$.

D ů k a z. Je-li $f \in \mathbb{S}[a,b]$, je tvrzení věty zřejmé. Předpokládejme, tedy že $f \in \mathbb{B}[a,b] \setminus \mathbb{S}[a,b]$ je vyjádřena ve tvaru (2.22) ze cvičení 2.33 (ii).

a) Pro libovolná $x, y \in [a,b]$, $x < y$, máme

$$|f(y) - f(x)| \le \sum_{x \le s_k < y} |c_k| + \sum_{x < s_k \le y} |d_k|\,.$$

Pro každé dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a,b]$ tedy platí

$$V(f,\boldsymbol{\sigma}) \le \sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{\sigma_{j-1}<s_k\le\sigma_j}|c_k| + \sum_{\sigma_{j-1}\le s_k<\sigma_j}|d_k|\Big) \le \sum_{k=1}^{\infty}\big(|c_k|+|d_k|\big)\,.$$

Odtud plyne podle (2.20), že

$$\operatorname{var}_a^b f \le \sum_{k=1}^{\infty}\big(|c_k|+|d_k|\big) < \infty\,, \tag{2.24}$$

tj. $f\in\mathbb{BV}[a,b]$.

b) Na druhou stranu, podle cvičení 2.33 (iii) snadno odvodíme, že platí

$$\Delta^+ f(s_k) = c_k \quad \text{a} \quad \Delta^- f(s_k) = d_k \quad \text{pro každé } k\in\mathbb{N}\,. \tag{2.25}$$

Můžeme tedy použít také důsledek 2.26, podle kterého platí obrácená nerovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty}\big(|c_k|+|d_k|\big) \le \operatorname{var}_a^b f$$

a uzavřít tak důkaz věty. $\square$

2.35. Věta. *Každá skoková funkce na* $[a,b]$ *je singulární na* $[a,b]$.

D ů k a z . Nechť $f\in\mathbb{B}[a,b]\setminus\mathbb{S}[a,b]$, $c\in\mathbb{R}$, posloupnosti $\{c_k\}\subset\mathbb{R}$ a $\{d_k\}\subset\mathbb{R}$ a prostá posloupnost $W=\{s_k\}\subset[a,b]$, jsou takové, že platí (2.20) a (2.22). Definujme

$$v(x) = \sum_{a<w_k\le x}|c_k| + \sum_{a\le w_k<x}|d_k| \quad \text{pro } x\in[a,b]\,.$$

Potom je

$$v(x) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x) \quad \text{pro } x\in[a,b]\,,$$

kde

$$v_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{když } a\le x<s_k,\\ |c_k| & \text{když } x=s_k,\\ |c_k|+|d_k| & \text{když } s_k<x\le b\,.\end{cases}$$

Každá funkce v_k je neklesající na $[a,b]$ a $v_k'(x)=0$ pro $x\neq s_k.$ Máme tedy

$$v'(x)=\sum_{k=1}^{\infty} v_k'(x)=0 \quad \text{pro } x\notin W, \quad \text{tj. pro s.v. } x\in[a,b]\,.$$

Protože pro všechna $x,y\in[a,b]$ taková, že $x\neq y,$ zřejmě platí

$$\Big|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\Big| \le \Big|\frac{v(x)-v(y)}{x-y}\Big|,$$

plyne odsud, že také $f'(x)=0$ pro $x\notin W.$

V případě, že $f\in\mathbb{S}[a,b],$ je tvrzení věty evidentní. □

2.36. Poznámka. Příklad funkce, která je spojitá, neklesající a singulární na daném intervalu, je uveden v [16, V.9, cvičení 4].

2.6 Jordanův rozklad funkce s konečnou variací

2.37. Věta. *Každou funkci $f\in\mathbb{BV}[a,b]$ lze vyjádřit jako součet $f=f_1+f_2$ na $[a,b],$ kde $f_1\in\mathbb{BV}[a,b]\cap\mathbb{C}[a,b]$ a $f_2\in\mathbb{B}[a,b].$*

Je-li $f=\widetilde{f}_1+\widetilde{f}_2,$ kde $\widetilde{f}_1\in\mathbb{C}[a,b]\cap\mathbb{BV}[a,b]$ a $\widetilde{f}_2\in\mathbb{B}[a,b],$ jiný takový rozklad, potom jsou funkce $f_1-\widetilde{f}_1$ a $f_2-\widetilde{f}_2$ konstantní na $[a,b].$

D ů k a z. a) Označme symbolem W množinu bodů nespojitosti funkce $f,$ tj. $W=\{s_k\in[a,b]:k\in\mathbb{K}\},$ kde $\mathbb{K}=\{1,2,\dots,m\}$ nebo $\mathbb{K}=\mathbb{N}.$ Definujme

$$f_2(x)=\sum_{a<s_k\le x}\Delta^- f(s_k)+\sum_{a\le s_k<x}\Delta^+ f(s_k) \quad \text{pro } x\in[a,b]\,. \tag{2.26}$$

Potom podle důsledku 2.26 platí

$$\sum_{x\,\in\,[a,b)}|\Delta^+ f(x)|+\sum_{x\,\in\,(a,b]}|\Delta^- f(x)|\le \operatorname{var}_a^b f$$

a podle definice 2.32 je tedy $f_2\in\mathbb{B}[a,b].$ Analogicky jako ve cvičení 2.33 (iii) (viz též (2.25)) dostaneme

$$f_2(t+)=\sum_{a<s_k\le t}\Delta^- f(s_k)+\sum_{a\le s_k\le t}\Delta^+ f(s_k) \quad \text{pro } t\in[a,b)$$

a

$$f_2(s-)=\sum_{a<s_k<s}\Delta^- f(s_k)+\sum_{a\le s_k<s}\Delta^+ f(s_k)) \quad \text{pro } s\in(a,b]$$

Snadno tedy ověříme, že

$$\left.\begin{aligned} &\Delta^+ f_2(t) = \Delta^+ f(t) \ \text{ pro } t \in [a,b)\,. \\ &\Delta^- f_2(s) = \Delta^- f(s) \ \text{ pro } s \in (a,b]\,. \end{aligned}\right\} \tag{2.27}$$

Tudíž

$$\big((f(t+) - f_2(t+)\big) - \big(f(t) - f_2(t)\big) = \Delta^+ f(t) - \Delta^+ f_2(t) = 0$$

a

$$\big(f(s) - f_2(s)\big) - \big(f(s-) - f_2(s-)\big) = \Delta^- f(s) - \Delta^- f_2(s) = 0\,.$$

Funkce $f_1 = f - f_2$ je tedy spojitá na $[a,b]$ a $f = f_1 + f_2$ na $[a,b]$.

b) Nechť $f = \widetilde{f}_1 + \widetilde{f}_2$, kde $\widetilde{f}_1 \in \mathbb{C}[a,b] \cap \mathbb{BV}[a,b]$ a $\widetilde{f}_2 \in \mathbb{B}[a,b]$. Potom

$$\big(f(t+) - \widetilde{f}_2(t+)\big) - \big(f(t) - \widetilde{f}_2(t)\big) = \Delta^+ f(t) - \Delta^+ \widetilde{f}_2(t) = 0$$

a

$$\big(f(s) - \widetilde{f}_2(s)\big) - \big(f(s-) - \widetilde{f}_2(s-)\big) = \Delta^- f(s) - \Delta^- \widetilde{f}_2(s) = 0$$

platí pro všechna $t \in [a,b)$ a $s \in [a,b)$. Vzhledem k (2.27) dostáváme, že platí

$$\Delta^+ \widetilde{f}_2(t) = \Delta^+ f_2(t) = \Delta^+ f(t) \ \text{ a } \ \Delta^- \widetilde{f}_2(s) = \Delta^- f_2(s) = \Delta^- f(s)$$

pro $t \in [a,b)$, $s \in (a,b]$. Odtud podle definice 2.32 (viz cvičení 2.33 (ii), (2.22) a (2.25)) plyne, že

$$\widetilde{f}_2(x) = c + \sum_{a < s_k \le x} \Delta^- f(s_k) + \sum_{a \le s_k < x} \Delta^+ f(s_k) \quad \text{pro } \ x \in [a,b]\,,$$

kde $c \in \mathbb{R}$ může být libovolné. Rozdíl $f_2 - \widetilde{f}_2 = f_2(a) - \widetilde{f}_2(a)$ je tedy konstantní na $[a,b]$. □

2.38. Poznámka. Podle věty 2.37 lze každou funkci s konečnou variací rozložit na součet funkce spojité a funkce skokové. Takový rozklad se nazývá *Jordanův rozklad* funkce s konečnou variací.

2.39. Definice. Každou funkci f_2 přiřazenou k f podle věty 2.37 nazýváme *skoková část* funkce f. Rozdíl $f - f_2$ nazýváme *spojitá část* funkce f. Skokovou resp. spojitou část funkce f značíme obvykle f^{B} resp. f^{C}.

Následující lemátko se nám bude hodit v kapitole 5.

2.40. Lemma. *Nechť* $f \in \mathbb{BV}[a,b]$, $W = \{w_k\}$ *je její množina bodů nespojitosti v intervalu* $[a,b]$. *Pro* $n \in \mathbb{N}$ *a* $x \in [a,b]$ *definujme*

$$f^{\mathrm{B}}(x) = \sum_{a<w_k\le x} \Delta^- f(w_k) + \sum_{a\le w_k<x} \Delta^+ f(w_k)$$

a

$$f_n^{\mathrm{B}}(x) = \sum_{\substack{a<w_k\le x\\ k\le n}} \Delta^- f(w_k) + \sum_{\substack{a\le w_k<x\\ k\le n}} \Delta^+ f(w_k)\,.$$

Potom je $f_n^{\mathrm{B}} \in \mathbb{S}[a,b]$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *a platí*

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{var}_a^b (f^{\mathrm{B}} - f_n^{\mathrm{B}}) = 0\,. \tag{2.28}$$

D ů k a z . Zřejmě je $f_n^{\mathrm{B}} \in \mathbb{S}[a,b]$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. V případě, že množina W je konečná, je $f_n^{\mathrm{B}} = f^{\mathrm{B}}$ na $[a,b]$ pro dostatečně velká n a tvrzení lemmatu je triviální. Předpokládejme tedy, že W je nekonečná. Potom

$$f^{\mathrm{B}} - f_n^{\mathrm{B}} = \sum_{\substack{a<w_k\le x\\ k>n}} \Delta^- f(w_k) + \sum_{\substack{a\le w_k<x\\ k>n}} \Delta^+ f(w_k)$$

a podle věty 2.34 dostaneme

$$\operatorname{var}_a^b (f^{\mathrm{B}} - f_n^{\mathrm{B}}) \le \sum_{\substack{a<w_k\le x\\ k>n}} |\Delta^- f(w_k)| + \sum_{\substack{a\le w_k<x\\ k>n}} |\Delta^+ f(w_k)|\,. \tag{2.29}$$

Podle důsledku 2.26 je výraz na pravé straně nerovnosti (2.29) zbytek absolutně konvergentní řady, který ovšem konverguje k 0 při $n \to \infty$. Platí tudíž (2.28). □

2.41. Příklad. Vraťme se ještě k funkcím

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 \le x \le \frac{1}{n}\,, \\ x\,\sin(\dfrac{\pi}{x}) & \text{pro } \frac{1}{n} \le x \le 2 \end{cases} \qquad \text{pro } n \in \mathbb{N}$$

a

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x = 0\,, \\ x\,\sin(\dfrac{\pi}{x}) & \text{pro } x > 0\,. \end{cases}$$

Z příkladu 2.12 víme, že $\operatorname{var}_0^2 f_n < \infty$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Snadno ověříme, že $\{f_n\}$ konverguje k f stejnoměrně na $[0,2])$ a přitom podle příkladu 2.8 f nemá konečnou variaci na $[0,2]$.

2.7 Bodová konvergence

Podle příkladu 2.41 stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí s konečnou variací nemusí stačit k tomu, aby její limita měla také konečnou variaci. Z následující věty však uvidíme, že stejnoměrná ohraničenost variací členů dané posloupnosti už zaručí, že dokonce její bodová limita konečnou variací má. (Pomocí argumentů použitých v příkladu 2.8 ověřte, že pro posloupnost $\{f_n\}$ z příkladů 2.12 a 2.41 platí, že $\lim_{n\to\infty} \operatorname{var}_0^2 f_n = \infty.$ nemá stejnoměrně ohraničené variace.)

2.42. Věta. *Nechť pro funkci* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *existuje posloupnost funkcí* $\{f_n\}$ *taková, že*

$$\operatorname{var}_a^b f_n \le \varkappa < \infty \quad \textit{pro } n\in\mathbb{N}, \quad \textit{a} \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \ \textit{ pro } x\in[a,b]\,.$$

Potom je také $\operatorname{var}_a^b f \le \varkappa$.

D ů k a z . Pro každé dělení $\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]$ platí

$$V(f,\boldsymbol{\sigma}) = \lim_{n\to\infty} V(f_n,\boldsymbol{\sigma}) \le \varkappa$$

a tudíž je také $\operatorname{var}_a^b f \le \varkappa$. □

2.43. Cvičení. Nechť

$$g(x) = \begin{cases} 2^{-k} & \text{když } x=\frac{1}{k+1} \text{ pro nějaké } k\in\mathbb{N}\,, \\ 0 & \text{pro ostatní } x\in[0,1]\,, \end{cases}$$

Dokažte, že $f\in\mathbb{BV}[0,1]$.

Nyní zformulujeme a dokážeme Hellyovu větu, která bude užitečná např. pro důkaz totální spojitosti některých operátorů definovaných na prostoru $\mathbb{BV}[a,b]$. Hellyova věta říká, že z každé posloupnosti funkcí se stejnoměrně ohraničenou variací lze vybrat posloupnost bodově konvergující k funkci s konečnou variací.

2.44. Věta (HELLYOVA VĚTA O VÝBĚRU)**.** *Nechť* $\{f_n\}\subset\mathbb{BV}[a,b]$, $\varkappa\in\mathbb{R}$,

$$|f_n(a)| \le \varkappa \ \textit{ a } \ \operatorname{var}_a^b f_n \le \varkappa \quad \textit{pro všechna } n\in\mathbb{N}\,.$$

Potom existují funkce $f\in\mathbb{BV}[a,b]$ *a podposloupnost* $\{f_{n_k}: k\in\mathbb{N}\}$ *posloupnosti* $\{f_n\}$ *takové, že platí*

$$|f(a)|\le\varkappa, \quad \operatorname{var}_a^b f \le \varkappa \ \textit{ a } \ \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x) \quad \textit{na } [a,b]\,.$$

V důkazu využijeme následující dvě tvrzení.

Tvrzení 1. *Nechť*

$$|f_n(x)| \le M < \infty \quad \textit{na} \ [a,b] \quad \textit{pro všechna}\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Potom pro každou spočetnou množinu $P \subset [a,b]$ posloupnost $\{f_n\}$ obsahuje podposloupnost $\{f_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ takovou, že

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(p) \in \mathbb{R} \ \textit{ pro všechna}\ p \in P.$$

D ů k a z . Nechť $P = \{p_k\}$. Máme $|f_n(p_k)| \le M < \infty$ pro všechna $n, k \in \mathbb{N}$. Podle Bolzanovy – Weierstraßovy věty pak existují posloupnost $\{n_{k,1} : k \in \mathbb{N}\}$ a $q_1 \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_{k,1}}(p_1) = q_1.$$

Podobně existují $\{f_{n_{k,2}} : k \in \mathbb{N}\} \subset \{f_{n_{k,1}} : k \in \mathbb{N}\}$ a $q_2 \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_{k,2}}(p_2) = q_2 \in \mathbb{R}\,, \ \text{přičemž také} \ \lim_{k\to\infty} f_{n_{k,2}}(p_1) = q_1 \in \mathbb{R}\,.$$

Takto pro každé $j \in \mathbb{N}$ najdeme posloupnosti

$$\{f_{n_{k,j}} : k \in \mathbb{N}\} \subset \{f_{n_{k,j-1}} : k \in \mathbb{N}\}$$

a čísla $q_j \in \mathbb{R}$ takové, že platí

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_{k,\ell}}(p_\ell) = q_\ell : k \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R} \quad \text{pro každé}\ \ell \in \{1, 2, \dots, j\}\,.$$

Položme $f_{n_k} = f_{n_{k,k}}$ pro $k \in \mathbb{N}$. Potom

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(p_j) = q_j \in \mathbb{R} \quad \text{pro}\ j \in \mathbb{N}\,. \qquad \square$$

Tvrzení 2. *Předpokládejme, že všechny funkce f_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou neklesající na $[a,b]$ a že existuje $M \in (0,\infty)$ takové, že $||f_n|| \le M$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Potom existují podposloupnost $\{f_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ posloupnosti $\{f_n\}$ a funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ neklesající na $[a,b]$ takové, že platí*

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x) \quad \textit{pro}\ \ x \in [a,b]\,.$$

D ů k a z . Budiž $P=(\mathbb{P}\cap(a,b))\cup[a]\cup[b]$ množina racionálních čísel z intervalu (a,b) doplněná o body $a,b.$ Množina P je spočetná a $[a,b]\setminus P\subset(a,b).$ Podle tvrzení 1 existují podposloupnost $\{n_k\}\subset\mathbb{N}$ a zobrazení $\varphi:P\to\mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(p)=\varphi(p) \quad \text{pro } p\in P\,.$$

Zřejmě $\varphi(p')\le\varphi(p'')$ pro všechna $p',p''\in P$ taková, že $p'\le p''.$ Dále, definujme

$$\varphi(x)=\sup_{p\in P\cap[a,x)}\varphi(p) \text{ pro } x\in(a,b)\setminus P\,.$$

Potom φ je definovaná a neklesající na $[a,b]$ a

$$\varphi(x)=\lim_{\substack{p\to x-\\ p\in P}}\varphi(p) \quad \text{pro } x\in(a,b)\setminus P\,.$$

Ukážeme, že v každém bodě $x_0\in(a,b),$ ve kterém je funkce φ spojitá platí

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_0)=\varphi(x_0)\,. \tag{2.30}$$

Vskutku, nechť je dáno $\varepsilon>0.$ Potom existuje $\delta_\varepsilon>0$ takové, že

$$x_0-\delta_\varepsilon<x<x_0+\delta_\varepsilon \implies \varphi(x_0)-\varepsilon<\varphi(x)<\varphi(x_0)+\varepsilon\,.$$

Zvolíme-li $r'\in P\cap(x_0-\delta_\varepsilon,x_0)$ a $r''\in P\cap(x_0,x_0+\delta_\varepsilon),$ bude platit

$$\varphi(x_0)-\varepsilon<\varphi(r')\le\varphi(x_0)\le\varphi(r'')<\varphi(x_0)+\varepsilon\,.$$

Dále, zvolme k_ε tak, aby bylo

$$\varphi(r')-\varepsilon<f_{n_k}(r')<\varphi(r')+\varepsilon$$

a

$$\varphi(r'')-\varepsilon<f_{n_k}(r'')<\varphi(r'')+\varepsilon$$

pro každé $k\ge k_\varepsilon.$ Potom, pro každé $k\ge k_\varepsilon$ dostaneme také

$$\begin{aligned}\varphi(x_0)-2\,\varepsilon<\varphi(r')-\varepsilon<f_{n_k}(r')\le f_{n_k}(x_0)&\\ \le f_{n_k}(r'')<\varphi(r'')+\varepsilon<\varphi(x_0)+2\,\varepsilon&\end{aligned}$$

čili platí ((2.30)).

Dokázali jsme tedy, že značí-li Q množinu bodů nespojitosti funkce φ v (a,b), pak

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = \varphi(x) \quad \text{pro } \ x\in[a,b]\setminus Q\,.$$

Podle věty 2.20 je množina Q spočetná. Můžeme tedy použít ještě jednou tvrzení 1 a dokázat tak existenci vybrané posloupnosti

$$\{f_{n_{k_\ell}} : \ell\in\mathbb{N}\}\subset\{f_{n_k} : k\in\mathbb{N}\}\,,$$

která má limitu $\psi(x)\in\mathbb{R}$ pro každé $x\in Q$. Definujeme-li tedy

$$f(x)=\begin{cases}\varphi(x) & \text{když } \ x\in[a,b]\setminus Q\,,\\ \psi(x) & \text{když } \ x\in Q\,,\end{cases}$$

bude

$$\lim_{\ell\to\infty} f_{n_{k_\ell}}(x) = f(x) \quad \text{pro } x\in[a,b]$$

a protože funkce, která je na intervalu $[a,b]$ bodovou limitou posloupnosti funkcí neklesajících na $[a,b]$, je také neklesající, tvrzení 2 je dokázáno. $\square$

Důkaz věty 2.44.

Pro každé $n\in\mathbb{N}$ a $x\in[a,b]$ položme

$$g_n(x)=\operatorname{var}_a^x f_n \quad \text{a} \quad h_n(x)=g_n(x)-f_n(x)\,.$$

Máme $f_n=g_n-h_n$ a všechny funkce g_n, h_n jsou neklesající na $[a,b]$ (viz Cvičení 2.15). Dále,

$$\|g_n\|\le \operatorname{var}_a^b f_n\le\varkappa \quad \text{a} \quad \|h_n\|\le\|f_n\|+\|g_n\|\le 2\,\varkappa \quad \text{pro } n\in\mathbb{N}.$$

Podle tvrzení 2 existují funkce $g,h\in\mathbb{BV}[a,b]$ a posloupnost $\{n_k\}\subset\mathbb{N}$ takové, že

$$\lim_{k\to\infty} g_{n_k}(x)=g(x) \quad \text{a} \quad \lim_{k\to\infty} h_{n_k}(x)=h(x) \quad \text{pro každé } x\in[a,b]\,.$$

Označme $f=g-h$. Potom je

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)=\lim_{k\to\infty}\big(g_{n_k}(x)-h_{n_k}(x)\big)=g(x)-h(x)=f(x)$$

pro každé $x\in[a,b]$. Zřejmě je $|f(a)|\le\varkappa$. Konečně, podle věty 2.42 je také $\operatorname{var}_a^b f\le\varkappa$. Tím je důkaz dokončen. $\square$

Výklad v této kapitole se opíral o monografie V. Jarníka *Diferenciální počet II* [16, Kapitola V] a *Integrální počet II* [17, Kapitola V] a dále o odstavec II.6 v monografii T.H.Hildebrandta *Theory of Integration* [13] a o kapitolu XIII v monografii Š. Schwabika *Integrace v R* (*Kurzweilova teorie*) [40], viz též kapitolu VI.2 v monografi A. N. Kolmogorova a S. V. Fomina *Základy teorie funkcí a funkcionální analýzy*. V těchto monografiích lze též nalézti i některé další podrobnosti.

Kapitola 3

Absolutně spojité funkce

Speciálním případem funkcí s konečnou variací jsou funkce absolutně spojité, které úzce souvisí s Lebesgueovou teorií integrálu a jsou dobře známy z Carathéodoryovy teorie obyčejných diferenciálních rovnic. Integrály, které se v této kapitole vyskytují, jsou integrály Lebesgueovy,

3.1 Definice a základní vlastnosti

3.1. Definice. Funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je *absolutně spojitá* na intervalu $[a, b]$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každý konečný systém intervalů $\{[a_j, b_j] : j = 1, 2, , \dots, m\}$ splňující

$$a \le a_1 < b_1 \le a_2 < b_2 \dots < b_{m-1} \le a_m < b_m \le b \quad \text{a} \quad \sum_{j=1}^{m} (b_j - a_j) < \delta \tag{3.1}$$

platí

$$\sum_{j=1}^{m} |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon \,. \tag{3.2}$$

Množinu funkcí absolutně spojitých na $[a, b]$ značíme $\mathbb{AC}[a, b]$.

3.2. Cvičení. Dokažte tvrzení:

Každá lipschitzovská funkce na intervalu $[a, b]$ (viz cvičení 2.7 (iv)) *je na tomto intervalu absolutně spojitá. Speciálně, je-li derivace* f' *funkce* f *spojitá na* $[a, b]$ [1] *, pak* f *je absolutně spojitá na* $[a, b]$.

3.3. Věta. *Je-li* f *absolutně spojitá na* $[a, b]$ *a* $[c, d] \subset [a, b]$, *pak je* f *absolutně spojitá i na* $[c, d]$.

Je-li $a < c < b$ *a* f *je absolutně spojitá na* $[a, c]$ *i* $[c, b]$, *pak je* f *absolutně spojitá na* $[a, b]$.

[1] tj. f' je spojitá na (a, b), existují konečné limity $f'(a+) = \lim_{t \to a+} f'(t)$, $f'(b-) = \lim_{t \to b-} f'(t)$ a $f'(a) = f'(a+)$ a $f'(b) = f'(b-)$

D ů k a z . První tvrzení je evidentní.

Předpokládejme, že $f \in \mathbb{AC}[a,c]$ a $f \in \mathbb{AC}[c,b]$ a buď dáno $\varepsilon > 0$. Můžeme zvolit $\delta > 0$ tak, aby platilo

$$\sum_{j=1}^{m} |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

pro každý systém intervalů $\{[\alpha_j, \beta_j] : j = 1, 2, , \ldots, m\}$ takový, že

$$a \le \alpha_1 < \beta_1 \le \alpha_2 < \beta_2 \ldots < \beta_{m-1} \le \alpha_m < \beta_m \le c \quad \text{a} \quad \sum_{j=1}^{m} (\beta_j - \alpha_j) < \delta \tag{3.3}$$

a současně

$$\sum_{j=1}^{p} |f(\delta_j) - f(\gamma_j)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

pro každý systém intervalů $\{[\gamma_j, \delta_j] : j = 1, 2, , \ldots, p\}$ takový, že

$$c \le \gamma_1 < \delta_1 \le \gamma_2 < \delta_2 \ldots < \delta_{p-1} \le \gamma_p < \delta_p \le b \quad \text{a} \quad \sum_{j=1}^{p} (\delta_j - \gamma_j) < \delta\,. \tag{3.4}$$

Nyní, mějme systém intervalů $\{[a_j, b_j] : j = 1, 2, , \ldots, n\}$ takový, že

$$a \le a_1 < b_1 \le a_2 < b_2 \ldots < b_{n-1} \le a_n < b_n \le b \quad \text{a} \quad \sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j) < \delta\,. \tag{3.5}$$

Smíme předpokládat, že c neleží v žádném z intervalů (a_j, b_j), $j = 1, 2, \ldots, n$. (Kdyby totiž bylo $c \in (a_k, b_k)$ pro nějaké $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$,, rozdělili bychom $[a_k, b_k]$ na sjednocení $[a_k, c] \cup [c, b_k]$ a nový systém by opět splňoval (3.5)) Můžeme tedy rozdělit daný systém $\{[a_j, b_j] : j = 1, 2, , \ldots, n\}$ na systémy

$$\{[\alpha_j, \beta_j] : j = 1, 2, , \ldots, m\} \quad \text{a} \quad \{[\gamma_j, \delta_j] : j = 1, 2, , \ldots, p\}$$

splňující (3.3) a (3.4). Součet $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)|$ se tedy rozpadá na dva součty, z nichž každý je menší než $\dfrac{\varepsilon}{2}$. Tudíž $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon$. □

3.4. Příklad. Podle cvičení 3.2 je každá funkce, která má spojitou derivaci na $[a,b]$, absolutně spojitá na $[a,b]$. Jednoduchým příkladem absolutně spojité funkce na $[a,b]$, která nemá spojitou derivaci na (a,b), je např. funkce

$$f(x) = \begin{cases} x-a & \text{pro } x \in [a, \dfrac{a+b}{2}]\,, \\[2ex] b-x & \text{pro } x \in [\dfrac{a+b}{2}, b]\,, \end{cases}$$

která je zřejmě absolutně spojitá na intervalech $[a, \frac{a+b}{2}]$ a $[\frac{a+b}{2}, b]$ a tedy podle věty 3.3 také na $[a,b]$.

3.5. Poznámka. Jestliže $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $\mathbb{K}\subset\mathbb{N}$ a jestliže pro každé $\varepsilon>0$ existuje $\delta>0$ takové, že

$$\sum_{j\in\mathbb{K}} |f(\beta_j)-f(\alpha_j)| < \varepsilon \tag{3.6}$$

platí pro každý (nikoliv nutně konečný) systém intervalů $\{[\alpha_j,\beta_j]\subset[a,b]: j\in\mathbb{K}\}$, splňující

$$(\alpha_j,\beta_j)\cap(\alpha_k,\beta_k)=\emptyset \quad \text{pro } \ j\neq k \ \text{ a } \ \sum_{j\in\mathbb{K}}(\beta_j-\alpha_j)<\delta\,, \tag{3.7}$$

pak je funkce $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ samozřejmě absolutně spojitá na $[a,b]$.

V následujícím lemmatu ukážeme, že platí i obrácená implikace. Poznamenejme ještě, že podle lemmatu 2.21 je každý systém intervalů splňující (3.7) nejvýše spočetný.

3.6. Lemma. *Je-li* $f\in\mathbb{AC}[a,b]$, *pak pro každé* $\varepsilon>0$ *existuje* $\delta>0$ *takové, že* (3.6) *platí pro libovolný (případně nekonečný) systém podintervalů intervalu* $[a,b]$

$$\{[\alpha_j,\beta_j]\subset[a,b]: j\in\mathbb{K}\}$$

splňující (3.7).

D ů k a z . Předpokládejme, že $f\in\mathbb{AC}[a,b]$. Zřejmě stačí dokázat tvrzení lemmatu pro případ, že $\mathbb{K}=\mathbb{N}$. Nechť je dáno $\varepsilon>0$ a nechť $\delta>0$ je určeno definicí 3.1. Nechť $\{[\alpha_j,\beta_j]: j\in\mathbb{N}\}$ je systém podintervalů v $[a,b]$ splňující (3.7). Potom pro každé $m\in\mathbb{N}$ máme

$$\sum_{j=1}^{m}(\beta_j-\alpha_j)<\delta \quad \text{a tedy} \quad \sum_{j=1}^{m}|f(\beta_j)-f(\alpha_j)|<\frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Odtud

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,.$$

Tím je důkaz dokončen. □

3.7. Věta. *Každá funkce absolutně spojitá na intervalu $[a,b]$ má na tomto intervalu konečnou variaci.*

D ů k a z . Nechť $f \in \mathbb{AC}$. Zvolme $\delta > 0$ tak, aby platilo

$$\sum_{j=1}^{m} |f(b_j) - f(a_j)| < 1$$

pro každý konečný systém intervalů $\{[a_j, b_j] : j = 1, 2, , \ldots, m\}$ splňující (3.1). Dále, zvolme dělení $\{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ intervalu $[a,b]$ tak, aby platilo

$$0 < x_i - x_{i-1} < \delta \quad \text{pro každé } i = 1, 2, \ldots, k\,.$$

Potom pro každé $i = 1, 2, \ldots, k$ a každé dělení $\boldsymbol{\sigma}^i = \{\alpha_0^i, \alpha_1^i, \ldots, \alpha_{m_i}^i\}$ intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ máme

$$\sum_{j=1}^{m_i} (\alpha_j^i - \alpha_{j-1}^i) = x_i - x_{i-1} < \delta$$

a tudíž (podle věty 2.11)

$$\operatorname{var}_a^b f = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{var}_{x_{i-1}}^{x_i} f = \sum_{i=1}^{k} \sup_{\boldsymbol{\sigma}^i \in \mathscr{D}[x_{i-1}, x_i]} V(f, \boldsymbol{\sigma}^i) \le k < \infty\,.$$

□

3.8. Věta. *Jestliže $f, g \in \mathbb{AC}[a,b]$, pak také*

$$|f|\,,\ \ f+g,\ \ f\,g,\ \ \max\{f,g\},\ \ \min\{f,g\} \in \mathbb{AC}[a,b]\,.$$

Je-li navíc $|f(x)| > 0$ na $[a,b]$, pak také $\dfrac{1}{f} \in \mathbb{AC}[a,b]$.

D ů k a z . Nechť $f,\ g \in \mathbb{AC}[a,b]$.

a) Pro libovolná $x,\ y \in [a,b]$ platí $|f(x)| \le |f(x) - f(y)| + |f(y)|$. Tudíž

$$|f(x) - f(y)| \ge \big||f(x)| - |f(y)|\big|$$

a

$$\sum_{j=1}^{m} \big||f(\beta_j)| - |f(\alpha_j)|\big| \leq \sum_{j=1}^{m} |f(\beta_j) - f(\alpha_j)|\,.$$

Odtud okamžitě plyne, že také $|f| \in \mathbb{AC}[a,b]$.

b) Druhé a třetí tvrzení, tj. $f+g \in \mathbb{AC}[a,b]$ a $f\,g \in \mathbb{AC}[a,b]$, plynou z nerovností

$$|(f(x)+g(x)) - (f(y)+g(y))| \leq |f(x)-f(y)| + |g(x)-g(y)|$$

a

$$|f(x)\,g(x) - f(y)\,g(y)| \leq \|f\|\,|g(x)-g(y)| + \|g\|\,|f(x)-f(y)|\,.$$

c) Protože pro libovolné $x \in [a,b]$ máme

$$\max\{f(x),g(x)\} = \frac{1}{2}\big(f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|\big)$$

a

$$\min\{f(x),g(x)\} = \frac{1}{2}\big(f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|\big)\,,$$

platí v důsledku a) a b) také

$$\max\{f,g\} \in \mathbb{AC}[a,b] \ \text{ a } \ \min\{f,g\} \in \mathbb{AC}[a,b]\,.$$

d) Konečně, je-li navíc $|f(x)|>0$ pro $x \in [a,b]$, pak existuje $\mu>0$ takové, že $|f(x)| \geq \mu$ platí pro $x \in [a,b]$ a tudíž také

$$\Big|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)}\Big| \leq \frac{|f(x)-f(y)|}{\mu^2}\,.$$

Nyní už je snadné ukázat, že $\dfrac{1}{f} \in \mathbb{AC}[a,b]$. □

3.9. Věta. *Funkce $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ je absolutně spojitá na intervalu $[a,b]$ právě tehdy, když existují funkce f_1 a f_2 neklesající a absolutně spojité na $[a,b]$ a takové, že $f=f_1-f_2$ na intervalu $[a,b]$.*

D ů k a z . a) Nechť $f=f_1-f_2$ na $[a,b]$, kde f_1, f_2 jsou absolutně spojité a neklesající na $[a,b]$. Pak podle věty 3.8 je také f absolutně spojitá na $[a,b]$.

b) Nechť $f \in \mathbb{AC}[a,b]$. Podle vět 3.7 a 2.14 existují funkce f_1, f_2 neklesající na $[a,b]$ takové, že $f=f_1-f_2$. Podle důkazu věty 2.14 můžeme položit

$$f_1(x) = \operatorname{var}_a^x f \ \text{ a } \ f_2(x) = f_1(x) - f(x) \ \text{ pro } x \in [a,b].$$

Vzhledem k větě 3.8 stačí dokázat, že f_1 je absolutně spojitá na $[a,b]$. Předpokládejme, že je dáno $\varepsilon>0$ a nechť $\delta>0$ je takové, že

$$\sum_{j=1}^{m} |f(b_j) - f(a_j)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

platí pro každý systém intervalů $\{[a_j,b_j]: j=1,2,,\dots,m\}$ splňující (3.1).

Nechť $[\alpha_j,\beta_j],\ j{=}1,2,\dots,n,$ je libovolný systém intervalů splňující (3.3), kde $m=n$. Pro každé $j=1,2,\dots,n$ zvolme dělení $\boldsymbol{\sigma}^j=\{\sigma_0^j,\sigma_1^j,\dots,\sigma_{n_j}^j\}$ intervalu $[\alpha_j,\beta_j]$. Potom

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n_j}\bigl(\sigma_i^j-\sigma_{i-1}^j\bigr)=\sum_{j=1}^{n}\bigl[\beta_j-\alpha_j\bigr]<\delta$$

a tudíž

$$\sum_{j=1}^{n}V(f,\boldsymbol{\sigma}^j)<\frac{\varepsilon}{2}\ =\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n_j}\bigl|f(\sigma_i^j)-f(\sigma_{i-1}^j\bigr|\,.$$

Odtud už plyne, že

$$\sum_{j=1}^{n}\bigl(f_1(\beta_j)-f_1(\alpha_j)\bigr)=\sum_{j=1}^{n}\operatorname{var}_{\alpha_j}^{\beta_j}f=\sum_{j=1}^{n}\Bigl(\sup_{\boldsymbol{\sigma}^j\in\mathscr{D}[\alpha_j,\beta_j]}V(f,\boldsymbol{\sigma}^j)\Bigr)\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon\,.$$

Tím je důkaz věty dokončen. □

3.2 Absolutně spojité funkce a Lebesgueův integrál

Připomeňme, že podle věty 2.29 každá funkce s konečnou variací na intervalu $[a,b]$ má pro s.v. $x\in[a,b]$ konečnou derivaci $f'(x)$. Podle věty 3.7 má tedy stejnou vlastnost i každá funkce, která je absolutně spojitá na $[a,b]$. Ve zbývající části této kapitoly připomeneme některé další základní vlastnosti derivací funkcí absolutně spojitých a souvislost mezi absolutní spojitostí a neurčitým Lebesguevým integrálem. V případech, kdy se důkazy nebo jejich části opírají o teorii míry v rozsahu přesahujícím rámec tohoto textu, důkazy resp. jejich příslušné části neuvádíme a pouze odkazujeme na dostupnou literaturu. Integrálem se v tomto odstavci rozumí integrál Stieltjesův.

Podle následující věty jsou derivace funkcí s konečnou variací (a tedy tím spíše i funkcí absolutně spojitých) lebesgueovsky integrovatelné. Její důkaz podstatně využívá řady poznatků teorie míry a Lebesgueovy integrace, které se nevejdou do tohoto textu. Pro úplný důkaz tedy odkazujeme na příslušnou literaturu (viz např. [17, věta 91], [18, věta VI.4.1], resp. [31, Theorem 22.7].

3.10. Věta. *Má-li funkce $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ konečnou variaci na $[a,b]$, pak je její derivace f' lebesgueovsky integrovatelná na $[a,b]$.*

Je-li navíc f *neklesající na* $[a,b]$, *pak platí nerovnost*

$$0 \leq \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}\,x \leq f(b) - f(a)\,, \tag{3.8}$$

Nyní ukážeme, že neurčitý integrál integrovatelné funkce je absolutně spojitý.

3.11. Věta. *Jestliže* $g \in \mathbb{L}^1[a,b]$ *a* $f(x) = \displaystyle\int_a^x g\,\mathrm{d}\,t$ *pro* $x \in [a,b]$, *pak je funkce* f *absolutně spojitá na intervalu* $[a,b]$.

D ů k a z . Nechť $g \in \mathbb{L}^1[a,b]$. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Potom existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\sum_{j=1}^m \int_{a_j}^{b_j} \big|g(x)\big|\,\mathrm{d}\,x < \varepsilon$$

platí pro každý systém intervalů $\{[a_j,b_j] \subset [a,b] : j = 1,2,\dots,m\}$ splňující (3.1) (viz např. [18, věta V.5.5] nebo [17, věta 51] - tato vlastnost se obvykle nazývá absolutní spojitost Lebesgueova integrálu).

Máme tedy

$$\sum_{j=1}^m \big|f(b_j) - f(a_j)\big| = \sum_{j=1}^m \Big|\int_{a_j}^{b_j} g\,\mathrm{d}\,t\Big| \leq \sum_{j=1}^m \int_{a_j}^{b_j} g\,\mathrm{d}\,x < \varepsilon\,.$$

To znamená, že $f \in \mathbb{AC}[a,b]$. □

3.12. Cvičení. Dokažte, že funkce $f(x) = \sqrt{|x|}$ je absolutně spojitá na intervalu $[-1,1]$, přičemž f není lipschitzovská na $[-1,1]$. (Návod: f je na $[-1,1]$ neurčitým Lebesgueovým integrálem lebesgueovsky integrovatelné funkce a současně $f'(0-) = -\infty$ a $f'(0+) = \infty$.)

Další tvrzení se týká derivování neurčitých integrálů integrovatelných funkcí.

3.13. Věta. *Jestliže* $g \in \mathbb{L}^1[a,b]$ *a*

$$f(x) = \int_a^x g\,\mathrm{d}\,t \quad \textit{pro} \;\; x \in [a,b]\,,$$

potom $f'(x) = g(x)$ *pro s.v.* $x \in [a,b]$.

D ů k a z se opírá o řadu výsledků teorie míry, které nejsou do tohoto textu zařazeny. Odkazujeme tedy čtenáře na důkazy např. v [18, věta VI.3.1] nebo [31, Theorem 23.4]. □

Nechť je dána funkce $g \in \mathbb{L}^1[a,b]$. Podle vět 3.11 a 3.13) je její neurčitý Lebesgueův integrál f absolutně spojitý na $[a,b]$ a platí $f' = f$ s.v. na $[a,b]$. Chceme ukázat, že f je absolutně spojitá na $[a,b]$ tehdy a jen tehdy, f je neurčitý integrálem nějaké lebesgueovsky integrovatelné funkce. Pro důkaz takového tvrzení je klíčové následující tvrzení známé jako Rieszovo lemma.

3.14. Lemma (RIESZ). *Nechť* $f \in \mathbb{C}[a,b]$ *a*

$$E = \{x \in (a,b) : \exists\, \xi \in (x,b] \text{ takové, že } f(\xi) > f(x)\}\,.$$

Potom je množina E *otevřená a je sjednocením nejvýše spočetného systému po dvou disjunktních otevřených intervalů* (a_k, b_k), *přičemž pro každý z nich platí* $f(a_k) \le f(b_k)$.

D ů k a z je založen m.j. na známém faktu, že každá neprázdná otevřená množina je sjednocením nejvýše spočetného systému po dvou disjunktních otevřených intervalů (viz např. [16, věta 69]). Podrobný důkaz Rieszova lemmatu lze nalézti např. v monografii [18] v odstavci VI.1.2 věnovaném důkazu Lebesgueovy věty o derivaci funkce s konečnou variací (naše věta 2.29). □

3.15. Poznámka. Zobecnění Rieszova lemmatu na případ, kdy funkce f může být jen regulovaná, bylo dokázano v [40, lemma XIII.3.5].

3.16. Lemma. *Jestliže* $f \in \mathbb{AC}[a,b]$ *je neklesající na* $[a,b]$ *a* $f'(x) = 0$ *pro s.v.* $x \in [a,b]$, *pak* f *je konstantní na* $[a,b]$.

D ů k a z . Vzhledem ke své monotónnosti funkce f zobrazuje interval $[a,b]$ na interval $[f(a), f(b)]$. Dokážeme, že $f(a) = f(b)$.

Nechť je dáno $\varepsilon > 0$ a nechť $\delta > 0$ přísluší k tomuto ε podle lemmatu 3.6.

Označme Z množinu všech $x \in [a,b]$ pro které platí $f'(x) = 0$. Podle předpokladu má její doplněk $[a,b] \setminus Z$ nulovou míru ($\mu([a,b] \setminus Z) = 0$). To znamená, že existuje konečný nebo spočetný systém $\{(\sigma_j, \beta_j) : j \in \mathbb{K}\}$ splňující (3.7) a

$$[a,b] \setminus Z \subset \bigcup_{j \in \mathbb{K}} (\sigma_j, \beta_j)\,.$$

Obraz $f([a,b] \setminus Z)$ množiny $[a,b] \setminus Z$ je tedy obsažen ve sjednocení otevřených intervalů $\{(f(\sigma_j), f(\beta_j)) : j \in \mathbb{K}$. Protože podle lemmatu 3.6 platí (3.6), plyne odtud, že množina $f([a,b] \setminus Z)$ má nulovou míru, tj.

$$\mu(f([a,b] \setminus Z)) = 0\,. \tag{3.9}$$

Nyní, nechť $x \in Z$. Potom je $f'(x) = 0$. Pro dané ε tedy existuje $\Delta > 0$ takové, že

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} < \varepsilon \quad \text{pro každé } t \text{ takové, že } 0 < |t - x| < \Delta\,.$$

Odtud plyne, že

$$\varepsilon\, x - f(x) < \varepsilon\, t - f(t) \quad \text{platí pro každé } t \in (x, x+\Delta)\,.$$

Podle Rieszova lemmatu které použijeme na funkci $\varepsilon\, x - f(x)$ na místě $f(x)$, je tedy množina Z obsažena ve sjednocení konečného nebo spočetného systému disjunktních intervalů $\{(a_k, b_k) \subset [a,b] : k \in \mathbb{K}\}$, přičemž platí

$$\varepsilon\, a_k - f(a_k) \le \varepsilon\, b_k - f(b_k) \quad \text{pro každé } k \in \mathbb{K}$$

neboli

$$f(b_k) - f(a_k) \le \varepsilon\,(b_k - a_k) \quad \text{pro každé } k \in \mathbb{K}$$

a tudíž

$$\sum_{k \in M} \big[f(b_k) - f(a_k)\big] \le \varepsilon \sum_{k \in M} \big[b_k - a_k\big] \le \varepsilon\,(b-a)\,.$$

Odtud už vidíme, že množina $f(Z)$ má také nulovou míru, tj.

$$\mu(f(Z)) = 0\,. \tag{3.10}$$

Podle (3.9) a (3.10) má interval $[f(a), f(b)] = f(Z) \cup (f([a,b] \setminus f(Z))$ nulovou délku, tj. (vzhledem k monotónnosti funkce f) máme $f(a) = f(x) = f(b)$ pro každé $x \in (a,b)$. $\square$

3.17. Věta. *Funkce* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *je absolutně spojitá na* $[a,b]$ *právě tehdy, když*

$$f(x) - f(a) = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \qquad \textit{pro } x \in [a,b] \tag{3.11}$$

pro nějakou funkci $g \in \mathbb{L}^1[a,b]$. *Potom je* $f' = g$ *s.v. na* $[a,b]$.

D ů k a z . a) Nechť $g \in \mathbb{L}^1[a,b]$ a

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{pro } x \in [a,b]\,.$$

Potom podle věty 3.11 je f absolutně spojitá na $[a,b]$ a podle věty 3.13 je $f' = g$ s.v. na $[a,b]$.

b) Předpokládejme zprvu, že funkce $f \in \mathbb{AC}[a,b]$ je neklesající na $[a,b]$. Podle vět 3.7 a 3.10 je $f' \in \mathbb{L}^1[a,b]$. Položme

$$h(x) = \int_a^x f'\,\mathrm{d}\,t, \quad \text{a} \quad g(x) = f(x) - h(x) \quad \text{pro } x \in [a,b]\,.$$

Ukážeme, že také funkce g je neklesající na $[a,b]$. Vskutku, podle věty 3.10 pro libovolné body $x,y\in[a,b]$ takové, že $x\le y$, máme

$$\begin{aligned} g(y)-g(x) &= \big(f(y)-h(y)\big)-\big(f(x)-h(x)\big) \\ &= \big(f(y)-f(x)\big)-\int_x^y f'\,\mathrm{d}\,t \ge 0 \end{aligned}$$

Dále, podle věty 3.11 je funkce h absolutně spojitá na $[a,b]$ a podle věty 3.13 je $h'=f'$ s.v. na $[a,b]$. To znamená, že $g'=(f-h)'=0$ s.v. na $[a,b]$. Podle lemmatu 3.16 je proto funkce g konstantní na $[a,b]$. Máme tedy

$$g(x)=f(x)-h(x)=f(a)-h(a)=f(a) \quad \text{pro } x\in[a,b]$$

neboli

$$f(x)=f(a)+h(x)=f(a)+\int_a^x f'\,\mathrm{d}\,t \quad \text{pro } x\in[a,b]$$

a tudíž (3.11) platí pro každou funkci $f\in\mathbb{AC}[a,b]$, která je neklesající na $[a,b]$.

V obecném případě $f\in\mathbb{AC}[a,b]$ existují podle věty 3.9 funkce f_1,f_2 absolutně spojité na $[a,b]$, neklesající na $[a,b]$ a takové, že $f=f_1-f_2$ na $[a,b]$. Máme tedy

$$\begin{aligned} f(x) = f_1(x)-f_2(x) &= \Big(f_1(a)+\int_a^x f_1'\,\mathrm{d}\,t\Big)-\Big(f_2(a)+\int_a^x f_2'\,\mathrm{d}\,t\Big) \\ &= f(a)+\int_a^x f'\,\mathrm{d}\,t \quad \text{pro } x\in[a,b]\,. \end{aligned}$$

Důkaz je dokončen. □

3.18. Cvičení. (i) Dokažte následující dvě tvrzení:

a) Jestliže $f\in\mathbb{AC}[a,b]$, pak je $f'=0$ s.v. na $[a,b]$ tehdy a jen tehdy, když f je konstantní na $[a,b]$. (Srovnejte s poznámkou 2.30 .)

a

b) Pro každou funkci $f\in\mathbb{BV}[a,b]$ a každé $x\in[a,b]$ platí

$$f^{\,\mathrm{AC}}(x)-f^{\,\mathrm{AC}}(a)=\int_a^x f'\,\mathrm{d}t\,.$$

(ii) Je známo, že je-li f absolutně spojitá na $[a,b]$ a $v(x)=\operatorname{var}_a^b f$, pak platí $v'=|f'|$ s.v. na $[a,b]$ (viz [17, Věta 118]). Na základě tohoto faktu dokažte, že $\operatorname{var}_a^b f=\int_a^b |f'|\,\mathrm{d}x$ pro každou funkci f absolutně spojitou na $[a,b]$.

3.3 Lebesgueův rozklad funkcí s konečnou variací

Víme již (viz věta 2.37 a poznámka 2.38), že každou funkci s konečnou variací na $[a,b]$ můžeme rozložit na součet funkce spojité a funkce skokové resp. na rozdíl dvou funkcí neklesajících na $[a,b]$ (viz věta 2.14). Další možnost rozkladu funkcí s konečnou variací nabízí následující věta.

3.19. Věta (LEBESGUEŮV ROZKLAD FUNKCE S KONEČNOU VARIACÍ)**.** *Pro každou funkci $f\in\mathbb{BV}[a,b]$ existují absolutně spojitá funkce $f^{\,\mathrm{AC}}$, singulární spojitá funkce $f^{\,\mathrm{SC}}$ a skoková funkce $f^{\,\mathrm{B}}$ takové, že*

$$f=f^{\,\mathrm{AC}}+f^{\,\mathrm{SC}}+f^{\,\mathrm{B}}\ \ \textit{na}\ [a,b]\,.$$

Jestliže $f=f_1+f_2+f_3$, kde funkce f_1 je absolutně spojitá na $[a,b]$, funkce f_2 je singulární a spojitá na $[a,b]$ a funkce f_3 je skoková funkce na $[a,b]$, pak jsou funkce $f^{\,\mathrm{AC}}-f_1$, $f^{\,\mathrm{SC}}-f_2$ a $f^{\,\mathrm{B}}-f_3$ konstantní na $[a,b]$.

D ů k a z. a) Podle věty 2.37 existuje skoková funkce $f^{\,\mathrm{B}}$ taková, že funkce $f^{\,\mathrm{C}}=f-f^{\,\mathrm{B}}$ je spojitá na $[a,b]$. Položme

$$f^{\,\mathrm{AC}}(x)=\int_a^x f^{\,\prime}(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{a} \quad f^{\,\mathrm{SC}}(x)=f^{\,\mathrm{C}}(x)-f^{\,\mathrm{AC}}(x)\ \text{ pro } x\in[a,b]\,.$$

Podle věty 2.35 je $(f^{\,\mathrm{B}})'=0$ s.v. na $[a,b]$ a podle věty 3.13 máme $(f^{\,\mathrm{AC}})'=f^{\,\prime}$ s.v. na $[a,b]$. To znamená, že

$$(f^{\,\mathrm{SC}})'=f^{\,\prime}-(f^{\,\mathrm{AC}})'-(f^{\,\mathrm{B}})'=0 \text{ s.v. na } [a,b].$$

b) Nechť $f=f_1+f_2+f_3$, kde $f_1\in\mathbb{AC}[a,b]$, f_2 je singulární a spojitá na $[a,b]$ a $f_3\in\mathbb{B}[a,b]$. Podle věty 2.37 jsou rozdíly $\big(f^{\,\mathrm{AC}}+f^{\,\mathrm{SC}}\big)-\big(f_1+f_2\big)$ a $f^{\,\mathrm{B}}-f_3$ konstantní na $[a,b]$. Musí být tedy konstantní na $[a,b]$ i rozdíl

$$f^{\,\mathrm{AC}}-f_1=-\big((f^{\,\mathrm{AC}}+f^{\,\mathrm{SC}})-(f_1+f_2)\big)-\big(f^{\,\mathrm{B}}-f_3\big)\,.$$

Tím jsme dokončili důkaz. □

3.20. Definice. Jestliže $f\in\mathbb{BV}[a,b]$, pak funkce $f^{\,\mathrm{AC}}$ resp. $f^{\,\mathrm{SC}}$ resp. $f^{\,\mathrm{B}}$ z věty 3.19 nazýváme *absolutně spojitá část* resp. *spojitá singulární část* resp. *skoková část* funkce f.

Kapitolu uzavřeme ještě jedním doplňkem ke větě 3.19.

3.21. Věta. *Je-li $f\in\mathbb{AC}[a,b]$ neklesající na $[a,b]$, pak jsou neklesající na $[a,b]$ i funkce $f^{\,\mathrm{AC}}$, $f^{\,\mathrm{SC}}$, a $f^{\,\mathrm{B}}$ z věty* 3.19.

D ů k a z. Nechť $f \in \mathbb{AC}[a,b]$ je neklesající na $[a,b]$ a funkce $f^{\,\mathrm{AC}}$, $f^{\,\mathrm{SC}}\, f^{\,\mathrm{B}}$ jsou přiřazeny funkci f podle věty 3.19. Dále, nechť $\{w_k\}$ je množina bodů nespojitosti funkce f a $x,\, y$ je libovolná dvojice bodů z $[a,b]$ taková, že $x \leq y$.

Protože f je neklesající na $[a,b]$, máme

$$\Delta^+ f(t) \geq 0 \text{ a } \Delta^- f(s) \geq 0 \text{ pro } t \in [a,b),\ s \in (a,b]$$

a proto

$$f^{\,\mathrm{B}}(y) - f^{\,\mathrm{B}}(x) = \sum_{x < w_k \leq y} \Delta^- f(w_k) + \sum_{x \leq w_k < y} \Delta^+ f(w_k) \geq 0\,.$$

Skoková část $f^{\,\mathrm{B}}$ funkce f je tedy neklesající na $[a,b]$.

Označme dále symbolem g spojitou část funkce f, tj. $g = f - f^{\,\mathrm{B}}$. Podle Důsledku 2.26 máme

$$f^{\,\mathrm{B}}(y) - f^{\,\mathrm{B}}(x) \leq \operatorname{var}_x^y f = f(y) - f(x)$$

a tudíž

$$g(y) - g(x) = \big(f(y) - f(x)\big) - \big(f^{\,\mathrm{B}}(y) - f^{\,\mathrm{B}}(x)\big) \geq 0\,.$$

Spojitá část funkce f je tedy neklesající na $[a,b]$.

Pro s.v. $x \in [a,b]$ je

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{x - y} \in \mathbb{R}\,.$$

Protože je f neklesající na $[a,b]$, platí $f'(x) \geq 0$ pro s.v. $x \in [a,b]$. Podle Věty 3.17 tedy dostaneme

$$f^{\,\mathrm{AC}}(y) - f^{\,\mathrm{AC}}(x) = \int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}\,t \geq 0 \text{ jakmile } x,\, y \in [a,b] \text{ a } x \leq y\,.$$

To znamená, že $f^{\,\mathrm{AC}}$ je neklesající na $[a,b]$.

Podle věty 2.35 je $(f^{\,\mathrm{B}})' = 0$ s.v. na $[a,b]$ a v důkazu věty 3.19 bylo ukázáno, že také $(f^{\,\mathrm{SC}})' = 0$ s.v. na $[a,b]$. Tudíž

$$g' = f' - (f^{\,\mathrm{SC}})' - (f^{\,\mathrm{B}})' = f' \quad \text{s.v. na } [a,b].$$

Odtud použitím (3.8) a věty 3.17 odvodíme, že platí

$$g(y) - g(x) \geq \int_x^y g'(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}\,t = f^{\,\mathrm{AC}}(y) - f^{\,\mathrm{AC}}(x)$$

neboli

$$\begin{aligned} f^{\,\mathrm{SC}}(y) - f^{\,\mathrm{SC}}(x) &= \big(g(y) - f^{\,\mathrm{AC}}(y)\big) - \big(g(x) - f^{\,\mathrm{AC}}(x)\big) \\ &= \big(g(y) - g(x)\big) - \big(f^{\,\mathrm{AC}}(y) - f^{\,\mathrm{AC}}(x)\big) \geq 0\,. \end{aligned}$$

Spojitá singulární část $f^{\,\mathrm{SC}}$ funkce f je tedy také neklesající na $[a, b]$. Tím je důkaz dokončen. □

Další podrobnosti o funkcích absolutně spojitých lze nalézti v monografiích V. Jarníka *Diferenciální počet* II [16, v.9], *Integrální počet* II [17, v.5], A.N. Kolmogorova a S.V. Fomina *Základy teorie funkcí a funkcionální analýzy* [18, Sec. 33.2] a Š. Schwabika *Integrace v* $\mathbb{R}$ (*Kurzweilova teorie*) [40, XIII.4] a ve skriptech [31] J. Lukeše a J. Malého *Measure and Integral*.

Kapitola 4

Regulované funkce

4.1. Definice. Funkce $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ se nazývá *regulovaná* na $[a,b]$, jestliže pro každé $t\in(a,b]$ a každé $s\in[a,b)$ existují konečné limity

$$f(t-)=\lim_{\tau\to t-}f(\tau) \text{ a } f(s+)=\lim_{\tau\to s+}f(\tau)\,,$$

tj. má-li funkce f na intervalu $[a,b]$ nespojitosti nejvýše *1. druhu*. Množinu funkcí regulovaných na $[a,b]$ značíme $\mathbb{G}[a,b]$.

4.2. Poznámka. Zřejmě $\mathbb{BV}[a,b]\cup\mathbb{C}[a,b]\subset\mathbb{G}[a,b]$, přičemž

$$\mathbb{G}[a,b]\setminus\mathbb{C}[a,b]\neq\emptyset \text{ a } \mathbb{G}[a,b]\setminus\mathbb{BV}[a,b]\neq\emptyset\,.$$

Následující tvrzení plyne okamžitě z lemmatu 2.21.

4.3. Věta. *Každá funkce regulovaná na $[a,b]$ má na $[a,b]$ nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti.* □

4.4. Věta. *Jestliže posloupnost $\{f_n\}$ regulovaných funkcí konverguje stejnoměrně na intervalu $[a,b]$ k funkci f, potom $f\in\mathbb{G}[a,b]$.*

D ů k a z . Nechť $x\in[a,b)$, nechť $\{x_k\}\subset(x,b]$ je libovolná posloupnost taková, že $x_k>x$ pro všechna $k\in\mathbb{N}$ a $x_k\to x$ pro $k\to\infty$. Nechť je dáno libovolné $\varepsilon>0$. Zvolme $n_0\in\mathbb{N}$ a $k_0\in\mathbb{N}$ tak, aby platilo

$$\|f-f_{n_0}\|<\frac{\varepsilon}{3} \text{ a } |f_{n_0}(x_k)-f_{n_0}(x_\ell)|<\frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pro všechna } k,\ell\geq k_0\,.$$

Potom budeme mít pro všechna $k,\ell\geq k_0$

$$\begin{aligned}&|f(x_k)-f(x_\ell)|\\ &\quad\leq|f(x_k)-f_{n_0}(x_k)|+|f_{n_0}(x_k)-f_{n_0}(x_\ell)|+|f(x_\ell)-f_{n_0}(x_\ell)|<\varepsilon\,,\end{aligned}$$

tj. existuje konečná limita $f(x+)=\lim_{k\to\infty}f(x_k)$. Podobně bychom ukázali, že pro každé $x\in(a,b]$ existuje konečná limita $f(x-)$. □

4.5. Definice. Pro libovolnou funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, otevřený interval $(\alpha,\beta) \subset [a,b]$ a dělení $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$ definujeme

$$\omega_{(\alpha,\beta)}(f) = \sup_{x',x'' \in J} |f(x') - f(x'')| \ \text{ a } \ \omega_D(f) = \max_{i=1,2,\ldots,m} \omega_{(\sigma_{i-1},\sigma_i)}(f).$$

4.6. Věta. *Následující tři tvrzení jsou ekvivalentní*

(i) $f \in \mathbb{G}[a,b]$.

(ii) *Existuje posloupnost* $\{f_n\} \subset \mathbb{S}[a,b]$ *(jednoduchých skokových funkcí), která konverguje stenoměrně k* f *na* $[a,b]$.

(iii) *Pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje dělení* $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$ *takové, že* $\omega_D(f) < \varepsilon$.

D ů k a z . a) Implikace (ii) $\Longrightarrow$ (i) je dokázána větou 4.4.

b) Předpokládejme, že platí (i) a nechť je dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Potom pro každé $x \in [a,b]$ existuje $\delta(x) > 0$ takové, že platí

$$x - \delta(x) > a \text{ pro všechna } x \in (a,b], \quad x + \delta(x) < b \text{ pro všechna } x \in [a,b)$$

a

$$\left.\begin{aligned} &\omega_{(a,a+\delta(a))}(f) < \varepsilon,\ \omega_{(b-\delta(b),b)}(f) < \varepsilon\,, \\ &\omega_{(x-\delta(x),x)}(f) < \varepsilon,\ \omega_{(x,x+\delta(x))}(f) < \varepsilon \text{ pro všechna } x \in (a,b)\,. \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

Intervaly

$$[a, a+\delta(a)),\ (x-\delta(x), x+\delta(x)),\ x \in (a,b),\ (b-\delta(b), b]$$

tvoří otevřené pokrytí intervalu $[a,b]$, ze kterého lze podle Vitaliovy věty (viz např. [16, věta 81]) vybrat pokrytí konečné, tj. konečný systém intervalů

$$[a, a+\delta(a)),\ (x_i-\delta(x_i), x_i+\delta(x_i))\,,\ i = 1,2,\ldots,m-1,\ (b-\delta(b), b],$$

takový, že

$$[a, a+\delta(a)) \cup \bigcup_{j=1}^{m} (x_i-\delta(x_i), x_i+\delta(x_i)) \cup (b-\delta(b), b] \supset [a,b]\,,$$

Současně, vzhledem k (4.1), platí

$$\omega_{(x_i-\delta(x_i),x_i)}(f) < \varepsilon \ \text{ a } \ \omega_{(x_i,x_i+\delta(x_i))}(f) < \varepsilon \text{ pro všechna } i = 1,2,\ldots m{-}1\,.$$

Označme $x_0 = a$ a $x_m = b$ a nechť

$$\boldsymbol{\sigma} = \Big\{x_0, \sigma_1, x_1, \dots \sigma_{m-1}, x_{m-1}, \sigma_m, x_m\Big\},$$

kde

$$\sigma_i \in (x_i - \delta(x_i), x_{i-1} + \delta(x_{i-1})) \cap (x_{i-1}, x_i), \quad i = 1, 2, \dots, m-1.$$

Potom

$$\omega_{(a,\sigma_1)}(f) \le \omega_{(a,a+\delta(a))}(f) < \varepsilon, \qquad \omega_{(\sigma_m,b)}(f) \le \omega_{(b-\delta(b),b)}(f) < \varepsilon$$

a

$$\omega_{(\sigma_i,x_i)}(f) \le \omega_{(x_i-\delta(x_i),x_i)}(f) < \varepsilon,\ \omega_{(x_i,\sigma_{i+1})}(f) \le \omega_{(x_i,x_i+\delta(x_i))}(f) < \varepsilon$$

pro každé $i = 1, 2, \dots, m-1$, tj.

$$\omega_D(f) < \varepsilon.$$

c) Předpokládejme, že platí (iii). Nechť je dáno $\varepsilon > 0$ a nechť

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m\} \in \mathscr{D}[a,b]$$

je dělení $[a,b]$ takové, že $\omega_D(f) < \varepsilon$. Pro každé $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ zvolme libovolně $\xi_i \in (\sigma_{i-1}, \sigma_i)$ a definujme

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} f(\sigma_i) & \text{pro } x = \sigma_i, \\ f(\xi_i) & \text{pro } x \in (\sigma_{i-1}, \sigma_i). \end{cases}$$

Pro každé $x \in [a,b]$ máme $|f(x) - g_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ a tudíž také $\|f - g_\varepsilon\| < \varepsilon$. Jestliže tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme $f_n = g_{1/n}$, bude $f_n \in \mathbb{S}[a,b]$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$ pro $n \to \infty$. □

4.7. Důsledek. *Každá funkce regulovaná na $[a,b]$ je na $[a,b]$ ohraničená.*

D ů k a z. Podle tvrzení (iii) z věty 4.6 existuje dělení $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ intervalu $[a,b]$ takové, že

$$|f(x)| \le |f(\frac{\sigma_{j-1} + \sigma_j}{2})| + 1 \quad \text{pro } x \in (\sigma_{j-1}, \sigma_j),\ j \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Odtud plyne, že $|f(x)| \le M$ pro všechna $x \in [a,b]$, kde

$$M = \max\Big\{|f(a)|, |f(\frac{\sigma_{j-1} + \sigma_j}{2})| + 1, |f(\sigma_j)| : j = 1, 2, \dots, m\Big\} < \infty.$$

□

4.8. Důsledek. *Pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje nejvýše konečně mnoho* $x \in [a,b]$ *takových, že platí*

$$|\Delta^+ f(x)| > \varepsilon \quad \textit{nebo} \quad |\Delta^- f(x)| > \varepsilon\,.$$

D ů k a z . Podle tvrzení (iii) z věty 4.6 ke každému $\varepsilon > 0$ můžeme najít dělení $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ intervalu $[a,b]$ takové, že

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{pro} \;\; x, y \in (\sigma_{j-1}, \sigma_j),\; j \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Speciálně, $|\Delta^+ f(x)| = |f(x+) - f(x)| \le \varepsilon$ a $|\Delta^- f(x)| = |f(x) - f(x-)| \le \varepsilon$ pro všechna $x \in [a,b] \setminus \boldsymbol{\sigma}$. Platí tedy tvrzení tohoto důsledku. □

4.9. Věta. $\mathbb{G}[a,b]$ *je Banachův prostor vzhledem k normě*

$$\|f\|_{\mathbb{G}} = \|f\| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|\,.$$

D ů k a z . Předpokládejme, že posloupnost $\{f_n\} \subset \mathbb{G}[a,b]$ je cauchyovská v prostoru $\mathbb{G}[a,b]$. Jako v částech a) a b) důkazu věty 2.19 můžeme dokázat, že existuje funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ taková, že $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$. Podle věty 4.4 je $f \in \mathbb{G}[a,b]$ a tím je věta dokázána. □

4.10. Poznámky.

(i) Podle definice 2.32 $f \in \mathbb{S}[a,b]$ právě tehdy, když existuje dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a,b]$ takové, že f je konstantní na každém podintervalu (σ_{j-1}, σ_j). Každá funkce z $\mathbb{S}[a,b]$ je konečná lineární kombinace funkcí tvaru $\chi_{(\alpha,\beta)}$ a $\chi_{[\tau]}$, kde (α,β) může být libovolný podinterval v $[a,b]$ a τ může být libovolný bod z $[a,b]$. Platí ovšem $\chi_{(\alpha,\beta)} = \chi_{(\alpha,b]} - \chi_{[\beta,b]}$ pro libovolná $\alpha, \beta \in [a,b]$, $\alpha < \beta$ a $\chi_{[\tau]} = \chi_{[\tau,b]} - \chi_{(\tau,b]}$ pro každé $\tau \in [a,b)$.

Tudíž $f \in \mathbb{S}[a,b]$ tehdy a jen tehdy, když f je konečná lineární kombinace charakteristických funkcí intervalů $[\tau,b]$, $(\tau,b]$, $\tau \in [a,b]$, a charakteristické funkce jednobodového intervalu $[b]$, tj.

$$\mathbb{S}[a,b] = \mathrm{Lin}\Big(\chi_{[\tau,b]},\; \chi_{(\tau,b]},\, \tau \in [a,b),\; \chi_{[b]}\Big)\,,$$

kde (Lin (M) značí lineární obal množiny M. Podobně bychom ukázali, že je také

$$\mathbb{S}[a,b] = \mathrm{Lin}\Big(\chi_{[a,\tau]},\; \chi_{[a,\tau)]},\, \tau \in (a,b],\; \chi_{[a]}\Big)\,,$$

(ii) Množina $\mathbb{S}[a,b]$ je podle tvrzení (ii) věty 4.6 hustá v $\mathbb{G}[a,b]$, tj. $\overline{\mathbb{S}[a,b]} = \mathbb{G}[a,b]$, kde $\overline{\mathbb{S}[a,b]}$ značí uzávěr $\mathbb{S}[a,b]$ v $\mathbb{G}[a,b]$.

4.11. Lemma. *Nechť* $\{f_n\} \subset \mathbb{G}[a,b]$ *a* $f_n \rightrightarrows f$ *na* $[a,b]$. *Potom platí též*

$$f_n(x-) \rightrightarrows f(x-) \ \text{ a } \ f_n(x+) \rightrightarrows f(x+) \ \text{ na } [a,b]\,,$$

kde $f(a-) = f(a)$, $f(b+) = f(b)$ *a* $f_k(a-) = f_k(a)$, $f_k(b+) = f_k(b)$ *pro* $k \in \mathbb{N}$.
D ů k a z . Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$\widetilde{f}_n(x) = \begin{cases} f_n(x+) & \text{když } x \in [a,b)\,, \\ f_n(b) & \text{když } x = b \end{cases}$$

a

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x+) & \text{když } x \in [a,b)\,, \\ f(b) & \text{když } x = b\,. \end{cases}$$

Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Existuje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takové, že je $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$ pro každé $n \geq n_\varepsilon$ a každé $t \in [a,b]$. Odtud ovšem limitním přechodem $t \to x+$ dostaneme, že také pro každé $x \in [a,b)$ a každé $n \geq n_\varepsilon$ platí

$$|\widetilde{f}_n(x) - \widetilde{f}(x)| = \lim_{t \to x+} |f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon\,,$$

tj.

$$\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{f}_n - \widetilde{f}\| = 0 \ \text{ neboli } f_n(x+) \rightrightarrows f(x+) \quad \text{na } [a,b]\,.$$

Podobně bychom ukázali, že platí i $f_n(x-) \rightrightarrows f(x-)$ na $[a,b]$. □

Ve zbývající části kapitoly uvedeme několik tvrzení, které budou později (zejména v kapitolách 6 a 7) užitečné. Nejprve shrneme důsledky lemmatu 4.11 pro některé důležité podmnožiny prostoru $\mathbb{G}[a,b]$.

4.12. Důsledky. *Množiny*

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b] &= \{f \in \mathbb{G}[a,b] : f(x-) = f(x) \text{ na } (a,b)\}\,, \\ \widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{L}}[a,b] &= \{f \in \mathbb{G}[a,b] : f(x-) = f(x) \text{ na } (a,b]\}, \\ \mathbb{G}_{\mathrm{R}}[a,b] &= \{f \in \mathbb{G}[a,b] : f(x+) = f(x) \text{ na } (a,b)\}, \\ \widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{R}}[a,b] &= \{f \in \mathbb{G}[a,b] : f(x-) = f(x) \text{ na } [a,b)\}, \\ \mathbb{G}_{reg}[a,b] &= \{f \in \mathbb{G}[a,b] : f(x-) + f(x+) = 2\,f(x) \text{ na } (a,b)\} \end{aligned}\right\} \qquad (4.2)$$

jsou uzavřené v $\mathbb{G}[a,b]$ *a tudíž jsou to také Banachovy prostory vzhledem k operacím a normě indukovaným z* $\mathbb{G}[a,b]$.

□

4.13. Lemma.

$$\overline{\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]}=\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b],\quad \overline{\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{L}}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]}=\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{L}}[a,b],$$

$$\overline{\mathbb{G}_{\mathrm{R}}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]}=\mathbb{G}_{\mathrm{R}}[a,b],\quad \overline{\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{R}}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]}=\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{R}}[a,b],$$

$$\overline{\mathbb{G}_{reg}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]}=\mathbb{G}_{reg}[a,b].$$

D ů k a z . Dokážeme pouze první a poslední tvrzení. Zbývající vztahy se dokážou analogicky.

a) Nechť $f\in\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$ a $\varepsilon>0.$ Podle věty 4.6 (ii) existuje $\varphi\in\mathbb{S}[a,b]$ takové, že

$$|f(x)-\varphi(x)|\le\|f-\varphi\|<\varepsilon\quad\text{pro }\ x\in[a,b]\,. \tag{4.3}$$

Dále, pro každé $x\in(a,b)$ existuje $\delta(x)>0$ takové, že $x-\delta(x)>a$ a

$$|f(x)-f(t)|=|f(x-)-f(t)|<\varepsilon\quad\text{pro }\ t\in(x-\delta(x),x)\,.$$

Pro každé $x\in(a,b)$ a $t\in(x-\delta(x),x]$ tedy máme

$$|\varphi(x)-\varphi(t)|\le|\varphi(x)-f(x)|+|f(x)-f(t)|+|f(t)-\varphi(t)|<3\,\varepsilon\,,$$

tj.

$$|\varphi(x)-\varphi(x-)|\le 3\,\varepsilon.$$

Položme

$$\widetilde{\varphi}(x)=\begin{cases}\varphi(x) & \text{pro }\ x=a \text{ nebo } x=b\,,\\ \varphi(x-) & \text{pro }\ x\in(a,b)\,.\end{cases}$$

Potom $\widetilde{\varphi}\in\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]$,

$$|f(x)-\widetilde{\varphi}(x)|=|f(x)-\varphi(x)|<\varepsilon\quad\text{když } x=a \text{ nebo } x=b$$

a

$$|f(x)-\widetilde{\varphi}(x)|$$
$$\le|f(x)-\varphi(x)|+|\varphi(x)-\varphi(x-)|<4\,\varepsilon\quad\text{když } x\in(a,b)\,.$$

Odtud už plyne, že množina $\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]$ je hustá v $\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$.

b) Nechť $f \in \mathbb{G}_{\text{reg}}[a,b]$. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$ a funkce $\varphi \in \mathbb{S}[a,b]$ je taková, že platí ((4.3)). Potom musí být také

$$\left.\begin{aligned} &|f(x-)-\varphi(x-)| \le \varepsilon \quad \text{pro } x \in [a,b)\,, \\ \text{a} \\ &|f(x+)-\varphi(x+)| \le \varepsilon \quad \text{pro } x \in (a,b]\,. \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

Položme

$$\widetilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(a) & \text{když } x = a\,, \\ \frac{1}{2}\Big(\varphi(x+)+\varphi(x-)\Big) & \text{když } x \in (a,b)\,, \\ \varphi(b) & \text{když } x = b\,. \end{cases} \tag{4.5}$$

Potom $\widetilde{\varphi} \in \mathbb{S}[a,b] \cap \mathbb{G}_{\text{reg}}[a,b]$. Dále, vzhledem k ((4.4)) a ((4.5)),

$$\begin{aligned} |f(x)-\widetilde{\varphi}(x)| &= \left|\tfrac{1}{2}\,[f(x+)+f(x-)] - \tfrac{1}{2}\,[\varphi(x+)+\varphi(x-)]\right| \\ &\le \tfrac{1}{2}\,\Big(\big|f(x+)-\varphi(x+)\big| + \big|f(x-)-\varphi(x-)\big|\Big) \le \varepsilon \end{aligned}$$

když $x \in (a,b)$. Konečně, podle (4.3) a (4.5) máme

$$|f(x)-\widetilde{\varphi}(x)| = |f(x)-\varphi(x)| < \varepsilon \text{ když } x = a \text{ nebo } x = b\,.$$

Odtud už plyne, že platí $\overline{\mathbb{G}_{\text{reg}}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b]} = \mathbb{G}_{\text{reg}}[a,b]$. □

4.14. Lemma.

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b] &= \mathrm{Lin}\Big(1,\ \chi_{(\tau,b]}, \tau \in [a,b),\ \chi_{[b]}\Big)\,, \\ \widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{L}}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b] &= \mathrm{Lin}\Big(\chi_{[a,\tau]}, \tau \in (a,b]\Big)\,, \\ \mathbb{G}_{\mathrm{R}}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b] &= \mathrm{Lin}\Big(1,\ \chi_{[a]}, \chi_{[\tau,b]}, \tau \in [a,b)\Big)\,, \\ \widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{R}}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b] &= \mathrm{Lin}\Big(\chi_{[\tau,b]}, \tau \in [a,b)\Big)\,, \\ \mathbb{G}_{reg}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b] &= \mathrm{Lin}\Big(1,\ \chi_{(a,b]},\ \frac{1}{2}\,\chi_{[\tau]} + \chi_{(\tau,b]}, \tau \in (a,b),\ \chi_{[b]}\Big)\,, \\ \widetilde{\mathbb{G}}_{reg}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b] &= \mathrm{Lin}\Big(1,\ \frac{1}{2}\,\chi_{[\tau]} + \chi_{(\tau,b]},\ \tau \in (a,b)\Big)\,. \end{aligned}$$

D ů k a z . První tvrzení je obsaženo v poznámce 4.10 (i). Dokážeme ještě např. předposlední z uvedených relací.

Nechť tedy $f \in \mathbb{S}[a,b] \cap \mathbb{G}_{\text{reg}}[a,b]$. Potom existují

$$m \in \mathbb{N},\ c_0, c_1, \ldots, c_{m+1} \in \mathbb{R} \ \text{ a } \ \boldsymbol{\sigma} = \big\{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_m\big\} \in \mathscr{D}[a,b]$$

takové, že

$$f(x)=\begin{cases} c_0 & \text{když } x=a,\\ c_j & \text{když } x\in(\sigma_{j-1},\sigma_j) \text{ pro nějaké } j=1,2,\dots,m\,,\\ \frac{c_j+c_{j+1}}{2} & \text{když } x=\sigma_j \text{ pro nějaké } j=1,2,\dots,m{-}1\,,\\ c_{m+1} & \text{když } x=b,\end{cases}$$

tj.

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= c_0\,\chi_{[a]}(x)+\sum_{j=1}^{m} c_j\,\chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j)}(x)\\ &+\frac{1}{2}\Big(\sum_{j=1}^{m-1}\big(c_j+c_{j+1}\big)\,\chi_{[\sigma_j\,]}(x)\Big)+c_{m+1}\chi_{[b]}(x) \text{ pro } x\in[a,b]\,. \end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

Pravou stranu vztahu ((4.6)) můžeme upravit takto

$$\begin{aligned} f = \;& c_0\,\chi_{[a,b\,]}-c_0\,\chi_{(a,b]}+\sum_{j=1}^{m} c_j\,\chi_{(\sigma_{j-1},b]}-\sum_{j=1}^{m-1} c_j\,\chi_{[\sigma_j,b]}-c_m\,\chi_{[b]}\\ +\;& \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1} c_j\,\chi_{[\sigma_j\,]}+\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1} c_{j+1}\,\chi_{[\sigma_j\,]}+c_{m+1}\,\chi_{[b]}\\ =\;& c_0\,\chi_{[a,b\,]}-c_0\,\chi_{(a,b]}+\sum_{j=1}^{m} c_j\,\chi_{(\sigma_{j-1},b]}-\sum_{j=1}^{m-1} c_j\,\big(\chi_{(\sigma_j,b]}+\chi_{[\sigma_j\,]}\big)\\ +\;& \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1} c_j\,\chi_{[\sigma_j\,]}+\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1} c_{j+1}\,\chi_{[\sigma_j\,]}+\big(c_{m+1}-c_m\big)\,\chi_{[b]}\\ =\;& c_0\,\chi_{[a,b\,]}-c_0\,\chi_{(a,b]}+\sum_{j=0}^{m-1} c_{j+1}\,\chi_{(\sigma_j,b]}-\sum_{j=1}^{m-1} c_j\,\chi_{(\sigma_j,b]}\\ -\;& \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1} c_j\,\chi_{[\sigma_j\,]}+\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1} c_{j+1}\,\chi_{[\sigma_j\,]}+\big(c_{m+1}-c_m\big)\,\chi_{[b]}\\ =\;& c_0\chi_{[a,b\,]}+\big(c_1-c_0\big)\,\chi_{(a,b]}+\sum_{j=1}^{m-1}\big(c_{j+1}-c_j\big)\Big(\chi_{(\sigma_j,b]}+\tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_j\,]}\Big)\\ +\;& \big(c_{m+1}-c_m\big)\,\chi_{[b]}\\ =\;& d_0\chi_{[a,b\,]}+d_1\,\chi_{(a,b]}+\sum_{j=2}^{m} d_j\,\Big(\chi_{(\sigma_j,b]}+\tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_j\,]}\Big)+d_{m+1}\,\chi_{[b]}\,, \end{aligned}$$

kde

$$d_0 = c_0,\ \ d_j = c_j - c_{j-1} \text{ pro } \ j = 1, 2, \dots, m+1\,. \tag{4.7}$$

Dokázali jsme tedy, že

$$f \in \mathrm{Lin}\Big(1, \chi_{(a,b]}, \frac{1}{2}\,\chi_{[\tau]} + \chi_{[\tau,b]}, \tau \in (a,b), \chi_{[b]}\Big)\,.$$

Protože vztahy ((4.7)) definují vzájemně jednoznačnou korespondenci mezi vektory

$$(c_0, c_1, \dots, c_m, c_{m+1}) \ \text{ a } \ (d_0, d_1, \dots, d_m, d_{m+1})\,,$$

znamená to, že platí

$$\mathbb{G}_{\text{reg}}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b] = \mathrm{Lin}\Big(1, \chi_{(a,b]}, \chi_{[\tau]}, \chi_{[\tau,b]}, \tau \in (a,b), \chi_{[b]}\Big)\,. \qquad \square$$

Další podrobnosti týkající se regulovaných funkcí lze najít zejména v monografii *Volterra Stieltjes-Integral Equations* [14, sec.3] Ch. Höniga. Užitečné speciální dodatky (např. charakterizace prekompaktních množin v prostoru $\mathbb{G}[a,b]$, zobecnění Hellyovy věty o výběru) jsou obsaženy také v práci D. Fraňkové [6].

Kapitola 5

Riemannův-Stieljesův integrál

Odpověď na některé úlohy zmíněné v úvodní kapitole dává integrál Riemannův – Stieltjesův, který je přirozeným zobecněním známého integrálu Riemannova.

5.1 Definice a základní vlastnosti

Připomeňme (viz definice 2.1), že konečnou množinu $\boldsymbol{\sigma} = \left\{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\right\}$ bodů intervalu $[a, b]$ nazýváme *dělením intervalu* $[a, b]$, jestliže platí

$$a = \sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_{\nu(\boldsymbol{\sigma})} = b\,.$$

Množinu všech dělení intervalu $[a, b]$ značíme $\mathscr{D}[a, b]$ a

$$|\boldsymbol{\sigma}| = \max_{j=1,2,\ldots,\nu(\boldsymbol{\sigma})} (\sigma_j - \sigma_{j-1})$$

a říkáme, že $\boldsymbol{\sigma}'$ je *zjemnění* $\boldsymbol{\sigma}$ jestlie $\boldsymbol{\sigma}' \supset \boldsymbol{\sigma}$.

5.1. Definice. Dvojici $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{D}[a, b] \times \mathbb{R}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}$ nazveme *značeným dělením* intervalu $[a, b]$, jestliže platí

$$\sigma_{j-1} \le \xi_j \le \sigma_j \quad \text{pro všechna } j = 1, 2, \ldots, \nu(\boldsymbol{\sigma})\,.$$

$\mathscr{T}[a, b]$ je množina všech značených dělení intervalu $[a, b]$. Říkáme také, že ξ_j je *značka* podintervalu $[\sigma_{j-1}, \sigma_j]$ a $\boldsymbol{\xi}$ je *vektor značek*.

Pro dané dělení $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a, b]$ značíme symbolem $\tau(\boldsymbol{\sigma})$ množinu všech $\xi \in \mathbb{R}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}$ takových, že $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a, b]$.

Abychom zabránili záměně s elementy množin $\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\sigma}, \ldots$ či vektorů $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots$, budeme posloupnosti dělení resp. značených dělení zapisovat jako např. $\{\boldsymbol{\sigma}^n\}$ resp. $(\boldsymbol{\rho}^n, \boldsymbol{\eta}^n)$. Záměna s mocninami zde nehrozí.

5.2. Definice. Pro dané funkce $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ a značené dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a, b]$ definujeme

$$S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}; [a, b]) := \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} f(\xi_j)\,[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})]\,.$$

Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme psát krátce $S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}; [a, b])$ resp. $S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ místo $S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}; [a, b])$.

5.3. Definice. Nechť $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$.

(i) Řekneme, že existuje *Riemannův – Stieltjesův* (δ) *integrál* (krátce (δ) RS – integrál) funkce f vzhledem k funkci g

$$(\delta)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}[g(x)] \quad \Big(\text{značíme též } (\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\Big)$$

a má hodnotu $I \in \mathbb{R}$, jestliže

$$\left.\begin{aligned} &\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0 : \\ &\quad\Big((\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a,b]\ \text{ a }\ |\boldsymbol{\sigma}| < \delta\Big) \implies |S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - I| < \varepsilon\,. \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

(ii) Řekneme, že existuje *Riemannův– Stieltjesův* (σ) *integrál* (krátce (σ) RS – integrál) funkce f vzhledem k funkci g

$$(\sigma)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}[g(x)] \quad \Big(\text{značíme též } (\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\Big)$$

a má hodnotu $I \in \mathbb{R}$, jestliže

$$\left.\begin{aligned} &\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b] : \\ &\quad\Big((\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a,b]\ \text{ a }\ \boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon\Big) \implies |S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - I| < \varepsilon\,. \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

(iii) Jestliže $c \in [a, b]$ a funkce f, g jsou definovány v bodě c, klademe

$$(\delta)\int_c^c f\,\mathrm{d}g = (\sigma)\int_c^c f\,\mathrm{d}g = 0.$$

Existuje-li integrál $(\delta)\!\int f\,\mathrm{d}\,g$, pak definujeme $(\delta)\int_b^a f\,\mathrm{d}\,g = -(\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ a existuje-li integrál $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$, definujeme $(\sigma)\int_b^a f\,\mathrm{d}\,g = -(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$.

5.4. Poznámka. Pojem (δ) RS – integrálu odpovídá původní Stieltjesově definici, zatímco (σ) RS – integrál bývá někdy nazýván též *Mooreův–Pollardův* integrál.

Klasický Riemannův integrál je speciálním případem (δ) RS – integrálu pokud $g(x) \equiv x$ pro $x \in [a, b]$.

Vyskytne-li se v některých tvrzeních pojem RS – integrál, bez rozlišení zda se jedná o (δ) RS – integrál či o (σ) RS – integrál, bude to znamenat, že dané tvrzení platí pro oba pojmy. V takových a dalších případech, kdy nehrozí nedorozumění, také nepřipojujeme symboly (δ) či (σ) k symbolům integrálů. Funkce f v integrálu $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ se nazývá *integrand*, zatímco funkce g se nazývá *integrátor*.

Z definice 5.3 usoudíme, že (δ) RS – integrál je speciálním případem (σ) RS – integrálu.

5.5. Věta. *Je-li* $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = I \in \mathbb{R}$, *pak platí také* $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = I$.

D ů k a z . Pro každá dvě dělení $\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\sigma}'' \in \mathscr{D}[a,b]$ taková, že $\boldsymbol{\sigma}''$ je zjemnění $\boldsymbol{\sigma}'$, platí $|\boldsymbol{\sigma}''| \le |\boldsymbol{\sigma}'|$. Věta je tedy přímým důsledkem definice 5.3. □

5.6. Poznámka. Budiž dáno libovolné $\delta_0 > 0$. Potom v definici 5.1 (i) můžeme podmínku (5.1) nahradit následující trochu zeslabenou podmínkou

$$\left.\begin{aligned} &\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta \in (0,\delta_0):\\ &\quad\Big((\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a,b]\ \text{ a }\ |\boldsymbol{\sigma}| < \delta\Big) \implies |S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - I| < \varepsilon\,. \end{aligned}\right\} \tag{5.1'}$$

Podobně, je-li dáno $\boldsymbol{\sigma}_0 \in \mathscr{D}[a,b]$, můžeme v definici 5.3 (ii) podmínku (5.2) nahradit podmínkou

$$\left.\begin{aligned} &\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b]:\\ &\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \supset \boldsymbol{\sigma}_0 \text{ a } \Big((\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a,b] \text{ a } \boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon\Big) \implies |S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - I| < \varepsilon\,. \end{aligned}\right\} \tag{5.2'}$$

5.7. Cvičení. Rozmyslete si podrobně proč platí tvrzení uvedená v poznámce 5.6.

5.8. Příklad. Nechť $a = -1,\ b = 1$ a

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{když } x \le 0,\\ 1 & \text{když } x > 0 \end{cases} \quad \text{a} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{když } x < 0,\\ 1 & \text{když } x \ge 0. \end{cases}$$

Položme $\boldsymbol{\sigma}_0 = \{-1, 0, 1\}$. Potom pro každé dělení $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[-1,1]$, které je zjemněním $\boldsymbol{\sigma}_0$ (a tedy $0 \in \boldsymbol{\sigma}$), a každé $\boldsymbol{\xi} \in \tau(\boldsymbol{\sigma})$ máme

$$S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) = f(\xi_k)\,[g(0) - g(\sigma_{k-1})] + f(\xi_{k+1})\,[g(\sigma_{k+2}) - g(0)] = 0,$$

kde $0 = \sigma_k,\ \xi_k \in [\sigma_{k-1}, 0],\ \xi_{k+1} \in [0, \sigma_{k+1}]$ a tudíž $f(\xi_k) = 0$ a $g(\sigma_{k+2}) - g(0) = 0$.

Vzhledem ke druhé části poznámky 5.6, vidíme, že $(\sigma)\displaystyle\int_{-1}^{1} f\,\mathrm{d}\,g = 0$.

Na druhou stranu, pro každé značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ intervalu $[-1,1]$ takové, že $0 \notin \boldsymbol{\sigma}$, tj. $\sigma_{k-1} < 0 < \sigma_k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$, platí

$$S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) = f(\xi_k)\,[g(\sigma_k) - g(\sigma_{k-1})] = -f(\xi_k) = -\begin{cases} 0 & \text{když } \xi_{k+1} \le 0,\\ 1 & \text{když } \xi_{k+1} > 0\,. \end{cases}$$

Odtud je zřejmé, že $(\delta)\displaystyle\int_{-1}^{1} f\,\mathrm{d}\,g$ nemůže existovat.

Následující dvě lemmata platí pro oba typy RS – integrálů a jsou přímými důsledky definice 5.3. Jejich důkazy ponecháváme čtenáři jako cvičení.

5.9. Lemma. (i) *Jestliže existuje integrál* $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$, *pak platí*

$$\Big|\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\Big| \le \|f\|\,\mathrm{var}_a^b\,g\,.$$

(ii) *Jestliže navíc existuje také integrál* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\big[\mathrm{var}_a^x\,g\big]$, *pak platí*

$$\Big|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,g(x)\Big| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}\big[\mathrm{var}_a^x\,g\big] \le \|f\|\,\mathrm{var}_a^b\,g\,.$$

□

5.10. Poznámka. Uvidíme později (viz důsledek 5.39), že pro oba typy RS – integrálů platí, že z existence integrálu $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ už plyne, že také integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\big[\mathrm{var}_a^x\,g\big]$ existuje.

5.11. Lemma. *Nechť* $f,\ f_1,\ f_2,\ g,\ g_1,\ g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ *a nechť existují integrály :*

$$\int_a^b f_1\,\mathrm{d}\,g,\ \int_a^b f_2\,\mathrm{d}\,g,\ \int_a^b f\,\mathrm{d}\,g_1 \ \ a\ \int_a^b f_2\,\mathrm{d}\,g_2.$$

Potom pro libovolná $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *platí*

$$\int_a^b (c_1\,f_1 + c_2\,f_2)\,\mathrm{d}\,g = c_1\int_a^b f_1\,\mathrm{d}\,g + c_2\int_a^b f_2\,\mathrm{d}\,g,$$

a

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[c_1\,g_1 + c_2\,g_2] = c_1\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g_1 + c_2\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g_2\,.$$

□

5.12. Cvičení. (i) Dokažte lemmata 5.9 a 5.11.

Dokažte, že následující tvrzení platí pro oba typy RS – integrálů:

(ii) *Jestliže* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *je neklesající na* $[a,b]$ *a* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *je taková, že existuje integrál* $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$, *pak*

$$\Big(\inf_{x\in[a,b]} f(x)\Big)\,[g(b)-g(a)] \le \Big|\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\Big| \le \Big(\sup_{x\in[a,b]} f(x)\Big)\,[g(b)-g(a)]\,.$$

(iii) *definice 5.2 je korektní v tom smyslu, že určuje hodnotu integrálu jednoznačně. Jinak řečeno, jestliže* $I_1 \in \mathbb{R}$ *a* $I_2 \in \mathbb{R}$ *splňují* (5.1) $($*s* I_1 *resp.* I_2 *na místě* $I)$, *pak musí být* $I_1 = I_2$ $($*a podobně pro* (5.2)$)$.

Oba pojmy RS – integrálu představují jakési zobecněné limity posloupnosti integrálních součtů $S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ vzhledem k značeným dělením. Nepřekvapí tedy, že platí následující existenční tvrzení analogická klasické Bolzanově – Cauchyově podmínce.

5.13. Věta (BOLZANOVA – CAUCHYOVA PODMÍNKA)**.**
Pro dané funkce $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *existuje* $(\delta)\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$ *právě tehdy, když je splněna následující podmínka*

$$\left.\begin{aligned} &\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_\varepsilon > 0 : \\ &\quad \Big((\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}), (\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}) \in \mathscr{T}[a, b],\ |\boldsymbol{\sigma}| < \delta_\varepsilon \ \text{ a } \ |\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}| < \delta_\varepsilon\Big) \\ &\qquad\qquad \Longrightarrow\ |S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, \widetilde{\boldsymbol{\xi}})| < \varepsilon. \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

Podobně, $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g \in \mathbb{R}$ *právě tehdy, když*

$$\left.\begin{aligned} &\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \in \mathscr{D}[a, b] : \\ &\quad \Big((\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}), (\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}) \in \mathscr{T}[a, b],\ \boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \ \text{ a } \ \widetilde{\boldsymbol{\sigma}} \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon\Big) \\ &\qquad\qquad \Longrightarrow\ |S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, \widetilde{\boldsymbol{\xi}})| < \varepsilon. \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

D ů k a z . Nutnost splnění uvedených podmínek pro existenci příslušných integrálů je zřejmá z definice 5.3.

Dokážeme, že podmínka (5.4) zaručuje existenci integrálu $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$. Nechť tedy platí (5.4). Potom existuje posloupnost $\{(\boldsymbol{\sigma}^k, \boldsymbol{\xi}^k)\}$ značených dělení intervalu $[a, b]$ taková, že

$$|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S(\boldsymbol{\sigma}^k, \boldsymbol{\xi}^k)| < \tfrac{1}{k} \quad \text{pro každé } \boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}^k \ \text{ a } \ \boldsymbol{\xi} \in \tau(\boldsymbol{\sigma}) \tag{5.5}$$

a přitom současně

$$\boldsymbol{\sigma}^k \subset \boldsymbol{\sigma}^\ell \ \text{ a } \ |S(\boldsymbol{\sigma}^k, \boldsymbol{\xi}^k) - S(\boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\xi}^\ell)| < \frac{1}{k} \quad \text{pro každé } k \in \mathbb{N} \ \text{ a } \ \ell \geq k\,. \tag{5.6}$$

Posloupnost $\{S(\boldsymbol{\sigma}^k, \boldsymbol{\xi}^k)\}$ je cauchyovská posloupnost reálných čísel a existuje tedy reálné číslo $I \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{k \to \infty} S(\boldsymbol{\sigma}^k, \boldsymbol{\xi}^k) = I\,.$$

Nyní, nechť je dáno $\varepsilon > 0.$ Zvolme k_ε tak, aby bylo současně

$$\frac{1}{k_\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad |S(\boldsymbol{\sigma}^{k_\varepsilon}, \boldsymbol{\xi}^{k_\varepsilon}) - I| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{5.7}$$

Potom, díky (5.5) a (5.7), odvodíme, že

$$|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - I| \le |S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S(\boldsymbol{\sigma}^{k_\varepsilon}, \boldsymbol{\xi}^{k_\varepsilon})| + |S(\boldsymbol{\sigma}^{k_\varepsilon}, \boldsymbol{\xi}^{k_\varepsilon}) - I| < \varepsilon$$

platí pro každé $\boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}^{k_\varepsilon}$ a $\boldsymbol{\xi} \in \tau(\boldsymbol{\sigma}).$ To znamená, že

$$I = (\sigma)\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g\,.$$

Implikace (5.3) $\Longrightarrow (\delta)\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g \in \mathbb{R}$ by se dokazovala podobně a ponechává se čtenáři jako cvičení. □

5.14. Cvičení. (i) Dokažte větu 5.13 pro (δ) RS – integrály.

(ii) Dokažte, že podmínky (5.3) resp. (5.4) jsou ekvivalentní s podmínkami :

$$\left.\begin{aligned} &\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta_\varepsilon > 0 : \\ &\quad \Big((\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}'), (\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\xi}'') \in \mathscr{T}[a,b],\ |\boldsymbol{\sigma}'| < \delta_\varepsilon,\ \boldsymbol{\sigma}'' \supset \boldsymbol{\sigma}'\Big) \\ &\qquad\qquad \Longrightarrow\ |S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') - S(\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\xi}'')| < \varepsilon \end{aligned}\right\} \tag{5.3'}$$

resp.

$$\left.\begin{aligned} &\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b] : \\ &\quad \Big((\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}'), (\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\xi}'') \in \mathscr{T}[a,b],\ \boldsymbol{\sigma}'' \supset \boldsymbol{\sigma}' \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon\Big) \\ &\qquad\qquad \Longrightarrow\ |S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') - S(\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\xi}'')| < \varepsilon\,. \end{aligned}\right\} \tag{5.4'}$$

(Návod: nechť $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\rho} \in \mathscr{D}[a,b]$ a $\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} \cup \boldsymbol{\rho}$, potom $\boldsymbol{\sigma}' \in \mathscr{D}[a,b]$, $\boldsymbol{\sigma}' \supset \boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\sigma}' \supset \boldsymbol{\rho}$ a

$$\big|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})\big| \le \big|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}')\big| + \big|S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') - S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})\big|$$

pro libovolná $\boldsymbol{\xi} \in \tau(\boldsymbol{\sigma})$, $\boldsymbol{\eta} \in \tau(\boldsymbol{\rho})$ a $\boldsymbol{\xi}' \in \tau(\boldsymbol{\sigma}')$.)

Následující věta je přímým důsledkem věty 5.13. Platí ve stejném znění pro oba typy RS – integrálů.

5.15. Věta. *Jestliže existuje integrál* $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *a jestliže* $[c,d]\subset[a,b]$, *pak existuje také integrál* $\displaystyle\int_c^d f\,\mathrm{d}\,g$.

D ů k a z. Předpokládejme, že $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\in\mathbb{R}$. Podle věty 5.13 existuje dělení $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon\in\mathscr{D}[a,b]$ takové, že

$$|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')|<\varepsilon \tag{5.8}$$

platí pro všechna značená dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}),(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')\in\mathscr{T}[a,b]$ taková, že $\boldsymbol{\sigma}\supset\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$ a $\boldsymbol{\sigma}'\supset\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$. Vzhledem k tvrzení obsaženém ve cvičení 5.12 (iv), můžeme předpokládat, že $\{c,d\}\subset\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$ a můžeme tedy rozložit $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$ tak, že bude

$$\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon=\boldsymbol{\rho}^-\cup\boldsymbol{\rho}_\varepsilon\cup\boldsymbol{\rho}^+,\ \text{kde } \boldsymbol{\rho}^-\in\mathscr{D}[a,c],\ \boldsymbol{\rho}_\varepsilon\in\mathscr{D}[c,d],\ \boldsymbol{\rho}^+\in\mathscr{D}[d,b]\,.$$

Nyní, nechť $\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}'\in\mathscr{D}[c,d]$, $\boldsymbol{\rho}\supset\boldsymbol{\rho}_\varepsilon$, $\boldsymbol{\rho}'\supset\boldsymbol{\rho}_\varepsilon$ a $(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})$, $(\boldsymbol{\rho}',\boldsymbol{\eta}')\in\mathscr{T}[c,d]$. Definujme

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\rho}^-\cup\boldsymbol{\rho}\cup\boldsymbol{\rho}^+,\ \boldsymbol{\eta}=(\boldsymbol{\eta}^-,\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta}^+)\ \text{ a }\ \boldsymbol{\sigma}'=\boldsymbol{\rho}^-\cup\boldsymbol{\rho}'\cup\boldsymbol{\rho}^+,\ (\boldsymbol{\eta}^-,\boldsymbol{\eta}',\boldsymbol{\eta}^+)\,,$$

kde η^-,η^+ jsou takové vektory, že $(\boldsymbol{\rho}^-,\boldsymbol{\eta}^-)\in\mathscr{T}[a,c]$ a $(\boldsymbol{\rho}^+,\boldsymbol{\eta}^+)\in\mathscr{T}[d,b]$. Zřejmě je $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}),(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')\in\mathscr{T}[a,b]$,

$$\boldsymbol{\sigma}\supset\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon,\ \boldsymbol{\sigma}'\supset\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon,\ S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})=S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})\quad\text{a}\quad S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')=S(\boldsymbol{\rho}',\boldsymbol{\eta}')\,.$$

Podle (5.8) tedy máme

$$|S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})-S(\boldsymbol{\rho}',\boldsymbol{\eta}')|=|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')|<\varepsilon$$

a odtud podle věty 5.13 plyne existence integrálu $(\sigma)\displaystyle\int_c^d f\,\mathrm{d}\,g$.

Důkaz tvrzení věty pro (δ)RS – integrál se provede analogicky a je ponechán čtenáři jako cvičení. □

5.16. Cvičení. Dokažte tvrzení věty 5.15 pro (δ)RS – integrály.

Také následující tvrzení platí ve stejné podobě pro oba typy RS – integrálu.

5.17. Věta. *Jestliže existuje integrál* $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *a* $c\in[a,b]$, *pak existují také integrály*

$$\int_a^c f\,\mathrm{d}\,g\quad a\quad \int_c^b f\,\mathrm{d}\,g$$

a platí

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = \int_a^c f\,\mathrm{d}\,g + \int_c^b f\,\mathrm{d}\,g\,.$$

D ů k a z . Je-li $c=a$ nebo $c=b$, je tvrzení věty triviální. Nechť je tedy $c\in(a,b)$. Dále, předpokládejme, že existuje integrál $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$. Potom existence integrálů $(\sigma)\int_a^c f\,\mathrm{d}\,g$ a $(\sigma)\int_c^b f\,\mathrm{d}\,g$ je zaručena větou 5.15.

Nechť $\varepsilon>0$. Zvolme značená dělení $(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')\in\mathscr{T}[a,c]$ a $(\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'')\in\mathscr{T}[c,b]$ tak, aby platilo

$$\left.\begin{aligned} &\Big|S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')-\int_a^c f\,\mathrm{d}\,g\Big|+\Big|S(\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'')-\int_c^b f\,\mathrm{d}\,g\Big|\\ &\qquad\qquad+\Big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\Big|<\varepsilon\,,\\ &\text{kde }\ \boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}'\cup\boldsymbol{\sigma}''\in\mathscr{D}[a,b]\ \text{ a }\ \boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\xi}',\boldsymbol{\xi}'')\in\tau(\boldsymbol{\sigma})\,. \end{aligned}\right\}\tag{5.9}$$

Zřejmě platí $S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})=S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')+S(\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'')$. Tudíž

$$\begin{aligned} &\Big|\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g-\int_a^c f\,\mathrm{d}\,g-\int_c^b f\,\mathrm{d}\,g\Big|\\ &\quad\le\Big|\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g-S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\Big|+\Big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')-S(\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'')\Big|\\ &\qquad+\Big|S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')-\int_a^c f\,\mathrm{d}\,g\Big|+\Big|S(\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'')-\int_c^b f\,\mathrm{d}\,g\Big|<\varepsilon\,. \end{aligned}$$

Protože $\varepsilon>0$ bylo libovolné, důkaz je dokončen. □

5.18. Cvičení. Rozmyslete si proč z existence integrálů

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g,\quad \int_a^c f\,\mathrm{d}\,g,\quad \int_c^b f\,\mathrm{d}\,g$$

plyne existence značených dělení $(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')\in\mathscr{T}[a,c]$ a $(\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'')\in\mathscr{T}[c,b]$ takových, že platí (5.9).

Důkaz implikace obrácené ke tvrzení věty 5.17 je pro (σ) RS – integrál poměrně lehký:

5.19. Věta. *Jestliže* $c \in [a, b]$ *a jestliže existují integrály*

$$I_1 = (\sigma) \int_a^c f \, \mathrm{d}\, g \quad a \quad I_2 = (\sigma) \int_c^b f \, \mathrm{d}\, g,$$

pak existuje také integrál $I = (\sigma) \displaystyle\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g$ *a platí* $I = I_1 + I_2$.

D ů k a z . Buď dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme dělení $\boldsymbol{\sigma}'_\varepsilon \in \mathscr{D}[a, c]$ a $\boldsymbol{\sigma}''_\varepsilon \in \mathscr{D}[c, b]$ tak, aby platilo

$$\left| S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') - I_1 \right| < \varepsilon \text{ pro } (\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') \in \mathscr{T}[a, c] \text{ takové, že } \boldsymbol{\sigma}' \supset \boldsymbol{\sigma}'_\varepsilon$$

a

$$\left| S(\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\xi}'') - I_2 \right| < \varepsilon \text{ pro } (\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\xi}'') \in \mathscr{T}[c, b] \text{ takové, že } \boldsymbol{\sigma}'' \supset \boldsymbol{\sigma}''_\varepsilon \,.$$

Nyní, nechť $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon = \boldsymbol{\sigma}'_\varepsilon \cup \boldsymbol{\sigma}''_\varepsilon$. Protože $c \in \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$, každé značené dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a, b]$ splňující $\boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$ můžeme rozdělit

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' \cup \boldsymbol{\sigma}'' \quad \text{a} \quad \boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi}', \boldsymbol{\xi}'')$$

tak, že bude platit

$$(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') \in \mathscr{T}[a, c], \; (\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\xi}'') \in \mathscr{T}[c, b], \; \boldsymbol{\sigma}' \supset \boldsymbol{\sigma}'_\varepsilon \quad \text{a} \quad \boldsymbol{\sigma}'' \supset \boldsymbol{\sigma}''_\varepsilon.$$

Navíc, je

$$S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) = S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') + S(\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\xi}'').$$

Vzhledem k definici $\boldsymbol{\sigma}'_\varepsilon$ a $\boldsymbol{\sigma}''_\varepsilon$ tedy pro každé $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a, b]$, kde $\boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$, máme

$$\left| S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - (I_1 + I_2) \right| \le \left| S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') - I_1 \right| + \left| S(\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\xi}'') - I_2 \right| < 2\,\varepsilon\,,$$

tj. dokázali jsme tvrzení věty. □

5.20. Poznámka. Aby mohlo platit analogické tvrzení také pro (δ)RS – integrál je třeba přidat předpoklad o pseudoaditivitě funkcí f, g v bodě c, viz cvičení 5.31.

Pro existenci (δ)RS – integrálu máme také následující přirozenou a lépe ověřitelnou nutnou a postačující podmínku.

5.21. Věta. *Pro dané funkce* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrál* $(\delta) \displaystyle\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g$ *existuje právě tehdy, když pro každou posloupnost* $\{(\boldsymbol{\sigma}^n, \boldsymbol{\xi}^n)\} \subset \mathscr{T}[a, b]$ *značených dělení intervalu* $[a, b]$ *takovou, že* $\lim\limits_{n \to \infty} |\boldsymbol{\sigma}^n| = 0$, *má posloupnost* $\{S(\boldsymbol{\sigma}^n, \boldsymbol{\xi}^n)\}$ *konečnou limitu.*

D ů k a z . Nutnost uvedené podmínky je zřejmá. Zbývá dokázat její postačitelnost.

Předpokládejme tedy, že limita $\lim_{n\to\infty} S(\boldsymbol{\sigma}^n, \boldsymbol{\xi}^n)$ existuje (a je konečná) pro každou posloupnost $\{(\boldsymbol{\sigma}^n, \boldsymbol{\xi}^n)\} \subset \mathscr{T}[a,b]$ takovou, že $\lim_{n\to\infty} |\boldsymbol{\sigma}^n| = 0$.

Nechť existují dvě posloupnosti značených dělení $\{(\boldsymbol{\sigma}^n, \boldsymbol{\xi}^n)\} \subset \mathscr{T}[a,b]$ a $\{(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^n, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}^n)\} \subset \mathscr{T}[a,b]$ takové, že $\lim_{n\to\infty} |\boldsymbol{\sigma}^n| = \lim_{n\to\infty} |\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^n| = 0$ a

$$\lim_{n\to\infty} S(\boldsymbol{\sigma}^n, \boldsymbol{\xi}^n) = I \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^n, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}^n) = \widetilde{I} \in \mathbb{R}\,.$$

Sestavme nyní novou posloupnost

$$\{S(\boldsymbol{\rho}^n, \boldsymbol{\eta}^n)\} = \Big\{S(\boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{\xi}^1), S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^1, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}^1), S(\boldsymbol{\sigma}^2, \boldsymbol{\xi}^2), S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^2, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}^2), \dots\Big\}$$

Podle našeho předpokladu má také posloupnost $\big\{S(\boldsymbol{\rho}^n, \boldsymbol{\eta}^n)\big\}$ konečnou limitu $J \in \mathbb{R}$ a, protože obsahuje obě posloupnosti

$$\{S(\boldsymbol{\sigma}^n, \boldsymbol{\xi}^n)\} \text{ a } \{S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^n, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}^n)\}\,,$$

musí platit $I = \widetilde{I} = J$. To znamená, že hodnota limity

$$I = \lim_{n\to\infty} S(\boldsymbol{\sigma}^n, \boldsymbol{\xi}^n)$$

nezávisí na volbě posloupnosti $\{(\boldsymbol{\sigma}^n, \boldsymbol{\xi}^n)\}$ značených dělení intervalu $[a,b]$ pro kterou platí $\lim_{n\to\infty} |\boldsymbol{\sigma}^n| = 0$.

Nyní, nechť $\{(\boldsymbol{\sigma}^n, \boldsymbol{\xi}^n)\} \subset \mathscr{T}[a,b]$ je libovolná posloupnost taková, že

$$\lim_{n\to\infty} |\boldsymbol{\sigma}^n| = 0, \quad \lim_{n\to\infty} S(\boldsymbol{\sigma}^n, \boldsymbol{\xi}^n) = I \in \mathbb{R}$$

a nechť

$$(\delta)\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g \neq I.$$

Potom existuje $\widetilde{\varepsilon} > 0$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ lze najít $(\boldsymbol{\sigma}^{n_k}, \boldsymbol{\xi}^{n_k}) \in \mathscr{T}[a,b]$ pro něž platí

$$|\boldsymbol{\sigma}^{n_k}| < \frac{1}{k} \text{ a } |S(\boldsymbol{\sigma}^{n_k}, \boldsymbol{\xi}^{n_k}) - I| > \widetilde{\varepsilon}\,.$$

To znamená, že jsme našli podposloupnost $\{(\boldsymbol{\sigma}^{n_k}, \boldsymbol{\xi}^{n_k}) : k \in \mathbb{N}\} \subset \mathscr{T}[a,b]$ posloupnosti $\{(\boldsymbol{\sigma}^n, \boldsymbol{\xi}^n)\}$ pro kterou neplatí $\lim_{k\to\infty} S(\boldsymbol{\sigma}^{n_k}, \boldsymbol{\xi}^{n_k}) = I$. To je ale spor s naším předpokladem. Máme tedy

$$(\delta)\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g = I\,.$$

Tím je důkaz věty dokončen. □

5.22. Poznámka. (i) Nechť $f\in\mathbb{G}[a,b]$, $x_0\in(a,b)$, c, $d\in\mathbb{R}$ a $g(x)=c$ pro $x\in[a,x_0)$, $g(x_0)=(c+d)/2$, $g(x)=d$ pro $x\in(x_0,d]$. Dále, nechť $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ má jednostranné limity $f(x_0-), f(x_0+)\in\mathbb{R}$.

Pro $n\in\mathbb{N}$ uvažujme posloupnost dělení $\{\boldsymbol{\sigma}^n\}$ intervalu $[a,b]$ takových, že pro každé $n\in\mathbb{N}$ existuje k_n, pro které platí $\sigma^n_{k_n-1}<x_0<\sigma^n_{k_n}$. Dále, nechť vektory značek $\boldsymbol{\theta}^n$, $\boldsymbol{\eta}^n$ a $\boldsymbol{\zeta}^n$ jsou takové, že pro každé $n\in\mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\theta}^n),\ (\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\eta}^n),\ (\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\zeta}^n)\in\mathscr{T}[a,b],\\ &\theta^n_{k_n}=x_0,\quad \sigma^n_{k_n-1}\le\eta^n_{k_n}<x_0 \ \text{ a } \ x_0<\zeta^n_{k_n}\le\sigma^n_k\,.\end{aligned}$$

Máme

$$S(\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\theta}^n)=f(x_0)\,(d-c), S(\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\eta}^n)=f(\eta^n_{k_n})(d-c), S(\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\zeta}^n)=f(\zeta^n_{k_n})(d-c)$$

pro $n\in\mathbb{N}$ a tedy

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}S(\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\theta}^n)=f(x_0)\,(d-c),\quad \lim_{n\to\infty}S(\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\eta}^n)=f(x_0-)\,(d-c)\,,\\ &\lim_{n\to\infty}S(\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\zeta}^n))=f(x_0+)\,(d-c)\,,\end{aligned}$$

Odtud plyne, že k tomu, aby každá posloupnost $S(\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\xi}^n)$ taková, že

$$(\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\xi}^n)\in\mathscr{T}[a,b] \quad\text{a}\quad |\boldsymbol{\sigma}^n|\to 0,$$

konvergovala pro $n\to\infty$ k nějaké konečné (a jednoznačně určené) hodnotě I, je nutné, aby platilo

$$\text{buď}\quad g(x_0-)=c=g(x_0)=d=g(x_0+)\quad\text{nebo}\quad f(x_0-)=f(x_0)=f(x_0+)\,.$$

Vzhledem ke větě 5.21 lze tedy očekávat, že pro existenci integrálu $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ bude nutné, aby funkce f a g neměly žádný společný bod nespojitosti.

(ii) Nyní, nechť $\boldsymbol{\sigma}_0\in\mathscr{D}[a,b]$ je libovolné dělení obsahující x_0. Pro každé jeho zjemnění $\boldsymbol{\sigma}$ potom existuje $k=k(\boldsymbol{\sigma})$ takové, že $x_0=\sigma_k$. Máme

$$S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})=\begin{cases}(f(\xi_{k-1})+f(\xi_k)\,\dfrac{d-c}{2} & \text{jestliže }\ \xi_{k-1}<x_0<\xi_k\,,\\[2mm] (f(x_0)+f(\xi_k))\,\dfrac{d-c}{2} & \text{jestliže }\ \xi_{k-1}=x_0<\xi_k\,,\\[2mm] (f(\xi_{k-1})+f(x_0))\,\dfrac{d-c}{2} & \text{jestliže }\ \xi_{k-1}<x_0=\xi_k\,,\\[2mm] f(x_0)\,(d-c) & \text{jestliže }\ \xi_{k-1}=x_0=\xi_k\,,\end{cases}$$

Bude-li tedy funkce f regulovaná na $[a,b]$, bude množina $\mathcal{Q}$ hromadných bodů množiny $\big\{S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}):(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}\,[a,b]$ a $\boldsymbol{\sigma}\supset\boldsymbol{\sigma}_0\big\}$ nejvýše čtyřbodová:

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}=\Big\{&(f(x_0-)+f(x_0+))\,\frac{d-c}{2},\ (f(x_0)+f(x_0+))\,\frac{d-c}{2},\\ &\qquad(f(x_0-)+f(x_0))\,\frac{d-c}{2},\quad 2\,f(x_0)\,\frac{d-c}{2}\Big\}.\end{aligned}$$

Pro existenci integrálu $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ je ovšem přinejmenším nutné, aby se množina $\mathcal{Q}$ redukovala na jednobodovou množinu. Snadno se nahlédne, že toto nastane právě tehdy, když pro funkce f a g bude platit současně

$$\Delta^+ f(x_0)\,\Delta^+ g(x_))=0 \ \text{ a } \ \Delta^- f(x_0)\,\Delta^- g(x_0)=0\,.$$

5.2 Podmínka pseudoaditivity a její důsledky

Podrobněji vyjasnit vzájemný vztah mezi (δ) RS a (σ) RS – integrálem umožní pojem *pseudoaditivity*.

5.23. Definice. Řekneme, že funkce $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ splňují v bodě $x\in(a,b)$, podmínku pseudoaditivity, jestliže

$$\left.\begin{aligned}&\text{Pro každé } \varepsilon>0 \text{ existuje } \delta_\varepsilon>0 \text{ takové, že je-li}\\ &\ \delta',\delta''\in(0,\delta_\varepsilon),\ \xi\in[x-\delta',x+\delta''],\ \xi'\in[x-\delta',x] \text{ a } \xi''\in[x,x+\delta'']\\ &\text{pak platí}\\ &\ \big|f(\xi)\,[g(x+\delta'')-g(x-\delta')]-f(\xi')\,[g(x)-g(x-\delta')]\\ &\qquad\qquad\qquad -f(\xi'')\,[g(x+\delta'')-g(x)]\big|<\varepsilon\,.\end{aligned}\right\}\quad\text{(PA)}$$

5.24. Poznámka. Použití podmínky (PA) může být někdy pohodlnější, pokud ji přeformulujeme do následující ekvivalentní podoby.

$$\left.\begin{aligned}&\text{Pro každé } \varepsilon>0 \text{ existuje } \delta_\varepsilon>0 \text{ takové, že je-li}\\ &\ x'\in(x-\delta_\varepsilon,x),\ x''\in(x,x+\delta_\varepsilon),\ \xi\in[x',x''],\ \xi'\in[x',x] \text{ a } \xi''\in[x,x'']\\ &\text{pak platí}\\ &\ \big|f(\xi)\,[g(x'')-g(x')]-f(\xi')\,[g(x)-g(x')]-f(\xi'')\,[g(x'')-g(x)]\big|<\varepsilon\,.\end{aligned}\right\}$$

5.25. Příklad. Nechť

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{když } x \le 0, \\ 1 & \text{když } x > 0 \end{cases} \quad \text{a} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{když } x \le 0, \\ 1 & \text{když } x > 0 \end{cases}$$

a $x' < 0 < x''$, $\xi \in [x', x'']$, $\xi' \in [x', 0]$ a $\xi'' \in [0, x'']$. Potom

$$\begin{aligned} &\big| f(\xi)\,[g(x'') - g(x')] - f(\xi')\,[g(0) - g(x')] - f(\xi'')\,[g(x'') - g(0)]\big| \\ &\qquad = \big| f(\xi) - f(\xi'')\big| = 1 \end{aligned}$$

vždy, když bude $\xi \le 0$ a $\xi'' > 0$. Vidíme, že funkce f, g nesplňují podmínku (PA) v bodě 0.

5.26. Lemma. *Jestliže funkce $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ splňují v bodě $x \in (a, b)$ podmínku pseudoaditivity, pak aspoň jedna z funkcí f, g je v bodě x spojitá.*

Na druhou stranu, je-li jedna z funkcí f, g spojitá v bodě x a druhá je ohraničená na jeho okolí, pak funkce f, g splňují podmínku pseudoaditivity v bodě x.

D ů k a z . a) Nechť f, g splňují podmínku (PA) pseudoaditivity v bodě x. Dosadíme-li $\xi = \xi'$, dostaneme

$$\begin{aligned} &\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_\varepsilon > 0 : \\ &\qquad \Big(x' \in (x - \delta_\varepsilon, x),\ x'' \in (x, x + \delta_\varepsilon),\ \xi' \in [x', x],\ \xi'' \in [x, x'']\Big) \\ &\qquad\qquad\qquad \Longrightarrow\ \big| f(\xi') - f(\xi'')\big|\,\big| g(x'') - g(x)\big| < \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Odtud je zřejmé, že není-li funkce g v bodě x spojitá zprava, musí být v bodě x spojitá funkce f. Podobně, položíme-li v (PA) $\xi = \xi''$ a $\delta' = \delta''$, dokážeme, že není-li g spojitá zleva v x, musí být f spojitá v x.

b) Nechť

$$\begin{aligned} &x \in (a, b),\ \ \delta > 0,\ \ x' \in (x - \delta, x),\ \ x'' \in (x, x + \delta), \\ &\xi \in [x', x''],\ \ \xi' \in [x', x] \quad \text{a} \quad \xi'' \in [x, x'']. \end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned} &\big| f(\xi)\,[g(x'') - g(x')] - f(\xi')\,[g(x) - g(x')] - f(\xi'')\,[g(x'') - g(x)]\big| \\ &\quad = \Big| \big(f(\xi) - f(\xi')\big)\,\big(g(x) - g(x')\big) + \big(f(\xi'') - f(\xi)\big)\,\big(g(x'') - g(x)\big)\Big| \\ &\quad \le \big| f(\xi) - f(\xi')\big|\,\big| g(x) - g(x')\big| + \big| f(\xi'') - f(\xi)\big|\,\big| g(x'') - g(x)\big| \\ &\quad \le \big(|f(\xi) - f(x)| + |f(x) - f(\xi')|\big)\,\big| g(x) - g(x')\big| \\ &\qquad\quad + \big(|f(\xi'') - f(x)| + |f(x) - f(\xi)|\big)\,\big| g(x'') - g(x)\big|\,. \end{aligned}$$

Odtud už plyne, že platí i druhé tvrzení lemmatu. $\square$

Následující tvrzení je důsledkem věty 5.13 a lemmatu 5.26.

5.27. Věta. *Nechť* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *a nechť existuje integrál* $(\delta)\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g$. *Potom v každém bodě* $x \in (a,b)$ *je alespoň jedna z funkcí* f, g *spojitá.*

D ů k a z . Předpokládejme, že $(\delta)\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g \in \mathbb{R}$. Vzhledem k lemmatu 5.26 nyní stačí dokázat, že dvojice f, g splňují podmínku pseudoaditivity v každém bodě $x \in (a,b)$.

Předpokládejme tedy, že neplatí (PA), tj. existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $\delta > 0$ lze najít

$$x' \in (x-\delta, x),\ \ x'' \in (x, x+\delta),\ \ \eta \in [x', x''],\ \ \eta' \in [x', x] \ \text{ a } \eta'' \in [x, x'']$$

takové, že

$$\big| f(\eta)\,[g(x'') - g(x')] - f(\eta')\,[g(x) - g(x')] - f(\eta'')\,[g(x'') - g(x)] \big| \geq \varepsilon\,. \quad (5.10)$$

Buď dáno libovolné $\delta > 0$. Nechť $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{D}[a,b]$ je takové, že $|\boldsymbol{\sigma}| < \delta$ a pro nějaké $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ je $\sigma_{k-1} = x' < x < x'' = \sigma_k$ a $\xi_k = \eta$. Definujme

$$\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} \cup \{x\} \ \text{ a } \ \widetilde{\boldsymbol{\xi}} = (\xi_1, \dots, \xi_{k-1}, \eta', \eta'', \xi_{k+1}, \dots, \xi_m)\,.$$

Podle (5.10) tedy máme

$$\begin{aligned} |S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, \widetilde{\boldsymbol{\xi}})| &= \big| f(\xi_k)\,[g(\sigma_k) - g(\sigma_{k-1})] \\ &\qquad - f(\eta')\,[g(x) - g(\sigma_{k-1})] - f(\eta'')\,[g(\sigma_k) - g(x)] \big| \\ &= \big| f(\eta)[g(x'') - g(x')] - f(\eta')\,[g(x) - g(x')] - f(\eta'')[g(x'') - g(x)] \big| \\ &\geq \varepsilon\,. \end{aligned}$$

To znamená, že není splněna podmínka (5.3') a tudíž podle věty 5.13 a cvičení 5.14 neexistuje integrál $(\delta)\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g$. $\square$

Víme, že (δ) RS – integrál je speciálním případem (σ) RS – integrálu (viz větu 5.5). Na druhou stranu, jak ukáže následující věta, pojem pseudoaditivity nám poskytuje možnost objasnit i vazbu mezi těmito integrály v opačném směru.

5.28. Věta. *Nechť* $f,\ g\colon [a,b]\to\mathbb{R}$. *Potom integrál* $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje právě tehdy, když existuje integrál* $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *a funkce* f,g *splňují podmínku pseudoaditivity v každém bodě* $x\in(a,b)$.

D ů k a z . Předpokládejme nejprve, že existuje $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$. Podle věty 5.5 potom existuje i $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ a má stejnou hodnotu. Dále, podle věty 5.27 funkce f,g musí splňovat podmínku pseudoaditivity v každém bodě $x\in(a,b)$. Stačí tedy dokázat, že když existuje integrál $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ a funkce f,g splňují podmínku pseudoaditivity v každém bodě $x\in(a,b)$, pak existuje i integrál $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$.

Předpokládejme tedy, že $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g=I\in\mathbb{R}$ a funkce f,g splňují podmínku pseudoaditivity v každém bodě $x\in(a,b)$. Nechť je dáno $\varepsilon>0$ a nechť dělení $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon=\{s_0,s_1,\dots,s_r\}\in\mathscr{D}[a,b]$ je takové, že platí

$$|S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})-I|<\varepsilon \quad \text{jakmile } \boldsymbol{\rho}\supset\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \text{ a } \boldsymbol{\eta}\in\tau(\boldsymbol{\rho})\,. \tag{5.11}$$

Označme

$$\delta_* := \min\{s_i-s_{i-1} : i=1,2,\dots,r\}\,. \tag{5.12}$$

Protože funkce f,g splňují podmínku pseudoaditivity na (a,b), nutně existuje $\delta_\varepsilon\in(0,\delta_*)$ takové, že pro každé $i=1,2,\dots,r$ platí

$$\left.\begin{aligned}
&\big|f(\xi)\,[g(s_i'')-g(s_i')]\\
&\qquad -f(\xi')\,[g(s_i)-g(s_i')]-f(\xi'')\,[g(s_i'')-g(s_i)]\big|<\frac{\varepsilon}{r}\\
&\text{pro všechna } i\in\{1,2,\dots,r-1\}\,,\\
&\qquad s_i'\in(s_i-\delta_\varepsilon,s_i),\ s_i''\in(s_i,s_i+\delta_\varepsilon)\,,\\
&\qquad \xi\in[s_i',s_i''],\ \xi'\in[s_i',s_i],\ \xi''\in[s_i,s_i'']\,.
\end{aligned}\right\} \tag{5.13}$$

Nechť $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}[a,b]$, $\boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_m\}$ a $|\boldsymbol{\sigma}|<\delta_\varepsilon$.

Podle (5.12) je pro každé $j\in\{1,2,\dots,m\}$ množina $(\sigma_{j-1},\sigma_j)\cap\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$ buď jednobodová nebo prázdná. Nechť

U_1 je množina těch $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ pro která $(\sigma_{j-1}, \sigma_j) \cap \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon = \emptyset$,

$U_2 = \{1, 2, \dots, m\} \setminus U_1$.

Potom pro každé $j \in U_2$ existuje právě jedno $i(j) \in \{1, 2, \dots, r\}$ takové, že $s_{i(j)} \in (\sigma_{j-1}, \sigma_j)$. Počet prvků množiny U_2 tedy není větší než r.

Položme nyní $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\sigma} \cup \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$. Potom

$$|\boldsymbol{\rho}| < \delta_\varepsilon < \delta_*. \tag{5.14}$$

a pro každé $j \in U_1$ existuje právě jedno $k(j) \in \{1, 2, \dots, \nu(\boldsymbol{\rho})\}$ takové, že

$$[\rho_{k(j)-1}, \rho_k(j)] = [\sigma_{j-1}, \sigma_j]\,. \tag{5.15}$$

Pokud $j \in U_2$, pak existuje právě jedno $\ell(j) \in \{1, 2, \dots, \nu(\boldsymbol{\rho}) - 1\}$ takové, že

$$\rho_{\ell(j)-1} = \sigma_{j-1},\ \rho_{\ell(j)} = s_{i(j)},\ \rho_{\ell(j)+1} = \sigma_{j+1}\,. \tag{5.16}$$

Zvolme vektor $\boldsymbol{\eta}$ tak, aby bylo $(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) \in \mathscr{T}[a, b]$ a

$$\eta_{k(j)} = \xi_j \quad \text{když } j \in U_1 \tag{5.17}$$

a porovnejme integrální součty $S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ a $S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})$. Máme

$$S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{j \in U_1} f(\xi_j)\,[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] + \sum_{j \in U_2} f(\xi_j)\,[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})]\,.$$

Nechť $V_1 = \{k(j) : j \in U_1\}$ a $V_2 = \{1, 2, \dots, \nu(\boldsymbol{\rho})\} \setminus V_1$. Pak podle (5.15)–(5.17)

$$\begin{aligned}
S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) &= \sum_{k \in V_1} f(\eta_k)\,[g(\rho_k) - g(\rho_{k-1})] + \sum_{k \in V_2} f(\eta_k)\,[g(\rho_k) - g(\rho_{k-1})] \\
&= \sum_{j \in U_1} f(\eta_{k(j)})\,[g(\rho_{k(j)}) - g(\rho_{k(j)-1})] + \sum_{k \in V_2} f(\eta_k)\,[g(\rho_k) - g(\rho_{k-1})] \\
&= \sum_{j \in U_1} f(\xi_j)\,[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] \\
&\quad + \sum_{j \in U_2} \big[f(\eta_{\ell(j)})[g(\rho_{\ell(j)}) - g(\rho_{\ell(j)-1})] + f(\eta_{\ell(j)+1})\,[g(\rho_{\ell(j)+1}) - g(\rho_{\ell(j)})]\big] \\
&= \sum_{j \in U_1} f(\xi_j)\,[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] \\
&\quad + \sum_{j \in U_2} \big[f(\eta_{\ell(j)})\,[g(s_{i(j)}) - g(s_{j-1})] + f(\eta_{\ell(j)+1})\,[g(\sigma_{j+1}) - g(\beta_{i(j)})]\big]\,.
\end{aligned}$$

Tudíž

$$S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})=\sum_{j\in U_2} f(\xi_j)\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})]$$
$$-\sum_{j\in U_2}\big[f(\eta_{\ell(j)})[g(s_{i(j)})-g(\sigma_{j-1})]+f(\eta_{\ell(j)+1})[g(\sigma_{j+1})-g(s_{i(j)})]\big]\,,$$

tj.

$$\big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})\big|\le\sum_{j\in U_2}\big|W_j\big|,$$

kde

$$W_j=f(\xi_j)\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})]$$
$$-f(\eta_{\ell(j)})\,[g(s_{i(j)})-g(\sigma_{j-1})]-f(\eta_{\ell(j)+1})\,[g(\sigma_{j+1})-g(s_{i(j)})]\,.$$

Připomeňme, že vzhledem k (5.14) a (5.16) máme

$$[\sigma_{j-1},\sigma_j\,]\subset(s_{i(j)}-\delta_\varepsilon,s_{i(j)}+\delta_\varepsilon),\ \ \xi_j\in[s_{i(j)}-\delta_\varepsilon,s_{i(j)}+\delta_\varepsilon]\,,$$
$$\eta_{\ell(j)}\in[s_{i(j)}-\delta_\varepsilon,s_{i(j)}],\ \ \eta_{\ell(j)+1}\in[s_{i(j)},s_{i(j)}+\delta_\varepsilon]\,.$$

Podle (5.13) je tedy $|W_j|<\dfrac{\varepsilon}{r}$ pro každé $j\in U_2$ a tudíž (také díky tomu, že počet elementů množiny U_2 není větší než r) dostáváme, že

$$\big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})\big|\le\sum_{j\in U_2}\big|W_j\big|<\varepsilon\,.$$

Konečně, vzhledem k (5.11) a k vzhledem k definici $\boldsymbol{\rho}$, dostáváme

$$\big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-I\big|\le\big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})\big|+\big|S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})-I\big|<2\,\varepsilon\,.$$

Dokázali jsme tedy, že $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g=I$. □

5.29. Důsledek. *Nechť* $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g=I\in\mathbb{R}$ *a nechť v každém bodě intervalu* (a,b) *je alespoň jedna z funkcí* $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ *spojitá a druhá je ohraničená na jeho okolí. Potom je také* $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g=I$.

D ů k a z. Podle lemmatu 5.26 splňují funkce f, g podmínku pseudoadivity v každém bodě $x \in (a,b)$ a tudíž podle věty 5.28 existuje také $(\delta)\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$ a platí

$$(\delta)\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g = (\sigma)\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g\,. \qquad \square$$

5.30. Poznámka. Speciálně, jestliže $g(x) \equiv x$ (tj. pro Riemannův integrál), jsou definice integrálů $(\delta)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a $(\sigma)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ekvivalentní.

5.31. Cvičení. Dokažte tvrzení*:*
Nechť $c \in [a,b]$, $(\delta)\int_a^c f \,\mathrm{d}\, g = I_1 \in \mathbb{R}$ *a* $(\delta)\int_c^b f \,\mathrm{d}\, g = I_2 \in \mathbb{R}$ *a nechť* f, g *splňují podmínku pseudoaditivity v* c. *Potom integrál* $I = (\delta)\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$ *existuje a platí* $I = I_1 + I_2$.
(Návod: využijte věty 5.19 a 5.28.)

5.3 Absolutní integrovatelnost

Nyní potřebujeme další pomocný pojem.

5.32. Definice. Nechť $-\infty < c < d < \infty$ a $f, g : [c,d] \to \mathbb{R}$. Potom definujeme

$$\mathfrak{S}_{f\Delta g}[c,d] = \left\{ |S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta}) - S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\rho}',\boldsymbol{\eta}')| : (\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta}), (\boldsymbol{\rho}',\boldsymbol{\eta}') \in \mathscr{T}[c.d] \right\}$$

a

$$\omega\,(S_{f\Delta g}; [c,d]) = \sup\, \mathfrak{S}_{f\Delta g}[c,d]\,. \tag{5.18}$$

Platí následující modifikace Bolzanových – Cauchyových podmínek.

5.33. Věta. *Nechť* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Potom:*

(i) *Integrál* $(\delta)\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$ *existuje tehdy a jen tehdy, když platí*

$$\left.\begin{aligned} &\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_\varepsilon > 0 : \\ &\quad \Big(\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b] \text{ a } |\boldsymbol{\sigma}| < \delta_\varepsilon\Big) \implies \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\,(S_{f\Delta g}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j\,]) < \varepsilon\,. \end{aligned}\right\} \tag{5.19}$$

(i) *Integrál* $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje tehdy a jen tehdy, když platí*

$$\left.\begin{aligned} &\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon\in\mathscr{D}[a,b]:\\ &\quad\Big(\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]\ a\ \boldsymbol{\sigma}\supset\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon\Big)\implies\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\omega\left(S_{f\Delta g};[\sigma_{j-1},\sigma_j]\right)<\varepsilon\,.\end{aligned}\right\}\tag{5.20}$$

D ů k a z . a) Ukážeme, že podmínka (5.19) je ekvivalentní s Bolzanovou – Cauchyovou podmínkou pro existenci (δ) RS – integrálu.

α) Předpokládejme, že platí (5.3). Nechť $\widetilde{\varepsilon}>0$ je dáno, $\varepsilon=\widetilde{\varepsilon}/2$ a nechť δ_ε je určeno podmínkou (5.3). Mějme dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a,b]$ takové, že $|\boldsymbol{\sigma}|<\delta_\varepsilon$. Označme $m=\nu(\boldsymbol{\sigma})$ a pro každé $j\in\{1,2,\dots,m\}$ vyberme značená dělení $(\boldsymbol{\sigma}^j,\boldsymbol{\xi}^j)$, $(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^j,\widetilde{\boldsymbol{\xi}}^j)\in\mathscr{T}[\sigma_{j-1},\sigma_j]$ tak, aby platilo

$$0\le\omega\left(S_{f\Delta g},[\sigma_{j-1},\sigma_j]\right)<S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}^j,\boldsymbol{\xi}^j)-S_{f\Delta g}(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^j,\widetilde{\boldsymbol{\xi}}^j)+\frac{\varepsilon}{m}\,.\tag{5.21}$$

Definujme

$$\boldsymbol{\rho}=\bigcup_{j=1}^m\boldsymbol{\sigma}^j,\quad\widetilde{\boldsymbol{\rho}}=\bigcup_{j=1}^m\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^j,\quad\boldsymbol{\eta}=(\boldsymbol{\xi}^1,\boldsymbol{\xi}^2,\dots,\boldsymbol{\xi}^m)\ \text{ a }\ \widetilde{\boldsymbol{\eta}}=(\widetilde{\boldsymbol{\xi}}^1,\widetilde{\boldsymbol{\xi}}^2,\dots,\widetilde{\boldsymbol{\xi}}^m)\,.$$

Potom

$$(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})\in\mathscr{T}[a,b],\ (\widetilde{\boldsymbol{\rho}},\widetilde{\boldsymbol{\eta}})\in\mathscr{T}[a,b],\ |\boldsymbol{\rho}|<\delta_\varepsilon\ \text{ a }\ |\widetilde{\boldsymbol{\rho}}|<\delta_\varepsilon\,.$$

Tudíž podle (5.3) a (5.21) dostáváme

$$\begin{aligned}0&\le\sum_{j=1}^m\omega\left(S_{f\Delta g};[\sigma_{j-1},\sigma_j]\right)\\ &<\sum_{j=1}^m\Big[S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}^j,\boldsymbol{\xi}^j)-S_{f\Delta g}(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^j,\widetilde{\boldsymbol{\xi}}^j)+\frac{\varepsilon}{m}\Big]\\ &=S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})-S_{f\Delta g}(\widetilde{\boldsymbol{\rho}},\widetilde{\boldsymbol{\eta}})+\varepsilon<2\,\varepsilon=\widetilde{\varepsilon}\,.\end{aligned}$$

Protože $\widetilde{\varepsilon}>0$ mohlo být libovolné, plyne odtud, že podmínka (5.19) je splněna.

β) Pro důkaz obrácené implikace předpokládejme, že platí (5.19). Dokážeme, že potom je splněna podmínka (5.3’).

Buď dáno $\varepsilon > 0$. Nechť δ_ε je určeno podmínkou (5.19). Dále, mějme značené dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a, b]$ takové, že $|\boldsymbol{\sigma}| < \delta_\varepsilon$, Označme $m = \nu(\boldsymbol{\sigma})$. Nechť

$$\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} = \bigcup_{j=1}^{m} \boldsymbol{\sigma}^j, \quad \widetilde{\boldsymbol{\xi}} = (\boldsymbol{\xi}^1, \boldsymbol{\xi}^2, \dots, \boldsymbol{\xi}^m),$$

kde

$$(\boldsymbol{\sigma}^j, \boldsymbol{\xi}^j) \in \mathscr{T}[\sigma_{j-1}, \sigma_j\,] \text{ pro } j \in \{1, 2, \dots, m\}\,.$$

Potom $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} \supset \boldsymbol{\sigma}$. Díky předpokladu (5.19) a s přihlédnutím k (5.18) dostaneme

$$\begin{aligned}
&|S_{f\Delta\,g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S_{f\Delta\,g}(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, \widetilde{\boldsymbol{\xi}})| \\
&\qquad \le \sum_{j=1}^{m} \big| f(\xi_j)\,[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] - S_{f\Delta\,g}(\boldsymbol{\sigma}^j, \boldsymbol{\eta}^j) \big| \\
&\qquad \le \sum_{j=1}^{m} \omega\,(S_{f\Delta\,g}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j\,]) < \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Platí tedy (5.3’).

b) Analogicky by se dokázala ekvivalence podmínky (5.20) s Bolzanovou – Cauchyovou podmínkou pro existenci (σ) RS – integrálu. Podrobný důkaz je ponechán čtenáři jako cvičení. $\square$

5.34. Cvičení. Dokažte tvrzení věty 5.33 pro (σ) RS – integrály.

5.35. Lemma. *Nechť* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *a* $[c, d\,] \subset [a, b]$. *Potom*

$$\omega_{[c,d\,]}(f)\,|g(d) - g(c)| \le \omega\,(S_{f\Delta\,g}; [c, d\,]) \le \omega_{[c,d\,]}(f)\,\mathrm{var}_c^d\, g\,. \tag{5.22}$$

D ů k a z. a) Nechť $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\rho} = \{c, d\}$, $\xi, \eta \in [c, d\,]$ a $\boldsymbol{\xi} = (\xi), \boldsymbol{\eta} = (\eta)$. Potom $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}), (\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) \in \mathscr{T}[c, d\,]$ a $|f(\xi) - f(\eta)|\,|g(d) - g(c)| \in \mathfrak{S}_{f\Delta\,g}([c, d\,])$ a tudíž

$$\omega_{[c,d]}(f)\,|g(d) - g(c)| \le \sup\, \mathfrak{S}_{f\Delta\,g}[c, d\,) = \omega\,(S_{f\Delta\,g}; [c, d\,])\,.$$

b) Na druhou stranu, jestliže $(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}), (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\theta}) \in \mathscr{T}[c, d\,]$ a položíme-li $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\rho} \cup \boldsymbol{\tau}$, bude $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[c, d\,]$ a

$$\big|S_{f\Delta\,g}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) - S_{f\Delta\,g}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\theta})\big| = \Big| \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \big(f(\eta_j') - f(\theta_j')\big)\,[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] \Big|,$$

kde $\eta'_j = \eta_k$ když $[\sigma_{j-1}, \sigma_j] \subset [\rho_{k-1}, \rho_k]$ a $\theta'_j = \theta_k$ když $[\sigma_{j-1}, \sigma_j] \subset [\tau_{k-1}, \tau_k]$. Odtud dostáváme dále

$$\begin{aligned}\left|S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta}) - S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\theta})\right| &\le \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \left|f(\eta'_j) - f(\theta'_j)\right| \left|g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})\right| \\ &\le \omega_{[c,d]}(f)\, V(g, \boldsymbol{\sigma})\end{aligned}$$

neboli

$$\omega\,(S_{f\Delta g}; [c,d]) = \sup \mathfrak{S}_{f\Delta g}[c,d) \le \omega_{[c,d]}(f)\, \mathrm{var}_c^d\, g\,.$$

Dokázali jsme platnost nerovností (5.22). □

5.36. Poznámka. Je-li $\mathrm{var}_c^d\, g = \infty$, pak je ovšem druhá z nerovností v (5.22) triviální.

Následující tvrzení poskytuje další nutnou a postačující podmínku pro existenci obou typů RS – integrálů.

5.37. Věta. *Nechť* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $g \in \mathbb{BV}[a,b]$ *a* $v(x) = \mathrm{var}_a^x\, g$ *pro* $x \in [a,b]$. *Potom integrál* $\int_a^b f\, \mathrm{d}\, g$ *existuje tehdy a jen tehdy, když existuje integrál* $\int_a^b f\, \mathrm{d}\, v$.

D ů k a z . a) Pro každý interval $[c,d] \subset [a,b]$ máme $\mathrm{var}_c^d\, v = v(d) - v(c)$. Tudíž podle lemmatu 5.35 musí platit

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega_{[\sigma_{j-1},\sigma_j]}(f)\, \big[v(\sigma_j) - v(\sigma_{j-1})\big] = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\,(S_{f\,\Delta\, v}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j\,])$$

pro libovolné dělení $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$. Podle lemmatu 5.35 tedy dále dostáváme

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\,(S_{f\,\Delta\, g}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j\,]) &\le \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega_{[\sigma_{j-1},\sigma_j]}(f)\; \mathrm{var}_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j}\, g \\ &= \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega_{[\sigma_{j-1},\sigma_j]}(f)\, \big[v(\sigma_j) - v(\sigma_{j-1})\big] = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\,(S_{f\,\Delta\, v}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j\,])\,,\end{aligned}$$

tj. nerovnost

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\,(S_{f\,\Delta\, g}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j\,]) \le \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\,(S_{f\,\Delta\, v}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j\,])$$

platí pro každé dělení $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$. Pomocí věty 5.33 nyní už snadno dokážeme, že z existence integrálu $\int_a^b f \,\mathrm{d}\, v$ plyne existence integrálu $\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$ (a to pro oba typy RS – integrálu).

b) Předpokládejme, že existuje integrál $(\sigma)\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$.

Buď dáno $\varepsilon > 0$. Potom podle věty 5.33 existuje dělení $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b]$ takové, že

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\left(S_{f\,\Delta\, g}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j\,]\right) < \varepsilon \tag{5.23}$$

platí pro každé jeho zjemnění $\boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$. Zřejmě můžeme též předpokládat, že také

$$0 \le \operatorname{var}_a^b\, g - V(g, \boldsymbol{\sigma}) < \varepsilon \tag{5.24}$$

platí pro každé dělení $\boldsymbol{\sigma}$ takové, že $\boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$. (Zdůvodněte!)

Podle lemmatu 5.35 máme

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\left(S_{f\,\Delta\, v}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j\,]\right) \le \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega_{[\sigma_{j-1},\sigma_j]}(f)\, \operatorname{var}_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j}\, g$$

a, dále, podle (5.24) a (5.23)

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\left(S_{f\,\Delta\, v}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j\,]\right) &\le \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega_{[\sigma_{j-1},\sigma_j]}(f)\, \big[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})\big] \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega_{[\sigma_{j-1},\sigma_j]}(f)\, \big(\operatorname{var}_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j}\, g - [g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})]\big) \\ &< \varepsilon + \omega_{[a,b]}(f)\, \big(\operatorname{var}_a^b\, g - V(g,\boldsymbol{\sigma})\big) < \varepsilon\,(1 + \omega_{[a,b]}(f))\,.\end{aligned}$$

Podle věty 5.33 můžeme tedy uzavřít, že existuje integrál $(\sigma)\int_a^b f \,\mathrm{d}\, v$.

c) Zbývá dokázat implikaci $\quad (\delta)\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g \in \mathbb{R} \implies (\delta)\int_a^b f \,\mathrm{d}\, v \in \mathbb{R}$.

Nechť tedy existuje integrál $(\delta)\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$. Potom podle vět 5.5 a 5.27 existuje $(\sigma)\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$ a funkce f, g nemají společný bod nespojitosti v (a,b). Dále, podle lemmatu 2.23 také funkce f, v nemají společný bod nespojitosti v (a,b). Konečně, protože podle části b) tohoto důkazu existuje integrál $(\sigma)\int_a^b f \,\mathrm{d}\, v$, existence integrálu $(\delta)\int_a^b f \,\mathrm{d}\, v$ plyne z důsledku 5.29. (Protože $g \in \mathbb{BV}[a,b]$, je g ohraničená na $[a,b]$.) □

5.38. Věta. *Nechť* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $g \in \mathbb{BV}[a,b]$ *a existuje integrál* $\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$. *Potom existuje také integrál* $\int_a^b |f| \,\mathrm{d}\, g$.

D ů k a z . Podle věty 2.14 a lemmatu 5.11 se můžeme omezit na případ, že g je neklesající na $[a,b]$. Potom je $\operatorname{var}_c^d g = g(d) - g(c)$ pro libovolná $c, d \in [a,b]$ taková, že $c\, le\, d$. Podle lemmatu 5.35 tedy pro libovolné dělení $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$ platí

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\left(S_{f\Delta g}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j\,]\right) = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega_{[\sigma_{j-1},\sigma_j]}(f)\, \big[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})\big]$$

a

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\left(S_{|f|\Delta g}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j\,]\right) = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega_{[\sigma_{j-1},\sigma_j]}(|f|)\, \big[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})\big]\,.$$

Na druhou stranu, zřejmě

$$\big||f(x)| - |f(y)|\big| \le |f(x) - f(y)| \quad \text{pro libovolná } x, y \in [a,b]\,.$$

Máme tedy $\omega_{[c,d]}(|f|) \le \omega_{[c,d]}(f)$ pro libovolný interval $[c,d\,] \subset [a,b]$. Tudíž

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\left(S_{|f|\Delta g}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j\,]\right) &= \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega_{[\sigma_{j-1},\sigma_j]}(|f|)\, \big[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})\big] \\ &\le \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega_{[\sigma_{j-1},\sigma_j]}(f)\, \big[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})\big] = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\left(S_{f\Delta g}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j\,]\right).\end{aligned}$$

Důkaz lemmatu nyní plyne okamžitě z věty 5.33. □

Přímým důsledkem lemmatu 5.9 a vět 5.37 a 5.38 je následující tvrzení.

5.39. Důsledek. *Nechť* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $g \in \mathbb{BV}[a,b]$, $v(x) = \operatorname{var}_a^x g$ *pro* $x \in [a,b]$ *a nechť existuje integrál* $\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$. *Potom existuje také integrál* $\int_a^b |f| \,\mathrm{d}\, v$ *a platí*

$$\left|\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g\right| \le \int_a^b |f| \,\mathrm{d}\, v \le \|f\| \operatorname{var}_a^b g\,.$$

□

5.4 Substituce

Všechna tvrzení tohoto odstavce platí ve stejném znění pro oba typy RS – integrálu

Začneme dalším důsledkem definice 5.32.

5.40. Lemma. *Jestliže* $\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g \in \mathbb{R}$ *a* $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ *je libovolné značené dělení intervalu* $[a, b]$, *pak platí*

$$\Big|\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g - S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})\Big| \leq \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\left(S_{f \Delta g}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j]\right). \tag{5.25}$$

D ů k a z . Označme $m = \nu(\boldsymbol{\sigma})$. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Nezávisle na tom o jaký typ RS – integrálu se jedná můžeme zvolit značené dělení $(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}) \in \mathscr{T}[a, b]$ tak, aby bylo $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} \supset \boldsymbol{\sigma}$ a

$$\Big|\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g - S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, \widetilde{\boldsymbol{\xi}})\Big| < \varepsilon.$$

Protože $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}$ je zjemněním $\boldsymbol{\sigma}$, můžeme ho rozdělit tak, že bude

$$\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} = \bigcup_{j=1}^{m} \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^j, \quad \text{kde } \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^j \in \mathscr{D}[\sigma_{j-1}, \sigma_m] \text{ pro } j = 1, 2, \ldots, m.$$

Podobně $\widetilde{\boldsymbol{\xi}} = (\widetilde{\boldsymbol{\xi}}^1, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}^2, \ldots, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}^j)$, kde $\widetilde{\boldsymbol{\xi}}^j$ jsou reálné vektory takové, že

$$(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^j, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}^j) \in \mathscr{T}[\sigma_{j-1}, \sigma_j] \text{ pro } j = 1, 2, \ldots, m.$$

Máme tedy

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g - S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})\Big| \\
&\qquad \leq \Big|\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g - S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, \widetilde{\boldsymbol{\xi}})\Big| + \Big|S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}) - S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})\Big| \\
&\qquad < \varepsilon + \sum_{j=1}^{m} \Big|f(\xi_j)\,[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] - S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^j, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}^j)\Big|
\end{aligned}$$

$$< \varepsilon + \sum_{j=1}^{m} \omega\left(S_{f\Delta g}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j]\right).$$

Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, znamená to, že platí (5.25). $\square$

5.41. Důsledek. *Jestliže* $\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g \in \mathbb{R}$ *a* $[c,d] \subset [a,b]$, *pak pro každé* $\xi \in [c,d]$ *platí*

$$\left| \int_c^d f \, \mathrm{d}\, g - f(\xi)\,[g(d) - g(c)]\right| \le \omega\left(S_{f\Delta g}; [c,d]\right).$$

Následující speciální forma věty o substituci je také důsledkem lemmatu 5.40.

5.42. Věta (SUBSTITUCE). *Nechť* $f, g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$, *přičemž* f *je ohraničená na intervalu* $[a,b]$ *a* $\int_a^b g \, \mathrm{d}\, h \in \mathbb{R}$. *Potom jeden z integrálů*

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}\Big[\int_a^x g \, \mathrm{d}\, h\Big] \quad a \quad \int_a^b f\, g \, \mathrm{d}\, h$$

existuje (má konečnou hodnotu) právě tehdy, když existuje i ten druhý. V takovém případě pak platí

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}\Big[\int_a^x g \, \mathrm{d}\, h\Big] = \int_a^b f\, g \, \mathrm{d}\, h. \tag{5.26}$$

D ů k a z . Nejprve si povšimněme, že z existence integrálu $\int_a^b g \, \mathrm{d}\, h \in \mathbb{R}$ plyne, že

$$w(x) := \int_a^x g \, \mathrm{d}\, h \in \mathbb{R} \quad \text{pro každé } x \in [a,b]$$

(viz věta 5.15). Funkce w je tedy definovaná na celém intervalu $[a,b]$ a zobrazuje interval $[a,b]$ do $\mathbb{R}$.

Pro libovolné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a,b]$ máme

$$\begin{aligned}
&|S_{fg\Delta h}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S_{f\Delta w}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})| \\
&\quad = \Big| \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} f(\xi_j)\, g(\xi_j)\,[h(\sigma_j) - h(\sigma_{j-1})] - \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} f(\xi_j)\,[w(\sigma_j) - w(\sigma_{j-1})]\Big| \\
&\quad \le \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} |f(\xi_j)|\, \Big| g(\xi_j)\,[h(\sigma_j) - h(\sigma_{j-1})] - \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} g \, \mathrm{d}\, h\Big|
\end{aligned}$$

$$\leq \|f\| \left(\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \left| g(\xi_j)\,[h(\sigma_j) - h(\sigma_{j-1})] - \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} g \,\mathrm{d}\, h \right| \right) .$$

Podle důsledku 5.41 dostáváme dále

$$\left| S_{fg\Delta\, h}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S_{f\Delta\, w}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \right| \leq \|f\| \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega \left(S_{g\Delta\, h}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j\,] \right) .$$

Odtud podle věty 5.33 už plyne relace (5.26). (Přesvědčete se, že důkaz opravdu umíte dokončit.) □

5.43. Důsledek. Je-li f ohraničená na $[a, b]$, $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ je riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$ a $g(x) = \displaystyle\int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t$, pak jeden z integrálů

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g \quad \text{a} \quad \int_a^b f(x)\, h(x)\,\mathrm{d}x$$

existuje právě tehdy, když existuje i ten druhý. V takovém případě pak platí

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g = \int_a^b f(x)\, h(x)\,\mathrm{d}x .$$

□

5.44. Věta (DRUHÁ O SUBSTITUCI). *Předpokládejme, že funkce $\phi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ je ryze monotonní a spojitá na $[\alpha, \beta]$ a zobrazuje $[\alpha, \beta]$ na interval $[a, b]$. Potom pro libovolné funkce f, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ platí*

$$\textit{existuje-li} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\, g(x),\ \textit{existuje také} \int_\alpha^\beta f(\phi(x))\,\mathrm{d}\, g(\phi(x))$$

a

$$\pm \int_\alpha^\beta f(\phi(x))\,\mathrm{d}\, g(\phi(x)) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\, g(x)\,, \tag{5.27}$$

kde "+" platí, je-li ϕ rostoucí a "-" platí, je-li ϕ klesající.

D ů k a z . Předpokládejme např., že ϕ je klesající. Potom $\alpha = \phi(b)$ a $\beta = \phi(a)$. Pro dané značené dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$, intervalu $[\alpha, \beta]$ položme

$$\rho_{\nu(\boldsymbol{\sigma})-j} = \phi(\sigma_j) \text{ pro } j = 0, 1, \ldots, \nu(\boldsymbol{\sigma}),\ \eta_{\nu(\boldsymbol{\sigma})-j} = \phi(\xi_j) \text{ pro } j = 1, 2, \ldots, \nu(\boldsymbol{\sigma})\,.$$

Potom $(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})$, $\boldsymbol{\rho} = \{\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\}$, $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{\nu(\boldsymbol{\sigma})}$ je značené dělení intervalu $[a, b]$. Píšeme $\boldsymbol{\rho} = \phi(\boldsymbol{\sigma})$ a $\boldsymbol{\eta} = \phi(\boldsymbol{\xi})$. Zřejmě, je-li $\boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}'$, pak je také $\phi(\boldsymbol{\sigma}) \supset \phi(\boldsymbol{\sigma}')$. Podobně, protože ϕ je stejnoměrně spojitá na $[\alpha, \beta]$, platí $|\phi(\boldsymbol{\sigma})| \to 0$ jakmile $|\boldsymbol{\sigma}| \to 0$. Navíc

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} f(\phi(\xi_j)) \left[g(\phi(\sigma_j)) - g(\phi(\sigma_{j-1})\right] = - \sum_{i=1}^{\nu(\boldsymbol{\rho})} f(\eta_j) \left[g(\phi(\rho_j)) - g(\phi(\rho_{j-1})\right]$$

platí pro každé $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[\alpha, \beta]$. Teď už zajisté každý čtenář, který pozorně prostudoval většinu důkazů této kapitoly, samostatně dokončí důkaz rovnosti (5.27) pro oba integrály (včetně případu, že ϕ je nrostoucí). $\square$

Další variantou věty o substituci je následující věta. Její důkaz můžeme ponechat čtenáři jako cvičení.

5.45. Věta. *Nechť funkce* $\phi : [a, b] \to [\phi(a), \phi(b)]$ *je rostoucí a spojitá na* $[a, b]$, $\psi : [\phi(a), \phi(b)] \to [a, b]$ *je inversní k* ϕ *a nechť* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Pak existuje-li jeden z integrálů*

$$(\sigma)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x, \quad (\sigma)\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(\psi(x))\,\mathrm{d}\,\psi(x)\,,$$

existuje i ten druhý a platí rovnost

$$(\sigma)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = (\sigma)\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(\psi(x))\,\mathrm{d}\,\psi(x)\,,$$

5.46. Cvičení. Dokažte větu 5.45. Zformulujte a dokažte analogické tvrzení pro (δ) RS – integrály.

5.5 Integrace per-partes

Následující tvrzení je zobecněním věty o integraci per-partes pro Riemannův integrál. Platí ve stejném znění pro oba typy RS – integrálu.

5.47. Věta (VĚTA O INTEGRACI PER-PARTES)**.** *Existuje-li jeden z integrálů*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g, \quad \int_a^b g\,\mathrm{d}\,f\,,$$

existuje i druhý a platí

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g + \int_a^b g\,\mathrm{d}\,f = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a)\,. \tag{5.28}$$

D ů k a z . a) Buď dáno libovolné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$. Přeorganizováním členů v součtu $S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ dostaneme

$$\begin{aligned}
S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) &= f(\xi_1)\,[g(\sigma_1)-g(a)] + f(\xi_2)\,[g(\sigma_2)-g(\sigma_1)] \\
&\quad + \dots + f(\xi_m)\,[g(b)-g(\sigma_{m-1})] \\
&= -f(a)\,g(a) - [f(\xi_1)-f(a)]\,g(a) - [f(\xi_2)-f(\sigma_1)]\,g(\sigma_1) \\
&\quad -[f(\sigma_1)-f(\xi_1)]\,g(\sigma_1) - \dots - [f(\xi_m)-f(\sigma_{m-1})]\,g(\sigma_{m-1}) \\
&\quad -[f(\sigma_{m-1})-f(\xi_{m-1})]\,g(\sigma_{m-1}) \\
&\quad -[f(b)-f(\xi_m)]\,g(b) + f(b)\,g(b) \\
&= f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - S_{g\Delta f}(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')
\end{aligned}$$

neboli

$$S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - S_{g\Delta f}(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}') \tag{5.29}$$

kde

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}' &= \{a,\xi_1,\sigma_1,\xi_2,\sigma_2,\dots,\sigma_{m-1},\ \xi_m,\ b\}\,, \\
\boldsymbol{\xi}' &= (a,\sigma_1,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_2,\dots,\sigma_{m-1},\sigma_{m-1},b)\,,
\end{aligned}$$

$(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')\in\mathscr{T}[a,b]$ a $\boldsymbol{\sigma}'$ je zjemněním $\boldsymbol{\sigma}$. (Stane-li se, že $\xi_j=\sigma_{j-1}$ resp. $\xi_j=\sigma_j$ pro nějaké j, musíme ovšem tyto body ξ_j v $\boldsymbol{\sigma}'$ a $\boldsymbol{\xi}'$ vynechat.)

b) Předpokládejme, že existuje integrál $(\sigma)\displaystyle\int_a^b g\,\mathrm{d}\,f$.

Buď dáno $\varepsilon>0$. Zvolme dělení $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon\in\mathscr{D}[a,b]$ tak, aby pro každé jeho zjemnění $\boldsymbol{\sigma}'$ a všechna příslušná značená dělení $(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')\in\mathscr{T}[a,b]$ platilo

$$\left|S_{g\Delta f}(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}') - (\sigma)\int_a^b g\,\mathrm{d}\,f\right| < \varepsilon\,.$$

Podle (5.29) pro každé $\boldsymbol{\sigma}\supset\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$ a příslušné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ platí

$$\begin{aligned}
S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - f(b)\,g(b) + f(a)\,g(a) + (\sigma)\int_a^b g\,\mathrm{d}\,f \\
= (\sigma)\int_a^b g\,\mathrm{d}\,f - S_{g\Delta f}(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')\,,
\end{aligned}$$

kde $\boldsymbol{\sigma}' \supset \boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$ a tudíž

$$\Big|S_{f\Delta\, g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - f(b)\,g(b) + f(a)\,g(a) + (\sigma)\int_a^b g\,\mathrm{d}\,f\Big| \\ = \Big|(\sigma)\int_a^b g\,\mathrm{d}\,f - S_{g\Delta f}(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}\,')\Big| < \varepsilon\,.$$

Odtud plyne existence integrálu $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ a relace (5.28). To, že z existence integrálu $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ plyne existence integrálu $(\sigma)\int_a^b g\,\mathrm{d}\,f$ a platí rovnost (5.28) by se dokazovalo analogicky.

c) Tvrzení věty pro (δ)RS – integrály plyne ze vztahu (5.29) podobně jako v druhé části důkazu pro (σ)RS – integrály a detailní důkaz můžeme nechat čtenáři jako cvičení. □

5.48. Cvičení. Dokažte tvrzení věty 5.47 pro (δ)RS – integrály.

5.6 Stejnoměrná konvergence a existence integrálu

Až na větu 5.51, všechna tvrzení tohoto odstavce platí ve stejném znění pro oba typy RS – integrálu.

5.49. Věta. *Nechť $g\in\mathbb{BV}[a,b]$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ je ohraničená a nechť posloupnost funkcí $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, je taková, že $\int_a^b f_n\,\mathrm{d}\,g\in\mathbb{R}$ pro všechna $n\in\mathbb{N}$ a*

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\| = 0\,. \tag{5.30}$$

Potom existuje také integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ a platí

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,\mathrm{d}\,g = \int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\,. \tag{5.31}$$

D ů k a z . a) Nechť je dáno $\varepsilon>0$. Vzhledem k předpokladu ((5.30)) můžeme zvolit $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tak, aby platilo

$$n\ge n_\varepsilon \implies \Big(\|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{\operatorname{var}_a^b g}\Big) \text{ a } \Big(\|f_n\| < \|f\| + 1\Big)\,. \tag{5.32}$$

Dále, za našich předpokladů je podle lemmatu 5.9

$$\Big|\int_a^b f_n \,\mathrm{d}\, g\Big| \le \|f_n\| \operatorname{var}_a^b g \le (\|f\|+1) \operatorname{var}_a^b g$$

pro $n \ge n_\varepsilon$. Můžeme tedy vybrat podposloupnost $\{n_k\} \subset \mathbb{N}\}$ a $I \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_{n_k} \,\mathrm{d}\, g = I\,.$$

Speciálně, existuje $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takové, že

$$n_{k_\varepsilon} \ge n_\varepsilon \quad \text{a} \quad \Big(k \ge k_\varepsilon \implies \Big|\int_a^b f_{n_k} \,\mathrm{d}\, g - I\Big| < \varepsilon\Big)\,. \tag{5.33}$$

Dále, nechť $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$ je takové dělení intervalu $[a,b]$, že

$$\Big((\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a,b] \;\text{ a }\; \boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon\Big) \implies \Big|S_{f_{n_{k_\varepsilon}} \Delta\, g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - \int_a^b f_{n_{k_\varepsilon}} \,\mathrm{d}\, g\Big| < \varepsilon\,. \tag{5.34}$$

Protože je $n_{k_\varepsilon} \ge n_\varepsilon$ (viz ((5.33))), plyne z (5.32), že pro každé značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$, kde $\boldsymbol{\sigma}$ je zjemněním $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$, platí

$$\big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - S_{f_{n_{k_\varepsilon}} \Delta\, g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\big| \le \|f - f_{n_{k_\varepsilon}}\| \operatorname{var}_a^b g < \varepsilon\,.$$

Vzhledem k (5.33)–(5.34) tedy dostáváme

$$\begin{aligned} \big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - I\big| \le \big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - S_{f_{n_{k_\varepsilon}} \Delta\, g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\big| + \Big|S_{f_{n_{k_\varepsilon}} \Delta\, g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - \int_a^b f_{n_{k_\varepsilon}} \,\mathrm{d}\, g\Big| \\ + \Big|\int_a^b f_{n_{k_\varepsilon}} \,\mathrm{d}\, g - I\Big| < 3\,\varepsilon\,. \end{aligned}$$

Odtud okamžitě plyne, že platí

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g = I.$$

Konečně, protože podle lemmatu 5.9 máme

$$\Big|\int_a^b f_n \,\mathrm{d}\, g - \int_a^b f \,\mathrm{d}\, g\Big| \le \|f_n - f\| \,(\operatorname{var}_a^b g)\,,$$

rovnost (5.31) nyní plyne z předpokladu (5.30). Důkaz byl proveden pro (σ) RS – integrál.

b) Modifikace důkazu pro (δ) RS – integrál je zřejmá. □

5.50. Věta. *Nechť* $f \in \mathbb{C}[a,b]$ *a* $g \in \mathbb{BV}[a,b]$. *Potom existují oba integrály*

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g \quad a \quad \int_a^b g \,\mathrm{d}\, f\,.$$

D ů k a z . Vzhledem ke větám 2.14, 5.5 a 5.47 stačí dokázat existenci integrálu $(\delta)\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$ pro případ, že f je spojitá na $[a,b]$ a g neklesající na $[a,b]$.

Nechť je tedy f spojitá na $[a,b]$, g neklesající na $[a,b]$ a $\varepsilon > 0$ je dáno.

Je-li $g(b) = g(a)$, pak je g je nutně konstantní na $[a,b]$ a tudíž $(\delta)\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g = 0$. Bez újmy na obecnosti můžeme tedy předpokládat, že $g(b) - g(a) > 0$. Dále využijeme toho, že každá funkce spojitá na kompaktním intervalu je na tomto intervalu také stejnoměrně spojitá. Existuje tedy $\delta_\varepsilon > 0$ takové, že

$$\left.\begin{aligned} &|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{g(b) - g(a)} \\ &\qquad \text{pro všechna } x, y \in [a,b] \text{ taková, že } |x - y| < \delta_\varepsilon\,. \end{aligned}\right\} \tag{5.35}$$

Dokážeme, že pro libovolná dvě značená dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}), (\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}')$ intervalu $[a,b]$ taková, že $|\boldsymbol{\sigma}| < \delta_\varepsilon$ a $\boldsymbol{\sigma}' \supset \boldsymbol{\sigma}$ platí $|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}')| < \varepsilon$. Podle věty 5.13 to už bude znamenat, že existuje $(\delta)\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$.

Nechť $\nu(\boldsymbol{\sigma}) = m$. Označme prvky dělení $\boldsymbol{\sigma}'$ a složky vektoru $\boldsymbol{\xi}'$ tak, že bude

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}' &= \left\{\sigma_0, \sigma_1^1, \ldots, \sigma_{n_1-1}^1, \sigma_1, \sigma_1^2, \ldots, \sigma_{m-1}, \sigma_1^m, \ldots, \sigma_{n_m-1}^m, \sigma_m\right\} \\ \boldsymbol{\xi}' &= \left(\xi_1^1, \quad \ldots, \quad \xi_{n_1}^1, \xi_1^2, \quad \ldots, \quad \xi_1^m, \quad \ldots, \quad \xi_{n_m}^m\right). \end{aligned}$$

Potom

$$S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^m f(\xi_j)\,[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] = \sum_{j=1}^m f(\xi_j) \sum_{i=1}^{n_j} [g(\alpha_i^j) - g(\alpha_{i-1}^j)]$$

a

$$|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}')| \le \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} |f(\xi_j) - f(\xi_i^j)|\,[g(\alpha_i^j) - g(\alpha_{i-1}^j)]\,.$$

Protože

$$|\xi_j - \xi_i^j| < |\boldsymbol{\sigma}| < \delta_\varepsilon \;\text{ pro všechna } j \in \{1, 2, \ldots, m\} \text{ a } i \in \{1, 2, \ldots, n_j\}\,,$$

odvodíme pomocí nerovnosti (5.35) vztah

$$\begin{aligned}|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')| &< \frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j}[g(\alpha_i^j)-g(\alpha_{i-1}^j)]\\ &= \frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}[g(b)-g(a)]=\varepsilon\,.\end{aligned}$$

Důkaz se dokončí pomocí cvičení 5.18. □

5.51. Věta. (i) *Jestliže* $f\in\mathbb{BV}[a,b]$ *je zleva spojitá na intervalu* $(a,b]$, *pak pro každou funkci* $g\in\mathbb{G}[a,b]$ *zprava spojitou na intervalu* $[a,b)$ *existují oba integrály*

$$(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}g \quad a \quad (\sigma)\int_a^b g\,\mathrm{d}f\,.$$

(ii) *Jestliže* $f\in\mathbb{BV}[a,b]$ *je zprava spojitá na intervalu* $[a,b)$, *pak pro každou funkci* $g\in\mathbb{G}[a,b]$ *zleva spojitou na intervalu* (a,b) *existují oba integrály*

$$(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}g \quad a \quad (\sigma)\int_a^b g\,\mathrm{d}f\,.$$

D ů k a z. Díky větě o integraci per-partes (věta 5.47) stačí v obou případech dokázat existenci integrálu $(\sigma)\int_a^b g\,\mathrm{d}\,f$.

Nechť $g\in\mathbb{G}[a,b]$ je zprava spojitá na intervalu $[a,b)$, tj. $g\in\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{R}}[a,b]$ (viz (4.2)). Podle lemmat 4.13 a 4.14 máme

$$\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{R}}[a,b]=\overline{\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{R}}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]}=\overline{\mathrm{Lin}\Big(\chi_{[\tau,b]},\tau\in[a,b)\Big)}\,.$$

Podle lemmatu 5.11 a věty 5.49 tedy stačí dokázat, že integrál $(\sigma)\int_a^b g\,\mathrm{d}\,f$ existuje jestliže $g=\chi_{[a,\tau]}$ pro nějaké $\tau\in(a,b]$.

Zřejmě je $(\sigma)\int_a^\tau g\,\mathrm{d}f=f(\tau)-f(a)$ a pro každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}[\tau,b]$ máme

$$S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})=\begin{cases}0 & \text{je-li } \xi_1>\tau\,,\\ f(\sigma_1)-f(\tau) & \text{je-li } \xi_1=\tau\,.\end{cases}$$

Díky spojitosti funkce f v bodě τ zprava můžeme tedy k danému $\varepsilon > 0$ vždy najít dělení $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$ takové, že bude

$$|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})| < \varepsilon \text{ pro všechna } (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[\tau,b] \text{ taková, že } \boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \text{ , tj.}$$

$$(\sigma)\int_\tau^b g\,\mathrm{d}f = 0 \quad \text{a} \quad (\sigma)\int_a^b g\,\mathrm{d}f = f(\tau) - f(a)\,.$$

Platí tedy tvrzení (i). Druhé tvrzení by se dokazovalo podobně. □

5.52. Cvičení. (i) Pro oba typy RS – integrálu dokažte:

Jestliže $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *má konečnou variaci na* $[a,b]$ *a je spojitá na* $[a,b]$, *pak integrál* $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ *existuje pro každou funkci* g *regulovanou na* $[a,b]$.

(ii) Proveďte podrobný důkaz tvrzení (ii) věty 5.51.

5.53. Poznámka. Připomeňme ještě bez důkazu jeden ze známých zajímavých existenčních výsledků. Důkaz náleží L.C. Youngovi, jednomu z klasiků teorie integrace, a lze ho najít v jeho práci [54] z roku 1936.

Jestliže funkce $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ a $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ splňují podmínky

$$|f(x)-f(y)| \le K\,|x-y|^\alpha \quad \text{a} \quad |g(x)-g(y)| \le L\,|x-y|^\beta \quad \text{pro } x,y\in[a,b]\,,$$

kde $K,L\in[0,\infty)$, $\alpha,\beta\in(0,\infty)$, $\alpha+\beta>1$, pak existuje integrál $(\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}g$.

5.7 Bodová konvergence

Důkaz věty o konvergenci posloupnosti integrálů $\int_a^b f_n\,\mathrm{d}g$, ve které by nebyla nutná stejnoměrná konvergence $f_n \rightrightarrows f$ nám usnadní zavedení Darbouxových horních a dolních integrálů.

5.54. Definice. Nechť $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ je neklesající na $[a,b]$. Pro libovolné dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a,b]$ a funkci $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ položme

$$\overline{S}_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \Big(\sup_{x\in[\sigma_{j-1},\sigma_j]} f(x)\Big)\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})]$$

a

$$\underline{S}_{\,f\Delta\,g}(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \big(\inf_{x\,\in\,[\sigma_{j-1},\sigma_j]} f(x) \big)\, [g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})]$$

a definujme

$$\overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}\, g = \inf \left\{ \overline{S}_{f\Delta\, g}(\boldsymbol{\sigma}) : \boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b] \right\}$$

a

$$\underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}\, g = \sup \left\{ \underline{S}_{\,f\Delta\, g}(\boldsymbol{\sigma}) : \boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b] \right\}.$$

Veličiny $\overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}\, g$ resp. $\underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}\, g$ nazýváme *horní resp. dolní integrál* f vzhledem ke g.

5.55. Lemma. *Nechť* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *je neklesající na* $[a,b]$ *a* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Potom platí*

$$\overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}\, g = \underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}\, g = I \in \mathbb{R} \tag{5.36}$$

právě tehdy, když

$$(\sigma)\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g = I\,.$$

D ů k a z . a) Protože g je neklesající, plyne přímo z definice 5.54, že

$$\underline{S}_{\,f\Delta\, g}(\boldsymbol{\sigma}) \le S_{f\Delta\, g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \le \overline{S}_{f\Delta\, g}(\boldsymbol{\sigma}) \quad \text{pro } \boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b] \text{ a } \boldsymbol{\xi} \in \tau(\boldsymbol{\sigma})\,,$$

a

$$\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} \supset \boldsymbol{\sigma} \implies \Big(\underline{S}\, f\Delta\, g(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}) \ge \underline{S}_{\,f\Delta\, g}(\boldsymbol{\sigma}) \text{ a } \overline{S}_{f\Delta\, g}(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}) \le \overline{S}_{f\Delta\, g}(\boldsymbol{\sigma}) \Big)\,.$$

Pomocí těchto základních faktů není obtížné ověřit (proveďte !), že platí-li (5.36), pak pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje dělení $\boldsymbol{\sigma}^k \in \mathscr{D}[a,b]$ takové, že nerovnosti

$$I - \frac{1}{k} < \underline{S}_{\,f\Delta\, g}(\boldsymbol{\sigma}^k) \le S_{f\Delta\, g}(\boldsymbol{\sigma}^k,\boldsymbol{\xi}^k) \le \overline{S}_{f\Delta\, g}(\boldsymbol{\sigma}^k) < I + \frac{1}{k}\,.$$

platí pro každé $\boldsymbol{\xi}^k \in \tau(\boldsymbol{\sigma}^k)$. Pro dané $\varepsilon > 0$ zvolme $k_\varepsilon > \dfrac{1}{\varepsilon}$ a položme $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon = \boldsymbol{\sigma}^{k_\varepsilon}$. Potom bude pro každé $\boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$ a $\boldsymbol{\xi} \in \tau(\boldsymbol{\sigma})$ platit

$$I - \varepsilon < \underline{S}(\boldsymbol{\sigma}^{k_\varepsilon}) \le \underline{S}(\boldsymbol{\sigma}) \le S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \le \overline{S}(\boldsymbol{\sigma}) \le \overline{S}(\boldsymbol{\sigma}^{k_\varepsilon}) < I + \varepsilon\,.$$

Odtud plyne rovnost $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = I$.

b) Předpokládejme nyní, že existuje $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$.

Buď dáno $\varepsilon > 0$. Podle věty 5.13 existuje dělení $\boldsymbol{\sigma}$ takové, že nerovnost

$$\left|S_{f\Delta\,g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - S_{f\Delta\,g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\eta})\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

neboli

$$\Big|\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\big(f(\xi_j)-f(\eta_j)\big)\,\big[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})\big]\Big| < \frac{\varepsilon}{2}$$

platí pro jakákoliv $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\in\tau(\boldsymbol{\sigma})$. Přechodem k supremům a infimům na každém intervalu $[\sigma_{j-1},\sigma_j]$ získáme nerovnost

$$\begin{aligned}0 &\le \overline{S}_{f\Delta\,g}(\boldsymbol{\sigma}) - \underline{S}_{\,f\Delta\,g}(\boldsymbol{\sigma})\\ &= \Big|\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\Big(\sup_{x\in[\sigma_{j-1},\sigma_j]} f(x) - \inf_{x\in[\sigma_{j-1},\sigma_j]} f(x)\Big)\,\big[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})\big]\Big|\\ &\le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Odtud a s pomocí zřejmých nerovností

$$\underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}\,g \le \underline{S}_{\,f\Delta\,g}(\boldsymbol{\sigma}) \le \overline{S}_{f\Delta\,g}(\boldsymbol{\sigma}) \le \overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}\,g$$

dostáváme

$$\overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}\,g \le \overline{S}_{f\Delta\,g}(\boldsymbol{\sigma}) < \underline{S}_{\,f\Delta\,g}(\boldsymbol{\sigma}) + \varepsilon \le \underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}\,g + \varepsilon$$

a tudíž

$$0 \le \overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}\,g - \underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}\,g < \varepsilon\,.$$

Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, znamená to, že platí (5.36). $\square$

5.56. Poznámka. Jestliže $\overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}\, g = \underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}\, g = I \in \mathbb{R}$, bývá jejich společná hodnota I nazývána *Darbouxův – Stieltjesův integrál*. Lemma 5.55 říká, že tento integrál je ekvivalentní se (σ) RS – integrálem.

Nyní dokážeme dvě hlavní věty tohoto odstavce: Osgoodovu větu o dominované konvergenci a Hellyovu větu o konvergenci. Obě tyto věty platí ve stejném znění pro oba typy RS – integrálů.

5.57. Věta (OSGOODOVA KONVERGENČNÍ VĚTA)**.** *Předpokládejme, že funkce* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *a posloupnost* $\{f_n\}$ *funkcí definovaných na* $[a,b]$ *splňují*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{a} \quad |f_n(x)| \leq M < \infty \ \text{ pro } \ x\in[a,b] \ \text{ a } \ n\in\mathbb{N}\,. \tag{5.37}$$

Dále, nechť funkce $g\in\mathbb{BV}[a,b]$ *je taková, že integrály* $\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$ *a* $\int_a^b f_n \,\mathrm{d}\, g$ *existují pro libovolné* $n\in\mathbb{N}$*. Potom*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g = \int_a^b f \,\mathrm{d}\, g\,. \tag{5.38}$$

D ů k a z. a) Podle důsledku 5.39 integrál $\int_a^b |f_n(x)-f(x)| \,\mathrm{d}\,[\mathrm{var}_a^x\, g]$ existuje pro každé $n\in\mathbb{N}$ a platí nerovnost

$$\Big|\int_a^b f_n(x) \,\mathrm{d}\, g(x) - \int_a^b f(x) \,\mathrm{d} g(x)\Big| \leq \int_a^b |f_n(x)-f(x)| \,\mathrm{d}\,[\mathrm{var}_a^x\, g]\,. \tag{5.39}$$

Stačí tedy dokázat, tvrzení věty je pravdivé, když funkce f_n jsou nezáporné, $f=0$ a g je neklesající. K tomu budeme potřebovat následující tvrzení z teorie množin známé jako Arzelàovo lemma. Jeho důkaz lze nalézti např. v [13, lemma II.15.8].

Lemma. (ARZELÀ). *Nechť* $\big\{\{J_{k,j}\}: k\in\mathbb{N},\, j\in U_k\big\}$ *je posloupnost konečných množin podintervalů* $[a,b]$ *takových, že*

$$\sum_{j\in U_k} |J_{k,j}| > C > 0 \quad \text{pro každé } \ k\in\mathbb{N}\,.$$

Potom existují posloupnosti indexů $\{k_\ell\}$ *a* $\{j_\ell\}$ *takové, že* $j_\ell\in U_{k_\ell}$ *pro každé* $\ell\in\mathbb{N}$ *a* $\bigcap_{\ell\in\mathbb{N}} J_{k_\ell,j_\ell}\neq\emptyset$.

b) Předpokládejme tedy, že g je neklesající na $[a,b]$ a $\{f_n\}$ je posloupnost funkcí definovaných na $[a,b]$ a takových, že

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \text{a} \quad 0 \le f_n(x) \le M < \infty \ \text{ pro } \ x \in [a,b] \ \text{ a } \ n \in \mathbb{N}\,.$$

Dokážeme, že musí platit

$$\lim_{n\to\infty} \underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}\, g = 0\,. \tag{5.40}$$

Důkaz provedeme sporem. Nechť tedy neplatí (5.40). Potom existují $\varepsilon > 0$ a posloupnost $\{n_k\}$ takové, že

$$\underline{\int_a^b} f_{n_k} \,\mathrm{d}\, g > \varepsilon \quad \text{pro všechna } \ k \in \mathbb{N}\,.$$

Vzhledem k definici 5.54 to znamená, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $\boldsymbol{\sigma}^k \in \mathscr{D}[a,b]$ takové že $\underline{S}_{\ k}(\boldsymbol{\sigma}^k) > \varepsilon$, kde značíme $\underline{S}_{\ k}(\boldsymbol{\sigma}^k) = \underline{S}_{\ f_{n_k}\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}^k)$. Položme ještě $m_k = \nu(\boldsymbol{\sigma}^k)$ a $\varphi_{k,j} = \inf\limits_{x \in [\sigma^k_{j-1}, \sigma^k_j]} f_{n_k}(x)$ pro $k \in \mathbb{N}$ a $j \in \{1,2,\dots,m_k\}$.

Pro dané $\eta > 0$ označme U_k množina indexů j takových, že $\varphi_{k,j} > \eta$, zatímco $V_k = \{1,2,\dots,m_k\} \setminus U_k$. Zřejmě

$$M \sum_{j\in U_k} [g(\sigma^k_j) - g(\sigma^k_{j-1})] + \eta \sum_{j\in V_k} [g(\sigma^k_j) - g(\sigma^k_{j-1})] > \varepsilon$$

neboli

$$M \sum_{j\in U_k} [g(\sigma^k_j) - g(\sigma^k_{j-1})] > \varepsilon - \eta\,[g(b) - g(a)]\,.$$

Pro $\eta = \dfrac{\varepsilon}{2\,[g(b) - g(a)]}$ dostaneme

$$\sum_{j\in U_k} [g(\sigma^k_j) - g(\sigma^{j-1})] > \frac{\varepsilon}{2\,M} > 0$$

neboli

$$\sum_{j\in U_k} |J_{k,j}| > \frac{\varepsilon}{2\,M} > 0, \quad \text{kde } \ J_{k,j} = [g(\sigma^k_{j-1}), g(\sigma^k_j)\,] \quad \text{pro } \ j \in U_k\,.$$

Podle Arzelàova lemmatu tedy existují bod y_0 a posloupnosti $\{k_\ell\}$ a $\{j_\ell\}$ takové, že $j_\ell \in U_{k_\ell}$ pro každé $\ell \in \mathbb{N}$ a $y_0 \in \bigcap\limits_{\ell \in \mathbb{N}} J_{k_\ell, j_\ell}$ neboli

$$y_0 \in [g(\sigma^{k_\ell}_{j_\ell - 1}), g(\sigma^{k_\ell}_{j_\ell})], \quad \text{kde } j_\ell \in U_{k_\ell} \text{ pro každé } \ell \in \mathbb{N}.$$

Protože g je neklesající na $[a,b]$, existuje právě jeden bod $x_0 \in [a,b]$ takový, že

$$y_0 \in [g(x_0-), g(x_0+)], \; x_0 \in [\sigma^{k_\ell}_{j_\ell - 1}, \sigma^{k_\ell}_{j_\ell}] \text{ a } j_\ell \in U_{k_\ell} \text{ pro každé } \ell \in \mathbb{N}.$$

Podle definice množin U_k to znamená, že $f_{n_{k_\ell}}(x_0) > \eta$ pro každé $\ell \in \mathbb{N}$. To ale není možné vzhledem k předpokladu $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = 0$. Platí tedy (5.39).

c) Podle části b) důkazu máme

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)| \, \mathrm{d}\, [\operatorname{var}_a^x g] = 0$$

a tudíž ze vztahu (5.39) bezprostředně vyplývá, že platí také

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n \, \mathrm{d}\, g = \int_a^b f | \, \mathrm{d}\, g\, .$$

Tím je důkaz dokončen. □

Další věta o konvergenci posloupnosti integrálů $\left\{ \int_a^b f \, \mathrm{d}\, g_n \right\}$ je svým způsobem symetrická ke větě Osgoodově.

5.58. Věta (HELLYOVA VĚTA O KONVERGENCI)**.** *Nechť funkce* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *a posloupnost* $\{g_n\} \subset \mathbb{BV}[a,b]$ *jsou takové, že*

$$\lim_{n \to \infty} g_n(x) = g(x) \textit{ pro } x \in [a,b] \quad \textit{a} \quad \operatorname{var}_a^b g_n \le \gamma < \infty.$$

Potom $\operatorname{var}_a^b g \le \gamma$ *a* $\lim\limits_{n \to \infty} \int_a^b f \, \mathrm{d}\, g_n = \int_a^b f \, \mathrm{d}\, g$ *platí pro každou funkci* f *spojitou na* $[a,b]$.

D ů k a z . a) Pro každé dělení $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$ a každé $n \in \mathbb{N}$ máme

$$V(g_n, \boldsymbol{\sigma}) \le \operatorname{var}_a^b g_n \le \gamma\, .$$

Proto také

$$V(g, \boldsymbol{\sigma}) = \lim_{n \to \infty} V(g_n, \boldsymbol{\sigma}) \le \gamma$$

a tudíž $\operatorname{var}_a^b g \le \gamma$.

b) Všechny integrály $\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g_n,\ n \in \mathbb{N},$ a $\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$ existují podle věty 5.50.

Buď dáno $\varepsilon > 0$. Ze spojitosti funkce f na $[a,b]$ plyne, že existuje dělení $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m\} \in \mathscr{D}$ takové, že pro každé $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ platí

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3\,\gamma} \quad \text{pro všechny } x, y \in [\sigma_{j-1}, \sigma_j\,]\,. \tag{5.41}$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^m \Big(\int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} f(x) \,\mathrm{d}\, g_n(x) - f(\sigma_j) \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} \mathrm{d}\, g_n(x) \Big) \\
&\qquad = \sum_{j=1}^m \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} \big(f(x) - f(\sigma_j)\big) \,\mathrm{d}\, g_n(x)\,,
\end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}\, g_n(x) - \sum_{j=1}^m f(\sigma_j)\,[g_n(\sigma_j) - g_n(\sigma_{j-1})] \\
&\qquad = \sum_{j=1}^m \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} \big(f(x) - f(\sigma_j)\big) \,\mathrm{d}\, g_n(x)\,.
\end{aligned}$$

Pomocí (5.41) a lemmatu 5.9 tedy dostaneme

$$\begin{aligned}
&\Big| \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}\, g_n(x) - S_{f\,\Delta g_n}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \Big| \\
&\qquad \le \frac{\varepsilon}{3\,\gamma} \sum_{j=1}^m \big|[g_n(\sigma_j) - g_n(\sigma_{j-1})]\big| \le \frac{\varepsilon}{3\,\gamma}\,\gamma = \frac{\varepsilon}{3}\,.
\end{aligned}$$

Podobně odvodíme i analogickou nerovnost s funkcí g na místě g_n, tj.

$$\Big| \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}[g(x)] - S_{f\,\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \Big| < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Protože $g_n(x) \to g(x)$ pro každé $x \in [a,b]$, snadno ověříme také rovnost

$$\lim_{n\to\infty} \big| S_{f\,\Delta g_n}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S_{f\,\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \big| = 0\,.$$

Existuje tedy $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\big| S_{f\,\Delta g_n}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S_{f\,\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \big| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pro } n \ge n_0\,.$$

Pomocí posledních tří nerovností konečně uzavřeme důkaz:

$$\Big|\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g_n - \int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\Big| \le \Big|\int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} f\,\mathrm{d}\,g_n - S_{f\,\Delta g_n}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\Big|$$
$$+\big|S_{f\,\Delta g_n}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - S_{f\,\Delta g_n}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\big| + \Big|S_{f\,\Delta g_n}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - \int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\Big| < \varepsilon\,. \qquad \square$$

5.8 Další věty o existenci integrálu

5.59. Věta. *Jestliže integrál* $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje pro každou funkci* f *spojitou na* $[a,b]$, *pak* g *má konečnou variaci na* $[a,b]$.

Důkaz se opírá o následující dvě pomocná tvrzení.

Tvrzení 1. *Je-li* $a_n \ge 0$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, *pak existuje posloupnost* $\{c_n\}$ *taková, že platí*

$$c_n > 0 \text{ pro všechna } n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n\to\infty} c_n = 0 \quad a \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, a_n = \infty\,. \tag{5.42}$$

D ů k a z . Označíme-li $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ pro $n \in \mathbb{N}$, bude posloupnost $\{s_n\}$ neklesající a

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty\,. \tag{5.43}$$

Speciálně, pro dostatečně velká n $(n \ge n_0)$ bude $s_n > 0$. Můžeme tudíž definovat

$$c_n = \begin{cases} 1 & \text{pro } n < n_0\,, \\ \dfrac{1}{s_n} & \text{pro } n \ge n_0\,. \end{cases}$$

Zřejmě je $c_n > 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. Na druhou stranu, pro libovolná $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n \ge n_0$ máme

$$\sum_{k=n}^{m} c_k\, a_k = \sum_{k=n}^{m} \frac{a_k}{s_k} \ge \frac{\sum_{k=n}^{m} a_k}{s_m} = 1 - \frac{s_{n-1}}{s_m}\,.$$

Vzhledem k (5.43), pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $m_n > n$ takové, že je $\dfrac{s_{n-1}}{s_{m_n}} < \dfrac{1}{2}$, tj.

$$\sum_{k=n}^{m_n} c_k\, a_k > \frac{1}{2}\,.$$

To ovšem znamená, že musí platit ((5.42)).

Tvrzení 2. *Nechť* $g : [a, b] \to \mathbb{R},\; x_0 \in (a, b]$ *a*

$$\mathrm{var}_x^{x_0} g = \infty \quad \textit{pro každé } \; x \in [a, x_0)\,. \tag{5.44}$$

Potom existuje rostoucí posloupnost $\{x_k\}$ *bodů v* $(0, x_0)$ *taková, že*

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x_0 \;\; \textit{a} \;\; \sum_{k=1}^{\infty} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| = \infty. \tag{5.45}$$

D ů k a z . $\alpha)$ Předpokládejme nejprve, že je

$$\sup\{|g(x)| : x \in [y, x_0]\} = \infty \quad \text{pro všechna } \; y \in [a, x_0)\,. \tag{5.46}$$

Všimněme si, že pro libovolné $y \in [a, x_0)$ je

$$\sup\{|g(x)| : x \in [y, x_0]\} = \infty \iff \sup\{|g(x)| : x \in (y, x_0)\} = \infty\,.$$

(Kdyby bylo $\sup\{|g(x)| : x \in [y, x_0]\} = \infty,$ musel by existovat bod $x \in (y, x_0)$ takový, že

$$|g(x)| \geq \max\{|g(y)|, |g(x_0)|\}.)$$

(Připomeňme si, že hodnoty $g(x)$ jsou konečné pro každé $x \in [a, b]$.) Vzhledem k (5.46) můžeme vybrat body $x_k \in (y, x_0),\; k \in \mathbb{N},$ tak, aby bylo

$$|g(x_1)| > 1, \;\; x_k > \max\{x_{k-1}, x_0 - \tfrac{1}{k}\}$$

a

$$|g(x_k)| > |g(x_{k-1})| + 1 \;\; \text{pro } k = 2, 3, \dots\,.$$

Zřejmě $\{x_k\}$ je rostoucí, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$ a

$$\sum_{k=1}^{\infty} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| \geq \sum_{k=1}^{\infty} \big(|g(x_{k+1})| - |g(x_k)|\big) > \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty\,.$$

Posloupnost $\{x_k\}$ je neklesající a splňuje (5.45).

$\beta)$ Nechť (5.46) neplatí. Potom existuje $y_1 \in [a, x_0)$ takové, že

$$0 \le g^* := \sup\{|g(x)| : x \in [y_1, x_0]\} < \infty. \tag{5.47}$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $y_1 > x_0 - 1.$ Podle (5.44) máme také

$$\operatorname{var}_{y_1}^{x_0} g = \infty\,.$$

Existuje tedy dělení $\boldsymbol{\sigma}^1 = \{\sigma_0^1, \sigma_1^1, \dots, \sigma_{m_1}^1\}$ intervalu $[y_1, x_0]$ takové, že

$$V(g, \boldsymbol{\sigma}^1) > 1 + 2\,g^*.$$

Vzhledem k (5.47) tedy máme

$$\sum_{j=1}^{m_1-1} |g(\sigma_j^1) - g(\sigma_{j-1}^1)|$$
$$> 1 + 2\,g^* - |g(x_0)| - |g(\sigma_{m_1-1}^1)| \ge 1 + 2\,g^* - 2\,g^* = 1\,.$$

Položme

$$x_1 = y_1,\ \ x_k = \sigma_{k-1}^1 \ \text{ pro } k = 2, \dots, m_1,$$
$$y_2 = \max\{x_{m_1-1}, x_0 - \frac{1}{2}\} \ \text{ a } \ r_1 = m_1 - 1.$$

Máme opět

$$\operatorname{var}_{y_2}^{x_0} g = \infty.$$

Existuje tedy $\boldsymbol{\sigma}^2 = \{\sigma_0^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_{m_2}^2\} \in \mathscr{D}[y_2, x_0]$ pro něž

$$V(g, \boldsymbol{\sigma}^2) > 1 + 2\,g^*.$$

Tudíž, podle (5.47), dostaneme

$$\sum_{j=1}^{m_2-1} |g(\sigma_j^2) - g(\sigma_{j-1}^2)| \ge 1 + 2\,g^* - |g(x_0)| - |g(\sigma_{m_2-1}^2)| \ge 1\,.$$

Položme $r_2 = m_1 + m_2 - 1,$ $x_k = \sigma_{k-r_1}^2$ pro $k = r_1 + 1, r_1 + 2, \dots, r_2,$ a $y_3 = \max\{x_{r_2}, x_0 - \frac{1}{3}\}.$ (Všimněme si, že $x_{r_1+1} = y_2 = \sigma_0^2.$)

Nyní, nechť $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$ a r_i, y_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ a x_k, $k = 1, 2, \ldots r_{n-1}$, jsou takové, že $x_{r_{i-1}+1} = y_{i-1}$, $x_k \in (y_{i-1}, y_i]$ pro $k = r_{i-1}+2, \ldots, r_i$ a

$$y_i = \max\{x_{r_{i-1}}, x_0 - \tfrac{1}{i}\}, \qquad \sum_{k=r_{i-1}}^{r_i - 1} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| \geq 1$$

pro $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Položme $y_n = \max\{x_{r_{n-1}}, x_0 - \frac{1}{n}\}$. Opět $\operatorname{var}_{y_n}^{x_0} g = \infty$ a v důsledku nerovností (5.47) existuje také $\boldsymbol{\sigma}^n \in \mathscr{D}[y_n, x_0]$, takové, že

$$\sum_{j=1}^{m_n - 1} |g(\sigma_j^n) - g(\sigma_{j-1}^n)| \geq 1\,,$$

kde $m_n = \nu(bsigma^n)$. Položíme-li

$$r_n = r_{n-1} + m_n - 1 \quad \text{a} \quad x_k = \sigma_{k-r_{n-1}}^n \text{ pro } k = r_{n-1} + 1, \ldots, r_n\,,$$

bude platit

$$\sum_{k=r_{n-1}}^{r_n - 1} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| \geq 1 \text{ a } x_k \geq y_n \geq x_0 - \tfrac{1}{n} \text{ pro } k = r_{n-1}, \ldots, r_n\,.$$

Indukcí jsme tedy zkonstruovali rostoucí posloupnosti $\{r_n\}$, $\{y_n\}$ a $\{x_k\}$ takové, že

$$y_n \in (x_0 - \tfrac{1}{n}, x_0), \qquad \sum_{k=r_{n-1}}^{r_n - 1} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| \geq 1 \text{ pro } n \in \mathbb{N}$$

a $x_k \geq y_n \geq x_0 - \frac{1}{n}$ pro $k \geq r_{n-1}$. Odtud plyne, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{j=r_{n-1}}^{r_n - 1} |g(x_{j+1}) - g(x_j)| \Big) \geq \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$$

a $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$. Dokázali jsme tedy, že posloupnost $\{x_k\}$ je rostoucí a splňuje (5.45).

D ů k a z věty 5.59.

Vzhledem k větě 5.5 se můžeme omezit na (σ)– integrál.

Předpokládejme, že $\operatorname{var}_a^b g = \infty$. Díky Vitaliově větě o konečném pokrytí a větě 2.11 víme, že funkce $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ má konečnou variaci na $[a,b]$ právě tehdy, když platí

$$\left.\begin{aligned} &\forall\, x \in (a,b]\ \exists\, \delta_1 \in (0, x-a) : \operatorname{var}_{x-\delta_1}^{x} g < \infty \\ \text{a} \\ &\forall\, x \in (a,b]\ \exists\, \delta_2 \in (0, b-x) : \operatorname{var}_{x}^{x+\delta_2} g < \infty\,. \end{aligned}\right\} \tag{5.48}$$

Předpoklad, že $\operatorname{var}_a^b g = \infty$ znamená, že existuje $x_0 \in [a,b]$ takové, že pro $x = x_0$ není splněna jedna z podmínek (5.48). Nechť tedy např. $x_0 \in (a,b]$ a nechť pro každé $x \in [a, x_0)$ platí (5.44). Podle tvrzení 2 tedy existuje rostoucí posloupnost $\{x_k\}$ bodů v $(0, x_0)$ taková, že

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x_0 \ \text{ a } \ \sum_{k=1}^{\infty} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| = \infty.$$

Dále, podle tvrzení 1 existuje posloupnost $\{c_k\}$ kladných čísel taková, že platí

$$\lim_{k\to\infty} c_k = 0 \ \text{ a } \ \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, |g(x_k) - g(x_{k-1})| = \infty.$$

Položme

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \le x_1 \text{ resp. } x \ge x_0 \text{ resp. } x \in \{x_k\}_{k=1}^{\infty}\,, \\ c_k \operatorname{sign}(g(x_k) - g(x_{k-1})) & \text{pro } x = \xi_k := \dfrac{x_k + x_{k-1}}{2} \end{cases}$$

a ve zbývajících bodech intervalu $[a,b]$ dodefinujme funkci f lineárně. Takto definovaná funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je zřejmě spojitá na $[a,b]$ a přitom pro ní platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(\xi_k)\,[g(x_{k+1}) - g(x_k)] = \infty\,.$$

Speciálně, pro každé $M > 0$ existuje $N_M \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{k=1}^{N_M} f(\xi_k)\,[g(x_{k+1}) - g(x_k)] > M.$$

Pro dané $M > 0$, označme

$$\boldsymbol{\sigma}_M = \{a, x_1, x_2, \ldots, x_{N_M}, x_0, b\},\ \ \boldsymbol{\xi}_M = (a, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{N_M}, x_0, b).$$

Potom je $(\boldsymbol{\sigma}_M, \boldsymbol{\xi}_M) \in \mathscr{T}\,[a,b]$ a

$$S(\boldsymbol{\sigma}_M, \boldsymbol{\xi}_M) = \sum_{k=1}^{N_M} f(\xi_k)\,[g(x_{k+1}) - g(x_k)] > M\,.$$

(Připomeňme si, že $f(a) = f(x_1) = f(x_0) = f(b) = 0.$)

To ale znamená, že integrál $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ nemůže mít konečnou hodnotu.

Není-li splněna druhá z podmínek v (5.48), tj. existuje $x_0 \in [a,b)$ takové, že a $\operatorname{var}_{x_0}^{x} g = \infty$ pro každé $x \in [x_0, b),$ je třeba místo tvrzení 2 použít jeho vhodnou úpravu. □

5.60. Cvičení. Zformulujte a dokažte analogii tvrzení 2 potřebnou k dokončení důkazu věty 5.59.

5.61. Věta. *Nechť* $f \in \mathbb{G}[a,b]$ *a nechť integrál* $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje pro každou konečnou skokovou funkci* g. *Potom* f *je spojitá na* $[a,b]$.

D ů k a z. Opět se můžeme omezit na (σ)RS – integrál. Nechť $x_0 \in (a,b)$, $c,\ d \in \mathbb{R},\ c + d \neq 0$ a nechť funkce $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ je definována podobně jako v Poznámce 5.22, tj.

$$g(x) = c\,\chi_{[a,x_0)}(x) + \frac{c+d}{2}\,\chi_{[x_0]}(x) + d\,\chi_{(x_0,b]}(x) \quad \text{pro } x \in [a,b]\,.$$

Podle poznámky 5.22 může integrál $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ existovat pouze tehdy, když $f(x_0-) = f(x_0) = f(x_0+)$. Podobně bychom dokázali, že f musí být spojitá i v bodě a zprava a v bodě b zleva. □

5.9 Věty o střední hodnotě

Věty tohoto odstavce platí ve stejném znění pro oba typy RS – integrálu.

5.62. Věta (O STŘEDNÍ HODNOTĚ)**.** *Je-li* f *spojitá na* $[a,b]$ *a* g *neklesající na* $[a,b]$, *pak existuje* $x_0 \in [a,b]$ *takové, že*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = f(x_0)\,[g(b) - g(a)]\,. \tag{5.49}$$

D ů k a z . věta 5.50 zaručuje existenci integrálu $\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g$ v obou smyslech. Protože je g neklesající na $[a,b]$, pro každé značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}\,[a,b]$ platí

$$m\,[g(b)-g(a)] \le S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \le M\,[g(b)-g(a)]\,,$$

kde $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ a $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Podobně jako při důkazu lemmatu 5.9 plyne odtud, že platí také

$$m\,[g(b)-g(a)] \le \int_a^b f \, \mathrm{d}\, g \le M\,[g(b)-g(a)]\,,$$

Dále, protože f je spojitá, nabývá všech hodnot z intervalu $[m,M]$. Speciálně, existuje $x_0 \in [a,b]$ takové, že platí (5.49). □

5.63. Věta (DRUHÁ O STŘEDNÍ HODNOTĚ)**.** *Je-li f spojitá na $[a,b]$ a g neklesající na $[a,b]$, pak existuje $x_0 \in [a,b]$ takové, že*

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g = g(a) \int_a^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x + g(b) \int_{x_0}^b f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{5.50}$$

D ů k a z . Funkce f je riemannovsky integrovatelná na $[a,b]$. Označme

$$h(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{pro } x \in [a,b].$$

Potom podle věty o substituci (věta 5.42, viz též důsledek 5.43), věty o integraci per-partes (věta 5.47) a věty o střední hodnotě (věta 5.62) existuje $x_0 \in [a,b]$ takové, že platí

$$\begin{aligned}\int_a^b f\,\mathrm{d}g &= \int_a^b g\,\mathrm{d}h = h(b)\,g(b) - \int_a^b h\,\mathrm{d}\,g\\ &= \Big(\int_a^b f\,\mathrm{d}x\Big)\,g(b) - \Big(\int_a^{x_0} f\,\mathrm{d}x\Big)\,[g(b)-g(a)]\\ &= g(a)\int_a^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x + g(b)\int_{x_0}^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,\end{aligned}$$

tj. platí (5.50). □

5.10 Další integrály Stieltjesova typu

Buďte dány funkce $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ a dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a, b]$. Položme

$$S_M(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \frac{f(\sigma_j) + f(\sigma_{j-1})}{2} \left[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})\right],$$

$$S_{CL}(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} f(\sigma_{j-1}) \left[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})\right],$$

$$S_{CR}(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} f(\sigma_j) \left[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})\right].$$

Dosadíme-li do definice 5.3 $S_M(\boldsymbol{\sigma})$ resp. $S_{CL}(\boldsymbol{\sigma})$ resp. $S_{CR}(\boldsymbol{\sigma})$ místo $S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ dostaneme po řadě integrály *střední* resp. *levý Cauchyův* resp. *pravý Cauchyův*. Podle způsobu limitního procesu se ovšem rozlišují (δ) nebo (σ) varianty. Je zřejmé, že všechny zobecňují příslušné RS – integrály, pokud jde o třídy integrovatelných funkcí. Ne vždy však zůstanou zachovány všechny vlastnosti RS – integrálů. Např. pro střední integrál neplatí obdoba věty 5.42 o substituci.

Více podrobností lze najít v odstavci II.19 monografie [13] T.H. Hildebrandta.

5.11 Cvičení na závěr

Není-li uvedeno jinak, v následujících cvičeních proveďte diskusi o existenci, případně určete hodnotu, pro každý typ Stieltjesova integrálu z této kapitoly, tj pro integrály (δ) RS, (δ) RS, střední, levý Cauchyův a pravý Cauchyův.

- (i) Nechť $g(x) = \sin\, x$ pro $x \in [0, \pi]$. Určete hodnotu integrálu $\displaystyle\int_0^\pi x \, \mathrm{d}g$.
- (ii) Nechť $g(x) = \exp(|x|)$ pro $x \in [-1, 1]$. Určete hodnotu integrálu $\displaystyle(\delta)\int_{-1}^1 x \, \mathrm{d}g$.
- (iii) Nechť $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in [0, \frac{1}{2}), \\ c & \text{pro } x = \frac{1}{2}, \\ d & \text{pro } x \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$ Zkoumejte existenci a hodnotu integrálu $\displaystyle\int_0^1 f \, \mathrm{d}g$ pro různé funkce f v závislosti na c, d.

- (iv) Nechť $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0\,, \\ 1 & \text{pro } x \geq 0\,, \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0\,, \\ 1 & \text{pro } x > 0\,, \end{cases}$

  Zkoumejte existenci a hodnotu integrálů

$$\int_{-1}^{1} g\,\mathrm{d}f,\ \int_{-1}^{0} g\,\mathrm{d}f,\ \int_{0}^{1} g\,\mathrm{d}f,\ \int_{-1}^{1} g\,\mathrm{d}g,\ \int_{-1}^{0} g\,\mathrm{d}g,\ \int_{0}^{1} g\,\mathrm{d}g\,.$$

- (v) Nechť $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x = -1\,, \\ 1 & \text{pro } x \in (-1, 2)\,, \\ -1 & \text{pro } x \in (\frac{1}{2}, 1]\,. \end{cases}$

  Určete hodnotu integrálu $\displaystyle\int_{1}^{3} x\,\mathrm{d}g$.

- (vi) Nechť $g(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \in [0, \frac{1}{2}]\,, \\ \frac{1}{x} & \text{pro } x \in (\frac{1}{2}, 1]\,. \end{cases}$

  Určete hodnotu integrálu $(\delta)\displaystyle\int_{0}^{1} x^2\,\mathrm{d}g$.

V této kapitole jsme čerpali z kapitoly II Hildebrandtovy monografie [13], ve které je možno najít i další informace.

Kapitola 6

Kurzweilův-Stieltjesův integrál

Riemannův – Stieltjesův integrál má široké uplatnění všude, kde je možno omezit se na situace, kdy integrand a integrátor nemají společné body nespojitosti (nebo, v případě (σ) RS – integrálu, neexistují body, ve kterých by obě funkce měly nespojitost na stejné straně). Pro některé aplikace (např. v teorii hysterese a z ní pocházejících variačních nerovnostech, viz [2], [23] a [24]) je však žádoucí mít k dispozici integrál Stieltjesova typu, který si nevynucuje žádná omezení na spojitost integrovaných a integrujících funkcí. Ukazuje se, že integrál, který této potřebě nejlépe vyhovuje je integrál, který budeme nazývat Kurzweilův – Stieltjesův. Jeho výhodnost nespočívá jen v jeho obecnosti, ale též i v relativní jednoduchosti jeho definice i odvození jeho vlastností. Navzdory těmto přednostem mu v monografické literatuře nebylo doposud věnováno tolik pozornosti jakou by si zasloužil. Pokud je mi známo, stručné pojednání o tomto integrálu lze najít v kapitole 24 Schechterovy monografie [37] z roku 1997 (tam je nazýván Henstockův – Stieltjesův integrál). Podrobněji se tímto integrálem zabývá McLeodova monografie [32] z roku 1980, kde je nazýván *gauge integral* ("gauge"="kalibr"). Jaroslav Kurzweil použil tento integrál již v roce 1958 (viz [28]) jako speciální případ zobecněného nelineárního integrálu, který definoval ve své fundamentální práci [27] z roku 1957, při vyšetřování spojité závislosti řešení nelineárních diferenciálních rovnic obsahujících Diracovu distribuci. Během sedmdesátých let minulého století byl již termín Kurzweilův – Stieltjesův integrál (nebo Perronův – Stieljesův integrál podle Kurzweilovy definice) běžně používán v pracích zabývajících se zobecněnými lineárními diferenciálními rovnicemi (viz např. [41] nebo [49] a práce tam citované).

Cílem této kapitoly je předložit co nejucelenější teorii Kurzweilova – Stieltjesova integrálu.

6.1 Definice a základní vlastnosti

6.1. Definice. Každá kladná funkce $\delta : [a, b] \to (0, \infty)$ se nazývá *kalibr* na intervalu $[a, b]$. Množinu kalibrů na $[a, b]$ značíme $\mathscr{G}[a, b]$.

Je-li δ kalibr na $[a, b]$, řekneme, že značené dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a, b]$ je

δ–*jemné*, jestliže platí

$$[\sigma_{j-1},\sigma_j\,]\subset(\xi_j-\delta(\xi_j),\xi_j+\delta(\xi_j))\quad\text{pro všechna } j=1,2,\dots,\nu(\boldsymbol{\sigma})\,.$$

$\mathscr{A}(\delta;[a,b])$ značí množinu všech δ–jemných značených dělení intervalu $[a,b]$. Nehrozí-li nedorozumění, používáme kratší značení $\mathscr{A}(\delta)$.

Mějme funkce $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ a značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}\,[a,b]$. Potom definujeme jako v kapitole 5 integrální součet

$$S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\,\big(=S_{f\Delta\,g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})=S_{f\Delta\,g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi};[a,b])\big)\;=\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}f(\xi_j)\,\big[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})\big]\,.$$

6.2. Definice (KURZWEIL)**.** Nechť $f,\ g:[a,b]\to\mathbb{R}$ a $I\in\mathbb{R}$. Řekneme, že existuje *Kurzweilův–Stieltjesův integrál* (KS–integrál) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,g(x)$ a má hodnotu $I\in\mathbb{R}$, jestliže

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta_\varepsilon\in\mathscr{G}[a,b]:\Big((\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon)\Big)\implies\Big|I-S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\Big|<\varepsilon\,.\tag{6.1}$$

Jestliže $g(x)\equiv x$, pak místo o KS–integrálu mluvíme o KH–integrálu (Kurzweilův–Henstockův integrál) a značíme $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ resp. $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,x$.

Budeme využívat též zkrácené značení

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,g(x)\,.$$

Existuje-li integrál $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$, klademe $\displaystyle\int_b^a f\,\mathrm{d}\,g=-\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$. Dále, $\displaystyle\int_a^a f\,\mathrm{d}\,g=0$.

Tato definice je korektní díky následujícím dvěma lemmatům.

6.3. Lemma (COUSIN)**.** *Pro každý kalibr $\delta\in\mathscr{G}[a,b]$ je množina $\mathscr{A}(\delta)$ všech δ–jemných značených dělení intervalu $[a,b]$ neprázdná.*

D ů k a z . Mějme kalibr $\delta\in\mathscr{G}[a,b]$. Označme M množinu všech $c\in(a,b]$ pro něž je množina $\mathscr{A}(\delta;[a,c])$ neprázdná.

Nechť $c=\min\{a+\delta(a),b\}$, $\boldsymbol{\sigma}=\{a,c\}$ a $\boldsymbol{\xi}=(a)$. Protože je $\delta(a)>0$, máme $c\in(a,b]$ a $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta;[a,c])$, tj. $c\in M$. Množina M je tedy neprázdná a proto $d=\sup M>-\infty$.

Ukážeme dále, že d leží v množině M. Protože je $\delta(d)>0$, plyne z definice suprema, že existuje $c\in(d-\delta(d),d]\cap M$. Tudíž existuje také δ–jemné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}\,')$ intervalu $[a,c]$. Nechť $c<d$. (V opačném případě je triviálně $d=c\in M$.) Položme $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}'\cup\{d\}$ a $\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\xi}\,',d)$. Potom $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}\,[a,d]$ a protože je $[c,d]\in(d-\delta(d),d+\delta(d))$, znamená to také, že $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta;[a,d])$, tj. $d\in M$.

Je-li $d=b$, jsme s důkazem hotovi. Předpokládejme, že je $d<b$. Zvolme libovolně $(\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}\,'')\in\mathscr{T}\,[a,d]$ a $\gamma\in(d,d+\delta(d))\cap(d,b)$. (Takové γ existuje, protože je $\delta(d)>0$.) Máme tedy $[d,\gamma]\subset(d-\delta(d),d+\delta(d))$ a proto $\big((\boldsymbol{\sigma}''\cup\{\gamma\}),(\boldsymbol{\xi}\,'',d)\big)$ je δ–jemné značené dělení intervalu $[a,\gamma]$, tj. $\gamma\in M$. Protože je $\gamma>d$ dostáváme tak spor s definicí $d=\sup M$. Platí tedy $d=\sup M=b$ a důkaz lemmatu je dokončen. □

6.4. Lemma. *Hodnota integrálu* $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *je podmínkou* (6.1) *určena jednoznačně.*

D ů k a z . Předpokládejme, že existují $I_1,I_2\in\mathbb{R}$, $I_1\neq I_2$, takové, že platí (6.1), kam dosadíme $I=I_i$, $i=1,2$. Položme $\widetilde{\varepsilon}=\frac{1}{2}\,(I_1-I_2)$. Pak existují kalibry δ_1 a δ_2 tak, že

$$|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-I_1|<\widetilde{\varepsilon}\ \text{ pro každé } (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta_1), \tag{6.2}$$

a

$$|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-I_2|<\widetilde{\varepsilon}\ \text{ pro každé } (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta_2) \tag{6.3}$$

Položme $\delta(x)=\min\{\delta_1(x),\delta_2(x)\}$ pro $x\in[a,b]$. Potom je zřejmě δ také kalibr a platí $\mathscr{A}(\delta)\subset\mathscr{A}(\delta_1)\cap\mathscr{A}(\delta_2)$. To znamená, že platí současně (6.2) i (6.3). Tudíž

$$\begin{aligned}2\,\widetilde{\varepsilon}&=|I_1-I_2|=|I_1-S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})+S(D(\xi)-I_2|\\&\le|I_1-S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})|+|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-I_2|<2\,\widetilde{\varepsilon}.\end{aligned}$$

Protože toto není možné, musí být $I_1=I_2$. □

Nebude-li uvedeno jinak, bude mít v následujícím textu symbol integrálu vždy smysl KS – integrálu.

6.5. Poznámka. Nechť $\delta,\delta_0\in\mathscr{G}[a,b]$ a $\delta\le\delta_0$ na $[a,b]$. Potom je $\mathscr{A}(\delta)\subset\mathscr{A}(\delta_0)$. Je-li tedy splněna nějaká podmínka pro všechna $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta_0)$, tím spíše je splněna i pro všechna $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta)$. Tudíž, máme-li dán kalibr $\delta_0\in\mathscr{G}[a,b]$, můžeme se v definici 6.2 omezit na kalibry δ_ε, pro které je $\delta_\varepsilon\le\delta_0$ na $[a,b]$.

Také pro existenci KS – integrálu platí podmínka Bolzanova – Cauchyova typu.

6.6. Věta (BOLZANOVA – CAUCHYOVA PODMÍNKA). *Nechť* $f,\ g:[a,b]\to\mathbb{R}$. *Potom integrál* $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje právě tehdy, když platí*

$$\left.\begin{aligned}&\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,\delta_\varepsilon\in\mathscr{G}[a,b]:\\&\quad\Big((\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}),(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon)\Big)\implies\Big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')\Big|<\varepsilon\,.\end{aligned}\right\}\tag{6.4}$$

D ů k a z. a) Existuje-li integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = I\in\mathbb{R}$, pak, podle definice 6.2, pro každé $\varepsilon>0$ existuje kalibr $\delta_\varepsilon\in\mathscr{G}[a,b]$ takový, že je $|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-I|<\frac{\varepsilon}{2}$ pro všechna $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$. Pro každou dvojici $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$, $(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ tedy máme

$$|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')|\le|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-I|+|S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')-I|<\varepsilon\,,$$

tj. platí (6.4).

b) Předpokládejme nyní, že je splněna podmínka (6.4). Buď dáno $\varepsilon>0$. Podle ((6.4)) můžeme zvolit kalibr δ_ε tak, aby $|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')|<\varepsilon/2$ platilo pro každou dvojici $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$, $(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$.

Označme M množinu reálných čísel m pro něž existuje kalibr $\delta_m\in\mathscr{G}[a,b]$ takový, že nerovnost $S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\ge m$ je splněna pro každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta_m)$.

Dokážeme, množina M je neprázdná, shora ohraničená a $\sup\,M=\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$.

Zafixujme $(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$. Podle (6.4) platí

$$S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})-\frac{\varepsilon}{2}<S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})<S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})+\frac{\varepsilon}{2}\ \text{ pro každé } (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon).\tag{6.5}$$

To znamená, že $(-\infty,S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})-\frac{\varepsilon}{2})\subset M$ a tedy $M\ne\emptyset$.

Pro každé $m\in M$ a $x\in[a,b]$ definujme $\widetilde{\delta}_m(x)=\min\{\delta_m(x),\delta_\varepsilon(x)\}$ Potom pro každé $m\in M$ a každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\widetilde{\delta}_m)\subset\mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ platí nerovnosti

$$m\le S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})<S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})+\frac{\varepsilon}{2}\,,\quad\text{tj. } M\subset(-\infty,S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})+\frac{\varepsilon}{2})\,.$$

Množina M je tedy shora ohraničená a

$$S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})-\frac{\varepsilon}{2}\le\sup M\le S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})+\frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Odtud podle ((6.5)) odvodíme konečně, že platí

$$|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-\,\sup M|\le|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})|+|S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})-\,\sup M|<\varepsilon$$

pro každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$, tj. $\sup M=\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$. □

6.7. Poznámka. Podobně jako v případě RS – integrálů (viz cvičení 5.14) můžeme podmínku (6.4) zeslabit následujícím způsobem

$$\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,\delta_\varepsilon\in\mathscr{G}[a,b]:\\ \Big((\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}),(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon),\ \boldsymbol{\sigma}'\supset\boldsymbol{\sigma}\Big)\implies\Big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')\Big|<\varepsilon\,.$$

KS – integrál má obvyklé lineární vlastnosti :

6.8. Věta. *Nechť* $f,\ f_1,\ f_2,\ g,\ g_1,\ g_2:[a,b]\to\mathbb{R}$ *a nechť existují integrály*

$$\int_a^b f_1\,\mathrm{d}\,g,\quad \int_a^b f_2\,\mathrm{d}\,g,\quad \int_a^b f\,\mathrm{d}\,g_1\ \ a\ \int_a^b f\,\mathrm{d}\,g_2\,.$$

Potom pro libovolná $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ *platí*

$$\int_a^b(c_1\,f_1+c_2\,f_2)\,\mathrm{d}\,g=c_1\int_a^b f_1\,\mathrm{d}\,g+c_2\int_a^b f_2\,\mathrm{d}\,g\,,$$

a

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[c_1\,g_1+c_2\,g_2]=c_1\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g_1+c_2\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g_2\,.$$

D ů k a z . Ukažme si např. důkaz prvního tvrzení.

Buď dáno $\varepsilon>0$. Podle předpokladu existují kalibry $\delta_1\in\mathscr{G}[a,b]$ a $\delta_2\in\mathscr{G}[a,b]$ takové, že platí

$$(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta_i)\implies\Big|S_{f_i\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})]-\int_a^b f_i\,\mathrm{d}\,g\Big|<\varepsilon\quad\text{pro}\ \ i=1,2\,.$$

Pro $x\in[a,b]$ položme $\delta_\varepsilon(x)=\min\{\delta_1(x),\delta_2(x)\}$. Označme $h=c_1\,f_1+c_2\,f_2$. Protože pro každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ platí

$$\begin{aligned}S_{h\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})&=\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}(c_1\,f_1(\xi_j)+c_2\,f_2(\xi_j))\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})]\\&=c_1\,S_{f_1\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})+c_2\,S_{f_2\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\,,\end{aligned}$$

dostáváme

$$\begin{aligned}&\Big|S_{h\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-c_1\int_a^b f_1\,\mathrm{d}\,g-c_2\int_a^b f_2\,\mathrm{d}\,g\Big|\\&\qquad\le|c_1|\,\Big|S_{f_1\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-\int_a^b f_1\,\mathrm{d}\,g\Big|+|c_2|\,\Big|S_{f_2\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-\int_a^b f_2\,\mathrm{d}\,g\Big|\\&\qquad<(|c_1|+|c_2|)\,\varepsilon\,.\end{aligned}$$

Odtud už naše tvrzení bezprostředně plyne.

Druhé tvrzení věty by se dokazovalo obdobně a důkaz lze ponechat čtenáři jako cvičení. $\square$

6.9. Věta. *Jestliže existuje integrál* $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *a jestliže* $[c,d]\subset[a,b]$, *pak existuje také integrál* $\displaystyle\int_c^d f\,\mathrm{d}\,g$.

D ů k a z je analogický důkazu věty 5.15 a lze ho přenechat čtenáři jako cvičení. $\square$

6.10. Cvičení. Dokažte druhé tvrzení věty 6.8 a větu 6.9.

6.11. Věta. *Nechť* $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ *a* $c\in[a,b]$. *Integrál* $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje právě tehdy, když existují oba integrály* $\displaystyle\int_a^c f\,\mathrm{d}\,g$ *a* $\displaystyle\int_c^b f\,\mathrm{d}\,g$. *V takovém případě pak platí rovnost*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g=\int_a^c f\,\mathrm{d}\,g+\int_c^b f\,\mathrm{d}\,g\,.$$

D ů k a z . a) Existuje-li integrál $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$, pak podle věty 6.9 existují také oba integrály $\displaystyle\int_a^c f\,\mathrm{d}\,g$ a $\displaystyle\int_c^b f\,\mathrm{d}\,g$.

b) Nechť

$$\int_a^c f\,\mathrm{d}\,g=I_1\quad\text{a}\quad\int_c^b f\,\mathrm{d}\,g=I_2\,.$$

Buď dáno $\varepsilon>0$. Zvolme kalibry $\delta'_\varepsilon\in\mathscr{G}[a,c]$ a $\delta''_\varepsilon\in\mathscr{G}[c,b]$ tak, aby pro všechna značená δ'_ε–jemná dělení $(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')$ intervalu $[a,c]$ a všechna δ''_ε–jemná dělení $(\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'')$ intervalu $[c,b]$ platilo

$$|S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')-I_1|<\frac{\varepsilon}{2}\quad\text{a}\quad|S(\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'')-I_2|<\frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{6.6}$$

Definujme nyní kalibr δ_ε na $[a,b]$ předpisem

$$\delta_\varepsilon(x)=\begin{cases}\min\left\{\delta'_\varepsilon(x),\frac{1}{4}\,(c-x)\right\} & \text{když }\ x\in[a,c)\,,\\[2mm] \min\{\delta'_\varepsilon(c),\delta''_\varepsilon(c)\} & \text{když }\ x=c\,,\\[2mm] \min\left\{\delta''_\varepsilon(x),\frac{1}{4}\,(x-c)\right\} & \text{když }\ x\in(c,b]\,.\end{cases}$$

Potom,

$$x+\delta_\varepsilon(x) \le x+\frac{1}{4}(c-x) < c \quad \text{je-li } x<c\,,$$

a

$$x-\delta_\varepsilon(x) \ge x-\frac{1}{4}(c-x) > c \quad \text{je-li } x>c\,.$$

Pro žádné $x\neq c$ tedy nemůže platit $c\in[x-\delta_\varepsilon(x),x+\delta_\varepsilon(x)]$. Pro každé δ_ε–jemné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a,b]$ musí tudíž existovat index $k\in\{1,2,\dots,\nu(\boldsymbol{\sigma})\}$ takový, že $\xi_k=c$. Navíc, bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že platí

$$\sigma_{k-1} < \sigma_k = \xi_k = c = \xi_{k+1} < \sigma_{k+1}\,.$$

(Kdyby bylo $\sigma_{k-1}<c=\xi_k<\sigma_k$, upravili bychom příslušný člen v součtu $S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ následujícím způsobem:

$$f(c)\,[g(\sigma_k)-g(\sigma_{k-1})] = f(c)\,[g(\sigma_k)-g(c)]+f(c)\,[g(c)-g(\sigma_{k-1})]\,.)$$

Existují tedy $(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')\in\mathscr{T}\,[a,c]$ a $(\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'')\in\mathscr{T}\,[c,b]$ takové, že

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}'\cup\boldsymbol{\sigma}'',\ \ \boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\xi}',\boldsymbol{\xi}'')\,,$$

$$(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon;[a,c])\subset\mathscr{A}(\delta'_\varepsilon;[a,c]),$$

$$(\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'')\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon;[c,b])\subset\mathscr{A}(\delta''_\varepsilon;[c,b])$$

a

$$S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) = S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')+S(\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'')\,.$$

Vezmeme-li v úvahu také ((6.6)), vidíme, že platí

$$\begin{aligned}|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-(I_1+I_2)| &= |S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')+S(\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'')-(I_1+I_2)|\\ &\le |S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')-I_1|+|S(\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'')-I_2| < \varepsilon\end{aligned}$$

pro každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon;[a,b])$ neboli $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = I_1+I_2$. □

6.12. Poznámka. Jestliže existuje integrál $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$, pak existuje také KS–integrál $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ a má tutéž hodnotu. Je-li totiž $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = I\in\mathbb{R}$, pak pro každé

$\varepsilon > 0$ existuje $\Delta_\varepsilon > 0$ takové, že $|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - I| < \varepsilon$ platí pro všechna značená dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a,b]$ taková, že $|\boldsymbol{\sigma}| < \Delta_\varepsilon$. Potom $\delta_\varepsilon(x) \equiv \Delta_\varepsilon$, je kalibr s vlastnostmi zaručujícími rovnost $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = I$.

Na druhou stranu, jestliže existuje integrál $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = I$, přičemž pro každé $\varepsilon > 0$ lze najít kalibr $\delta_\varepsilon \in \mathscr{G}[a,b]$ takový, že platí $\inf\{\delta_\varepsilon(x) : x \in [a,b]\} > 0$ a

$$|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - I| < \varepsilon \quad \text{pro každé } (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta)\,,$$

pak také $\displaystyle(\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = I$. Položíme-li totiž $\Delta_\varepsilon = \inf\{\delta_\varepsilon(x) : x \in [a,b]\}$, bude platit

$$|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - I| < \varepsilon \quad \text{pro každé } (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}([a,b]) \quad \text{takové, že } |\boldsymbol{\sigma}| < \Delta_\varepsilon\,.$$

Následující věta popisuje vztah (σ)RS – integrálu a KS – integrálu.

6.13. Věta. *Jestliže existuje integrál* $\displaystyle(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$, *pak existuje také* KS – *integrál* $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *a platí* $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = (\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$.

D ů k a z. Označme $\displaystyle I = (\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$. Buď dáno $\varepsilon > 0$ a nechť $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b]$ je dělení intervalu $[a,b]$, vyhovující definici (σ)RS – integrálu. Označme jeho body tak, že bude $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon = \{s_0, s_1, \ldots, s_m\}$ a definujme

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\,\min\{|x - s_j| : j = 0,1,\ldots,m\} & \text{když } x \notin \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon\,, \\[2ex] \quad 1 & \text{když } x \in \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon\,. \end{cases}$$

Budiž $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ libovolné δ_ε – jemné dělení intervalu $[a,b]$. Analogickými úvahami jako v důkazu věty 6.11 zjistíme, že musí být

$$\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \subset \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\}\,. \tag{6.7}$$

Dále,

$$\left.\begin{aligned} S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) &= \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \Big[f(\xi_j)\,[g(\sigma_j) - g(\xi_j)] + f(\xi_j)\,[g(\xi_j) - g(\sigma_{j-1})]\Big] \\ &= S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')\,, \end{aligned}\right\} \tag{6.8}$$

kde $\boldsymbol{\sigma}' = \{\sigma_0, \xi_1, \sigma_1, \xi_2, \dots, \xi_{\nu(\boldsymbol{\sigma})}, \sigma_{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\}$, $\boldsymbol{\xi}' = (\xi_1, \xi_1, \xi_2, \xi_2, \dots, \xi_{\nu(\boldsymbol{\sigma})}, \xi_{\nu(\boldsymbol{\sigma})})$. (Stane-li se, že pro nějaké k je $\sigma_{k-1} = \xi_k$ nebo $\xi_k = \sigma_k$, je třeba takové intervaly $[\sigma_{k-1}, \xi_k]$ nebo $[\xi_k, \sigma_k]$ a příslušné značky v $(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}')$ vynechat.)

Podle ((6.7)) je $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \subset \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\} \subset \boldsymbol{\sigma}'$. Vzhledem k nerovnosti (6.8) odtud plyne, že

$$|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - I| = |S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') - I| < \varepsilon$$

a podle definice 6.2 to znamená, že $\displaystyle\int_a^b f \, \mathrm{d} g = I$. □

6.14. Příklady. Všimněme si některých specifických vlastností KH – integrálu. KH – integrál je zřejmě zobecněním klasického Riemannova integrálu.

(i) Nechť $f(x) = 0$ na $[a, b] \setminus W$, kde W je spočetná podmnožina $[a, b]$, $W = \{w_k\}$. Buď dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Definujme

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{když } x \notin W\,, \\ \dfrac{\varepsilon}{2^{k+1}(1 + |f(w_k)|)} & \text{když } x = w_k \in W\,. \end{cases}$$

Nechť $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$. Označme $m = \nu(\boldsymbol{\sigma})$. Potom

$$S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{\substack{j=1 \\ \xi_j \in W}}^{m} f(\xi_j)\,[\sigma_j - \sigma_{j-1}]\,.$$

Pro každé j takové, že $\xi_j = w_k \in W$ pro nějaké k musí podle definice kalibru δ_ε platit

$$\sigma_j - \sigma_{j-1} \le \frac{\varepsilon}{2^k(1 + |f(w_k)|)}\,.$$

Odtud plyne, že

$$|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})| \le \sum_{k=1}^{\infty} |f(w_k)|\,|\frac{\varepsilon}{2^k(1 + |f(w_k)|)} \le \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \varepsilon.$$

Podle definice 6.2 to znamená, že $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

(ii) Nechť existuje Newtonův integrál (N)$\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, kde funkce F je spojitá na $[a, b]$ a platí

$$F'(x) = f(x) \text{ pro každé } x \in (a, b),\ \ F'(a+) = f(a),\ \ F'(b-) = f(b)\,. \quad (6.9)$$

Ukážeme, že pak je KH – integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ roven $F(b)-F(a)$.

Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Vzhledem k (6.9) a podle definice derivace pro každé $\xi \in [a,b]$ existuje $\delta_\varepsilon(\xi) > 0$ takové, že platí

$$|F(x)-F(\xi)-f(\xi)(x-\xi)| < \frac{\varepsilon}{b-a}\,|x-\xi|$$
$$\text{pro všechna } x \in [a,b] \cap (\xi-\delta_\varepsilon(\xi), \xi+\delta_\varepsilon(\xi))\,.$$

Buď $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ libovolné δ_ε – jemné dělení intervalu $[a,b]$ a $m=\nu(\boldsymbol{\sigma})$. Potom pro každé
$j \in \{1,2,\dots,m\}$ máme

$$\begin{aligned}
&\big|F(\sigma_j)-F(\sigma_{j-1})-f(\xi_j)\,[\sigma_j-\sigma_{j-1}]\big| \\
&\quad \le \big|F(\sigma_j)-F(\xi_j)-f(\xi_j)\,[\sigma_j-\xi_j]\big| \\
&\qquad\quad + \big|F(\xi_j)-F(\sigma_{j-1})-f(\xi_j)\,[\xi_j-\sigma_{j-1}]\big| \\
&\quad < \frac{\varepsilon}{b-a}\,\left(|\sigma_j-\xi_j|+|\xi_j-\sigma_{j-1}|\right) = \frac{\varepsilon}{b-a}\,[\sigma_j-\sigma_{j-1}]
\end{aligned}$$

a tudíž

$$\begin{aligned}
&\big|[F(b)-F(a)]-S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\big| \\
&\quad = \Big|\sum_{j=1}^m \big(F(\sigma_j)-F(\sigma_{j-1})-f(\xi_j)\,[\sigma_j-\sigma_{j-1}]\big)\Big| \\
&\quad \le \sum_{j=1}^m \big|F(\sigma_j)-F(\sigma_{j-1})-f(\xi_j)\,[\sigma_j-\sigma_{j-1})\big| \\
&\quad < \frac{\varepsilon}{b-a}\,\sum_{j=1}^m [\sigma_j-\sigma_{j-1}] = \varepsilon\,,
\end{aligned}$$

tj.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a)\,.$$

6.2 Existence integrálu

V příkladech 6.14 jsme určili hodnoty některých KH – integrálů přímo z definice. Nyní si ukážeme, jak lze v některých jednoduchých příkladech určit z definice i hodnotu KS – integrálu.

6.15. Příklady. (i) Z definice 6.2 je zřejmé, že je-li $f(t) \equiv f(a)$ na $[a,b]$, pak

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = f(a)\,[g(b)-g(a)] \ \text{ a } \ \int_a^b g\,\mathrm{d}\,f = 0$$

pro každou funkci $g:[a,b] \to \mathbb{R}$.

(ii) Pro libovolnou funkci $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ platí

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,\chi_{(\tau,b]} = f(\tau) \qquad \text{pro } \tau \in [a,b)\,, \tag{6.10}$$

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,\chi_{[\tau,b]} = f(\tau) \qquad \text{pro } \tau \in (a,b)\,, \tag{6.11}$$

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,\chi_{[a,\tau]} = -f(\tau) \quad \text{pro } \tau \in (a,b)\,, \tag{6.12}$$

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,\chi_{[a,\tau)} = -f(\tau) \quad \text{pro } \tau \in (a,b] \tag{6.13}$$

a

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,\chi_{[\tau]} = \begin{cases} -f(a) & \text{když } \tau = a\,, \\ 0 & \text{když } \tau \in (a,b)\,, \\ f(b) & \text{když } \tau = b\,. \end{cases} \tag{6.14}$$

Ukažme si odvození vztahů (6.10) a (6.11). Všechny ostatní se z nich už odvodí použitím věty 6.11. Nechť $g(x) = \chi_{(\tau,b]}(x)$ na $[a,b]$. Potom je $g \equiv 0$ na $[a,\tau]$ a podle příkladu (i)

$$\int_a^\tau f\,\mathrm{d}\,g = 0\,.$$

Dále, nechť

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{když } x = \tau\,, \\ \dfrac{1}{4}\,(x-\tau) & \text{když } x \in (\tau,b]\,. \end{cases}$$

Analogicky jako v důkazu věty 6.11 zjistíme, že pro každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta;[\tau,b])$ musí být $\tau = \sigma_0 = \xi_1$, $g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1}) = 0$ pro $j = 2,3,\ldots,m$. Proto

$$S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) = f(\tau)\,[g(\sigma_1)-g(\tau)] = f(\tau) \ \text{ a } \ \int_\tau^b f\,\mathrm{d}\,g = f(\tau)\,.$$

Pomocí věty 6.11 nyní už dokončíme důkaz vztahu (6.10).

Vztah (6.11) se dokazuje podobně. Tentokrát ovšem máme $g(x)=\chi_{[\tau,b]}(x)$ na $[a,b]$, $\displaystyle\int_\tau^b f\,\mathrm{d}\,g=0$ a položíme

$$\delta(x)=\begin{cases}1 & \text{když } x=\tau\,,\\[4pt] \dfrac{1}{4}\,(\tau-x) & \text{když } x\in[a,\tau)\,.\end{cases}$$

Pro každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta;[a,\tau])$ pak máme $\sigma_m=\xi_m=\tau$ a tedy

$$S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})=f(\tau)\,[g(\tau)-g(\sigma_{m-1})]=f(\tau)\quad\text{a}\quad\int_a^\tau f\,\mathrm{d}\,g=f(\tau)\,.$$

(iii) Pro libovolnou funkci g regulovanou na $[a,b]$ platí

$$\int_a^b\chi_{(\tau,b]}\,\mathrm{d}\,g=g(b)-g(\tau+)\quad\text{pro }\ \tau\in[a,b)\,,\tag{6.15}$$

$$\int_a^b\chi_{[\tau,b]}\,\mathrm{d}\,g=g(b)-g(\tau-)\quad\text{pro }\ \tau\in(a,b)\,,\tag{6.16}$$

$$\int_a^b\chi_{[a,\tau]}\,\mathrm{d}\,g=g(\tau+)-g(a)\quad\text{pro }\ \tau\in(a,b)\,,\tag{6.17}$$

$$\int_a^b\chi_{[a,\tau)}\,\mathrm{d}\,g=g(\tau-)-g(a)\quad\text{pro }\ \tau\in(a,b]\tag{6.18}$$

a

$$\int_a^b\chi_{[\tau]}\,\mathrm{d}\,g=\begin{cases}g(a+)-g(a) & \text{když }\ \tau=a\,,\\[4pt] g(\tau+)-g(\tau-) & \text{když }\ \tau\in(a,b)\,,\\[4pt] g(b)-g(b-) & \text{když }\ \tau=b\,.\end{cases}\tag{6.19}$$

Opět se omezíme na důkaz prvních dvou vztahů. Nechť tedy $f(x)=\chi_{(\tau,b]}(x)$ na $[a,b]$. Potom je

$$\int_a^\tau f\,\mathrm{d}\,g=0\,.$$

Buď dáno $\varepsilon>0$. Zvolme nyní $\eta>0$ tak, aby bylo $|g(\tau+)-g(x)|<\varepsilon$ pro každé

$x \in (\tau, \tau+\eta)$ a definujme

$$\delta(x) = \begin{cases} \eta & \text{když } x = \tau\,, \\ \dfrac{1}{4}\,(x-\tau) & \text{když } x \in (\tau, b]\,. \end{cases}$$

Pro každé $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta; [\tau, b])$ nyní musí být $\tau = \sigma_0 = \xi_1$ a tedy

$$\begin{aligned} &|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - [g(b) - g(\tau+)]| \\ &\quad = \Big| [g(b) - g(\sigma_{m-1})] + [g(\sigma_{m-1}) - g(\sigma_{m-2}] \\ &\qquad + \ldots + [g(\sigma_2) - g(\sigma_1)] - [g(b) - g(\tau+)] \Big| \\ &\quad = |g(\tau+) - g(\sigma_1)|\,. \end{aligned}$$

Protože $\tau < \sigma_1 < \tau + \delta(\tau) = \tau + \eta$, plyne odtud a z definice η, že

$$|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - [g(b) - g(\tau+)]| < \varepsilon \quad \text{pro každé } (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta; [\tau, b])\,.$$

Tudíž

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = \int_a^\tau f\,\mathrm{d}\,g + \int_\tau^b f\,\mathrm{d}\,g = g(b) - g(\tau+)\,,$$

tj. platí (6.15).

Ve druhém případě, $f(x) = \chi_{[\tau,b]}(x)$ na $[a, b]$, máme

$$\int_\tau^b f\,\mathrm{d}\,g = g(b) - g(\tau)\,.$$

Zvolme $\eta > 0$ tak, aby platilo $|g(\tau-) - g(x)| < \varepsilon$ pro každé $x \in (\tau - \eta, \tau)$, a definujme

$$\delta(x) = \begin{cases} \eta & \text{když } x = \tau\,, \\ \dfrac{1}{4}\,(\tau - x) & \text{když } x \in [a, \tau)\,. \end{cases}$$

Tím si opět vynutíme, že pro každé $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta; [a, \tau])$ musí být $\tau = \sigma_m = \xi_m$ a tudíž

$$S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) = [g(\tau) - g(\sigma_{m-1})],$$

kde $\sigma_{m-1} \in (\tau - \eta, \tau)$. Jako v předešlém případě odtud plyne, že platí

$$\int_a^\tau f\,\mathrm{d}\,g = g(\tau) - g(\tau-), \ \text{ tj.} \int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = \int_a^\tau f\,\mathrm{d}\,g + \int_\tau^b f\,\mathrm{d}\,g = g(b) - g(\tau-).$$

Pokud jde o existenci integrálu, můžeme podle cvičení 2.33 (i) výše uvedené příklady shrnout do následujícího tvrzení.

6.16. Důsledek. *Jestliže* $g \in \mathbb{G}[a,b]$ *a* $f \in \mathbb{S}[a,b]$, *pak oba integrály*

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g \quad a \quad \int_a^b g \,\mathrm{d}\, f$$

existují.

Další věta poskytuje základní odhad pro integrál $\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$ za předpokladu, že g má konečnou variaci na $[a,b]$. Na funkci f přitom žádné zásadní omezení nekla-deme. Pochopitelně, že reálný význam bude mít tvrzení věty pouze pro případ, že f je ohraničená na $[a,b]$.

6.17. Věta. *Jestliže* $g \in \mathbb{BV}[a,b]$ *a* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *jsou takové, že* $\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g \in \mathbb{R}$, *pak platí*

$$\Big|\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g\Big| \leq \|f\| \operatorname{var}_a^b g\,. \tag{6.20}$$

Jestliže, navíc i $\int_a^b |f(x)| \,\mathrm{d}\,[\operatorname{var}_a^x g] \in \mathbb{R}$, *pak platí*

$$\Big|\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g\Big| \leq \int_a^b |f(x)| \,\mathrm{d}\,[\operatorname{var}_a^x g] \leq \|f\| \operatorname{var}_a^b g\,. \tag{6.21}$$

D ů k a z plyne z toho, že nerovnosti

$$|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})| \leq \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} |f(\xi_j)|\,|g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})| \leq \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} |f(\xi_j)| \operatorname{var}_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} g \leq \|f\| \operatorname{var}_a^b g$$

platí pro každé značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a,b]$. □

Také další jednoduchý odhad integrálu $\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$ se opírá o definici KS – integrálu.

6.18. Věta. *Nechť* $g \in \mathbb{BV}[a,b]$ *a* $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ *jsou takové, že* $\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g \in \mathbb{R}$. *Dále nechť existují kalibr* $\delta \in \mathscr{G}[a,b]$ *a funkce* $u:[a,b] \to \mathbb{R}$ *neklesající na* $[a,b]$ *takové, že*

$$\left.\begin{aligned} &\tau \in [a,b] \quad a \quad t \in (\tau - \delta(\tau), \tau + \delta(\tau)) \cap [a,b] \\ &\quad \Longrightarrow \ |t-\tau|\,|f(\tau)|\,|g(t)-g(\tau)| \le (t-\tau)\big(u(t)-u(\tau)\big)\,. \end{aligned}\right\} \tag{6.22}$$

Potom

$$\Big|\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g\Big| \le u(b) - u(a)\,. \tag{6.23}$$

D ů k a z . Pro každé δ–jemné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a,b]$ máme podle (6.22)

$$\begin{aligned} \big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\big| &\le \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} |f(\xi_j)|\,\big(|g(\sigma_j)-g(\xi_j)| + |g(\xi_j)-g(\sigma_{j-1})|\big) \\ &\le \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \big(u(\sigma_j)-u(\sigma_{j-1})\big) = u(b)-u(a)\,. \end{aligned}$$

Vzhledem k definici KS – integrálu plyne odtud nerovnost (6.23). □

6.19. Příklad. Ukážeme si jednu netriviální aplikaci věty 6.18.

Mějme funkci $h:[a,b] \to [0,\infty)$ neklesající a zleva spojitou na $(a,b]$. Dokážeme, že pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí

$$\int_a^b h^k \,\mathrm{d}\, h \le \frac{h^{k+1}(b) - h^{k+1}(a)}{k+1}\,. \tag{6.24}$$

Nejprve proveďme elementární úpravu

$$\frac{h^{k+1}(t) - h^{k+1}(\tau)}{k+1} = \frac{(h(t)-h(\tau)}{k+1}\,\Big[\sum_{i=0}^{k} h^{k-i}(t)\,h^i(\tau)\Big] \tag{6.25}$$

a všimněme si toho, že za našich předpokladů je funkce h ohraničená na $[a,b]$. Jako další krok ukážeme, že ke každému $\varepsilon > 0$ a každému $\tau \in (a,b]$ existuje $\delta(\tau) > 0$ takové, že platí nerovnost

$$h^{k-i}(t)\,h^i(\tau) > h^k(\tau) - \varepsilon \tag{6.26}$$

pro $t\in(\tau-\delta(\tau),\tau+\delta(\tau))$. Díky monotónnosti funkce h je snadné ověřit, že nerovnost (6.26) platí pro každé $t\in(\tau,b\,]$. Na druhou stranu, díky spojitosti funkce h zleva, ke každému $\varepsilon>0$ a každému $\tau\in(a,b\,]$ najdeme $\delta(\tau)>0$ takové, aby platilo

$$0\le h^{k-i}(\tau)-h^{k-i}(t)<\frac{\varepsilon}{\|h\|}\quad\text{jakmile } t\in(\tau-\delta(\tau,\tau\,].$$

Odtud plyne, že pro $t\in(\tau-\delta(\tau),\tau\,]$ platí

$$0\le h^k(\tau)-h^{k-i}(t)\,h^i(\tau)=\big(h^{k-i}(\tau)-h^{k-i}(t)\big)\,h^i(\tau)<\frac{\varepsilon}{\|h\|}\,\|h\|=\varepsilon$$

a tedy také (6.26). Dosazením (6.26) do (6.25) dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{h^{k+1}(t)-h^{k+1}(\tau)}{k+1}&>\frac{h(t)-h(\tau)}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\big(h^k(\tau)-\varepsilon\big)\\&=\big(h(t)-h(\tau)\big)\,h^k(\tau)-\varepsilon\end{aligned}$$

pro každé $\varepsilon>0$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ a $t\in(\tau-\delta(\tau,\tau\,]$. Platí tedy (6.22), kde

$$f(t)=h^k(t),\ g(t)=h(t)\quad\text{a}\quad u(t)=\frac{h^{k+1}(t)}{k+1}\quad\text{pro } t\in[a,b]. \tag{6.27}$$

Podle věty 6.18 tedy platí nerovnost (6.23).

6.20. Cvičení. Dokažte tvrzení:

Nechť funkce $h\colon[a,b]\to[0,\infty)$ *je nerostoucí a zprava spojitá na* $[a,b\,)$. *Potom pro každé* $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ *platí*

$$\int_a^b h^k\,\mathrm{d}\,h\ge\frac{h^{k+1}(b)-h^{k+1}(a)}{k+1}\,. \tag{6.28}$$

Věta 6.17 nám umožní dokázat nejjednodušší větu o konvergenci integrálů.

6.21. Věta. *Nechť* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *je ohraničená na* $[a,b]$, $g\in\mathbb{BV}[a,b]$ *a nechť posloupnost* $\{f_n\}$ *funkcí definovaných na intervalu* $[a,b]$ *je taková, že*

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0\,, \tag{6.29}$$

přičemž existují všechny integrály $\displaystyle\int_a^b f_n\,\mathrm{d}\,g$, $n\in\mathbb{N}$. *Potom existuje také integrál* $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *a platí*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,\mathrm{d}\,g=\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\,. \tag{6.30}$$

D ů k a z . a) Protože f je ohraničená, plyne z předpokladu (6.29), že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že platí

$$\|f_n\| \leq \|f\| + 1 < \infty \quad \text{pro všechna } n \geq n_0 \,.$$

Podle věty 6.17 tedy máme

$$\Big|\int_a^b f_n \,\mathrm{d}\, g\Big| \leq (\|f\| + 1) \operatorname{var}_a^b g < \infty \quad \text{pro všechna } n \geq n_0$$

a podle Bolzanovy-Weierstraßovy věty tedy existují posloupnost $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ a číslo $I \in \mathbb{R}$ takové, že platí $n_1 \geq n_0$ a

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_{n_k} \,\mathrm{d}\, g = I \,. \tag{6.31}$$

b) Označme

$$\left.\begin{aligned} I_k &= \int_a^b f_{n_k} \,\mathrm{d}\, g && \text{pro } k \in \mathbb{N}\,, \\ S_k(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) &= S_{f_{n_k}\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) && \text{pro } k \in \mathbb{N},\ (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a,b], \\ S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) &= S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) && \text{pro } (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a,b]\,. \end{aligned}\right\} \tag{6.32}$$

Buď dáno $\varepsilon > 0$. Vzhledem k (6.29) a (6.31) můžeme zvolit $k_0 \in \mathbb{N}$ tak, že platí

$$|I_k - I| < \varepsilon \ \text{ a } \ \|f_{n_k} - f\| < \varepsilon \quad \text{pro } k \geq k_0 \,. \tag{6.33}$$

Potom bude také

$$|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - S_{k_0}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})| < \varepsilon \operatorname{var}_a^b g \quad \text{pro všechna } (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a,b]\,.$$

Dále, nechť $\delta_0 \in \mathscr{G}[a,b]$ je kalibr na $[a,b]$ takový, že pro všechna δ_0–jemná značená dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a,b]$ platí

$$|S_{k_0}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - I_{k_0}| < \varepsilon \,. \tag{6.34}$$

Pro každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_0)$ a $k \geq k_0$ máme podle (6.33)

$$\begin{aligned} \big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - S_{k_0}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\big| &= \Big|\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \big(f(\xi_j) - f_{k_0}(\xi_j)\big)\,\big(g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})\big)\Big| \\ &< \|f_n - f\|\; V(g,\boldsymbol{\sigma}) \leq \varepsilon \operatorname{var}_a^b g\,. \end{aligned}$$

Tudíž, vzhledem k (6.33) a (6.34), dostáváme

$$|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-I| \le |S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S_{k_0}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})| + |S_{k_0}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-I_{k_0}| + |I_{k_0}-I|$$
$$< \varepsilon\,(\operatorname{var}_a^b g + 2)$$

pro každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_0)$ a $k \ge k_0$ To znamená, že platí

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g = I = \lim_{k\to\infty} \int_a^b f_{n_k} \,\mathrm{d}\, g\,.$$

c) Konečně, opětným použitím věty 6.17 dostaneme

$$\left|\int_a^b f_n \,\mathrm{d}\, g - \int_a^b f \,\mathrm{d}\, g\right| \le \|f_n - f\| \operatorname{var}_a^b g \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}\,.$$

Platí tedy i ((6.30)). □

Nyní můžeme formulovat první významnější existenční výsledek.

6.22. Věta. *Nechť* $f \in \mathbb{G}[a,b]$ *a* $g \in \mathbb{BV}[a,b]$. *Potom* $\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$ *existuje a platí* (6.21).

D ů k a z . Podle věty 4.6 (ii) existuje posloupnost $\{f_n\}$ jednoduchých skokových funkcí, která konverguje stejnoměrně na $[a,b]$ k funkci f. Podle vět 6.8 a 6.17 integrál $\int_a^b f_n \,\mathrm{d}\, g$ existuje pro každé $n \in \mathbb{N}$. To znamená, že podle věty 6.21 existuje také integrál $\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$ a platí ((6.30)).

Zřejmě $|f| \in \mathbb{G}[a,b]$. Existuje tedy také integrál $\int_a^b |f(x)| \,\mathrm{d} \operatorname{var}_a^x g$ a podle věty 6.17 platí (6.21). □

Následující konvergenční výsledek je tak trochu symetrický k větě 6.21.

6.23. Věta. *Nechť* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *je ohraničená na* $[a,b]$, $g \in \mathbb{BV}[a,b]$ *a nechť posloupnost* $\{g_n\}$ *funkcí definovaných na intervalu* $[a,b]$ *je taková, že platí*

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{var}_a^b (g_n - g) = 0\,,$$

přičemž existují všechny integrály $\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g_n$, $n \in \mathbb{N}$. *Potom existuje také integrál*

$\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$ *a platí*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f \,\mathrm{d}\, g_n = \int_a^b f \,\mathrm{d}\, g\,. \tag{6.35}$$

D ů k a z . Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat

$$g_n(a) = g(a) = 0 \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}\,.$$

Dále je důkaz podobný důkazu věty 6.21. Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že platí

$$\operatorname{var}_a^b g_n \le \operatorname{var}_a^b g + 1 \quad \text{pro všechna } n \ge n_0\,.$$

Podle věty 6.17 tedy máme

$$\Big|\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g_n\Big| \le \|f\| \,(\operatorname{var}_a^b g + 1) \quad \text{pro všechna } n \ge n_0$$

a podle Bolzanovy – Weierstraßovy věty tedy existují číslo $I \in \mathbb{R}$ a posloupnost $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ takové, že platí $n_1 \ge n_0$ a

$$\lim_{k\to\infty} I_k = \lim_{k\to\infty} \int_a^b f \,\mathrm{d}\, g_{n_k} = I\,.$$

Podobně jako v (6.32) označme

$$\left.\begin{aligned} I_k &= \int_a^b f \,\mathrm{d}\, g_{n_k} && \text{pro } k \in \mathbb{N}\,,\\ S_k(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) &= S_{f\Delta g_{n_k}}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) && \text{pro } k \in \mathbb{N},\ (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a,b],\\ S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) &= S_{f\Delta\, g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) && \text{pro } (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a,b]\,. \end{aligned}\right\} \tag{6.36}$$

Buď dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme $k_0 \in \mathbb{N}$ a kalibr $\delta_0 \in \mathscr{G}[a,b]$ tak, aby platilo

$$|I_k - I| < \varepsilon, \quad \operatorname{var}_a^b (g_{n_k} - g) < \varepsilon \quad \text{pro } k \ge k_0$$

a

$$|S_{k_0}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})] - I_{k_0}| < \varepsilon \text{ pro } (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_0)\,.$$

Potom pro každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_0)$ a $k \ge k_0$ máme

$$\begin{aligned} \big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - S_{k_0}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\big| &= \Big|\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \big(f(\xi_j) - f(\xi_j)\big)\big(g_{k_0}(\sigma_j) - g_{k_0}(\sigma_{j-1})\big)\Big|\\ &< \|f\|\; V(g_{k_0} - g, \boldsymbol{\sigma}) \le \|f\|(\operatorname{var}_a^b\,(g_{k_0} - g)) < \varepsilon\,\|f\|\,. \end{aligned}$$

Pro každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta_0)$ tedy máme

$$\begin{aligned}|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-I|\\ &\le |S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S_{k_0}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})|+|S_{k_0}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-I_{k_0}|+|I_{k_0}-I|\\ &< \varepsilon\,(\|f\|+2)\,.\end{aligned}$$

Odtud plyne, že

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = I = \lim_{k\to\infty}\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g_{n_k}\,.$$

Konečně, opětným použitím věty 6.17, dostaneme

$$\Big|\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g_n - \int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\Big| \le \|f\|\,\mathrm{var}_a^b\,(g_n-g) \quad \text{pro každé } n\in\mathbb{N}\,.$$

Platí tedy (6.35). □

Předpokládejme, že funkce f regulovaná na $[a,b]$ a g má konečnou variaci na $[a,b]$. Podle věty 6.22 potom existuje integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$. Pro aplikace potřebujeme ale dokázat, že tento integrál existuje i v symetrické situaci, tj. když $f\in\mathbb{BV}[a,b]$ a $g\in\mathbb{G}[a,b]$. To bude nyní našim cílem.

Podle věty 2.37 můžeme funkci f rozložit na součet spojité funkce $f^{\,\mathrm{C}}$ a skokové funkce $f^{\,\mathrm{B}}$. Podle věty 5.51 a věty 6.13 existuje integrál $\int_a^b f^{\,\mathrm{C}}\,\mathrm{d}\,g$. Vzpomeneme-li si na lemma 2.40, podle kterého existuje posloupnost jednoduchých skokových funkcí $\{f_n^{\mathrm{B}}\}\subset\mathbb{S}[a,b]$ taková, že platí $\lim_{n\to\infty}\|f^{\,\mathrm{B}}-f_n^{\mathrm{B}}\|_{\mathbb{BV}}=0$, nahlédneme tedy, že nám stačí dokázat konvergenční větu, ze které by plynulo, že platí

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n^{\mathrm{B}}\,\mathrm{d}\,g = \int_a^b f^{\,\mathrm{B}}\,\mathrm{d}\,g\,.$$

(Věta 6.21 a ani věta 6.23 takový výsledek nezahrnují.)

Následující věta poskytuje odhad symetrický k odhadu (6.20) z věty 6.17.

6.24. Věta. *Nechť funkce g ohraničená na $[a,b]$ a $f\in\mathbb{BV}[a,b]$ jsou takové, že existuje integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$. Potom platí*

$$\Big|\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\Big| \le \big(|f(a)|+|f(b)|+\mathrm{var}_a^b\,f\big)\,\|g\|\,. \tag{6.37}$$

D ů k a z . Pro libovolné $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}[a,b]$, máme

$$\begin{aligned} S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) &= f(\xi_1)\,[g(\sigma_1)-g(a)]+f(\xi_2)\,[g(\sigma_2)-g(\sigma_1)]\\ &\qquad + \ldots + f(\xi_m)\,[g(b)-g(\sigma_{m-1})]\\ &= f(b)\,g(b)-f(a)\,g(a)\\ &\qquad -[f(\xi_1)-f(a)]\,g(a)-[f(\xi_2)-f(\xi_1)]\,g(\sigma_1)\\ &\qquad -\ldots-[f(b)-f(\xi_m)]\,g(b)\\ &= f(b)\,g(b)-f(a)\,g(a)-\sum_{j=0}^{m}[f(\xi_{j+1})-f(\xi_j)]\,g(\sigma_j)\,, \end{aligned}$$

kde $m=\nu(\boldsymbol{\sigma})$, $\xi_0=a$ a $\xi_{m+1}=b$. Odtud plyne, že

$$|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})|\le\Big(|f(a)|+|f(b)|+\sum_{j=0}^{m}|f(\xi_{j+1})-f(\xi_j)|\Big)\,\|g\|$$

neboli

$$\left.\begin{aligned} &|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})|\le(|f(a)|+|f(b)|+\operatorname{var}_a^b f)\,\|g\|\,.\\ &\qquad\qquad\text{platí pro každé }(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}[a,b]\,. \end{aligned}\right\}\qquad(6.38)$$

Vzhledem k tomu, že $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ bylo libovolné značené dělení intervalu $[a,b]$, odtud už tvrzení (6.37) okamžitě plyne. □

Nyní dokážeme konvergenční tvrzení, které zaručí, že bude platit

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n^{\mathrm{B}}\,\mathrm{d}\,g=\int_a^b f^{\mathrm{B}}\,\mathrm{d}\,g\,.$$

6.25. Lemma. *Nechť funkce g je ohraničená na $[a,b]$, $f\in\mathbb{BV}[a,b]$ a nechť posloupnost $\{f_n\}\subset\mathbb{BV}[a,b]$ je taková, že*

$$\int_a^b f_n\,\mathrm{d}\,g\ \ \textit{existuje pro každé}\ \ n\in\mathbb{N}\quad\textit{a}\quad\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{\mathbb{BV}}=0\,.$$

Potom existuje také integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ a platí

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,\mathrm{d}\,g=\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\,.$$

D ů k a z . Podle věty 6.24 je

$$\Big|\int_a^b (f_n - f_m)\,\mathrm{d}\,g\Big| \leq 2\,\|g\|\,\|f_n - f_m\|_{\mathbb{BV}} \quad \text{pro libovolná } m, n \in \mathbb{N}\,.$$

Posloupnost $\Big\{\displaystyle\int_a^b f_n\,\mathrm{d}\,g\Big\}$ je tedy cauchyovská a existuje $I \in \mathbb{R}$ takové, že platí

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,\mathrm{d}\,g = I\,.$$

Ukážeme, že $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = I$. Buď dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby platilo

$$\Big|\int_a^b f_{n_0}\,\mathrm{d}\,g - I\Big| < \varepsilon \quad \text{a} \quad \|f_{n_0} - f\|_{\mathbb{BV}} < \varepsilon\,.$$

Dále, zvolme $\delta_\varepsilon \in \mathscr{G}[a,b]$ tak, aby pro každé $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ platilo

$$\Big|S_{n_0}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - \int_a^b f_{n_0}\,\mathrm{d}\,g\Big| < \varepsilon\,,$$

kde $S_{n_0}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) = S_{f_{n_0}\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$. Podle (6.38) pro libovolné $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}(\delta_\varepsilon)$ máme

$$\begin{aligned}
&\big|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S_{n_0}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})\big| \\
&\quad \leq \Big(|f(a) - f_{n_0}(a)| + |f(b) - f_{n_0}(b)| + \operatorname{var}_a^b\,(f - f_{n_0})\Big)\,\|g\| \\
&\quad \leq 2\,\|f - f_{n_0}\|_{\mathbb{BV}}\,\|g\|\,.
\end{aligned}$$

Souhrnem, pro libovolné $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ dostáváme

$$\begin{aligned}
&|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - I| \\
&\quad \leq \big|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S_{n_0}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})\big| + \Big|S_{n_0}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - \int_a^b f_{n_0}\,\mathrm{d}\,g\Big| \\
&\qquad\qquad + \Big|\int_a^b f_{n_0}\,\mathrm{d}\,g - I\Big| \\
&\quad < 2\,\|f - f_{n_0}\|_{\mathbb{BV}}\,\|g\| + 2\,\varepsilon < \varepsilon\,2\,(\|g\| + 1)\,.
\end{aligned}$$

Odtud plyne rovnost

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = I = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,\mathrm{d}\,g\,. \qquad \square$$

Nyní už budeme umět dokázat kýžený existeční výsledek. V následujících tvrzeních a jejich důkazech používáme důsledně konvence z úmluv a označení 1.3 a klademe $g(a-)=g(a),\ g(b+)=g(b),$ tj.

$$\Delta^- g(a)=\Delta^+ g(b)=0,\ \ \Delta g(a)=\Delta^+ g(a),\ \ \Delta g(b)=\Delta^- g(b)$$

pro každou funkci g regulovanou na $[a,b]$. V tomto smyslu je třeba i rozumět symbolům pro funkce $g(x-)$ resp. $g(x+)$ definované na $[a,b]$. Není těžké si rozmyslet, že např. pro $g\in\mathbb{G}[a,b]$ a $h(x)=g(x-)$ platí

$$h(x-)=h(x)=g(x), \quad h(x+)=g(x+) \quad \text{na } [a,b]\,.$$

Analogicky, pro $g\in\mathbb{G}[a,b]$ a $h(x)=g(x+)$ máme

$$h(x+)=h(x)=g(x), \quad h(x-)=g(x-) \quad \text{na } [a,b]\,.$$

6.26. Věta. *Jestliže* $f\in\mathbb{BV}[a,b],\ g\in\mathbb{G}[a,b]$, *pak integrál* $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje a platí* (6.37).

D ů k a z . Nechť $g\in\mathbb{G}[a,b],\ f\in\mathbb{BV}[a,b]$ a W je množina bodů nespojitosti funkce f v $[a,b]$. Podle věty 2.20 je W nejvýše spočetná, tj. $W=\{w_k : k\in\mathbb{K}\}$, kde $\mathbb{K}=\{1,2,\dots,m\}$ pro nějaké $m\in\mathbb{N}$ nebo $\mathbb{K}=\mathbb{N}$.

Nechť $f=f^{\,\mathrm{C}}+f^{\,\mathrm{B}}$ je Jordanův rozklad funkce f na spojitou část $f^{\,\mathrm{C}}$ a skokovou část $f^{\,\mathrm{B}}$ definovanou jako f_2 v (2.26). Položme

$$f_n^{\mathrm{B}}(x)=\sum_{k\in\mathbb{K}\cap[1,n]}\Delta^- f(w_k)\chi_{(w_k,b]}(x)+\sum_{k\in\mathbb{K}\cap[1,n]}\Delta^+ f(w_k)\chi_{[w_k,b]}(x)$$

pro $n\in\mathbb{N}$ a $x\in[a,b]$. Zřejmě $f_n^{\mathrm{B}}\in\mathbb{S}[a,b]$ pro každé $n\in\mathbb{N}$ a podle lemmatu 2.40 platí

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n^{\mathrm{B}}-f^{\,\mathrm{B}}\|_{\mathbb{BV}}=\lim_{n\to\infty}\operatorname{var}_a^b(f^{\,\mathrm{B}}-f_n^{\mathrm{B}})=0\,.$$

Dále, podle důsledku 6.16 integrál $\int_a^b f_n^{\mathrm{B}}\,\mathrm{d}\,g$ existuje pro každé $n\in\mathbb{N}$. Je-li tedy množina $\mathbb{K}$ konečná, existence integrálu $\int_a^b f^{\,\mathrm{B}}\,\mathrm{d}\,g$ plyne triviálně. Není-li $\mathbb{K}$ konečná, pak integrál $\int_a^b f^{\,\mathrm{B}}\,\mathrm{d}\,g$ existuje podle lemmatu 6.25.

Podle věty 5.51 a věty 6.13 existuje integrál $\int_a^b f^{\,\mathrm{C}}\,\mathrm{d}\,g$. Existence integrálu $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ tedy již plyne z věty 6.8. Konečně, podle věty 6.24 platí také (6.37). $\square$

Přímým důsledkem věty 6.26 je následující konvergenční tvrzení.

6.27. Důsledek. *Jestliže* $g_n \in \mathbb{G}[a,b]$ *pro* $n \in \mathbb{N}$ *a* $\lim\limits_{n\to\infty} \|g_n - g\| = 0$, *pak pro každou funkci* $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ *platí*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f \, \mathrm{d}\, g_n = \int_a^b f \, \mathrm{d}\, g \,. \tag{6.39}$$

□

Následující tvrzení navazuje na důkaz věty 6.26 a dává návod k výpočtu integrálu $\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g$, je-li známa hodnota integrálu $\int_a^b f^{\,\mathrm{C}} \, \mathrm{d}\, g$, kde $f^{\,\mathrm{C}}$ značí spojitou část funkce f.

6.28. Důsledek. *Jestliže* $f \in \mathbb{BV}[a,b]$, $g \in \mathbb{G}[a,b]$, W *je množina bodů nespojitosti funkce* f *v* $[a,b]$ *a* $f^{\,\mathrm{C}}$ *je spojitá část funkce* f, $f^{\,\mathrm{C}}(a) = f(a)$, *pak*

$$\left.\begin{aligned} \int_a^b f \, \mathrm{d}\, g = & \int_a^b f^{\,\mathrm{C}} \, \mathrm{d}\, g \\ & + \sum_{w\in W} \big[\Delta^- f(w) \, (g(b) - g(w-)) + \Delta^+ f(w) \, (g(b) - g(w+))\big] \,. \end{aligned}\right\} \tag{6.40}$$

D ů k a z . Jako v důkazu věty 6.26 je $W = \{w_k : k \in \mathbb{K}\}$, kde $\mathbb{K} = \{1, 2, \ldots, m\}$ pro nějaké $m \in \mathbb{N}$ nebo $\mathbb{K} = \mathbb{N}$. Nechť

$$f_n^{\mathrm{B}}(x) = \sum_{k\,\in\,\mathbb{K}\,\cap\,[1,n]} \big[\Delta^- f(w_k) \, \chi_{(w_k,b]}(x) + \Delta^+ f(w_k) \, \chi_{[w_k,b]}(x)\big]$$

pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [a,b]$. Podle lemmatu 2.40 platí

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n^{\mathrm{B}} - f^{\,\mathrm{B}}\|_{\mathbb{BV}} = \lim_{n\to\infty} \operatorname{var}_a^b (f^{\,\mathrm{B}} - f_n^{\mathrm{B}}) = 0 \,.$$

Dále, podle (6.16), (6.17) a věty 6.8, máme

$$\left.\begin{aligned} & \int_a^b f_n^{\mathrm{B}} \, \mathrm{d}\, g \\ & \quad = \sum_{k\,\in\,\mathbb{K}\,\cap\,[1,n]} \Big(\Delta^- f(w_k) \, [g(b) - g(w_k-)] + \Delta^+ f(w_k) \, [g(b) - g(w_k+)]\Big) \end{aligned}\right\} \tag{6.41}$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Je-li $\mathbb{K}$ konečná, plyne odtud okamžitě, že platí (6.40).

Je-li $\mathbb{K} = \mathbb{N}$, pak podle lemmatu 6.25 platí

$$\int_a^b f^{\mathrm{B}} \,\mathrm{d}\, g = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n^{\mathrm{B}} \,\mathrm{d}\, g\,. \tag{6.42}$$

Podle důsledku 2.26 je

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{\infty} \left|\Delta^- f(w_k)\,(g(b) - g(w_k-)) + \Delta^+ f(w_k)\,(g(b) - g(w_k+))\right| \\ &\qquad \leq 2\,\|g\| \sum_{k=1}^{\infty} \Big(|\Delta^- f(w_k)| + |\Delta^+ f(w_k)|\Big) \leq 2\,\|g\|\,(\mathrm{var}_a^b f) < \infty\,.\end{aligned}$$

Vzhledem k (6.41) a (6.42) tudíž dostáváme

$$\left.\begin{aligned}&\int_a^b f^{\mathrm{B}} \,\mathrm{d}\, g \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\Delta^- f(w_k)(g(b) - g(w_k-)) + \Delta^+ f(w_k)(g(b) - g(w_k+))\Big)\,.\end{aligned}\right\} \tag{6.43}$$

Platí tedy (6.40). □

V situaci symetrické k důsledku 6.28 máme

6.29. Lemma. *Jestliže* $f \in \mathbb{G}[a,b]$, $g \in \mathbb{BV}[a,b]$, W *je množina bodů nespojitosti funkce* g *v* $[a,b]$ *a* g^{C} *je spojitá část funkce* g, $g^{\mathrm{C}}(a) = g(a)$, *pak*

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g = \int_a^b f \,\mathrm{d}\, g^{\mathrm{C}} + \sum_{w\in W} f(w)\,\Delta g(w)\,, \tag{6.44}$$

kde $\Delta\, g(a) = \Delta^+\, g(a)$ *a* $\Delta\, g(b) = \Delta^-\, g(b)$.

D ů k a z je analogický důkazu důsledku 6.28 je ponechán čtenáři jako cvičení. □

6.30. Cvičení. Dokažte lemma 6.29. (Návod: využijte lemma 2.40 a větu 6.21 a postupujte jako při důkazu důsledku 6.28.)

6.3 Integrace per-partes

Pro důkazy důsledku 6.28 a lemmatu 6.29 byly užitečné příklady 6.15. Následující technická lemmata jsou potřebná pro důkaz věty o integraci per-partes, která je našim dalším významnějším cílem. Také v jejich důkazech budou Příklady 6.14 využity.

6.31. Lemma. *Nechť* $h \in \mathbb{G}[a,b]$, $c \in \mathbb{R}$ *a* $W \subset [a,b]$ *je nejvýše spočetná množina taková, že platí*

$$h(x) = c \quad \textit{pro} \;\; x \in [a,b] \setminus W\,. \tag{6.45}$$

Potom

$$\int_a^b h \,\mathrm{d}\, g = c\,[g(b) - g(a)\,] + \sum_{w \in W} [h(w) - c]\,\Delta g(w) \tag{6.46}$$

platí pro každou funkci $g \in \mathbb{G}[a,b]$.

D ů k a z . Nechť $g \in \mathbb{G}[a,b]$. Protože $h \in \mathbb{G}[a,b]$, máme podle (6.45)

$$h(x-) = h(x+) = h(a+) = h(b-) = c \quad \text{pro každé } x \in (a,b)\,.$$

Funkce $h^{\mathrm{C}}(x) \equiv c$ je tedy spojitá část funkce h, $h^{\mathrm{B}} = h - h^{\mathrm{C}}$ a

$$\Delta^- h(x) = h(x) - c = -\Delta^+ h(x) \quad \text{pro každé } \; x \in (a,b)\,.$$

Podle ((6.40)) (kde $f = h$) tedy máme

$$\begin{aligned}\int_a^b h \,\mathrm{d}\, g &= \int_a^b c \,\mathrm{d}\, g + \sum_{w \in W} (h(w) - c)\,[g(b) - g(w-) - g(b) + g(w+)\,] \\ &= c\,[g(b) - g(a)\,] + \sum_{w \in W} [h(w) - c\,]\,\Delta g(w)\,,\end{aligned}$$

tj. platí (6.46). (Připomeňme znovu, že $\Delta g(a) = \Delta^+ g(a)$ a $\Delta g(b) = \Delta^- g(b)$.) $\square$

6.32. Cvičení. Pomocí lemmatu 6.31 dokažte, že je-li $\tau \in (a,b)$ a

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{když } \; t < \tau\,, \\ \varkappa \in [0,1] & \text{když } \; t = \tau\,, \\ 1 & \text{když } \; t > \tau\,, \end{cases}$$

pak $\displaystyle\int_a^b \varphi\, h \,\mathrm{d}\, h = \varphi(\tau)\,\varkappa$ pro libovolnou funkci φ regulovanou na φ.

6.33. Lemma. *Nechť* $h \in G[a,b]$, $c \in \mathbb{R}$ *a* $W \subset [a,b]$ *je nejvýše spočetná množina taková, že platí* (6.45). *Potom*

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}\, h = f(b)\,[h(b) - c] - f(a)\,[h(a) - c\,] \tag{6.47}$$

platí pro každou funkci $f \in \mathbb{BV}[a,b]$.

D ů k a z . a) Funkce h splňuje (6.45) právě tehdy, když existuje množina $\mathbb{K} \subset \mathbb{N}$ taková, že $W = \{w_k \in [a,b] : k \in \mathbb{K}\}$ a

$$h(x) = c + \sum_{k \in \mathbb{K}} (h(w_k) - c)\, \chi_{[w_k]}(x) \quad \text{pro } x \in [a,b]\,.$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $\mathbb{K}_n = \mathbb{K} \cap [1,n]$, $W_n = \{w_k : k \in \mathbb{K}_n\}$ a

$$h_n(x) = c + \sum_{k \in \mathbb{K}_n} (h(w_k) - c)\, \chi_{[w_k]}(x) \quad \text{pro } n \in \mathbb{N} \text{ a } x \in [a,b]\,.$$

Dokážeme, že platí

$$\lim_{n\to\infty} \|h_n - h\| = 0\,. \tag{6.48}$$

Nechť je tedy dáno $\varepsilon > 0$ a nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ je takové, že

$$|h(w_k) - c| < \varepsilon \quad \text{pro každé } k > n_0\,. \tag{6.49}$$

Takové n_0 existuje, protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ je

$$|h(w_k) - c| = \begin{cases} |\Delta^- h(w_k)| & \text{když } w_k \in (a,b)\,, \\ |\Delta^+ h(a)| & \text{když } w_k = a\,, \\ |\Delta^- h(b)| & \text{když } w_k = b \end{cases}$$

a množina těch $k \in \mathbb{N}$, pro něž $|h(w_k) - c| \ge \varepsilon$, může mít podle důsledku 4.7 (ii) jenom nejvýše konečný počet (n_0) prvků. Tudíž,

$$|h_n(x) - h(x)| = \left\{ \begin{array}{ll} |c - h(x)| & \text{když } x \in W_n\,, \\ 0 & \text{když } x \in [a,b] \setminus W_n \end{array} \right\} < \varepsilon$$

pro $n \ge n_0$ a $x \in [a,b]$. Platí tedy (6.48).

b) Nechť $f \in \mathbb{BV}[a,b]$. Podle příkladu 6.15 (i), věty 6.8 a formule (6.14) dostaneme pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \int_a^b f \,\mathrm{d}\, h_n &= \sum_{k \in \mathbb{K}_n} (h(w_k) - c) \int_a^b f \,\mathrm{d}\, \chi_{[w_k]} \\ &= f(b)\,[h(b) - c] - f(a)\,[h(a) - c]\,. \end{aligned}$$

Podle (6.48) a podle důsledku 6.27 tedy máme

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}\, h = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f \,\mathrm{d}\, h_n = f(b)\,[h(b) - c] - f(a)\,[h(a) - c]\,.$$

□

6.34. Věta (VĚTA O INTEGRACI PER-PARTES)**.**
Jestliže $f\in\mathbb{G}[a,b]$ *a* $g\in\mathbb{BV}[a,b]$, *pak existují oba integrály*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g \quad a \quad \int_a^b g\,\mathrm{d}\,f$$

a platí

$$\left.\begin{aligned}\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g+\int_a^b g\,\mathrm{d}\,f &= f(b)\,g(b)-f(a)\,g(a)\\ &\quad+\sum_{x\in[a,b]}\Big(\Delta^- f(x)\,\Delta^- g(x)-\Delta^+ f(x)\,\Delta^+ g(x)\Big)\,.\end{aligned}\right\} \tag{6.50}$$

D ů k a z. Integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ existuje podle věty 6.22 a integrál $\int_a^b g\,\mathrm{d}\,f$ existuje podle věty 6.26. Dále,

$$\begin{aligned}&\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g+\int_a^b g\,\mathrm{d}\,f\\ &\qquad=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,[g(x)+\Delta^+ g(x)]+\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,[f(x)-\Delta^- f(x)]\\ &\qquad\qquad-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,[\Delta^+ g(x)]+\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,[\Delta^- f(x)]\,.\end{aligned}$$

Není obtížné ověřit, že funkce $h(x)=\Delta^+ g(x)$ splňuje (6.45) s $c=0$ a $h(b)=0$. Dále, $\Delta h(x)=0$ pro $x\in(a,b)$. Podle lemmatu 6.33 tedy máme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,[\Delta^+ g(x)]=-f(a)\,\Delta^+ g(a)\,.$$

Analogicky,

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,[\Delta^- f(x)]=g(b)\,\Delta^- f(b)\,,$$

čili

$$\left.\begin{aligned}&\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,g(x)+\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,f(x)\\ &\quad=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,g(x+)+\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,f(x-)\\ &\qquad\qquad+f(a)\,\Delta^+ g(a)+\Delta^- f(b)\,g(b)\,.\end{aligned}\right\} \tag{6.51}$$

První integrál na pravé straně můžeme upravit na

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,g(x+) = \int_a^b f(x-)\,\mathrm{d}\,g(x+) + \int_a^b \Delta^- f(x)\,\mathrm{d}\,g(x+)\,. \tag{6.52}$$

Pro funkci $h(x) = g(x+)$ máme $h(x+) = h(x) = g(x+)$ a $h(x-) = g(x-)$ na $[a,b]$, tj. $\Delta h(x) = \Delta g(x)$ na $[a,b]$. Podle lemmatu 6.31 tedy platí

$$\int_a^b \Delta^- f(x)\,\mathrm{d}\,g(x+) = \sum_{x\in[a,b]} \Delta^- f(x)\,\Delta g(x)\,. \tag{6.53}$$

Analogicky,

$$\left.\begin{aligned}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,f(x-) &= \int_a^b g(x+)\,\mathrm{d}\,f(x-) - \int_a^b \Delta^+ g(x)\,\mathrm{d}\,f(x-)\\ &= \int_a^b g(x+)\,\mathrm{d}\,f(x-) - \sum_{x\in[a,b]} \Delta^+ g(x)\,\Delta f(x)\,.\end{aligned}\right\} \tag{6.54}$$

Funkce $f(x-)$ je spojitá zleva na $(a,b]$, $g(x+)$ je spojitá zprava na $[a,b)$. Podle vět 5.51 a 6.13 tedy existují oba integrály

$$\int_a^b f(x-)\,\mathrm{d}\,g(x+) \quad \text{a} \quad \int_a^b g(x+)\,\mathrm{d}\,f(x-)$$

a podle věty 5.47 platí

$$\int_a^b f(x-)\,\mathrm{d}\,g(x+) + \int_a^b g(x+)\,\mathrm{d}\,f(x-) = f(b-)\,g(b) - f(a)\,g(a+)\,. \tag{6.55}$$

Dosazením (6.52)–(6.55) do (6.51) dostaneme dále

$$\begin{aligned}&\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g + \int_a^b g\,\mathrm{d}\,f\\ &\quad = f(b-)\,g(b) - f(a)\,g(a+) + f(a)\,\Delta^+ g(a) + \Delta^- f(b)\,g(b)\\ &\qquad + \sum_{x\in[a,b]} \Big(\Delta^- f(x)\,[\Delta^- g(x) + \Delta^+ g(x)] - [\Delta^- f(x) + \Delta^+ f(x)]\,\Delta^+ g(x)\Big)\\ &\quad = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) + \sum_{x\in[a,b]} \Big(\Delta^- f(x)\,\Delta^- g(t) - \Delta^+ f(x)\,\Delta^+ g(x)\Big)\,.\end{aligned}$$

Dokázali jsme, že (6.50) platí. □

6.35. Cvičení. Dokažte, že za předpokladů věty 6.34 platí

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g = (\sigma)\int_a^b f(x+)\,\mathrm{d}g(x-) + f(b)\,\Delta^- g(b) - \sum_{x\,\in\,(a,b)} \Delta^+ f(x)\,\Delta g(x)$$

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g = (\sigma)\int_a^b f(x-)\,\mathrm{d}g(x+) + f(a)\,\Delta^+ g(a) + \sum_{x\,\in\,(a,b)} \Delta^- f(x)\,\Delta g(x)\,.$$

(Návod: využijte formule odvození v průběhu důkazu věty 6.34.)

6.4 Saksovo-Henstockovo lemma a některé jeho důsledky

6.36. Lemma (SAKS-HENSTOCK). *Nechť* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *jsou takové, že integrál* $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje. Nechť* $\varepsilon > 0$ *je dáno a nechť* $\delta \in \mathscr{G}[a,b]$ *je kalibr na* $[a,b]$ *takový, že platí*

$$\Big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - \int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\Big| < \varepsilon \quad \textit{pro všechna } (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta)\,.$$

Potom pro libovolný systém $\Big\{([s_j,t_j],\theta_j) : j = 1,2,\dots,n\Big\}$ *takový, že*

$$\left.\begin{aligned} &a \le s_1 \le \theta_1 \le t_1 \le s_2 \le \dots \le s_n \le \theta_n \le t_n \le b\,,\\ &[s_j,t_j] \subset [\theta_j - \delta(\theta_j), \theta_j + \delta(\theta_j)] \quad \textit{pro } j = 1,2,\dots,n\,, \end{aligned}\right\} \tag{6.56}$$

platí nerovnost

$$\Big|\sum_{j=1}^n \Big[f(\theta_j)\,[g(t_j) - g(s_j)] - \int_{s_j}^{t_j} f\,\mathrm{d}\,g\Big]\Big| \le \varepsilon\,. \tag{6.57}$$

D ů k a z . Buď dáno $\eta > 0$. Označme $t_0 = a$, $s_{n+1} = b$. Je-li $j \in \{1,2,\dots,n\}$ a $t_j < s_{j+1}$, existují kalibr δ_j a značené dělení $(\boldsymbol{\sigma}^j,\boldsymbol{\xi}^j) \in \mathscr{A}(\delta_j;[t_j,s_{j+1}])$ takové, že $\delta_j(x) \le \delta(x)$ pro každé $x \in [a,b]$ a

$$\Big|S(\boldsymbol{\sigma}^j,\boldsymbol{\xi}^j) - \int_{t_j}^{s_{j+1}} f\,\mathrm{d}\,g\Big| < \frac{\eta}{n+1}\,. \tag{6.58}$$

Nyní sestavme $\delta-$jemné značené dělení $(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})$ intervalu $[a,b]$ tak, aby platilo

$$\sum_{j=1}^n f(\theta_j)\,[g(t_j) - g(s_j)] + \sum_{j=0}^n S(\boldsymbol{\sigma}^j,\boldsymbol{\xi}^j) = S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})\,.$$

(Je-li $t_j = s_{j+1}$, klademe $S(\boldsymbol{\sigma}^j, \boldsymbol{\xi}^j) = 0$.) Vzhledem k předpokladům lemmatu tedy máme

$$\Big| \sum_{j=1}^{n} \Big(f(\theta_j)\,[g(t_j) - g(s_j)] - \int_{s_j}^{t_j} f \,\mathrm{d}\, g \Big) + \sum_{j=0}^{n} \Big(S(\boldsymbol{\sigma}^j, \boldsymbol{\xi}^j) - \int_{t_j}^{s_{j+1}} f \,\mathrm{d}\, g \Big) \Big|$$
$$= \Big| S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) - \int_a^b f \,\mathrm{d}\, g \Big| < \varepsilon\,.$$

Odtud a z (6.58) dostáváme pro libovolné $\eta > 0$

$$\Big| \sum_{j=1}^{n} f(\theta_j)\,[g(t_j) - g(s_j)] - \int_{s_j}^{t_j} f \,\mathrm{d}\, g \Big|$$
$$\leq \Big| S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) - \int_a^b f \,\mathrm{d}\, g \Big| + \Big| \sum_{j=0}^{n} \Big(S(\boldsymbol{\sigma}^j, \boldsymbol{\xi}^j) - \int_{t_j}^{s_{j+1}} f \,\mathrm{d}\, g \Big) \Big| < \varepsilon + \eta\,,$$

tj. platí (6.57). □

6.37. Věta. *Nechť* $\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$ *existuje a* $c \in [a, b]$. *Potom platí*

$$\lim_{\substack{x \to c \\ x \in [a,b]}} \Big(\int_a^x f \,\mathrm{d}\, g + f(c)\,[g(c) - g(x)] \Big) = \int_a^c f \,\mathrm{d}\, g\,. \tag{6.59}$$

D ů k a z . Buď dáno $\varepsilon > 0$ a nechť $\delta_\varepsilon \in \mathscr{G}[a, b]$ je takový kalibr, že

$$\Big| S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - \int_a^b f \,\mathrm{d}\, g \Big| < \varepsilon \quad \text{platí všechna } (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon).$$

Pro každé $x \in (c, c + \delta_\varepsilon(c)) \cap [a, b]$ vyhovuje systém $\{([s_1, t_1], \theta_1)\}$, kde $t_1 = x$ a $s_1 = \theta_1 = c$, podmínkám (6.56). Podle Saksova – Henstockova lemmatu (viz Lemma 6.36) tedy máme

$$\Big| f(c)\,[g(x) - g(c)] - \int_c^x f \,\mathrm{d}\, g \Big| < \varepsilon\,. \tag{6.60}$$

Podobně, je-li $x \in (c - \delta_\varepsilon(c), c) \cap [a, b]$, pak použitím lemmatu 6.36 na systém $\{[x, c], c\}$ dostaneme nerovnost

$$\Big| f(c)\,[g(c) - g(x)] - \int_x^c f \,\mathrm{d}\, g \Big| < \varepsilon$$

Pro každé $x \in (c-\delta_\varepsilon(c), c+\delta_\varepsilon(c)) \cap [a,b]$ tedy platí nerovnost (6.60) a tudíž také nerovnost

$$\begin{aligned}\Big| \int_a^c f\,\mathrm{d}\,g - \int_a^x f\,\mathrm{d}\,g - f(c)\,[g(c)-g(x)]\Big| \\ = \Big| \int_c^x f\,\mathrm{d}\,g - f(c)\,[g(x)-g(c)]\Big| < \varepsilon\,,\end{aligned}$$

tj. platí (6.59). □

6.38. Důsledek. *Nechť* $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje,* $g \in \mathbb{G}[a,b]$ *a nechť funkce* $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ *je definována předpisem*

$$h(x) = \int_a^x f\,\mathrm{d}\,g \quad \textit{pro} \;\; x \in [a,b]\,.$$

Potom $h \in \mathbb{G}[a,b]$ *a*

$$h(t+) = h(t) + f(t)\,\Delta^+ g(t) \;\; \textit{a} \;\; h(s-) = h(s) - f(s)\,\Delta^- g(s)$$

pro $t \in [a,b)$ *a* $s \in (a,b]$. □

6.5 Neurčitý integrál

6.39. Věta (HAKE). (i) *Nechť* $\displaystyle\int_a^x f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje pro každé* $x \in [a,b)$ *a nechť*

$$\lim_{x \to b-} \Big(\int_a^x f\,\mathrm{d}\,g + f(b)\,[g(b)-g(x)]\Big) = I \in \mathbb{R}\,.$$

Potom $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = I$.

(ii) *Nechť* $\displaystyle\int_x^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje pro každé* $x \in (a,b]$ *a nechť*

$$\lim_{x \to a+} \Big(\int_x^b f\,\mathrm{d}\,g + f(a)\,[g(x)-g(a)]\Big) = I \in \mathbb{R}\,.$$

Potom $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = I$.

D ů k a z . (i) a) Buď dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme $\Delta > 0$ tak, aby platilo

$$\Big| \int_a^x f \,\mathrm{d}\, g + f(b)\, [g(b) - g(x)] - I \Big| < \varepsilon \quad \text{pro každé } x \in [b - \Delta, b)\,. \tag{6.61}$$

Položme $x_k = b - \dfrac{b-a}{k+1}$ pro $k \in \mathbb{N}$. Posloupnost $\{x_k\}$ je rostoucí, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = b$ a

$$\left.\begin{aligned} &\forall\, k \in \mathbb{N}\ \exists\, \delta_k \in \mathscr{G}[a, x_k]:\\ &\qquad (\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) \in \mathscr{A}(\delta_k, [a, x_k]) \implies \Big| S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) - \int_a^{x_k} f \,\mathrm{d}\, g \Big| < \frac{\varepsilon}{2^k} \end{aligned}\right\} \tag{6.62}$$

b) Definujme kalibr δ_0 na $[a, b)$ tak, aby platilo

$$\delta_0(s) \le \delta_k(s) \quad \text{a} \quad [s - \delta_0(s), s + \delta_0(s)] \subset [a, x_k]$$

pro každé $k \in \mathbb{N}$ a každé $s \in [x_{k-1}, x_k)$.

Dále, pro každé $s \in [a, b)$ označme symbolem $\kappa(s)$ jednoznačně určené přirozené číslo k takové, že $s \in [x_{k-1}, x_k)$.

c) Dokážeme, že existuje kalibr δ_0 na $[a, b]$ takový, že platí

$$\left.\begin{aligned} &\Big| S(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\theta}) - \int_a^x f \,\mathrm{d}\, g \Big| < \varepsilon\\ &\qquad\qquad \text{pro všechna } x \in [a, b) \text{ a } (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\theta}) \in \mathscr{A}(\delta_0, [a, x])\,. \end{aligned}\right\} \tag{6.63}$$

Nechť je tedy dáno $x \in [a, b)$ a nechť $p \in \mathbb{N}$ je takové, že $x \in [x_{p-1}, x_p)$ (tj. $p = \kappa(x)$). Dále nechť $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\theta})$ je libovolné δ_0–jemné dělení intervalu $[a, x]$. Označme $\nu(\boldsymbol{\tau}) = r$. Pro každé $k \in \mathbb{N} \cap [1, p]$ a každé $j \in \mathbb{N} \cap [1, r]$ takové, že $\kappa(\theta_j) = k$, máme

$$\theta_j - \delta_k(\theta_j) \le \theta_j - \delta_0(\theta_j) \le \theta_{j-1} < \tau_j \le \theta_j + \delta_0(\theta_j) \le \theta_j + \delta_k(\theta_j)\,.$$

Vzhledem k (6.62) a definici kalibru δ_0, vidíme, že pro každé $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$ systém $\{([\tau_{j-1}, \tau_j], \theta_j) : j = 1, 2, \ldots, r,\ \kappa(\theta_j) = k\}$ splňuje předpoklady lemmatu 6.36) na místě $\{([s_j, t_j], \theta_j) : j = 1, 2, \ldots, n\}$. Platí tedy

$$\Big| \sum_{\kappa(\theta_j) = k} f(\theta_j)\, [g(\tau_j) - g(\tau_{j-1})] - \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} f \,\mathrm{d}\, g \Big| < \frac{\varepsilon}{2^k} \ \text{ pro každé } k \in \{1, 2, \ldots, p\}\,.$$

Tudíž

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{j=1}^{r}\Big(f(\theta_j)\,[g(\tau_j)-g(\tau_{j-1})]-\int_a^x f\,\mathrm{d}\,g\Big)\Big|\\
&\qquad=\Big|\sum_{k=1}^{p}\Big(\sum_{\kappa(\theta_j)=k} f(\theta_j)\,[g(\tau_j)-g(\tau_{j-1})]-\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} f\,\mathrm{d}\,g\Big)\Big|\\
&\qquad\le\sum_{k=1}^{p}\Big|\sum_{\kappa(\theta_j)=k}\Big(f(\theta_j)\,[g(\tau_j)-g(\tau_{j-1})]-\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} f\,\mathrm{d}\,g\Big)\Big|<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k}=\varepsilon\,,
\end{aligned}$$

tj platí (6.63).

d) Nyní, položme

$$\delta^*(x)=\begin{cases}\min\{b-x,\ \delta_0(x)\} & \text{pro } x\in[a,b)\,,\\[4pt] \dfrac{\Delta}{2} \quad \text{pro } x=b\,.\end{cases}$$

Nechť $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ je libovolné δ^*–jemné dělení intervalu $[a,b]$ a $m=\nu(\boldsymbol{\sigma})$. Potom musí platit $\xi_m=\sigma_m=b,\ \ \sigma_{m-1}\in(b-\Delta,b)$ a

$$\begin{aligned}
&\Big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-I\Big|\\
&\qquad=\Big|\sum_{j=1}^{m-1} f(\xi_j)\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})]+f(b)\,[g(b)-g(\sigma_{m-1})]-I\Big|\\
&\qquad\le\Big|\sum_{j=1}^{m-1} f(\xi_j)\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})]-\int_a^{\sigma_{m-1}} f\,\mathrm{d}\,g\Big|\\
&\qquad\qquad+\Big|\int_a^{\sigma_{m-1}} f\,\mathrm{d}\,g+f(b)\,[g(b)-g(\sigma_{m-1})]-I\Big|\,.
\end{aligned}$$

Vzhledem k (6.63) a (6.61) (kde položíme $x=\sigma_{m-1}$) tedy dostáváme konečně

$$\Big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-I\Big|<2\,\varepsilon\,,\quad \text{tj.}\ \int_a^b f\,\mathrm{d}\,g=I.$$

Důkaz tvrzení (ii) se provede analogicky a ponecháváme ho čtenáři jako cvičení. □

6.40. Cvičení. Dokažte tvrzení (ii) věty 6.39 a jeho pomocí také jeho následující variantu:

Nechť existuje $\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$ *a nechť*

$$\lim_{t\to x+}\Big(\int_a^t f \,\mathrm{d}\, g + f(x)\,[g(t)-g(x)]\Big) = I\in\mathbb{R} \quad \textit{pro každé } \ x\in[a,b).$$

Potom $\displaystyle\int_a^x f \,\mathrm{d}\, g = I.$

6.41. Příklady. Pomocí Hakeovy věty můžeme snadno a universálním způsobem odvodit vzorce, které jsme v příkladech 6.15 odvodili přímo z definice pomocí vhodné volby kalibru. Např. formuli (6.11), kde $\tau\in(a,b)$ a f je libovolná, odvodíme takto

$$\begin{aligned}\int_a^b f \,\mathrm{d}\,\chi_{[\tau,b]} &= \int_a^\tau f \,\mathrm{d}\,\chi_{[\tau,b]}\\ &= \lim_{t\to\tau-}\Big(\int_a^t f \,\mathrm{d}\,\chi_{[\tau,b]} + f(\tau)\,[\chi_{[\tau,b]}(\tau)-\chi_{[\tau,b]}(t)]\Big) = f(\tau)\end{aligned}$$

Podobně, pro $\tau\in(a,b)$ a $g\in\mathbb{G}[a,b]$ dostaneme pomocí Hakeovy věty

$$\begin{aligned}\int_a^b \chi_{[a,\tau]} \,\mathrm{d}\, g &= \int_a^\tau 1 \,\mathrm{d}\, g + \int_\tau^b \chi_{[a,\tau]} \,\mathrm{d}\, g\\ &= g(\tau)-g(a) + \lim_{t\to\tau+}\Big(\int_t^b \chi_{[a,\tau]} \,\mathrm{d}\, g + 1\,[g(t)-g(\tau)]\Big)\\ &= g(\tau+)-g(a)\,,\end{aligned}$$

tj. (6.17).

6.42. Cvičení. Pomocí Hakeovy věty dokažte i zbývající formule z příkladů 6.15.

6.6 Substituce

Dalším důsledkem Saksova – Henstockova lemmatu je následující lemma, které nám pomůže dokázat větu o substituci.

6.43 . Lemma. *Nechť* $\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$ *existuje. Potom pro každé* $\varepsilon>0$ *existuje kalibr* $\delta\in\mathscr{G}[a,b]$ *takový, že nerovnost*

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\Big|f(\xi_j)\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})] - \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} f \,\mathrm{d}\, g\Big| < \varepsilon \tag{6.64}$$

platí pro každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta)$.

D ů k a z . Buď dáno $\varepsilon>0$ a nechť $\delta\in\mathscr{G}[a,b]$ je kalibr takový, že

$$\Big|S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})=\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\Big|<\frac{\varepsilon}{2}$$

platí pro všechna δ–jemná značená dělení $(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})$ intervalu $[a,b]$.

Buď dáno libovolné $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta)$. Označme $m=\nu(\boldsymbol{\sigma})$ a

$$J^+=\Big\{j\in\{1,2,\dots,m\}:f(\xi_j)\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})]-\int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j}f\,\mathrm{d}\,g\geq 0\Big\}$$

a

$$J^-=\{1,2,\dots,m\}\setminus J^+\,.$$

Systém $\{([\sigma_{j-1},\sigma_j\,],\xi_j),\ j\in J^+\}$ splňuje předpoklady (6.56) z lemmatu 6.36 na místě $\{([s_j,t_j],\tau_j)\}$. Podle lemmatu 6.36 tedy platí

$$\Big|\sum_{j\,\in\,J^+}\Big(f(\xi_j)[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})]-\int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j}f\,\mathrm{d}\,g\Big)\Big|$$
$$\leq\sum_{j\,\in\,J^+}\Big|f(\xi_j)[g(\sigma_j)=g(\sigma_{j-1})]-\int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j}f\,\mathrm{d}\,g\Big|<\frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Podobně

$$\Big|\sum_{j\,\in\,J^-}\Big(f(\xi_j)\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})]-\int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j}f\,\mathrm{d}\,g\Big)\Big|$$
$$\leq\sum_{j\,\in\,J^-}\Big|f(\xi_j)\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})]-\int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j}f\,\mathrm{d}\,g\Big|<\frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Odtud už nerovnost ((6.64)) okamžitě vyplývá. □

6.44. Věta (VĚTA O SUBSTITUCI)**.** *Je-li funkce* $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ *ohraničená a integrál* $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje, potom jakmile existuje jeden z integrálů*

$$\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}\Big[\int_a^x f\,\mathrm{d}\,g\Big],\quad \int_a^b h(x)\,f(x)\,\mathrm{d}\,g(x)$$

existuje i druhý a v takovém případě pak platí

$$\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}\Big[\int_a^x f\,\mathrm{d}\,g\Big]=\int_a^b h(x)\,f(x)\,\mathrm{d}\,g(x)\,.$$

D ů k a z . Podle věty 6.9 je funkce $w(x) = \int_a^x f \, \mathrm{d}\, g$ definovaná pro každé $x \in [a, b]$.

a) Předpokládejme, že existuje integrál $\int_a^b h\, f \, \mathrm{d}\, g$. Buď dáno $\varepsilon > 0$ a nechť δ_ε je kalibr na $[a, b]$ takový, že

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \Big| h(\xi_j)\, f(\xi_j)\, [g(\sigma_j - g(\sigma_{j-1})] - \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} h\, f \, \mathrm{d}\, g \Big| < \varepsilon$$

a

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \Big| f(\xi_j)\, [g(\sigma_j - g(\sigma_{j-1})] - \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} f \, \mathrm{d}\, g \Big| < \varepsilon\,.$$

platí pro každé δ_ε–jemné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$. (Takový kalibr existuje podle lemmatu 6.43.)

Buď dáno $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$. Označme $m = \nu(\boldsymbol{\sigma})$. Potom

$$\begin{aligned}
&\Big| \sum_{j=1}^{m} h(\xi_j)\, [w(\sigma_j) - w(\sigma_{j-1})] - \int_a^b h\, f \, \mathrm{d}\, g \Big| \\
&\quad \le \sum_{j=1}^{m} \Big| h(\xi_j) \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} f \, \mathrm{d}\, g - h(\xi_j)\, f(\xi_j)\, [g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] \Big| \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{m} \Big| h(\xi_j)\, f(\xi_j)\, [g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] - \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} h\, f \, \mathrm{d}\, g \Big| \\
&\quad \le \|h\| \sum_{j=1}^{m} \Big| \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} f \, \mathrm{d}\, g - f(\xi_j)\, [g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] \Big| \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{m} \Big| h(\xi_j)\, f(\xi_j)\, [g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] - \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} h\, f \, \mathrm{d}\, g \Big| \\
&\quad \le (\|h\| + 1)\, \varepsilon\,,
\end{aligned}$$

tj. existuje integrál $\int_a^b h \, \mathrm{d}\, w$ a platí

$$\int_a^b h \, \mathrm{d}\, w = \int_a^b h\, f \, \mathrm{d}\, g.$$

b) Obrácená implikace by se dokazovala podobně – opět za vydatné pomoci Lemmatu 6.43. □

Pro KS – integrál ovšem platí také tvrzení analogická větám 5.44 a 5.45, které jsme dokázali pro RS – integrály. Uvedeme alespoň jedno z nich.

6.45. Věta. *Předpokládejme, že funkce* $\phi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ *je rostoucí a zobrazuje interval* $[\alpha, \beta]$ *na interval* $[a, b]$ *a nechť* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Pak existuje-li jeden z integrálů*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,g(x), \qquad \int_\alpha^\beta f(\phi(x))\,\mathrm{d}\,g(\phi(x)),$$

existuje i ten druhý a platí rovnost a

$$\int_\alpha^\beta f(\phi(x))\,\mathrm{d}\,g(\phi(x)) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,g(x)\,. \tag{6.65}$$

D ů k a z . Povšiměme si, že protože ϕ je rostoucí a zobrazuje interval interval $[\alpha, \beta]$ na interval $[a, b]$, musí být ϕ i její inverse ϕ^{-1} spojité.

Pro dané značené dělení $(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) \in \mathscr{T}[\alpha, \beta]$ položme

$$\sigma_j = \phi(\rho_j) \text{ pro } j = 0, 1, \ldots, \nu(\boldsymbol{\rho}) \quad \text{a} \quad \xi_j = \phi(\eta_j) \text{ pro } j = 1, 2, \ldots, \nu(\boldsymbol{\rho})$$

a $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu(\boldsymbol{\rho})}\}$, $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2 \ldots, \xi_{\nu(\boldsymbol{\rho})})$. Potom $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a, b]$. Značíme $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) = \phi(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})$ a $(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) = \phi^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$. Zřejmě $\phi^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a, b]$ pro $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a, b]$.

Pro daný kalibr $\widetilde{\delta} \in \mathscr{G}[\alpha, \beta]$ definujme kalibr $\delta \in \mathscr{G}[a, b]$ tak, aby platilo

$$\left.\begin{aligned} &\phi^{-1}(\tau + \delta(\tau)) < \phi^{-1}(\tau) + \widetilde{\delta}(\phi^{-1}(\tau)) && \text{jestliže } \tau \in [a, b) \\ a \quad &\phi^{-1}(\tau - \delta(\tau)) > \phi^{-1}(\tau) - \widetilde{\delta}(\phi^{-1}(\tau)) && \text{jestliže } \tau \in (a, b] \end{aligned}\right\} \tag{6.66}$$

Nyní, jestliže rozšířené dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a, b]$ je δ – jemné, pak podle (6.66) máme pro každé $j = 1, 2, \ldots, \nu(\boldsymbol{\sigma})$

$$\rho_j = \phi^{-1}(\sigma_j) \le \phi^{-1}(\xi_j + \delta(\xi_j)) < \phi^{-1}(\xi_j) + \widetilde{\delta}(\phi^{-1}(\xi_j)) = \eta_j + \widetilde{\delta}(\eta_j)$$

a

$$\rho_{j-1} = \phi^{-1}(\sigma_{j-1}) \ge \phi^{-1}(\xi_j - \delta(\xi_j)) > \phi^{-1}(\xi_j) - \widetilde{\delta}(\phi^{-1}(\xi_j)) = \eta_j - \widetilde{\delta}(\eta_j)\,.$$

Čili, $\phi^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\widetilde{\delta})$ pro každé $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta)$. Podobně bychom ke každému kalibru $\delta \in \mathscr{G}[a, b]$ našli kalibr $\widetilde{\delta} \in \mathscr{G}[\alpha, \beta]$ takový, že $\phi(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) \in \mathscr{A}(\delta)$ jakmile $(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) \in \mathscr{A}(\widetilde{\delta})$.

Protože

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} f(\xi_j)\,\big[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})\big] = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} f(\phi(\eta_j))\,\big[g(\phi(\rho_j))-g(\phi(\rho_{j-1}))\big]$$

pro každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}[a,b]$ a $(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})=\phi^{-1}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$, plyne odtud už snadno důkaz věty. □

6.46. Cvičení. (i) Do všech podrobností si promyslete závěr důkazu předešlé věty.

(ii) Formulujte a dokažte analogii věty 6.45 pro případ, že ϕ je klesající.

(iii) Formulujte a dokažte analogii věty 5.45.

6.47. Poznámka. Větu 6.45 je možno zobecnit v různých směrech. Např. následující verse věty o substituci se uplatnila při aplikaci teorie hysterese v ekonomii (viz [4]):

Předpokládejme, že funkce $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *je ohraničená na* $[a,b]$ *a taková, že* $f\in\mathbb{G}[\alpha,b]$ *pro každé* $\alpha\in(a,b)$. *Dále, nechť funkce* $\phi:[a,b]\to\mathbb{R}$ *je neklesající na* $[a,b]$ *a* $\phi(a)=c,\ \phi(b)=d$. *Konečně, nechť funkce* $g\in\mathbb{BV}[c,d]$ *je zprava spojitá na* $[c,d)$. *Pro* $s\in[c,d]$ *položme* $\psi(s)=\inf\{t\in[a,b]: s\le\phi(t)\}$. *Potom pro každé* $\alpha\in[a,b]$ *platí*

$$\int_\alpha^b f(t)\,\mathrm{d}[g(\phi(t))] = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(b)} f(\psi(s))\,\mathrm{d}g(s)\,.$$

6.7 Bodová konvergence

6.48. Věta (OSGOODOVA VĚTA)**.** *Předpokládejme, že pro funkci* $f\in\mathbb{G}[a,b]$ *a posloupnost* $\{f_n\}\subset\mathbb{G}[a,b]$ *platí*

$$\|f_n\|\le M<\infty \text{ pro } n\in\mathbb{N} \tag{6.67}$$

a

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \text{ pro } x\in[a,b]\,. \tag{6.68}$$

Potom

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,\mathrm{d}\,g = \int_a^b f\,\mathrm{d}\,g \quad \text{pro každou funkci } g\in\mathbb{BV}[a,b]\,. \tag{6.69}$$

D ů k a z . Integrály $\int_a^b f_n \, \mathrm{d}\, g, \; n \in \mathbb{N},$ a $\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g$ existují podle věty 6.22. Nechť $g = g^{\mathrm{C}} + g^{\mathrm{B}}$ je Jordanův rozklad funkce g (viz věta 2.37). Potom podle cvičení 5.52 (i) existují integrály $(\sigma)\int_a^b f_n \, \mathrm{d}\, g^{\mathrm{C}}$ a $(\sigma)\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g^{\mathrm{C}}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a podle Osgoodovy věty pro RS – integrály (věta 5.57) platí

$$\lim_{n\to\infty} (\sigma)\int_a^b f_n \, \mathrm{d}\, g^{\mathrm{C}} = (\sigma)\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g^{\mathrm{C}}$$

neboli (podle věty 6.13)

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \, \mathrm{d}\, g^{\mathrm{C}} = \int_a^b f \, \mathrm{d}\, g^{\mathrm{C}}. \tag{6.70}$$

Dále, podle lemmatu 6.29 máme pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g^{\mathrm{B}} = \sum_{w \in W} f(w)\, \Delta\, g(w) \quad \text{a} \quad \int_a^b f_n \, \mathrm{d}\, g^{\mathrm{B}} = \sum_{w \in W} f_n(w)\, \Delta\, g(w)\,,$$

kde W je množina bodů nespojitosti funkce g v intervalu $[a, b]$. Jestliže je W konečná, pak zřejmě platí

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{w \in W} f_n(w)\, \Delta\, g(w) = \sum_{w \in W} f(w)\, \Delta\, g(w)$$

a tudíž

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \, \mathrm{d}\, g^{\mathrm{B}} = \int_a^b f \, \mathrm{d}\, g^{\mathrm{B}}. \tag{6.71}$$

Nechť $W = \{w_k\}$. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Podle důsledku 2.26 je

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta\, g(w_k)| \le \operatorname{var}_a^b g < \infty.$$

Existuje tedy $p_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{k=p_\varepsilon+1}^{\infty} |\Delta\, g(w_k)| < \frac{\varepsilon}{4\,M}\,.$$

Vzhledem k (6.67) a (6.68) je také $|f(x)| \le M$ pro $x \in [a, b]$ a tudíž

$$\Big|\sum_{k=p_\varepsilon+1}^{\infty} \big(f_n(w_k) - f(w_k)\big)\; \Delta\, g(w_k)\Big| \le 2\,M \sum_{k=p_\varepsilon+1}^{\infty} |\Delta\, g(w_k)| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{6.72}$$

Dále, protože

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{p_\varepsilon} f_n(w_k)\,\Delta\,g(w_k)=\sum_{k=1}^{p_\varepsilon} f(w_k)\,\Delta\,g(w_k)\,,$$

existuje $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ takové, že

$$\Big|\sum_{k=1}^{p_\varepsilon}\big(f_n(w_k)-f(w_k)\big)\;\Delta\,g(w_k)\Big|<\frac{\varepsilon}{2}\quad\text{pro}\;\;n\ge n_\varepsilon\,,$$

což dohromady s (6.72) dává

$$\Big|\int_a^b\big(f_n-f\big)\,\mathrm{d}\,g^{\mathrm{B}}\Big|=\Big|\sum_{k=1}^{\infty}\big(f_n(w_k)-f(w_k)\big)\;\Delta\,g(w_k)\Big|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

pro $n\ge n_\varepsilon$. Rovnost (6.71) tedy platí i tehdy, když množina W není konečná. Toto, společně s (6.70), zaručuje platnost rovnosti (6.69) a dokazuje tvrzení věty.
□

6.8 Integrály maticových a vektorových funkcí

Jsou-li maticové funkce $F\colon[a,b]\to\mathscr{L}(R^m,R^p)$, $G\colon[a,b]\to\mathscr{L}(R^p,R^n)$ takové, že všechny integrály

$$\int_a^b f_{i,k}\,\mathrm{d}\,g_{k,j}\quad(i=1,2,\ldots,m,\;k=1,2,\ldots,p\,,\;j=1,2,\ldots,n)$$

existují, pak symbol $\int_a^b F(t)\,\mathrm{d}\,G(t)$ (resp. krátce $\int_a^b F\,\mathrm{d}\,G$) značí $m\times n-$matici $M\in\mathscr{L}(R^m,\mathbb{R}^n)$ s prvky

$$m_{i,j}=\sum_{k=1}^{p}\int_a^b f_{i,k}\,\mathrm{d}\,g_{k,j}\,,\quad i=1,2,\ldots,m,\;j=1,2,\ldots,n.$$

Analogicky definujeme také integrály $\int_a^b \mathrm{d}\,[F]\,G$ resp. $\int_a^b F\,\mathrm{d}\,[G]\,H$, kde F, G a H jsou maticové funkce vhodných rozměrů.

Připomeňme, že podle označení 1.3 (xiv) normu matice $A\in\mathscr{L}(R^m,\mathbb{R}^n)$ značíme $|A|$ a definujeme ji předpisem $|A|=\max\limits_{j=1,\ldots,m}\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{i,j}|$. V této souvislosti ztotožňujeme prostory $\mathbb{R}^n$ a $\mathscr{L}(R^n,\mathbb{R}^1)$, tj. $|x| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ a

$$|A\,x| \le |A|\,|x| \ \text{ pro } A \in \mathscr{L}(R^m,\mathbb{R}^n) \ \text{ a } \ x \in \mathbb{R}^n\,.$$

Dále je známo, že platí $|A| = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ |x|\le 1}} |A\,x|$.

Variace maticové funkce $F:[a,b]\to\mathscr{L}(R^m,\mathbb{R}^n)$ je definovaná formálně stejným předpisem jako variace skalárních funkcí, tj.

$$\operatorname{var}_a^b F = \sup_{\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]} |F(\sigma_j) - F(\sigma_{j-1})|\,.$$

Snadno se ověří, že platí

$$\max_{\substack{i=1,2,\dots,m\\ j=1,2,\dots,n}} \big(\operatorname{var}_a^b f_{ij}\big) \le \operatorname{var}_a^b F \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \operatorname{var}_a^b f_{ij}\,.$$

To znamená, že maticová funkce $F:[a,b]\to\mathscr{L}(R^m,R^n)$ má konečnou variaci právě tehdy, když má konečnou variaci každá její složka. Podobně, F je spojitá resp. regulovaná právě tehdy, když stejnou vlastnost má každá její složka.

Rozšíření výsledků uvedených v této a předešlé kapitole na případ funkcí maticových resp. vektorových je tedy snadné. Je ovšem nutno mít na paměti, že operace násobení matic není obecně symetrická, a tak musíme mít stále na paměti, že nesmíme libovolně měnit pořadí maticových funkcí, v jakém se v součinech obsažených v aproximujících součtech $S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ objevují. Např. větu o integraci per-partes (věta 6.34) je třeba formulovat takto:

Jestliže $F:[a,b]\to\mathscr{L}(R^m,R^p)$ je regulovaná na $[a,b]$ a $G:[a,b]\to\mathscr{L}(R^p,R^n)$ má konečnou variaci na $[a,b]$, pak existují oba integrály

$$\int_a^b F\,\mathrm{d}G \ \text{ a } \ \int_a^b \mathrm{d}[F]\,G$$

a platí

$$\int_a^b F\,\mathrm{d}G + \int_a^b \mathrm{d}[F]\,G = F(b)\,G(b) - F(a)\,G(a) + \sum_{x\in[a,b]} \Big(\Delta^- F(x)\,\Delta^- G(x) - \Delta^+ F(x)\,\Delta^+ G(x)\Big)\,.$$

Podobně třeba věta o substituci (věta 6.44) bude vypadat takto:

Jestliže funkce $H\colon [a,b]\to\mathscr{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^p)$ *je ohraničená,* $F:[a,b]\to\mathscr{L}(R^p,R^q)$, $G:[a,b]\to\mathscr{L}(R^q,R^n)$ *a integrál* $\displaystyle\int_a^b F\,\mathrm{d}\,G$ *existuje, potom jakmile existuje jeden z integrálů*

$$\int_a^b H(x)\,\mathrm{d}\Big[\int_a^x F\,\mathrm{d}\,G\Big],\quad \int_a^b (H\,F)\,\mathrm{d}\,G$$

existuje i druhý a v takovém případě pak platí

$$\int_a^b H(x)\,\mathrm{d}\Big[\int_a^x F\,\mathrm{d}\,G\Big] = \int_a^b (H\,F)\,\mathrm{d}\,G\,.$$

6.9 Souvislost s dalšími typy integrálů

Vyjasnili jsme již vzájemné vztahy mezi KS – integrálem a RS – integrály (viz poznámka 6.12 a věta 6.13). Podobně jako jsme v příkladu 6.14 (ii) dokázali, že z existence Newtonova integrálu (N)$\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,x$ plyne existence (KH) – integrálu $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,x,$ lze dokázat také, že z existence Perronova integrálu (N)$\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,x$ plyne existence (KH) – integrálu $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,x.$ Definici Perronova integrálu najdeme např. v monografiích [40] nebo [17], viz [40, definice XII.1.5] resp. [17, definice XII.25]. (Níže uvádíme definici Perronova – Stieltjesova integrálu, která ji také zahrnuje.) Platí dokonce, že KH – integrál je ekvivalentní s Perronovým integrálem (viz [40, věta XII.2.1]). Vzhledem ke známým vlastnostem Perronova integrálu to znamená, že KH – integrál (vzdor jeho jednoduché, téměř riemannovské, definici) zahrnuje tedy současně integrály Riemannův, Newtonův, ale i Lebesgueův. Tím se rozumí, že je-li na nějakém intervalu daná funkce integrovatelná ve smyslu Lebesgueově, pak má na tomto intervalu i KH – integrál a oba integrály mají stejnou hodnotu. Dále, existuje-li KH – integrál funkce f, pak f je lebesgueovsky integrovatelná právě tehdy, když také její absolutní hodnota $|f|$ je KH – integrovatelná, viz např. kapitoly XII a XIV v monografii [40].

PERRONŮV– STIELTJESŮV INTEGRÁL.
Definice náleží A.J. Wardovi, viz [53] a [36]. Popsána byla též v Saksově monografii [36, VI.8]. Uvedeme zde ekvivalentní (viz [42, Theorem 2.1]) definici.

Řekneme, že funkce $M:[a,b]\to\mathbb{R}$ je *majoranta* pro f vzhledem ke g, jestliže existuje kalibr $\delta\in\mathscr{G}[a,b]$ takový, že

$$(t-\tau)\,\bigl[M(t)-M(\tau)\bigr]\geq(t-\tau)\,f(\tau)\,\bigl(g(t)-g(\tau)\bigr)$$
$$\text{pro}\ \ \tau\in[a,b]\ \ \text{a}\ \ t\in[a,b]\cap(\tau-\delta(\tau),\tau+\delta(\tau))\,.$$

Podobně, funkce $m:[a,b]\to\mathbb{R}$ je *minoranta* pro f vzhledem ke g, jestliže existuje kalibr $\delta\in\mathscr{G}[a,b]$ takový, že

$$(t-\tau)\,\bigl[M(t)-M(\tau)\bigr]\leq(t-\tau)\,f(\tau)\,\bigl(g(t)-g(\tau)\bigr)$$
$$\text{pro}\ \ \tau\in[a,b]\ \ \text{a}\ \ t\in[a,b]\cap(\tau-\delta(\tau),\tau+\delta(\tau))\,.$$

Symbol $\mathfrak{M}(f\Delta\,g)$ značí množinu majorant pro f vzhledem ke g, $\mathfrak{m}(f\Delta\,g)$ je množina minorant pro f vzhledem ke g.

Předpokládejme, že obě množiny $\mathfrak{M}(f\Delta\,g)$ i $\mathfrak{m}(f\Delta\,g)$ jsou neprázdné a položme

$$(\mathrm{PS})\overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}g=\inf\bigl\{M(b)-M(a):M\in\mathfrak{M}[a,b]\bigr\}$$

a

$$(\mathrm{PS})\underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}g=\sup\bigl\{m(b)-m(a):m\in\mathfrak{m}[a,b]\bigr\}\,.$$

($(\mathrm{PS})\overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}g$ je *horní Perronův – Stieltjesův* integrál f a $(\mathrm{PS})\underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}g$ je *dolní Perronův – Stieltjesův* integrál.) Pomocí Cousinova lemmatu (lemma 6.3) lze dokázat (viz [27, Lemma 1.1.2]), že platí $(\mathrm{PS})\underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}g\leq(\mathrm{PS})\overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}g$. Jestliže

$$(\mathrm{PS})\underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}g=(\mathrm{PS})\overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}g=I\in\mathbb{R},$$

pak

$$(\mathrm{PS})\int_a^b f\,\mathrm{d}g=I$$

je *Perronův – Stieltjesův integrál* funkce f vzhledem k funkci g přes interval $[a,b]$.

Poznamenejme, že podle [27, Lemma 1.2.1] integrál $(\mathrm{PS})\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ existuje tehdy a jen tehdy, když existuje KS- integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}g.$ Jestliže tyto integrály existují, pak mají stejnou hodnotu. (PS – integrál je ekvivalentní s KS- integrálem.)

LEBESGUEŮV– STIELTJESŮV INTEGRÁL (LS – integrál)
byl popsán v řadě monografií a učebnic, viz např. T.H. Hildebrandt [13, kapitola VI], V. Jarník [17, kapitoly II a X], A.N. Kolmogorov a S.V. Fomin [18, VI.6.–3], J. Lukeš [29, kapitola 12], S. Saks [36, kapitola III]. Existuje několik cest k jeho definici. Vesměs se ale jedná o poměrně komplikovaný proces.

Nejčastěji je integrál $(\mathrm{LS})\int_M f\,\mathrm{d}g$ přes množinu $M\subset[a,b]$ definován zprvu pro f nezáporné, ohraničené a borelovsky měřitelné a g neklesající a zprava spojité jako Lebesgueův integrál vzhledem k Lebesgueově-Stieltjesově míře $\mu_g,$ tj. σ– aditivní míře vzniklou rozšířením míry intervalu $G((c,d]=g(d)-g(c)$ pro $[c,d]\subset[a,b]$ podobným způsobem, jako se buduje Lebesgueova míra rozšířením obvyklé míry intervalu $\ell([c,d]=d-c.$ Definice se pak zřejmým rozšíří na případ kdy f je ohraničená a borelovsky měřitelná a $g\in\mathbb{BV}[a,b]$ na základě rozkladu funkcí s konečnou variací na rozdíl dvou neklesajících funkcí a rozkladu $f=f^+-f^-.$ Alternativní možností je definovat LS – integrál jako rozšíření RS – integrálu Daniellovou metodou.

Na rozdíl od KS – integrálu, LS – integrál má poněkud užší třídu integrovatelných funkcí. Nezahrnuje např. integraci vzhledem k regulovaným funkcím. Na druhou stranu, neomezuje se na integraci přes interval. Má smysl uvažovat o LS – integraci přes libovolnou LS – měřitelnou množinu.

Vztah mezi LS – integrálem a PS – integrálem (a tedy i KS – integrálem) je dobře charakterizován následujícím tvrzením obsaženým v Saksově monografii (viz [36, Theorem VI (8.1)]).

Nechť $g\in\mathbb{BV}[a,b],\ f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ *a nechť existuje integrál* $(\mathrm{LS})\int_{(a,b)} f\,\mathrm{d}g.$ *Potom existuje také* PS – *integrál* $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ *a platí*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g=(PS)\int_{(a,b)} f\,\mathrm{d}g+f(a)\,\Delta^+g(a)+f(b)\,\Delta^-g(b)\,.$$

Odtud podle věty o substituci (věta 6.44) plyne i následující zajímavé tvrzení.

Je-li f *ohraničená na* $[a,b],\ h:[a,b]\to\mathbb{R}$ *Lebesgueovsky integrovatelná na* $[a,b]$ *a* $g(t)=g(a)+\int_a^t h\,\mathrm{d}x$ *pro* $t\in[a,b],$ *pak* $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g=\int_a^b f\,h\,\mathrm{d}\,t,$ *kde integrál na* *pravé straně je Lebesgueův.*

DUSHNIKŮV INTEGRÁL A YOUNGŮV INTEGRÁL.
Změníme-li definici značených dělení v tom smyslu, že budeme požadovat, aby platilo

$$\xi_j \in (\sigma_{j-1}, \sigma_j) \quad \text{pro } j = 1, 2, \dots, \nu(\boldsymbol{\sigma})$$

a dosadíme-li tento modifikovaný pojem značených dělení do definice RS – integrálů (viz definice 5.3), dostaneme *Dushnikův* ((δ) nebo (σ)) integrály. Je zřejmé, že jestliže existuje integrál $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}g$, pak existuje i Dushnikův (σ) – integrál (D)$\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ a mají stejnou hodnotu. Dushnikův integrál je dokonce stejně obecný jako KS – integrál, pokud jde třídu integrovatelných funkcí. Obecně se však jeho hodnoty liší od odpovídajících hodnot KS – integrálu. To je zřetelné z následujícího vztahu

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g + (\mathrm{D})\int_a^b g\,ddf = f(b)\,g(a) - f(a)\,g(a)\,,$$

který platí jakmile jeden z integrálů na levé straně má smysl. Dushnikův integrál je podrobně popsán v monografii Ch.S. Höniga [14], který rozšířil jeho definici i na funkce s hodnotami v Banachových prostorech a vyšetřil jeho vlastnosti natolik, že mohl na jejich základě vybudovat teorii Volterrových – Stieltjesových integrálních rovnic v Banachových prostorech.

Definujeme-li navíc

$$S_Y(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \big[f(\sigma_{j-1})\Delta^+ g(\sigma_{j-1}) + f(\xi_j)\,[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] + f(\sigma_j)\Delta^- g(\sigma_j)\big]\,,$$

a dosadíme-li $S_Y(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ místo $S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ do definice 5.3, dostaneme *Youngův* integrál (Y)$\int_a^b f\,\mathrm{d}g$. O tomto integrálu a zejména o jeho (σ) verzi je podrobně pojednáno v odstavci II.19 monografie T.H. Hildebrandta [13]. Také (σ) – Youngův integrál je prakticky stejně obecný jako KS – integrál. Jsou dokonce známy kuriozní příklady funkcí, pro které existuje (σ) – Youngův integrál a neexistuje KS – integrál (viz [42] nebo [22]). V případech zajímavých pro aplikace, kdy obě funkce $f,\ g$ jsou regulované na $[a,b]$ a alespoň jedna z nich má na $[a,b]$ konečnou variaci, oba integrály

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g \quad \text{a} \quad (\sigma\mathrm{Y})\int_a^b f\,\mathrm{d}g$$

existují a mají stejnou hodnotu. Upraví-li se definice KS – integrálu zúžením množiny značených dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ na případy, kdy platí

$$a \le \xi_1 < \sigma_1,\ \sigma_{j-1} < \xi_j < \sigma_j \text{ pro } j = 2,\dots,\nu(\boldsymbol{\sigma})-1,\ \sigma_{\nu(\boldsymbol{\sigma})-1} < \xi_{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \le b\,,$$

(viz [43]) bude už takovýto modifikovaný KS – integrál rozšířením i (σ) – Youngova integrálu. Jiná možnost modifikace definice KS – integrálu byla uvedena v práci [20].

INTEGRACE V ABSTRAKTNÍCH PROSTORECH.
Rozšíření integrace na vektorové a maticové funkce jsme ukázali v odstavci 6.8. Analogicky, lze postupovat i v případě abstraktních funkcí, tj. funkcí s hodnotami v Banachových prostorech. Je-li $\mathbb{X}$ je Banachův prostor a $\mathscr{L}(\mathbb{X})$ odpovídající Banachův prostor spojitých lineárních operátorů na $\mathbb{X}$ a

$$F:[a,b]\to\mathscr{L}(\mathbb{X}),\ G:[a,b]\to\mathscr{L}(\mathbb{X}),\ g:[a,b]\to\mathbb{X}\,,$$

pak můžeme definovat KS – integrály

$$\int_a^b \mathrm{d}F\,g, \quad \int_a^b F\,\mathrm{d}g \quad \int_a^b \mathrm{d}F\,G, \quad \int_a^b F\,\mathrm{d}G\,.$$

Např. $\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}F\,g = I \in \mathbb{X}$ jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje kalibr $\delta \in \mathscr{G}[a,b]$ takový, že platí

$$\Big\| \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} F(\xi_j)\,\big[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})\big] - I \Big\|_{\mathbb{X}} < \varepsilon$$

pro každé δ – jemné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a,b]$. Pojem variace lze snadno přenést i na abstraktní funkce. Pro funkci $f:[a,b]\to\mathbb{X}$ a dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a,b]$ definujeme

$$V(f,\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \|f(\sigma_j) - f(\sigma_{j-1})\|_{\mathbb{X}} \quad \text{a} \quad \operatorname{var}_a^b f = \sup\{V(f,\boldsymbol{\sigma}) : \boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b].$$

Je také zřejmé, jak definovat prostor $\mathbb{G}([a,b],\mathbb{X})$ regulovaných funkcí s hodnotami v $\mathbb{X}.$ Potom např. oba integrály

$$\int_a^b \mathrm{d}F\,G \quad \text{a} \quad \int_a^b F\,\mathrm{d}G$$

existují jestliže $F\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{X}))$ a $G\in\mathbb{G}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{X}))$ platí i většina tvrzení známých pro integraci skalárních funkcí (viz [44], [47] a [33]). Jsou však i výjimky: Lemma 6.43 platí pouze pokud má prostor $\mathbb{X}$ konečnou dimenzi. To znamená m.j., že jsou jisté potíže s přenesením např. věty o substituci na abstraktní integrály. V této stručné informaci stojí ještě za zmínku, že pokud nemá prostor $\mathbb{X}$ konečnou dimenzi, má smysl místo variace uvažovat obecně slabší pojem *semivariace*, který se definuje takto:

Pro danou funkci $F:[a,b]\to L(\mathbb{X})$ a dělení $\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]$ položme nejprve

$$V_a^b(F,\boldsymbol{\sigma}) = \sup\left\{\Big\|\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}[F(\sigma_j)-F(\sigma_{j-1})]\,x_j\Big\|_{\mathbb{X}}\right\},$$

kde supremum se bere přes všechny možné volby prvků $x_j\in\mathbb{X},\ j=1,2,\dots,\nu(\boldsymbol{\sigma})$ takových, že $\|x_j\|_X\le 1.$ Potom číslo

$$(\mathcal{B})\mathrm{var}_a^b\,F = \sup\{V_a^b(x,\boldsymbol{\sigma}) : \boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]\}$$

se nazývá *semivariace* funkce F na $[a,b]$ (viz např. [14]). Zpravidla (ne vždy) je možno předpoklady o konečné variaci zeslabit na konečnou semivariaci. Je známo, že má-li $\mathbb{X}$ konečnou dimensi, pak pojmy variace a semivariace splývají.

Poznamenejme ještě, že integrace funkcí s hodnotami v Hilbertových resp. reflexivních Banachových prostorech má uplatnění např. v teorii hysterese (viz např. [23] nebo [24]).

Důkazy podstatné části tvrzení uvedených v této kapitole byly převzaty z monografie [52]. Některé jsou pak modifikacemi důkazů analogických tvrzení pro speciální případ $g(x)\equiv x$ ze Schwabikovy monografie [40].

Kapitola 7

Aplikace Stieltjesova integrálu ve funkcionální analýze

V této kapitole nejprve ukážeme jak se Stieltjesovy integrály uplatní při representaci spojitých lineárních funkcionálů na některých prostorech funkcí. Nejprve připomeňme několik základních pojmů.

7.1 Několik základních pojmů z funkcionální analýzy

(i) Nechť $\mathbb{X}$ a $\mathbb{Y}$ jsou lineární (vektorové) prostory. Zobrazení

$$\beta : x \in \mathbb{X},\ y \in \mathbb{Y} \to \beta(x,y) \in \mathbb{R}$$

je *bilineární*, jestliže platí

$$\begin{aligned}
&\beta(x_1 + x_2, y) = \beta(x_1, y) + \beta(x_2, y) && \text{pro všechna } x_1, x_2 \in \mathbb{X},\ y \in \mathbb{Y}\,,\\
&\beta(\lambda\, x, y) = \lambda\, \beta(x, y) && \text{pro všechna } x \in \mathbb{X},\ y \in \mathbb{Y},\ \lambda \in \mathbb{R}\,,\\
&\beta(x, y_1 + y_2) = \beta(x, y_1) + \beta(x, y_2) && \text{pro všechna } x \in \mathbb{X},\ y_1, y_2 \in \mathbb{Y}\,,\\
&\beta(x, \lambda\, y) = \lambda\, \beta(x, y) && \text{pro všechna } x \in \mathbb{X},\ y \in \mathbb{Y},\ \lambda \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

(ii) Prostory $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ tvoří *duální pár vzhledem k bilineárnímu zobrazení* β, jestliže platí

$$\begin{aligned}
&\beta(x,y) = 0 \ \text{ pro všechna } x \in \mathbb{X} \implies y = 0\,,\\
&\beta(x,y) = 0 \ \text{ pro všechna } y \in \mathbb{X} \implies x = 0\,.
\end{aligned}$$

(iii) Lineárním zobrazením lineárního prostoru $\mathbb{X}$ do $\mathbb{R}$ říkáme *lineární funkcionály* na $\mathbb{X}$. Pro libovolné lineární funkcionály Φ, Ψ na $\mathbb{X}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ a $x \in \mathbb{X}$ definujeme

$$(\Phi + \Psi)(x) = \Phi(x) + \Psi(x) \quad \text{a} \quad (\lambda\, \Phi)(x) = \lambda\, \Phi(x)\,.$$

Množina lineárních funkcionálů na prostoru $\mathbb{X}$ je zřejmě vzhledem k takto zavedeným operacím také lineární prostor. (Nulovým prvkem množiny lineárních funkcionálů na prostoru $\mathbb{X}$ je přirozeně funkcionál $0 : x \in \mathbb{X} \to 0 \in \mathbb{R}$.)

(iv) Je-li $\mathbb{X}$ Banachův prostor s normou $x \in \mathbb{X} \to \|x\|_{\mathbb{X}}$, pak lineární funkcionál Φ na $\mathbb{X}$ je spojitý (vzhledem k topologii indukované normou $\|.\|_{\mathbb{X}}$) právě tehdy, když je ohraničený, tj. existuje číslo $K \in [0, \infty)$ takové, že nerovnost $|\Phi(x)| \le K\, \|x\|_{\mathbb{X}}$ platí pro každé $x \in \mathbb{X}$ (viz [18, IV.1.2]). Prostor spojitých lineárních funkcionálů na Banachově prostoru $\mathbb{X}$ značíme $\mathbb{X}^*$ a nazýváme *duální* (nebo též *adjungovaný prostor*) k $\mathbb{X}$. Předpisem

$$\Phi \in \mathbb{X}^* \to \|\Phi\|_{\mathbb{X}^*} = \sup\{|\Phi(x)| : x \in \mathbb{X}, \|x\|_{\mathbb{X}} \le 1\}.$$

je přirozeně definována norma na $\mathbb{X}^*$ a $\mathbb{X}^*$ je vzhledem k této normě také Banachův prostor (viz [18, IV.2.1]). Povšimeme si též, že zobrazení

$$x \in \mathbb{X},\ \Phi \in \mathbb{X}^* \to \Phi(x) \in \mathbb{R} \tag{7.1}$$

je bilineární.

Důležitou roli v teorii spojitých lineárních operátorů hraje věta Hahnova – Banachova, kterou zde připomeneme v obecnosti postačující pro naše účely. Důkaz lze najít ve většině učebnic funkcionální analýzy, viz např [18, IV.1.3].

7.1. Věta (HAHN – BANACH)**.** *Nechť $\mathbb{X}$ je Banachův prostor a $\mathbb{Y} \subset \mathbb{X}$ je jeho podprostor. Potom pro každý spojitý lineární funkcionál Φ na $\mathbb{Y}$ existuje spojitý lineární funkcionál $\widetilde{\Phi}$ na $\mathbb{X}$ takový, že*

$$\widetilde{\Phi}(y) = \Phi(y) \quad \textit{pro} \ \ y \in \mathbb{Y} \quad \textit{a} \quad \|\widetilde{\Phi}\|_{\mathbb{X}^*} = \|\Phi\|_{\mathbb{Y}^*}. \tag{7.2}$$

Známým a užitečným důsledkem věty Hahnovy – Banachovy je následující tvrzení (viz např. [18, IV.1.3]).

7.2. Důsledek. *Nechť $\mathbb{X}$ je Banachův prostor a $\mathbb{Y} \subset \mathbb{X}$ je jeho podprostor. Potom pro každý prvek $z \in \mathbb{X} \setminus \mathbb{Y}$ existuje spojitý lineární funkcionál Φ na $\mathbb{X}$ takový, že*

$$\|\Phi\|_{\mathbb{X}^*} = 1, \quad \Phi(y) = 0 \quad \textit{pro} \ \ y \in \mathbb{Y} \quad \textit{a} \quad \Phi(z) = \operatorname{dist}(\mathbb{Y}, z),$$

kde $\operatorname{dist}(\mathbb{Y}, z)$ *značí vzdálenost prvku z od množiny $\mathbb{Y}$, tj.*

$$\operatorname{dist}(\mathbb{Y}, z) = \inf\{\|y - z\|_{\mathbb{X}} : y \in \mathbb{Y}\}.$$

Pomocí důsledku 7.2 snadno dokážeme následující tvrzení.

7.3. Důsledek. *Je-li $\mathbb{X}$ Banachův prostor a $\mathbb{X}^*$ jeho duální prostor, pak $\mathbb{X}, \mathbb{X}^*$ je duální pár vzhledem k bilineárnímu zobrazení* (7.1).

D ů k a z . a) Je-li $\Phi(x)=0$ pro každé $x\in\mathbb{X}$, znamená to, že Φ je nulový funkcionál, tj. $\Phi=0\in\mathbb{X}^*$.

b) Podle důsledku 7.2 pro libovolné $x\neq 0$ existuje funkcionál $\Phi\in\mathbb{X}^*$ takový, že $\|\Phi\|_{\mathbb{X}^*}=1$ a $\Phi(x)=\|x\|$. (Položíme $\mathbb{Y}=\{0\}$.) Nemůže se tedy stát, že by bylo současně $\Phi(x)=0$ pro každé $\Phi\in\mathbb{X}^*$ a $x\neq 0$. □

7.2 Spojité lineární funkcionály na prostoru spojitých funkcí

Mezi významné výsledky funkcionální analýzy patří representace spojitých lineárních funkcionálů na některých často používaných prostorech funkcí. Speciálně v případě prostoru $\mathbb{C}[a,b]$ funkcí spojitých na $[a,b]$ se dobře uplatní klasický (δ) RS – integrál.

7.4. Věta (RIESZ). *Φ je spojitý lineární funkcionál na $\mathbb{C}[a,b]$ $(\Phi\in(\mathbb{C}[a,b])^*)$ právě tehdy, když existuje funkce $p\in\mathbb{BV}[a,b]$ taková, že $p\,(a)=0$ a*

$$\Phi(x) = (\delta)\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p \quad \textit{pro každou funkci } x\in\mathbb{C}[a,b]\,. \tag{7.3}$$

Potom také platí $\|\Phi\|_{\mathbb{X}^*} = \mathrm{var}_a^b\, p$.

D ů k a z . a) Nechť $x\in\mathbb{C}[a,b]$ a $p\in\mathbb{BV}[a,b]$. Potom podle věty 5.50 existuje integrál $(\delta)\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p$ a podle lemmatu 5.9 platí $\left|(\delta)\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p\right|\le\big(\mathrm{var}_a^b\,p\big)\,\|x\|$. Zobrazení

$$\Phi_p\ :\ x\in\mathbb{C}[a,b]\to(\delta)\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p\in\mathbb{R}$$

je tedy ohraničený (tj. spojitý) lineární funkcionál na $\mathbb{C}[a,b]$, přičemž

$$\|\Phi_p\|_{(\mathbb{C}[a,b])^*}\le\mathrm{var}_a^b\,p\,. \tag{7.4}$$

b) Buď dán libovolný spojitý lineární funkcionál Φ na $\mathbb{C}[a,b]$.

Nechť $\mathbb{M}[a,b]$ značí množinu všech funkcí ohraničených na $[a,b]$. $\mathbb{M}[a,b]$ je zřejmě Banachův prostor vzhledem k operacím a normě definovaným stejně jako v $\mathbb{C}[a,b]$. Dále je zřejmé, že $\mathbb{C}[a,b]$ je uzavřený podprostor $\mathbb{M}[a,b]$.

Ve zbývající části tohoto důkazu budeme značit $\mathbb{X}=\mathbb{M}[a,b]$ a $\mathbb{Y}=\mathbb{C}[a,b]$.

Podle věty 7.1 můžeme funkcionál Φ rozšířit na celý prostor $\mathbb{X}$, tj. existuje funkcionál $\widetilde{\Phi}\in X^*$ takový, že platí (7.2).

Položme

$$p(a) = 0 \quad \text{a} \quad p(t) = \widetilde{\Phi}(\chi_{[a,t]}) \quad \text{pro } t \in (a,b]\,. \tag{7.5}$$

Dokážeme, že $p \in \mathbb{BV}[a,b]$.

Buď dáno dělení $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$. Položme $m = \nu(\boldsymbol{\sigma})$. Potom

$$V(p,\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{j=1}^{m} |p(\sigma_j) - p(\sigma_{j-1})| = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j\,[p(\sigma_j) - p(\sigma_{j-1})],$$

kde $\alpha_j = \operatorname{sign}[p(\sigma_j) - p(\sigma_{j-1})]$ pro $j = 1, 2, \ldots, m$. Vzhledem k definici (7.5) tedy dostáváme

$$\begin{aligned} V(p,\boldsymbol{\sigma}) &= \alpha_1\,\widetilde{\Phi}(\chi_{[a,\sigma_1]}) + \sum_{j=2}^{m} \alpha_j\,\big[\widetilde{\Phi}(\chi_{[a,\sigma_j]}) - \widetilde{\Phi}(\chi_{[a,\sigma_{j-1}]})\big] \\ &= \alpha_1\,\widetilde{\Phi}(\chi_{[a,\sigma_1]}) + \sum_{j=2}^{m} \alpha_j\,\widetilde{\Phi}(\chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j]}) \\ &= \widetilde{\Phi}\Big(\alpha_1\,\chi_{[a,\sigma_1]} + \sum_{j=2}^{m} \alpha_j\,\chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j]}\Big) = \widetilde{\Phi}(h)\,, \end{aligned}$$

kde $h(t) = \alpha_1\,\chi_{[a,\sigma_1]}(t) + \sum_{j=2}^{m} \alpha_j\,\chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j]}(t)$ pro $t \in [a,b]$. Zřejmě $\|h\| = 1$ a tedy

$$V(p,\boldsymbol{\sigma}) \le \|\widetilde{\Phi}\|_{\mathbb{X}^*} = \|\Phi\|_{\mathbb{Y}^*} = \|\Phi\|_{(\mathbb{C}[a,b])^*} \quad \text{pro každé } \boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]\,.$$

To ovšem znamená, že

$$\operatorname{var}_a^b p \le \|\Phi\|_{(\mathbb{C}[a,b])^*}\,. \tag{7.6}$$

Zbývá dokázat, že platí (7.3) neboli $\Phi = \Phi_p$. Buďte dány libovolná $x \in \mathbb{C}[a,b]$ a $\varepsilon > 0$. Protože funkce x je stejnoměrně spojitá na $[a,b]$, existuje $\delta > 0$ takové, že platí

$$\Big(t, s \in [a,b] \ \text{ a } \ |t - s| < \delta\Big) \implies |x(t) - x(s)| < \varepsilon\,.$$

Nechť $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$ je libovolné dělení takové, že $|\boldsymbol{\sigma}| < \delta$. Položme $m = \nu(\boldsymbol{\sigma})$.

$$x_{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \begin{cases} x(\sigma_1) & \text{když } t = a\,, \\ x(\sigma_j) & \text{když } t \in (\sigma_{j-1}, \sigma_j]\,. \end{cases}$$

Snadno ověříme, že $|x(t) - x_{\boldsymbol{\sigma}}(t)| < \varepsilon$ pro každé $t \in [a,b]$ neboli $\|x - x_{\boldsymbol{\sigma}}\| < \varepsilon$. Dále,

$$x_{\boldsymbol{\sigma}}(t) = x(\sigma_1)\,\chi_{[a]}(t) + \sum_{j=2}^{m} x(\sigma_j)\,\chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j]}(t) \quad \text{pro } t \in [a,b]\,.$$

Odtud, vzhledem k definici (7.5), dostaneme

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Phi}(x_{\boldsymbol{\sigma}}) &= x(\sigma_1)\,\widetilde{\Phi}(\chi_{[a,\sigma_1]}) + \sum_{j=2}^{m} x(\sigma_j)\,\big[\widetilde{\Phi}(\chi_{[a,\sigma_j]}) - \widetilde{\Phi}(\chi_{[a,\sigma_{j-1}]})\big] \\
&= x(\sigma_1)\,\big[p\,(\sigma-1) - p\,(a)\big] + \sum_{j=2}^{m} x(\sigma_j)\,\big[p\,(\sigma_j) - p\,(\sigma_{j-1})\big] \\
&= \sum_{j=1}^{m} x(\sigma_j)\,\big[p\,(\sigma_j) - p\,(\sigma_{j-1})\big] = S_{x\Delta p}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\sigma}})\,,
\end{aligned}$$

kde $\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\sigma}} = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)$. Protože existuje integrál $(\delta)\displaystyle\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p$, můžeme zvolit $\boldsymbol{\rho} \in \mathscr{D}[a,b]$ a $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\rho}}$ tak, aby platilo

$$\Big|\widetilde{\Phi}(x_{\boldsymbol{\rho}}) - (\delta)\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p\Big| = \Big|S_{x\Delta p}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) - (\delta)\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p\Big| < \varepsilon\,.$$

Protože máme také $\|x - x_{\boldsymbol{\rho}}\| < \varepsilon$, dostáváme

$$\begin{aligned}
\Big|\Phi(x) - (\delta)\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p\Big| &= \Big|\widetilde{\Phi}(x) - (\delta)\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p\Big| \\
&\le \Big|\widetilde{\Phi}(x) - \widetilde{\Phi}(x_{\boldsymbol{\rho}})\Big| + \Big|\widetilde{\Phi}(x_{\boldsymbol{\rho}}) - (\delta)\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p\Big| \\
&< \|\widetilde{\Phi}\|_{\mathbb{X}^*}\|x - x_{\boldsymbol{\rho}}\| + \varepsilon < \big(\|\Phi\|_{\mathbb{Y}^*} + 1\big)\,\varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že $\varepsilon > 0$ může být libovolně malé, znamená to, že platí

$$\Phi(x) = \Phi_p(x) = (\delta)\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p \quad \text{pro } x \in \mathbb{C}[a,b]\,.$$

Konečně, podle (7.4) a (7.6) je $\|\Phi\|_{(\mathbb{C}[a,b])^*} = \operatorname{var}_a^b p$. □

Jak ukazuje následující věta, není přiřazení $\Phi \in (\mathbb{C}[a,b])^* \;\to\; p \in \mathbb{BV}[a,b]$ určeno vztahem (7.3) jednoznačně.

7.5. Lemma. *Nechť* $g \in \mathbb{BV}[a,b]$. *Potom platí*

$$(\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = 0 \quad \textit{pro každou funkci } f \in \mathbb{C}[a,b] \tag{7.7}$$

tehdy a jen tehdy, když existuje nejvýše spočetná množina $W \subset (a,b)$ *taková, že*

$$g(t) = g(a) \textit{ pro } t \in [a,b] \setminus W\,. \tag{7.8}$$

D ů k a z . a) Předpokládejme, že platí (7.8). Položme $g^{\mathrm{C}}(t) = g(a)$ pro $t \in [a,b]$ a $g^{\mathrm{B}} = g - g^{\mathrm{C}}$. Potom $g^{\mathrm{B}}(t) \neq 0$ právě tehdy, když $t \in W$. (g^{C} je spojitá část funkce g a g^{B} je skoková část g.)

Nechť f je libovolná funkce spojitá na $[a,b]$. Potom zřejmě

$$(\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g^{\mathrm{C}} = 0. \tag{7.9}$$

Ukážeme, že platí také

$$(\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g^{\mathrm{B}} = 0\,. \tag{7.10}$$

Je-li $W = \emptyset$, pak (7.10) evidentně platí. Nechť W je jednobodová množina, tj. $W = \{w\}$, kde $w \in (a,b)$. Buď dáno $\varepsilon > 0$ a nechť $\delta > 0$ je takové, že

$$\Big(t, s \in [a,b] \ \text{ a } \ |t-s| < \delta\Big) \implies |x(t) - x(s)| < \varepsilon\,.$$

Pro libovolné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a,b]$ takové, že $|\boldsymbol{\sigma}| < \delta$, pak máme

$$|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})| = \begin{cases} 0 & \text{když } w \notin \boldsymbol{\sigma}\,, \\ \big|f(\xi_j) - f(\xi_{j+1})\big|\,|g(w)| < \varepsilon\,\|g\| & \text{když } w = \sigma_j\,. \end{cases}$$

Je-li W jednobodová množina, pak (7.10) platí. Snadno si rozmyslíme, že odtud plyne, že (7.10) platí i v případě, že množina W je konečná.

Předpokládejme nyní, že W je spočetná, $W = \{w_k\}$. Podle věty 2.24 je

$$\sum_{k=1}^{\infty} |g^{\mathrm{B}}(w_k)| = \sum_{k=1}^{\infty} \big(|\Delta^- g^{\mathrm{B}}(w_k)| + |\Delta^+ g^{\mathrm{B}}(w_k)|\big) < \infty\,.$$

Mějme dáno $\varepsilon > 0$. Potom existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |g^{\mathrm{B}}(w_k)| < \varepsilon\,. \tag{7.11}$$

Rozložme funkci g^{B} na součet $g^{\mathrm{B}} = h + \widetilde{h}$, kde

$$h(t) = \begin{cases} g^{\mathrm{B}}(t) & \text{když } t \in \{w_1, w_2, \dots, w_N\}, \\ 0 & \text{když } t \in [a,b] \setminus \{w_1, w_2, \dots, w_N\} \end{cases}$$

a

$$\widetilde{h}(t) = \begin{cases} g^{\mathrm{B}}(t) & \text{když } t \in \{w_k : k \geq N+1\}, \\ 0 & \text{když } t \in [a,b] \setminus \{w_k : k \geq N+1\}. \end{cases}$$

Podle předchozí části je

$$(\delta)\int_a^b f \,\mathrm{d}\, h = 0\,. \tag{7.12}$$

Na druhou stranu, pro každé značené dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a,b]$ máme podle (7.11)

$$\begin{aligned} \big|S_{f\Delta\widetilde{h}}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\big| &= \Big|\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} f(\xi_j)\,[\widetilde{h}(\sigma_j) - \widetilde{h}(\sigma_{j-1})]\Big| \\ &\leq 2\,\|f\| \sum_{j=N+1}^{\infty} |g^{\mathrm{B}}(\sigma_j)| < 2\,\|f\|\,\varepsilon\,. \end{aligned}$$

Odtud, vzhledem k (7.9) a (7.11), plyne, že platí (7.10) a (7.7).

b) Nechť platí (7.7). Položme $f(t) = (\delta)\int_t^b (g(s) - g(a))\,\mathrm{d}\,s$ pro $t \in [a,b]$. Potom $f \in \mathbb{C}[a,b]$ a podle věty o integraci per-partes (věta 5.47) a věty o substituci (věta 5.42) je

$$\begin{aligned} 0 = (\delta)\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g &= f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - (\delta)\int_a^b g \,\mathrm{d}\, f \\ &= -f(a)\,g(a) + (\delta)\int_a^b g(t)\,\big(g(t) - g(a)\big)\,\mathrm{d}\,t = (\delta)\int_a^b \big(g(t) - g(a)\big)^2\,\mathrm{d}\,t \end{aligned}$$

Kdyby bylo $g(t_0) \neq g(a)$ v nějakém bodě t_0 spojitosti funkce g, muselo by existovat $\Delta > 0$ takové, že $\big(g(t) - g(a)\big)^2 > 0$ pro $t \in (t_0 - \Delta, t_0 + \Delta)$. Potom bychom ovšem měli také

$$(\delta)\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g = (\delta)\int_a^b \big(g(t) - g(a)\big)^2\,\mathrm{d}\,t \geq (\delta)\int_{t_0-\Delta}^{t_0-\Delta} \big(g(t) - g(a)\big)^2\,\mathrm{d}\,t > 0\,,$$

což je ve sporu s předpokladem (7.7). Platí tedy (7.8). □

7.6. Poznámka. Jestliže $f \in \mathbb{C}[a,b]$, pak podle Lemmatu 7.5 integrál $(\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ se nezmění, změníme-li hodnoty $g(t)$ v nejvýše spočetně mnoha bodech $t \in (a,b)$. Speciálně, nahradíme-li funkci g funkcí

$$\widetilde{g}(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t = a\,, \\ g(t+) - g(a) & \text{pro } t \in (a,b)\,, \\ g(b) - g(a) & \text{pro } t = b\,, \end{cases}$$

bude platit

$$(\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = (\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,\widetilde{g} \quad \text{pro každé } f \in \mathbb{C}[a,b]\,.$$

Odtud okamžitě plyne, že pro každý spojitý lineární funkcionál Φ na prostoru $\mathbb{C}[a,b]$ existuje právě jedna funkce $p \in \mathbb{BV}[a,b]$ taková, že

$$\left.\begin{aligned} & p\,(a) = 0,\ \ p\,(t+) = p\,(t) \ \text{ pro } \ t \in (a,b) \\ \text{a} \quad & \\ & \Phi(x) = (\delta)\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{C}[a,b]\,. \end{aligned}\right\} \tag{7.13}$$

Funkce $p \in \mathbb{BV}[a,b]$, které jsou zprava spojité na (a,b) a takové, že $p\,(a) = 0$, se nazývají *normalizované funkce s konečnou variací* a tvoří uzavřený podprostor v $\mathbb{BV}[a,b]$, který budeme značit $\mathbb{NBV}[a,b]$. Prostory $(\mathbb{C}[a,b])^*$ a $\mathbb{NBV}[a,b]$ jsou podle věty 7.4 a lemmatu 7.5 isomorfní, tj. zobrazení

$$\Phi \in \mathbb{X}^* \to p \in \mathbb{NBV}[a,b] \tag{7.14}$$

je vzájemně jednoznačné. To by zřejmě neplatilo, kdybychom $\mathbb{NBV}[a,b]$ nahradili prostorem $\mathbb{BV}[a,b]$ všech funkcí s konečnou variací na $[a,b]$. Na druhou stranu, $\mathbb{NBV}[a,b]$ lze nahradit např. prostorem funkcí s konečnou variací na $[a,b]$, které jsou spojité zleva na (a,b) a anulují se v nějakém pevně daném bodě $c \in [a,b]$.

Z následujícího lemmatu vyplyne, že je-li $\Phi \in (\mathbb{C}[a,b])^*$ a $p \in \mathbb{NBV}[a,b]$ je určeno vztahem (7.14), pak $\|\Phi\|_{(\mathbb{C}[a,b])^*} = \|p\|_{\mathbb{BV}}$, tj. prostory $(\mathbb{C}[a,b])^*$ a $\mathbb{NBV}[a,b]$ jsou isometricky isomorfní.

7.7. Lemma. *Jestliže* $p \in \mathbb{NBV}[a,b]$ *a* $\Phi(x) = (\delta)\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p$ *pro* $x \in \mathbb{C}[a,b]$, *pak* $\|\Phi\|_{(\mathbb{C}[a,b])^*} = \|p\|_{\mathbb{BV}} = \operatorname{var}_a^b p$.

D ů k a z . Podle věty 5.50 a lemmatu 5.9 platí $\Big|(\delta)\displaystyle\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p\Big| \le \big(\mathrm{var}_a^b\, p\big)\,\|x\|$ neboli

$$\|\Phi\|_{(\mathbb{C}[a,b])^*} \le \|p\|_{\mathbb{BV}}. \tag{7.15}$$

Dokážeme, že existuje funkce $\widetilde{x} \in \mathbb{C}[a,b]$ taková, že

$$\|\widetilde{x}\| = 1 \quad \text{a} \quad (\delta)\int_a^b \widetilde{x}\,\mathrm{d}\,p = \mathrm{var}_a^b\, p\,. \tag{7.16}$$

Buď dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Zvolme dělení $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$ tak, aby bylo

$$V(p,\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}) > \mathrm{var}_a^b\, p - \varepsilon \tag{7.17}$$

pro každé jeho zjemnění $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}$. Položme $m = \nu(\boldsymbol{\sigma})$. Vzhledem ke spojitosti funkce p na (a,b) zprava můžeme pro každé $j = 1,2,\dots,m$ najít bod $t_j \in (\sigma_j,\sigma_{j+1})$ takový, že

$$|p\,(t_j) - p\,(\sigma_j)| < \frac{\varepsilon}{m}\,. \tag{7.18}$$

Položme

$$\widetilde{x}(t) = \begin{cases} \mathrm{sign}\,\big(p\,(\sigma_1) - p\,(a)\big) & \text{když } t \in [a,\sigma_1] \\ \mathrm{sign}\,\big(p\,(\sigma_{j+1}) - p\,(t_j)\big) & \text{když } t \in [t_j,\sigma_{j+1}],\ j \in \{1,2,\dots,m\}\,, \end{cases}$$

a dodefinujme funkci $\widetilde{x}$ na intervalech $[t_j,\sigma_{j+1}]$ lineárně a tak, aby byla spojitá na $[a,b]$. Zřejmě je $\|\widetilde{x}\| = 1$. Navíc

$$(\delta)\int_a^b \widetilde{x}\,\mathrm{d}\,p = \big|p\,(\sigma_1) - p\,(a)\big| + \sum_{j=1}^{m} \big|p\,(\sigma_{j+1}) - p\,(t_j)\big| + \sum_{j=1}^{m-1} (\delta)\int_{\sigma_j}^{t_j} \widetilde{x}\,\mathrm{d}\,p$$

Protože je $|\widetilde{x}(t)| \le 1$ pro $t \in [a,b]$, plyne odtud podle (7.18), že

$$\begin{aligned} \Big|(\delta)\int_a^b \widetilde{x}\,\mathrm{d}\,p\Big| &\ge \big|p\,(\sigma_1) - p\,(a)\big| + \sum_{j=1}^{m} \big|p\,(\sigma_{j+1}) - p\,(t_j)\big| - \sum_{j=1}^{m-1} \big|p\,(t_j) - p\,(\sigma_j)\big| \\ &= V(p,\boldsymbol{\rho}) - 2\sum_{j=1}^{m-1} \big|p\,(t_j) - p\,(\sigma_j)\big| > V(p,\boldsymbol{\rho}) - 2\,\varepsilon\,, \end{aligned}$$

kde $\boldsymbol{\rho} = \{a, t_1, \sigma_1, t_2, \sigma_2\ \dots, \sigma_{m-1}, t_m, b\}$. Podle (7.17) dostáváme

$$\Big|(\delta)\int_a^b \widetilde{x}\,\mathrm{d}\,p\Big| > V(p,\boldsymbol{\rho}) - 2\,\varepsilon > \mathrm{var}_a^b\ p - 3\,\varepsilon\,.$$

Protože ε může být libovolné kladné číslo, znamená to, že platí (7.16) a tudíž $\sup_{\|x\|\le 1} |\Phi(x)| \ge \mathrm{var}_a^b\ p$. Odtud a z (7.15) plyne tvrzení lemmatu. □

7.8. Věta. *Zobrazení* $\Phi \in (\mathbb{C}[a,b])^* \to p \in \mathbb{NBV}[a,b]$, *kde* p *je určeno vztahem* (7.13)*, je isometrický isomorfismus.*

7.9. Poznámka. Můžeme tedy ztotožnit $(\mathbb{C}[a,b])^*$ s prostorem $\mathbb{NBV}[a,b]$.

7.10. Cvičení. Dokažte, že platí :

Pro každý spojitý lineární funkcionál Φ *na prostoru* $\mathbb{C}[a,b]$ *existuje právě jedna funkce* $p \in \mathbb{BV}[a,b]$ *taková, že*

$$p(b) = 0,\ p(t-) = p(t) \ \textit{pro}\ t \in (a,b)$$

a

$$\Phi(x) = (\delta)\int_a^b x \,\mathrm{d}\,p \quad \textit{pro každé}\ x \in \mathbb{C}[a,b]\,.$$

Ve větě 7.8 *lze nahradit prostor* $\mathbb{NBV}[a,b]$ *prostorem funkcí zleva spojitých na* (a,b) *a takových, že* $p(b) = 0$.

7.3 Spojité lineární funkcionály na prostorech integrovatelných resp. absolutně spojitých funkcí

Další dobře známé representace spojitých lineárních prostorů využívají Lebesgueova integrálu :

Pro $\alpha \in [1,\infty)$ označme symbolem $\mathbb{L}^\alpha[a,b]$ prostor funkcí x měřitelných na $[a,b]$ a takových, že $\displaystyle\int_a^b |x|^\alpha\,\mathrm{d}t < \infty$, přičemž norma na $\mathbb{L}^\alpha[a,b]$ je definována předpisem

$$\|x\|_\alpha = \left(\int_a^b |x|^\alpha\,\mathrm{d}t\right)^{1/\alpha} \qquad \text{pro}\ x \in \mathbb{L}^\alpha[a,b]$$

a rovnost $x = y$ pro $x, y \in \mathbb{L}^\alpha[a,b]$ znamená, že $x(t) = y(t)$ pro s.v. $t \in [a,b]$. Jestliže položíme

$$\alpha^* = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha-1} & \text{jestliže}\ \alpha > 1\,,\\ \infty & \text{jestliže}\ \alpha = 1\,,\end{cases}$$

pak obecný tvar spojitého lineárního funkcionálu na $\mathbb{L}^\alpha[a,b]$ je dán předpisem

$$\Phi \in (\mathbb{L}^\alpha[a,b])^* \iff \text{existuje}\ p \in \mathbb{L}^{\alpha^*}[a,b], \quad \text{takové, že}$$
$$\Phi(x) = \int_a^b p\,x\,\mathrm{d}t \quad \text{pro}\ x \in \mathbb{L}^\alpha[a,b]\,,$$

kde $\mathbb{L}^\infty[a,b]$ je prostor funkcí esenciálně (v podstatě) omezených na $[a,b]$, tj. funkcí definovaných a měřitelných na $[a,b]$ $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ a takových, že $\sup\operatorname{ess}|f|<\infty$, kde $\sup\operatorname{ess}|f|$ je infimum množiny všech $A\in(0,\infty)$ takových, že množina $\{x\in[a,b]:|x(t)>A\}$ má nulovou míru.

Na prostoru $\mathbb{AC}[a,b]$ funkcí absolutně spojitých na intervalu $[a,b]$ definujeme normu předpisem

$$\|f\|_{\mathbb{AC}}=|f(a)|+\|f'\|_1 \quad \text{pro } f\in\mathbb{AC}[a,b]$$

a $\mathbb{AC}[a,b]$ je pak Banachův prostor. Podle věty 3.17 představují zobrazení

$$f\in\mathbb{AC}[a,b]\to(f(a),f')\in\mathbb{R}\times\mathbb{L}^1[a,b]$$

a

$$(c,g)\in\mathbb{R}\times\mathbb{L}^1[a,b]\to f(x):=\,c+\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\in\mathbb{AC}[a,b]$$

vzájemně jednoznačný vztah mezi $\mathbb{AC}[a,b]$ a $\mathbb{R}\times\mathbb{L}^1[a,b]$. Lze ukázat, že obecný spojitý lineární funkcionál na prostoru $\mathbb{AC}[a,b]$ je dán předpisem

$$\Phi\in(\mathbb{AC}[a,b])^* \iff \text{existují } q\in\mathbb{R} \text{ a } p\in\mathbb{L}^\infty[a,b], \quad \text{takové, že}$$
$$\Phi(x)=q\,f(a)+\int_a^b p\,f'\,\mathrm{d}t \quad \text{pro } x\in\mathbb{AC}[a,b]\,.$$

Důkazy výše uvedených tvrzení a další podrobnosti lze nalézti ve většině učebnic funkcionální analýzy. Všeobecně dostupná je také on-line verse plzeňských skript [3].

7.4 Spojité lineární funkcionály na prostorech regulovaných funkcí

Našim cílem je nyní odvození obecného tvaru spojitých lineárních funkcionálů na některých podprostorech prostoru $\mathbb{G}[a,b]$. Pro začátek si připomeňme, že podle Věty 6.26 je výraz

$$\Phi_\eta(x)=q\,x(a)+\int_a^b p\,\mathrm{d}[x] \tag{7.19}$$

definován pro každou funkci $x\in\mathbb{G}[a,b]$ a každý pár $\eta=(p,q)\in\mathbb{BV}[a,b]\times\mathbb{R}$. Navíc, pro každé $\eta\in\mathbb{BV}[a,b]\times\mathbb{R}$, předpis ((7.19)) definuje ohraničený (a tedy spojitý) lineární funkcionál na $\mathbb{G}[a,b]$.

Snadno ověříme, že předpisem

$$\eta = (p,q) \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R} \to \|\eta\|_{\mathbb{BV}\times\mathbb{R}} = |q| + \|p\|_{\mathbb{BV}}$$

je definována norma na prostoru $\mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ a $\mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ je Banachův prostor vzhledem k této normě. Z formulí uvedených v příkladech 6.15 (viz též příklady 6.41 resp. cvičení 6.42) také snadno odvodíme následující tvrzení.

7.11. Lemma.

(i) *Pro libovolnou dvojici* $\eta = (p,q) \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ *platí*

$$\left.\begin{aligned} \Phi_\eta(1) &= q\,, \\ \Phi_\eta(\chi_{(\tau,b]}) &= p\,(\tau) \qquad \textit{když}\ \ \tau \in [a,b)\,, \\ \Phi_\eta(\chi_{[\tau]}) &= 0 \qquad\quad\ \ \textit{když}\ \ \tau \in (a,b)\,, \\ \Phi_\eta(\chi_{[b]}) &= p\,(b)\,. \end{aligned}\right\} \tag{7.20}$$

(ii) *Pro libovolnou funkci* $x \in \mathbb{G}[a,b]$ *platí*

$$\left.\begin{aligned} \Phi_\eta(x) &= x(a) \qquad \textit{když}\ \ p \equiv 0 \ \textit{na}\ [a,b],\ q=1\,, \\ \Phi_\eta(x) &= x(b) \qquad \textit{když}\ \ p \equiv 1 \ \textit{na}\ [a,b],\ q=1\,, \\ \Phi_\eta(x) &= x(\tau-) \quad\ \textit{když}\ \ p = \chi_{[a,\tau)} \ \textit{na}\ [a,b],\ \tau \in (a,b],\ q=1\,, \\ \Phi_\eta(x) &= x(\tau+) \quad\ \textit{když}\ \ p = \chi_{[a,\tau]} \ \textit{na}\ [a,b],\ \tau \in [a,b),\ q=1\,. \end{aligned}\right\} \tag{7.21}$$

□

Přímým důsledkem vztahů ((7.20)), ((7.21)) a lemmatu 4.14 je následující tvrzení.

7.12. Lemma.

(i) *Jestliže* $\eta = (p,q) \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ *a*

$$\Phi_\eta(x) = 0 \ \ \textit{pro každé}\ x \in \mathrm{Lin}\Big(1, \chi_{(\tau,b]}, \tau \in [a,b), \chi_{[b]}\Big)\,,$$

pak $p\,(t) \equiv 0$ *na* $[a,b]$ *a* $q = 0$.

(ii) *Jestliže* $x \in \mathbb{G}[a,b]$ *a*

$$\Phi_\eta(x) = 0 \ \ \textit{pro všechny dvojice}\ \ \eta = (p,q) \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}\,,$$

pak

$$x(a) = x(a+) = x(\tau-) = x(\tau+) = x(b-) = x(b) \tag{7.22}$$

platí pro $\tau \in (a,b)$.

□

7.13. Poznámka. Všimněme si, že vzhledem k třetímu vztahu v (7.20), můžeme v tvrzení (i) předešlého lemmatu nahradit množinu $\mathrm{Lin}\Big(1,\ \chi_{(\tau,b]},\tau\in[a,b),\ \chi_{[b]}\Big)$ množinami

$$\mathrm{Lin}\Big(1,\ \chi_{[\tau,b]},\tau\in[a,b),\ \chi_{[b]}\Big)\quad\text{resp.}\quad\mathrm{Lin}\Big(1,\ \tfrac{1}{2}\,\chi_{[\tau]}+\chi_{(\tau,b]},\tau\in[a,b),\ \chi_{[b]}\Big)\,.$$

Odtud okamžitě plyne též následující tvrzení, kde symboly $\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b],\ \mathbb{G}_{\mathrm{R}}[a,b]$ a $\mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b]$ byly definovány v (4.3).

7.14. Věta. *Každý z následujících párů prostorů*

$$(\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b],\ \mathbb{BV}[a,b]\times\mathbb{R}),\ (\mathbb{G}_{reg}[a,b],\ \mathbb{BV}[a,b]\times\mathbb{R}),\ (\mathbb{G}_{\mathrm{R}}[a,b],\ \mathbb{BV}[a,b]\times\mathbb{R})$$

tvoří duální pár vzhledem k bilineární formě

$$x\in X,\ \eta\in\mathbb{BV}[a,b]\times\mathbb{R}\to\Phi_\eta(x)\,.$$

□

Na druhou stranu, máme také

7.15. Lemma. *Jestliže Φ je lineární ohraničený funkcionál na $\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$ a*

$$p\,(t)=\begin{cases}\Phi(\chi_{(t,b]}) & \textit{když}\ \ t\in[a,b)\,,\\[4pt] \Phi(\chi_{[b]}) & \textit{když}\ \ t=b,\end{cases}\tag{7.23}$$

pak $p\in\mathbb{BV}[a,b]$ a

$$\left.\begin{aligned}&|p\,(a)|+|p\,(b)|+\mathrm{var}_a^b\,p\le 2\,\|\Phi\|_{\mathbb{G}^*_{\mathrm{L}}[a,b]},\\ &\textit{kde}\ \ \|\Phi\|_{\mathbb{G}^*_{\mathrm{L}}[a,b]}=\sup\{|\Phi(x)|:x\in\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b],\ \|x\|\le 1\,\}\,.\end{aligned}\right\}\tag{7.24}$$

D ů k a z . Pro libovolné dělení $\boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_0,\sigma_1,\dots,\sigma_m\}$ intervalu $[a,b]$ a libovolný vektor $(c_0,c_1,\dots,c_m,c_{m+1})\in\mathbb{R}^{m+2}$ platí

$$\begin{aligned}&\Big|c_0\,p\,(a)+c_{m+1}\,p\,(b)+\sum_{j=1}^m c_j\,[p\,(\sigma_j)-p\,(\sigma_{j-1})]\Big|\\ &\quad=\Big|\Phi\Big(c_0\,\chi_{(a,b]}+c_{m+1}\,\chi_{[b]}-\sum_{j=1}^{m-1}c_j\,\chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j\,]}+c_m\,\chi_{(\sigma_{m-1},b)}\Big)\Big|=|\Phi(h)|\,,\end{aligned}$$

kde

$$h = c_0\,\chi_{(a,b]} + c_{m+1}\,\chi_{[b]} - \sum_{j=1}^{m-1} c_j\,\chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j\,]} + c_m\,\chi_{(\sigma_{m-1},b)}\,.$$

Snadno ověříme, že bude-li $|c_j| \le 1$ pro $j = 0, 1, \ldots, m{+}1$, pak bude $\|h\| \le 2$. Položíme-li tedy

$$c_0 = \operatorname{sign} p\,(a),\ c_{m+1} = \operatorname{sign} p\,(b),\ c_j = \operatorname{sign}(p\,(\sigma_j) - p\,(\sigma_{j-1}))$$

pro $j = 1, 2, \ldots, m$, získáme vztah

$$|p\,(a)| + |p\,(b)| + V(p,\boldsymbol{\sigma}) \le 2\,\|\Phi\|_{\mathbb{G}^*_{\mathrm{L}}[a,b]} \quad \text{pro každé } \boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]\,.$$

Odtud už plyne, že platí i ((7.24)). □

Analogicky předchozímu lemmatu máme také

7.16. Lemma. *Nechť* Φ *je libovolný lineární ohraničený funkcionál na* $\mathbb{G}_{reg}[a,b]$. *Položme*

$$p\,(t) = \begin{cases} \Phi(\chi_{(a,b]}) & \textit{když } t = a\,, \\ \Phi(\tfrac{1}{2}\chi_{[t]} + \chi_{(t,b]}) & \textit{když } t \in (a,b)\,, \\ \Phi(\chi_{[b]}) & \textit{když } t = b\,. \end{cases} \tag{7.25}$$

Potom $\operatorname{var}_a^b p \le \sup\{|\Phi(x)| : x \in \mathbb{G}_{reg}[a,b],\ \|x\| \le 1\} < \infty$, *tj.* $p \in \mathbb{BV}[a,b]$).

D ů k a z . Nechť $\Phi \in \mathbb{G}^*_{\mathrm{reg}}[a,b]$, $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ je dělení intervalu $[a,b]$ a nechť reálná čísla c_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, jsou taková, že je $|c_j| \le 1$ pro všechna $j = 1, 2, \ldots, m$. Potom

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{m} c_j\,[p\,(\sigma_j) - p\,(\sigma_{j-1})] \\ &\quad = c_1\left[\Phi(\tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_1]} + \chi_{(\sigma_1,b]}) - \Phi(\chi_{(a,b]})\right] \\ &\qquad + \sum_{j=2}^{m-1} c_j\left[\Phi(\tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_j\,]} + \chi_{(\sigma_j,b]}) - \Phi(\tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_{j-1}]} + \chi_{(\sigma_{j-1},b]})\right] \\ &\qquad + c_m\left[\Phi(\chi_{[b]}) - \Phi(\tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_{m-1}]} + \chi_{(\sigma_{m-1},b]})\right] = \Phi(h), \end{aligned}\right\} \tag{7.26}$$

kde

$$\begin{aligned}
h = \;& c_1\Big[\tfrac12\chi_{[\sigma_1]}+\chi_{(\sigma_1,b]}-\chi_{(a,b]}\Big]+c_m\Big[\chi_{[b]}-\tfrac12\chi_{[\sigma_{m-1}]}-\chi_{(\sigma_{m-1},b]}\Big]\\
&\quad+\sum_{j=2}^{m-1}c_j\Big[\tfrac12\chi_{[\sigma_j]}+\chi_{(\sigma_j,b]}-\tfrac12\chi_{[\sigma_{j-1}]}-\chi_{(\sigma_{j-1},b]}\Big]\\
=\;& c_1\Big[\tfrac12\chi_{[\sigma_1]}-\chi_{(a,\sigma_1]}\Big]-c_m\Big[\tfrac12\chi_{[\sigma_{m-1}]}+\chi_{(\sigma_{m-1},b)}\Big]\\
&\quad+\sum_{j=2}^{m-1}c_j\Big[\tfrac12\chi_{[\sigma_j]}-\chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j]}-\tfrac12\chi_{[\sigma_{j-1}]}\Big]\\
=\;& -c_1\Big[\tfrac12\chi_{[\sigma_1]}+\chi_{(a,\sigma_1)}\Big]-c_m\Big[\tfrac12\chi_{[\sigma_{m-1}]}+\chi_{(\sigma_{m-1},b)}\Big]\\
&\quad-\tfrac12\sum_{j=2}^{m-1}c_j\,\chi_{[\sigma_j]}-\tfrac12\sum_{j=2}^{m-1}c_j\,\chi_{[\sigma_{j-1}]}-\sum_{j=2}^{m-1}c_j\,\chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j)}\\
=\;& -\tfrac12\sum_{j=1}^{m-1}c_j\,\chi_{[\sigma_j]}-\tfrac12\sum_{j=2}^{m}c_j\,\chi_{[\sigma_{j-1}]}-\sum_{j=1}^{m}c_j\,\chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j)}\\
=\;& -\sum_{j=1}^{m-1}\tfrac{c_j+c_{j+1}}{2}\chi_{[\sigma_j]}-\sum_{j=1}^{m}c_j\,\chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j)}\\
=\;& -c_1\,\chi_{(a,\sigma_1)}-\sum_{j=2}^{m-1}\Big(\tfrac{c_j+c_{j+1}}{2}\,\chi_{[\sigma_j]}+c_j\,\chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j)}\Big)-c_m\,\chi_{(\sigma_{m-1},b)}\,.
\end{aligned}$$

Z tohoto vyjádření snadno nahlédneme, že

$$h(\sigma_j-)=-c_j,\;\; h(\sigma_j+)=-c_{j+1},\; h(\sigma_j)=-\tfrac12(c_j+c_{j+1})\;\;\text{pro } j=1,2,\dots,m$$

čili $h\in\mathbb{S}[a,b]\cap\mathbb{G}_{\text{reg}}[a,b]$ a $|h(t)|\le 1$ pro všechna $t\in[a,b]$. Vzhledem k (7.26) tedy dostáváme, že nerovnost

$$\begin{aligned}
\sup\Big\{\Big|\sum_{j=1}^{m}c_j\,\big[p\,(\sigma_j)-p\,(\sigma_{j-1})\big]\Big|: |c_j|\le 1,\; j=1,2,\dots,m\Big\}&\\
\le \sup\{|\Phi(x)|: x\in\mathbb{G}_{\text{reg}}[a,b],\, \|x\|\le 1\}&
\end{aligned}$$

platí pro každé dělení $\boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_0,\sigma_1,\dots,\sigma_m\}$ intervalu $[a,b]$. Zvolíme-li nyní

$$c_j=\operatorname{sign}\big[p\,(\sigma_j)-p\,(\sigma_{j-1})\big]\quad\text{pro } j=1,2,\dots,m\,,$$

zjistíme,že platí

$$V(p,\boldsymbol{\sigma})\le\sup\{|\Phi(x)|: x\in\mathbb{G}_{\text{reg}}[a,b],\,\|x\|\le 1\}<\infty\quad\text{pro každé }\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]\,,$$

tj. $\operatorname{var}_a^b p \leq \|\Phi\|_{\mathbb{G}^*_{\text{reg}}[a,b]} < \infty$. □

Prvním hlavním výsledkem této kapitoly je následující věta.

7.17 . Věta. Φ *je lineární ohraničený funkcionál na* $\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$ $(\Phi \in \mathbb{G}^*_{\mathrm{L}}[a,b])$ *právě tehdy, když existuje dvojice* $\eta = (p,q) \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ *taková, že*

$$\Phi(x) = q\,x(a) + \int_a^b p\,\mathrm{d}x \quad \textit{pro } x \in \mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]\,. \tag{7.27}$$

Navíc, zobrazení

$$\eta \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R} \to \Phi_\eta \in \mathbb{G}^*_{\mathrm{L}}[a,b] \tag{7.28}$$

je isomorfismus.

D ů k a z . Nechť Φ je spojitý lineární funkcionál na $\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$ a nechť Φ_η je funkcionál definovaný předpisem (7.19), kde $\eta = (p,q)$, $q = \Phi(1)$ a funkce p je definovaná v (7.23). Podle lemmatu 7.15 $\eta = (p,q) \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ a podle (7.20) a (7.23) máme

$$\begin{aligned} \Phi(1) &= q &&= \Phi_\eta(1)\,, \\ \Phi(\chi_{(\tau,b]}) &= p\,(\tau) &&= \Phi_\eta(\chi_{(\tau,b]}) \quad \text{pro } \tau \in [a,b)\,, \\ \Phi(\chi_{[b]}) &= p\,(b) &&= \Phi_\eta(\chi_{[b]})\,. \end{aligned}$$

Protože podle lemmatu 4.14 je každá funkce z $\mathbb{S}[a,b] \cap \mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$ lineární kombinací funkcí

$$1,\ \chi_{(\tau,b]},\ \tau \in [a,b),\ \chi_{[b]},$$

plyne odtud, že $\Phi(x) = \Phi_\eta(x)$ pro každé $x \in \mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b]$. Konečně, protože podle lemmatu 4.13 je množina $\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b]$ hustá v $\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$, plyne odtud, že platí

$$\Phi(x) = \Phi_\eta(x) \text{ pro každé } x \in \mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]\,.$$

Podle věty 7.14 je (7.28) vzájemně jednoznačné zobrazení $\mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ na $\mathbb{G}^*_{\mathrm{L}}[a,b]$. Dále, podle věty 6.26 máme

$$|\Phi_\eta(x)| \leq \big(|p\,(a)| + |p\,(b)| + \operatorname{var}_a^b p + |q|\big)\,\|x\| \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$$

a tudíž

$$\|\Phi_\eta\|_{\mathbb{G}^*_{\mathrm{L}}[a,b]} \leq |p\,(a)| + |p\,(b)| + \operatorname{var}_a^b p + |q| \leq 2\,\big(\|p\|_{\mathbb{BV}} + |q|\big) = 2\,\|\eta\|_{\mathbb{BV}\times\mathbb{R}}\,.$$

Na druhou stranu, podle ((7.25)) a podle lemmatu 7.15 je

$$|q| = |\Phi(1)| \le \|\Phi_\eta\|_{\mathbb{G}^*_{\mathrm{L}}[a,b]}$$

a

$$\|p\|_{\mathbb{BV}} \le \big(|p\,(a)| + |p\,(b)| + \mathrm{var}_a^b p\big) \le 2\,\|\Phi_\eta\|_{\mathbb{G}^*_{\mathrm{L}}[a,b]}.$$

Souhrnem máme

$$\tfrac{1}{2}\|\Phi_\eta\|_{\mathbb{G}^*_{\mathrm{L}}[a,b]} \le \|\eta\|_{\mathbb{BV}\times\mathbb{R}} \le 3\,\|\Phi_\eta\|_{\mathbb{G}^*_{\mathrm{L}}[a,b]},$$

čili, zobrazení

$$\eta \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R} \to \Phi_\eta \in \mathbb{G}^*_{\mathrm{L}}[a,b]$$

je isomorfismus. □

7.18. Věta. Φ *je lineární ohraničený funkcionál na* $\mathbb{G}_{reg}[a,b]$ $(\Phi \in \mathbb{G}^*_{reg}[a,b])$ *právě tehdy, když existuje dvojice* $\eta = (p,q) \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ *taková, že*

$$\Phi(x) = q\,x(a) + \int_a^b p\,\mathrm{d}x \quad \textit{pro} \;\; x \in \mathbb{G}_{reg}[a,b]\,. \tag{7.29}$$

Navíc, zobrazení

$$\eta \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R} \to \Phi_\eta \in \mathbb{G}^*_{reg}[a,b] \tag{7.30}$$

je isomorfismus.

D ů k a z . Předpokládejme, že $\Phi \in \mathbb{G}^*_{\mathrm{reg}}[a,b]$, Φ_η je funkcionál definovaný vztahem (7.19), kde $\eta = (p,q)$, $q = \Phi(1)$ a p je funkce definovaná vztahem (7.25). Podle lemmatu 7.16 je $\eta = (p,q) \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ a podle (7.20) a (7.25) máme

$$\begin{aligned}
\Phi(1) &= q &&= \Phi_\eta(1)\,,\\
\Phi(\tfrac{1}{2}\chi_{[\tau]} + \chi_{(\tau,b]}) &= p\,(\tau) &&= \Phi_\eta(\tfrac{1}{2}\chi_{[\tau]} + \chi_{(\tau,b]}) \quad \text{pro každé } \tau \in [a,b)\,,\\
\Phi(\chi_{[b]}) &= p\,(b) &&= \Phi_\eta(\chi_{[b]})\,.
\end{aligned}$$

Pomocí lemmatu 4.14 odtud odvodíme, že platí

$$\Phi(x) = \Phi_\eta(x) \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b].$$

Podle lemmatu 4.13 je ovšem množina $\mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b]$ hustá v $\mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b]$ a tudíž dostáváme konečně, že platí $\Phi(x) = \Phi_\eta(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b]$.

Podobně jako jsme dokázali analogickou nerovnost v závěru důkazu věty 7.17 dokázali bychom nyní, že platí také

$$\tfrac{1}{2}\|\Phi_\eta\|_{\mathbb{G}^*_{\mathrm{reg}}[a,b]} \le \|\eta\|_{\mathbb{BV}\times\mathbb{R}} \le 3\,\|\Phi_\eta\|_{\mathbb{G}^*_{\mathrm{reg}}[a,b]}\,.$$

□

7.19. Cvičení. Postupem použitým v důkazech vět 7.17 a 7.18 ukažte, že také platí

(i) Φ *je lineární ohraničený funkcionál na*

$$\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{L}}[a,b] = \{x \in \mathbb{G} : x(t-) = x(t) \textit{ pro } t \in (a,b]\},$$

(viz (4.2)) *právě tehdy, když existuje funkce* $p \in \mathbb{BV}[a,b]$ *taková, že*

$$\Phi(x) = p\,(b)\,x(b) - \int_a^b p\,\mathrm{d}[x] \quad \textit{pro} \;\; x \in \widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{L}}[a,b]\,.$$

(ii) Φ *je lineární ohraničený funkcionál na*

$$\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{R}}[a,b] = \{x \in \mathbb{G} : x(t+) = x(t) \textit{ pro } t \in [a,b)\},$$

(viz (4.2)) *právě tehdy, když existuje funkce* $p \in \mathbb{BV}[a,b]$ *taková, že*

$$\Phi(x) = p\,(a)\,x(a) + \int_a^b p\,\mathrm{d}[x] \quad \textit{pro} \;\; x \in \widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{R}}[a,b]\,.$$

7.5 Aplikace Stieltjesova integrálu v teorii distribucí

V tomto odstavci naznačíme možnosti použití KS – integrálu v teorii distribucí. Distribuce zde budeme chápat ve smyslu L. Schwartze. Připomeňme si nejprve několik základních pojmů a definic.

7.20. Definice. Množinu funkcí $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které mají pro každé $k \in N \cup \{0\}$ derivaci $\varphi^{(k)}$ k – tého řádu spojitou na $\mathbb{R}$ a takovou, že $\varphi^{(k)}(t) = 0$ pro $t \in \mathbb{R} \setminus (a,b)$ označíme symbolem $\mathfrak{D}[a,b]$. Funkcím z $\mathfrak{D}[a,b]$ říkáme *testovací funkce* na $[a,b]$.

Množina $\mathfrak{D}[a,b]$ je lineární prostor vzhledem k přirozeným operacím sčítání a násobení skalárem. Množina $\mathfrak{D}[a,b]$ se stane topologickým vektorovým prostorem, zavedeme-li na ní topologii, ve které posloupnost $\{\varphi_n\} \subset \mathfrak{D}[a,b]$ konverguje k $\varphi \in \mathfrak{D}[a,b]$ tehdy a jen tehdy, když

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n^{(k)} - \varphi^{(k)}\| = 0 \quad \text{pro každé } \; k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,.$$

Typickými příklady funkcí z prostoru $\mathfrak{D}[a,b]$ jsou funkce tvaru

$$\varphi_{c,d}(t) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{t-c} + \frac{1}{d-t}\right) & \text{pro } \; t \in (c,d)\,, \\ 0 & \text{pro } \; t \in \mathbb{R} \setminus (c,d)\,, \end{cases}$$

kde $[c,d]$ může být libovolný podinterval v (a,b).

7.21. Definice. Spojité lineární funkcionály na topologickém vektorovém prostoru $\mathfrak{D}[a,b]$ se nazývají *distribuce* na $[a,b]$. Množina všech distribucí na $[a,b]$ je tedy duálním prostorem k $\mathfrak{D}[a,b]$. Značíme ji symbolem $\mathfrak{D}^*[a,b]$.

Pro danou distribuci $f \in \mathfrak{D}^*[a,b]$ a testovací funkci $\varphi \in \mathfrak{D}[a,b]$, hodnotu funkcionálu f na φ značíme symbolem $\langle f, \varphi \rangle$.

7.22. Poznámka. Je-li $f \in \mathbb{L}^1[a,b]$, pak předpisem $\varphi \in \mathfrak{D}[a,b] \to \int_a^b f(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ je definována distribuce

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_a^b f(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

na $[a,b]$, kterou budeme značit také symbolem f. Říkáme, že distribuce f je určena funkcí f.

Nulový prvek prostoru $\mathfrak{D}^*[a,b]$ je určen libovolnou měřitelnou funkcí, která se anuluje s.v. na intervalu $[a,b]$. Speciálně, je-li $f \in \mathbb{G}[a,b]$, pak $f = 0 \in \mathfrak{D}^*[a,b]$ tehdy a jen tehdy, když $f(t-) = f(s+) = 0$ pro všechna $t \in (a,b]$ a $s \in [a,b)$. Tudíž, je-li $f \in \mathbb{G}_{\text{reg}}[a,b]$, pak $f = 0 \in \mathfrak{D}^*[a,b]$ tehdy a jen tehdy, když $f(t) = 0$ pro všechna $t \in [a,b]$. Pro libovolné distribuce $f, g \in \mathfrak{D}^*[a,b]$ rovnost $f = g$ znamená, že $f - g = 0 \in \mathfrak{D}^*[a,b]$. Z výše uvedeného plyne, že je-li $g \in \mathbb{L}^1[a,b]$, pak existuje nejvýše jedna funkce $f \in \mathbb{G}_{\text{reg}}[a,b]$ taková, že $f = g$ s.v. na $[a,b]$. Dále, pro reálné funkce $f,\ g : [a,b] \to \mathbb{R}$ platí rovnost $f = g$ ve smyslu $\mathfrak{D}^*[a,b]$ tehdy a jen tehdy, když $f = g$ s.v. na $[a,b]$.

7.23. Definice. Pro danou distribuci $f \in \mathfrak{D}^*[a,b]$, definujeme její (*distributivní*) *derivaci* f' předpisem

$$f' : \varphi \in \mathfrak{D}[a,b] \to \langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle\,.$$

Podobně, pro každé $k \in \mathbb{N}$,

$$f^{(k)} : \varphi \in \mathfrak{D}[a,b] \to \langle f^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle f, \varphi^{(k)} \rangle\,.$$

7.24. Poznámka. Distributivní derivace absolutně spojitých funkcí jsou určeny jejich klasickými derivacemi.

7.25. Poznámka. Definujme

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 0\,, \\ \frac{1}{2} & \text{pro } t = 0\,, \\ 1 & \text{pro } t > 0\,. \end{cases}$$

Nechť $\tau \in (a,b)$ a $h_\tau(t) = H(t-\tau)$ pro $t \in [a,b]$. Potom použitím věty 6.34 a s přihlédnutím k (6.10) a (6.14) dostaneme

$$\langle h'_\tau, \varphi\rangle = -\langle h_\tau, \varphi'\rangle = -\int_a^b h_\tau \,\mathrm{d}\,\varphi = \int_a^b \mathrm{d}\,h_\tau\,\varphi = \varphi(\tau)\,.$$

Funkce h_τ se nazývá *Heavisideova funkce* (se středem v bodě τ) a její distributivní derivace h'_τ se značí δ_τ a nazývá se *Diracova* δ*–distribuce* (se středem v bodě τ).

7.26. Věta. *Nechť* $f \in \mathfrak{D}^*[a,b]$. *Potom* f' *je nulová distribuce tehdy a jen tehdy, když existuje konstanta* $c \in \mathbb{R}$ *taková, že* $f(t) = c$ *pro s.v.* $t \in [a,b]$.

D ů k a z . Jestliže $f(t) = c$ pro s.v. $t \in [a,b]$ a $\varphi \in \mathfrak{D}[a,b]$, pak

$$\langle f', \varphi\rangle = -\langle c, \varphi'\rangle = -c\int_a^b \varphi'(s)\,\mathrm{d}s = -c\,(\varphi(b) - \varphi(a)) = 0\,.$$

Naopak, nechť $\langle f, \varphi'\rangle = 0$ pro každou $\varphi \in \mathfrak{D}[a,b]$. Nechť je dána libovolná testovací funkce $\rho \in \mathfrak{D}[a,b]$. Položme

$$\varphi(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_a^t \big(\rho(s) - a_0\,\Theta(s)\big)\,\mathrm{d}s & \text{pro } t \in [a,b]\,, \\ 0 & \text{pro } t \in \mathbb{R}\setminus[a,b]\,, \end{cases}$$

kde

$$a_0 = \int_a^b \rho(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{a} \quad \Theta(t) = \frac{\varphi_{a,b}(t)}{\displaystyle\int_a^b \varphi_{a,b}(s)\,\mathrm{d}s}\,.$$

Potom

$$\int_a^b \Theta(s)\,\mathrm{d}s = 1\,.$$

Odtud snadno plyne, že $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ a také, že $\varphi \in \mathfrak{D}[a,b]$. Dále,

$$\varphi'(t) = \rho(t) - a_0\,\Theta(t) \quad \text{pro } t \in [a,b]\,.$$

Tudíž

$$0 = \langle f, \varphi'\rangle = \langle f, \rho\rangle - \Big(\int_a^b \rho(s)\,\mathrm{d}s\Big)\,\langle f, \Theta\rangle\,.$$

To znamená, že pro každé $\rho \in \mathfrak{D}[a,b]$ platí

$$\langle f, \rho\rangle = \Big(\int_a^b \rho(s)\,\mathrm{d}s\Big)\,\langle f, \Theta\rangle = \int_a^b c\,\rho(s)\,\mathrm{d}s\,,$$

kde $c = \langle f, \Theta\rangle \in \mathbb{R}$ je konstanta. Tedy $f = c$ ve smyslu distribucí. □

7.27. Cvičení. Dokažte, že je-li $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pak $f^{(k)} = 0 \in \mathfrak{D}^*[a,b]$ tehdy a jen tehdy, když existují $c_0, c_1, \dots, c_{k-1} \in \mathbb{R}$ takové, že

$$f(t) = c_0 + c_1\, t + \cdots + c_{k-1}\, t^{k-1} \quad \text{pro s.v. } t \in [a,b].$$

Vážným problémem v teorii distribucí je jak definovat jejich součin. Následující dvě klasické definice se týkají jen speciálních typů distribucí.

7.28. Definice. (i) jestliže f, g a $f\,g \in \mathbb{L}^1[a,b]$, pak

$$\langle f\,g, \varphi\rangle = \int_a^b f\,g\,\varphi\,\mathrm{d}\,t\,.$$

(ii) jestliže $f \in \mathfrak{D}^*[a,b]$ a g má na $[a,b]$ spojité derivace libovolného řádu, pak

$$\langle f\,g, \varphi\rangle = \langle f, g\,\varphi\rangle\,.$$

Definice 7.28 zahrnuje součin $f\,g$, kde $f \in \mathbb{G}[a,b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a,b]$. Nevztahuje se ale např. na případy, které se objevují v následující definici.

7.29. Definice. Jestliže $f \in \mathbb{G}[a,b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a,b]$, pak definujeme

$$\langle f'\,g, \varphi\rangle = \int_a^b \varphi\,g\ \mathrm{d}\,f \tag{7.31}$$

a

$$\langle f\,g', \varphi\rangle = \int_a^b \varphi\,f\,\mathrm{d}\,g\,. \tag{7.32}$$

7.30. Lemma. *Nechť* $f \in \mathbb{G}[a,b]$ *a* $g \in \mathbb{BV}[a,b]$ *splňují*

$$\Delta^+ f(t)\,\Delta^+ g(t) = \Delta^- f(t)\,\Delta^- g(t) \quad \textit{pro každé } t \in (a,b), \tag{7.33}$$

Potom

$$f'\,g = F', \quad \textit{kde } F(t) = \int_a^t g\,\mathrm{d}\,f \ \ \textit{pro } t \in [a,b] \tag{7.34}$$

a

$$f\,g' = G', \quad \textit{kde } G(t) = \int_a^t f\,\mathrm{d}\,g \ \ \textit{pro } t \in [a,b]\,. \tag{7.35}$$

D ů k a z . Použitím věty o substituci (věta 6.44) a věty o integraci per-partes (věta 6.34) pro libovolné $\varphi \in \mathfrak{D}[a,b]$ dostaneme

$$\begin{aligned}\langle f'\,g,\varphi\rangle &= \int_a^b \mathrm{d}\Big[\int_a^t g\,\mathrm{d}f\Big]\,\varphi(t) = -\int_a^b\Big(\int_a^t g\,\mathrm{d}f\Big)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \langle\Big(\int_a^t g\,\mathrm{d}f\Big)',\varphi\rangle\,,\end{aligned}$$

t.j. platí (7.34). Vztah (7.35) se dokazuje analogicky. □

7.31. Důsledek. Jestliže funkce $f \in \mathbb{G}[a,b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a,b]$ splňují (7.33), pak

$$(f\,g)' = f\,g' + f'\,g.$$

D ů k a z . Podle definice 7.23, věty o integraci per-partes (viz věta 6.34) a lemmatu 7.30 dostáváme

$$\begin{aligned}\langle (f\,g)',\varphi\rangle &= -\langle f\,g,\varphi'\rangle \\ &= -\int_a^b f\,g\,\varphi'\,\mathrm{d}t = \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}\big[f(t)\,g(t) - f(a)\,g(a)\big] \\ &= \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}\Big[\int_a^t g\,\mathrm{d}f + \int_a^t f\,\mathrm{d}g\Big] = \int_a^b \varphi\,g\,\mathrm{d}f + \int_a^b \varphi\,f\,\mathrm{d}g \\ &= \langle f\,g',\varphi\rangle + \langle f'\,g,\varphi\rangle\,.\end{aligned}$$

□

7.32. Poznámka. Nechť $f \in \mathbb{G}[a,b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a,b]$. Podmínka (7.33) je pak zřejmě splněna např. v následujících případech :

(i) obě funkce jsou regulární,

(ii) alespoň jedna z nich je spojitá na (a,b),

(iii) jedna z nich zleva spojitá na (a,b) a druhá je zprava spojitá na (a,b).

7.33. Cvičení. Dokažte, že jestliže $\tau \in (a,b)$ a h_τ resp. δ_τ jsou Heavisideova funkce resp. Diracova distribuce se středem v τ, pak $h_\tau\,\delta_\tau = \frac{1}{2}\,\delta_\tau$. (Návod: Použijte cvičení 6.32.)

Kapitola 8

Zobecněné lineární diferenciální rovnice

8.1 Úvod

Všechny integrály v této kapitole jsou KS – integrály, jejichž definice je rozšířena ve smyslu odstavce 6.8 na maticové funkce (tj. funkce zobrazující interval $[a,b]$ do prostoru matic). Jak jsme již v odstavci 6.8 vysvětlili, všechny vlastnosti KS – integrálu i obou typů RS – integrálu, které jsme doposud dokázali pro skalární funkce platí i pro funkce vektorové či maticové, pokud se v příslušných formulích nezmění pořadí v jaké se tam maticové funkce objevují. V důkazech se tedy budeme pro potřebné vlastnosti funkcí a integrálů odvolávat na odpovídající tvrzení pro skalární funkce z kapitol 1 – 6.

Následující definice zavádí prostory vektorových resp. maticových funkcí, se kterými budeme v této kapitole pracovat.

8.1. Definice. (i) $\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ je Banachův prostor funkcí $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}^n$, které jsou regulované na $[a,b]$. Norma na $\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ je definována předpisem $\|f\| = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$ pro $f\in\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$, kde $|f(t)|$ je norma vektoru $f(t)$ v $\mathbb{R}^n$.

(ii) $\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ je Banachův prostor funkcí $F:[a,b]\to\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, které mají konečnou variací na $[a,b]$. Norma na $\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ je definována předpisem $\|F\|_{\mathbb{BV}} = |F(a)| + \operatorname{var}_a^b F$ pro $F\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$. kde $\operatorname{var}_a^b F$ se definuje jako v odstavci 6.8 a $|F(a)|$ je norma matice $F(a)$ v $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$.

Podobně se definují prostory $\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$, $\mathbb{C}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ a $\mathbb{C}([a,b],\mathbb{R}^n)$ a normy na nich.

Množinu funkcí $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ s derivací spojitou na intervalu $[a,b]$ značíme $\mathbb{C}^1([a,b],\mathbb{R}^n)$. (Jako obvykle, definujeme $f'(a)=f'(a+)$ a $f'(b)=f'(b-)$ pro $f\in\mathbb{C}^1([a,b],\mathbb{R}^n)$.)

Tématem této kapitoly budou rovnice tvaru

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t \mathrm{d}[A]\,x + f(t) - f(t_0) \tag{8.1}$$

kde $t_0 \in [a,b]$, A je $n \times n-$maticová funkce, f je $n-$vektorová funkce a hledáme $n-$vektorovou funkci x vyhovující následující definici:

8.2. Definice. Funkce $x\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ je řešením rovnice (8.1) na intervalu $[a,b]$ jestliže $\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}\,[A]\,x$ existuje a rovnost (8.1) je splněna pro každé $t \in [a,b]$.

Rovnice (8.1) se nazývá *zobecněná lineární diferenciální rovnice*.

8.3. Poznámka. Buď dáno $t_0 \in [a,b]$ a nechť x je řešení rovnice (8.1) na $[a,b]$. Potom

$$x(a) = x(t_0) - \int_a^{t_0} \mathrm{d}\,[A]\,x - f(a) + f(t_0)\,.$$

Odečteme-li tuto rovnost od (8.1), dostaneme

$$x(t) = x(a) + \int_a^{t} \mathrm{d}\,[A]x + f(t) - f(a)\,. \tag{8.2}$$

Podobně bychom z (8.2) odvodili (8.1). Funkce $x \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ je tedy řešením rovnice (8.1) na $[a,b]$ právě tehdy, když splňuje rovnici (8.2) na $[a,b]$.

8.2 Diferenciální rovnice s impulsy

Motivací pro studium zobecněných diferenciálních rovnic jsou m.j. úlohy s impulsy. V řadě praktických úloh se totíž potkáme s perturbacemi, jejichž doba působení je sice zanedbatelná v porovnání s dobou celého procesu, které ale nicméně podstatně ovlivní studovaný proces. Zpravidla, vhodným modelem pro popis takovýchto procesů jsou *diferenciální rovnice s impulsy*, tj. diferenciální rovnice, jejichž řešení nemusí být hladké, ba ani spojité.

Zdrojem modelů s impulsy je zejména fyzika (např. popis hodinových mechanismů, oscilace elektromechanických systémů, vyzařování elektrických resp. magnetických vln v prostředí s rychle se měnícími parametry v daných okamžicích prudce změní, pohyb částice v poli generovaném potenciálem soustředěným v jediném bodě, stabilizace Kapicova kyvadla, optimální regulace metodou bang-bang), ale také medicína (distribuce léčivých látek v těle, strategie impulsní vakcinace v epidemiologických modelech, studium účinku hromadného očkování proti spalničkám), populační dynamika (modely s rychlými změnami počtu některých populací) či ekonomie (modely trhu, které připouštějí prudké změny cen).

Nejjednodušší idealizací impulsních procesů jsou procesy popsané lineárními diferenciálními rovnicemi, na které v konečném počtu pevně daných bodů působí lineární impulsy .

Předpokládejme, že

$$\left.\begin{array}{l} r \in \mathbb{N},\ \ r \geq 1,\ \ a < \tau_1 < \ldots < \tau_r < b\,, \\ P \in \mathbb{C}([a,b], \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)),\ \ q \in \mathbb{C}([a,b],\mathbb{R}^n)\,, \\ B_k \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n),\ \ d_k \in \mathbb{R}^n \ \text{ pro } k = 1,2,\ldots,r\,. \end{array}\right\} \tag{8.3}$$

(Poznamenejme, že v této kapitole symboly typu B_k resp. d_k značí také matice resp. vektory. Komponenty vektorů či matic se zde neobjeví.)

Označme

$$D = \{\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_r\},\ \ \tau_0 = a \quad \text{a} \quad \tau_{r+1} = b$$

a pro každou funkci $x\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ definujme

$$\left.\begin{array}{l} x_{[1]}(t) = x(t) \quad \text{pro } \ t \in [a,\tau_1] \\ \text{a} \\ x_{[k]}(t) = \begin{cases} x(\tau_{k-1}+) & \text{když } \ t = \tau_{k-1}, \\ x(t) & \text{když } \ t \in [\tau_{k-1},\tau_k] \end{cases} \quad \text{pro } \ k = 2,3,\ldots,r+1\,. \end{array}\right\} \tag{8.4}$$

Lineární impulsní úloha je pak tvořena lineární diferenciální rovnicí

$$x' = P(t)\,x + q(t) \tag{8.5}$$

a lineárními impulsními podmínkami

$$\Delta^+ x(\tau_k) = B_k\, x(\tau_k) + d_k, \quad k = 1,2,\ldots,r\,, \tag{8.6}$$

přičemž řešení jsou určena podle následující definice.

8.4. Definice. Řekneme, že funkce $x\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ je řešením úlohy (8.5), (8.6), jestliže

$$x_{[k]} \in \mathbb{C}^1([\tau_{k-1},\tau_k] \quad \text{pro každé } k = 1,2,\ldots,r{+}1 \tag{8.7}$$

a x vyhovuje impulsním podmínkám (8.6) a splňuje diferenciální rovnost

$$x'(t) = P(t)\,x(t) + q(t) \quad \text{pro } \ t \in [a,b] \setminus D\,. \tag{8.8}$$

8.5. Poznámka. Povšimněme si, že řešení úlohy (8.5), (8.6) patří vždy do prostoru $\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$.

Ukážeme nyní, že úlohu (8.5), (8.6) můžeme ekvivalentně přeformulovat jako zobecněnou lineární diferenciální rovnici tvaru (8.2).

Předpokládejme zprvu, že $r=1$ a nechť $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ je řešení impulsní úlohy (8.5), (8.6). Integrací rovnosti (8.8) dostaneme vztahy

$$x(t)=x(a)+\int_a^t P\,x\,\mathrm{d}\,s+\int_a^t q\,\mathrm{d}s \qquad \text{pro } t\in[a,\tau_1]\,,$$

a

$$x(t)=x(\tau_1+)+\int_{\tau_1}^t P\,x\,\mathrm{d}\,s+\int_{\tau_1}^t q\,\mathrm{d}s \quad \text{pro } t\in(\tau_1,b]\,,$$

Dosazením z podmínek (8.6) (kde $k=r=1$) do druhého vztahu pak dostaneme pro $t\in(\tau_1,b]$

$$\begin{aligned} x(t)&=x(\tau_1)+\,B_1\,x(\tau_1)+d_1+\int_{\tau_1}^t P\,x\,\mathrm{d}\,s+\int_{\tau_1}^t q\,\mathrm{d}s\\ &=x(a)+\int_a^t P\,x\,\mathrm{d}\,s+B_1\,x(\tau_1)+\int_a^t q\,\mathrm{d}s+d_1 \end{aligned}$$

a tedy

$$x(t)=x(a)+\int_a^t P\,x\,\mathrm{d}\,s+\chi_{(\tau_1,b]}(t)\,\big(B_1\,x(\tau_1)\big)+\int_a^t q\,\mathrm{d}s+\chi_{(\tau_1,b]}(t)\,d_1\,. \tag{8.9}$$

Položme

$$A(t)=\int_a^t P\,\mathrm{d}\,s+\chi_{(\tau_1,b]}(t)\,B_1 \quad \text{a} \quad f(t)=\int_a^t q\,\mathrm{d}\,s+\chi_{(\tau_1,b]}(t)\,d_1\,.$$

Potom $A\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$, $f\in\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ a podle věty o substituci 6.44 a formule (6.10) z příkladů 6.15 (ii) (viz též příklady 6.41) platí

$$\int_a^t \mathrm{d}\,[A]\,x=\int_a^t P\,x\,\mathrm{d}\,s+\chi_{(\tau_1,b]}(t)\,\big(B_1\,x(\tau_1)\big)$$

a

$$f(t)-f(a)=\int_a^t q\,\mathrm{d}s+\chi_{(\tau_1,b]}(t)\,d_1$$

pro $t\in[a,b]$ a $x\in\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$. Dosazením do (8.9) je zjistíme, že x splňuje (8.2) na $[a,b]$.

Obráceně, jestliže $x\in\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ splňuje (8.2) na $[a,b]$, pak podle výše uvedeného platí opět (8.9) na $[a,b]$. Odtud vidíme, že definujeme-li funkce $x_{[k]}$

jako v (8.4), bude platit (8.7) a (8.8). Navíc, podle Hakeovy věty (viz též cvičení 6.40) je $x(t-) = x(t)$ pro každé $t \in (a,b]$ a

$$\begin{aligned} x(t+) &= x(a) + \lim_{s \to t+} \int_a^s \mathrm{d}\,[A\,]\,x + f(t+) - f(a) \\ &= x(a) + \int_a^t \mathrm{d}\,[A\,]\,x + f(t) - f(a) + \Delta^+ A(t)\,x(t) + \Delta^+ f(t) \\ &= x(t) + \chi_{[\tau_1]}(t)\,\big(B_1\,x(t) + d_1\big) \quad \text{pro každé } t \in [a,b]\,. \end{aligned}$$

Speciálně, dosazením $t = \tau_1$ zjistíme, že x splňuje impulsní podmínku (8.6), kde $k = r = 1$.

Úloha (8.5), (8.6) je tedy pro $r = 1$ ekvivalentní se zobecněnou diferenciální rovnicí (8.2).

V obecném případě $r \in \mathbb{N}$, definujeme

$$\left.\begin{aligned} A(t) &= \int_a^t P\,\mathrm{d}\,s + \sum_{k=1}^{r} \chi_{(\tau_k,b]}(t)\,B_k \\ \text{a}\quad & \\ f(t) &= \int_a^t q\,\mathrm{d}\,s + \sum_{k=1}^{r} \chi_{(\tau_k,b]}(t)\,d_k\,, \end{aligned}\right\} \quad \text{pro } t \in [a,b]\,. \tag{8.10}$$

Indukcí snadno ověříme následující tvrzení.

8.6. Věta. *Předpokládejme* (8.3) *a* (8.10). *Potom impulsní úloha* (8.5), (8.6) *je ekvivalentní se zobecněnou diferenciální rovnicí* (**??**), *tj.* $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *je řešením úlohy* (8.5), (8.6) *na intervalu* $[a,b]$ *tehdy a jen tehdy, když je řešením rovnice* (**??**) *na intervalu* $[a,b]$. □

8.3 Lineární operatory

Připomeňme nyní stručně několik základních pojmů z funkcionální analýzy, které budeme nadále potřebovat. Podrobnější informaci lze najít např. ve většině učebnic funkcionální analýzy (viz např. [3], [18], [30], [35]). Základní přehled je obsažen také v úvodní části monografie [49].

Nechť $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ jsou Banachovy prostory. Zobrazení $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ (T zobrazuje $\mathbb{X}$ do $\mathbb{Y}$) je *spojitý operátor*, jestliže

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_{\mathbb{X}} = 0 \implies \lim_{n\to\infty} \|T(x_n) - T(x)\|_{\mathbb{Y}} = 0\,,$$

kde $\|.\|_{\mathbb{X}}$ je norma na $\mathbb{X}$ a $\|.\|_{\mathbb{Y}}$ je norma na $\mathbb{Y}$. Operátor $T:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ se nazývá *lineární*, jestliže platí

$$T\,(c_1\,x_2+c_2\,x_2)=c_1\,T(x_1)+c_2\,T(x_2)\ \text{ pro } x_1,x_2\in\mathbb{X}\ \text{ a }\ c_1,c_2\in\mathbb{R}\,.$$

Dále, T je *ohraničený*, jestliže existuje číslo $K\in[0,\infty)$ takové, že platí

$$\|T(x)\|_{\mathbb{Y}}\le K\,\|x\|_{\mathbb{X}}\quad \text{pro každé } x\in\mathbb{X}\,.$$

Je-li T lineární operátor, píšeme, jak je zvykem, $T\,x$ místo $T(x)$. Je známo, že lineární operátor $T:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ je spojitý právě tehdy, když je ohraničený.

Množinu ohraničených lineárních zobrazení prostoru $\mathbb{X}$ do prostoru $\mathbb{Y}$ značíme $\mathscr{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$. Na $\mathscr{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ jsou zřejmým způsobem zavedeny operace sčítání operátorů a násobení operátorů reálným číslem a $\mathscr{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ je pak Banachův prostor vzhledem k normě

$$\|L\|_{\mathscr{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})}=\sup_{\substack{x\in\mathbb{X}\\ \|x\|_x\le 1}}\|L\,x\|_{\mathbb{Y}}\quad \text{pro } x\in\mathbb{X}\,.$$

Konečně, řekneme, že $L\in\mathscr{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ je *kompaktní*, jestliže zobrazuje každou množinu ohraničenou v $\mathbb{X}$ na množinu relativně kompaktní v $\mathbb{Y}$, tj. jestliže pro každou posloupnost $\{x_n\}$ ohraničenou v $\mathbb{X}$ její obraz $\{L\,x_n\}\subset\mathbb{Y}$ obsahuje podposloupnost konvergentní v $\mathbb{Y}$. Je známo, že každý kompaktní lineární operátor je současně spojitý.

V důkazech hlavních výsledků této kapitoly využijeme následující dvě tvrzení. První z nich je zobecněním jedné z Fredholmových vět známých z teorie integrálních rovnic. Jeho důkaz je obsažen např. v monografiích N. Dunforda a J.T. Schwartze [5], M. Schechtera [38] nebo ve skriptech J. Lukeše [30].

8.7. Věta (FREDHOLMOVA VĚTA O ALTERNATIVĚ)**.** *Buď $\mathbb{X}$ Banachův prostor a nechť L je lineární kompaktní operátor zobrazující $\mathbb{X}$ do sebe. Potom operátorová rovnice*

$$x-L\,x=g \tag{8.11}$$

má řešení pro každé $g\in\mathbb{X}$ tehdy a jen tehdy, když příslušná homogenní rovnice

$$x-L\,x=0 \tag{8.12}$$

má pouze triviální řešení $x=0\in\mathbb{X}$. V takovém případě je řešení rovnice (8.11) *určeno jednoznačně.*

Druhé tvrzení je známo také z elementární teorie matic. Připomeňme si zde jeho obecnou podobu převzatou z monografie [51] (viz Lemma 4.1-C).

8.8. Lemma. *Nechť* $\mathbb{X}$ *je Banachův prostor,* $T \in \mathscr{L}(\mathbb{X})$ *a* $\|T\|_{\mathscr{L}(\mathbb{X})} < 1$. *Potom existuje ohraničený inversní operátor* $\big[I-T\big]^{-1}$ *k operátoru* $\big[I-T\big]$ *a platí nerovnost*

$$\Big\|\big[I-T\big]^{-1}\Big\|_{\mathscr{L}(\mathbb{X})} \le \frac{1}{1-\|T\|_{\mathscr{L}(\mathbb{X})}}\,.$$

8.4 Existence řešení zobecněných lineárních diferenciálních rovnic

Studium zobecněných lineárních diferenciálních rovnic zahájíme jednoduchým pozorováním vycházejícím ze známých vlastností KS – integrálu.

8.9. Věta. *Nechť* $t_0 \in [a,b]$, $A \in \mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *a* $f \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$. *Potom každé řešení* x *rovnice* (8.1) *na* $[a,b]$ *je regulované na* $[a,b]$.

D ů k a z . Podle Saksova – Henstockova lemmatu (viz jeho důsledek 6.38) je pravá strana rovnice (8.1) funkce regulovaná na $[a,b]$. Odtud plyne tvrzení věty. □

Vzhledem ke větě 8.9 je tedy vhodné hledat řešení zobecněných lineárních diferenciálních rovnic ve třídě $\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$.

Analogiemi počátečních úloh pro lineární obyčejné diferenciální rovnice jsou zobecněné lineární diferenciální rovnice

$$x(t) = \widetilde{x} + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\,[A\,]\,x + f(t) - f(t_0)\,, \tag{8.13}$$

na intervalu $[a,b]$, kde $t_0 \in [a,b]$ a $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$ je daný vektor. (Zřejmě je $x(t_0) = \widetilde{x}$ pro každou funkci x splňující (8.13).)

Každé funkci $x \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ a bodu $t_0 \in [a,b]$ přiřaďme funkci $\mathscr{A}_{t_0}x$ předpisem

$$(\mathscr{A}_{t_0}x)(t) = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\,[A\,]\,x \quad \text{pro } t \in [a,b]\,. \tag{8.14}$$

Podle důsledku 6.38 jsou funkce $\mathscr{A}_{t_0}x$ regulované na $[a,b]$. Zobrazení

$$\mathscr{A}_{t_0} : x \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n) \to \mathscr{A}_{t_0}x \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$$

je zřejmě lineární a, dále, podle věty 6.17 platí

$$\|\mathscr{A}_{t_0}x\| \le \left(\operatorname{var}_a^b A\right)\|x\| \ \text{ pro každé } x\in\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)\,.$$

Pro každé $t_0\in[a,b]$ je tedy $\mathscr{A}_{t_0}$ spojitý lineární operátor na $\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$, tj. $\mathscr{A}_{t_0}\in\mathscr{L}(\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n))$.

Dokážeme nyní, že současně je předpisem (8.14) definován spojitý lineární operátor zobrazující $\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ do $\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$.

8.10. Lemma. *Nechť* $A\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$, $t_0\in[a,b]$ *a nechť funkce* $\mathscr{A}_{t_0}x$ *je pro* $x\in\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ *definována vztahem* (8.14). *Potom* $\mathscr{A}_{t_0}x\in\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ *pro každé* $x\in\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ *a zobrazení*

$$x\in\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)\to\mathscr{A}_{t_0}x\in\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$$

je ohraničené.

D ů k a z . Buď $\boldsymbol{\sigma}$ libovolné dělení intervalu $[a,b]$. Podle věty 6.17 pro každé $x\in\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ máme

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}|(\mathscr{A}_{t_0}x)(\sigma_j)-(\mathscr{A}_{t_0}x)(\sigma_{j-1})| &= \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\Big|\int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j}\mathrm{d}\,[A]\,x\Big|\\ &\le \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\left(\operatorname{var}_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j}A\right)\|x\| = \left(\operatorname{var}_a^b A\right)\|x\|\end{aligned}$$

a

$$|(\mathscr{A}_{t_0}x)(a)| = \Big|\int_{t_0}^{a}\mathrm{d}\,[A]\,x\Big| \le \left(\operatorname{var}_a^b A\right)\|x\|\,.$$

Tudíž $\mathscr{A}_{t_0}x\in\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ a

$$\|\mathscr{A}_{t_0}x\|_{\mathbb{BV}} = |(\mathscr{A}_{t_0}x)(a)| + \operatorname{var}_a^b(\mathscr{A}_{t_0}x) \le 2\left(\operatorname{var}_a^b A\right)\|x\|\,.$$

pro každé $x\in\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$. $\square$

Pomocí operátoru $\mathscr{A}_{t_0}$ z (8.14) můžeme přepsat počáteční úlohu (8.13) jako operátovou rovnici

$$x-\mathscr{A}_{t_0}x = g, \quad \text{kde } \ g=\widetilde{x}+f-f(t_0)\,.$$

Protože nemáme k dispozici prostředky postačující k důkazu kompaktnosti operátoru $\mathscr{A}\in\mathscr{L}(\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n))$, nemůžeme přímo aplikovat Fredholmovu větu (věta 8.7) a musíme postupovat tak trochu oklikou. V následující větě ukážeme pomocí Hellyovy věty a Osgoodovy věty, že operátor $\mathscr{A}_{t_0}$ generuje kompaktní zobrazení prostoru $\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ do sebe.

8.11. Věta. *Nechť* $t_0 \in [a,b]$ *a* $A \in \mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$. *Položme* $L\,x = \mathscr{A}_{t_0} x$ *pro* $x \in \mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$. *Potom* L *je kompaktní lineární operátor na* $\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$.

D ů k a z . Protože je $\|x\| \le \|x\|_{\mathbb{BV}}$ pro každé $x \in \mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$, plyne z lemmatu 8.10, že $L \in \mathscr{L}(\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n))$.

Dokážeme, že pro každou posloupnost $\{x_n\}$ ohraničenou v $\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ její obraz $\{L\,x_n\} \subset \mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ obsahuje podposloupnost, která je konvergentní v $\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$.

Nechť jsou tedy posloupnost $\{x_n\} \subset \mathbb{BV}[a,b]$ a číslo $C \in [0,\infty)$ takové, že $\|x_n\|_{\mathbb{BV}} \le C < \infty$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Podle Hellyovy věty (věta 2.44) existují funkce $x \in \mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ a podposloupost $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ takové, že

$$\|x\|_{\mathbb{BV}} \le C \quad \text{a} \quad \lim_{k\to\infty} x_{n_k}(t) = x(t) \quad \text{pro každé } t \in [a,b]\,.$$

Označme $z_k(t) = x_{n_k}(t) - x(t)$ a pro $k \in \mathbb{N}$ a $t \in [a,b]$. Potom

$$|z_k(t)| \le 2\,C \quad \text{a} \quad \lim_{k\to\infty} z_k(t) = 0 \quad \text{pro } k \in \mathbb{N} \text{ a } t \in [a,b]\,.$$

Vzhledem k tomu, že všechny integrály $\displaystyle\int_c^d \mathrm{d}\,[A]\,z_k$ a $\displaystyle\int_c^d \mathrm{d}\,[\operatorname{var}_a^s A]\,z_k(s)$, $k \in \mathbb{N}$, existují pro libovolná $c, d \in [a,b]$, věta 6.17 zaručuje, že platí

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} |(L\,z_k)(\sigma_j) - (L\,z_k)(\sigma_{j-1})| = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \left| \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} \mathrm{d}\,[A]\,z_k \right|$$
$$\le \sum_{j=1}^{m} \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} \mathrm{d}\big[\operatorname{var}_a^s A\big]\,|z_k(s)| \le \int_a^b \mathrm{d}\big[\operatorname{var}_a^s A\big]\,|z_k(s)|$$

pro libovolná $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$ a $k \in \mathbb{N}$. Máme tedy

$$\operatorname{var}_a^b\,(L\,z_k) \le \int_a^b \mathrm{d}\big[\operatorname{var}_a^s A\big]\,|z_k(s)| \quad \text{pro } k \in \mathbb{N}\,.$$

Podle věty 6.48 je ovšem

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b \mathrm{d}\big[\operatorname{var}_a^s A\big]\,|z_k(s)| = 0$$

a tudíž také

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{var}_a^b \big(L\,x_{n_k} - L\,x\big) = \lim_{k\to\infty} \operatorname{var}_a^b\,(L\,z_k) = 0\,.$$

Podobně

$$\lim_{k\to\infty} \left|\big(L\,x_{n_k}(a) - L\,x(a)\big)\right| = \lim_{k\to\infty} |(L\,z_k)(a)| = \lim_{k\to\infty} \left|\int_{t_0}^{a} \mathrm{d}\,[A\,]\,x\right|$$
$$\le \lim_{k\to\infty} \int_{t_0}^{a} \left[\operatorname{var}_a^s A\right] |z_k(s)| = 0\,.$$

Věta je dokázána. □

Následující tvrzení je důsledkem věty 8.7 a věty 8.11.

8.12. Věta. *Buď dáno* $t_0 \in [a,b]$. *Rovnice*

$$x(t) - \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\,[A\,]\,x = g(t) \tag{8.15}$$

má pro každou funkci $g \in \mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ *řešení na* $[a,b]$ *právě tehdy, když příslušná homogenní rovnice*

$$x(t) - \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\,[A\,]\,x = 0 \tag{8.16}$$

má na $[a,b]$ *pouze triviální řešení* $x \equiv 0$. *V takovém případě je řešení rovnice* (8.15) *určeno jednoznačně.*

D ů k a z . Rovnice (8.15) je ekvivalentní s operátorovou rovnicí $x - L\,x = g$, kde $L\,x = \mathscr{A}_{t_0}\,x$ pro $x \in \mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$, tj.

$$(L\,x)(t) = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\,[A\,]\,x \quad \text{pro } x \in \mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n) \ \text{ a } \ t \in [a,b].$$

Podle věty 8.11 je L lineární kompaktní operátor na $\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$. K dokončení důkazu věty využijeme větu 8.7. □

Předpokládejme nyní, že $t \in (t_0, b]$ a, že funkce $x \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ splňuje (8.13) na intervalu $[t_0, t)$. Zřejmě je $x(t_0) = \widetilde{x}$. Pomocí Hakeovy věty (věta 6.39, viz též příklady 6.41) snadno ověříme, že platí

$$\begin{aligned} x(t-) &= \widetilde{x} + \lim_{\tau\to t-} \int_{t_0}^{\tau} \mathrm{d}\,[A\,]\,x + \big(f(t-) - f(t_0)\big) \\ &= \widetilde{x} + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\,[A\,]\,x + f(t) - f(t_0) - \lim_{\tau\to t-} \int_{\tau}^{t} \mathrm{d}\,[A\,]x - \Delta^{-} f(t) \\ &= \widetilde{x} + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\,[A\,]\,x + f(t) - f(t_0) - \Delta^{-} A(t)\,x(t) - \Delta^{-} f(t)\,. \end{aligned}$$

Má-li tedy funkce x splňovat (8.13) také v bodě $t,$ musí hodnota $x(t)$ vyhovovat rovnici

$$\big[I - \Delta^{-}A(t)\big]\, x(t) = x(t-) + \Delta^{-} f(t)\,, \tag{8.17}$$

kde I značí jednotkovou matici typu $n \times n$ (viz 1.3 (xiv)). Odtud je zřejmé, že k tomu, aby řešení úlohy (8.13) na intervalu $[a,t)$ bylo možno jednoznačným způsobem prodloužit do bodu $t,$ bude stačit, aby platilo

$$\det\big[I - \Delta^{-}A(t)\big] \neq 0\,. \tag{8.18}$$

Úlohu (8.13) můžeme ovšem také přepsat ve tvaru

$$x(t) = x(b) - \int_t^b \mathrm{d}\,[A\,]\, x + f(b) + f(t)\,.$$

Podobně jako výše můžeme tedy usoudit (rozmyslete si detaily), že k tomu, aby řešení počáteční úlohy (8.13) na intervalu $(t,t_0]$ bylo možno jednoznačným způsobem prodloužit do bodu $t,$ bude stačit, aby platilo

$$\big[I + \Delta^{+}A(t)\big]\, x(t) = x(t+) - \Delta^{+} f(t) \tag{8.19}$$

a

$$\det\big[I + \Delta^{+}A(t)\big] \neq 0\,. \tag{8.20}$$

Můžeme tedy očekávat, že podmínky (8.18) a (8.20) jsou podstatné pro existenci řešení úlohy (8.13).

Jednoduchou úpravou vztahů (8.17) a (8.19) dostaneme následující tvrzení.

8.13. Lemma. *Nechť* $A \in \mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *a* $g \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n).$ *Potom vztahy*

$$\left.\begin{aligned} \Delta^{-}x(t) &= \Delta^{-}A(t)\ x(t) + \Delta^{-} f(t)\,, \\ \Delta^{+}x(s) &= \Delta^{+}A(s)\, x(s) + \Delta^{+} f(s) \end{aligned}\right\} \tag{8.21}$$

platí pro každé řešení x *úlohy* (8.13) *na* $[a,b],$ $t \in (a,b]$ *a* $s \in [a,b).$ □

8.14. Lemma. *Nechť* $A \in \mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *a* $t_0 \in [a,b].$ *Potom rovnice* (8.15) *má řešení pro každou funkci* $g \in \mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ *tehdy a jen tehdy, když*

$$\det\big[I - \Delta^{-}A(t)\big] \neq 0 \quad \textit{pro každé } t \in (t_0,b] \tag{8.22}$$

a

$$\det\big[I + \Delta^{+}A(s)\big] \neq 0 \quad \textit{pro každé } s \in [a,t_0)\,. \tag{8.23}$$

(*Zde* $(t_0,b] = \emptyset$ *když* $t_0 = b$ *a* $[a,t_0) = \emptyset$ *když* $t_0 = a.$)

V takovém případě je řešení rovnice (8.15) *určeno jednoznačně.*

D ů k a z . Podle věty 8.12 stačí dokázat, že rovnice (8.16) má pouze triviální řešení na $[a,b]$ právě tehdy, když platí (8.22).

a) Předpokládejme, že $t_0 \in [a,b)$ a x je řešení rovnice (8.16) na $[a,b]$. Podle lemmatu 8.10 je $x \in \mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$. Zřejmě $x(t_0) = 0$. Podle první z rovnic ve (8.21) máme

$$\Delta^+ x(t_0) = \Delta^+ A(t_0)\, x(t_0) = 0\,,$$

tj. $x(t_0+) = 0$. Označme $\alpha(t) = \operatorname{var}_{t_0}^t A$ pro $t \in [t_0,b]$. Funkce α je neklesající na intervalu $[t_0,b]$. Existuje tedy konečná limita $\alpha(t_0+)$ a můžeme tedy zvolit $\delta \in (0, b-t_0)$ tak, aby platilo

$$0 \le \alpha(t_0+\delta) - \alpha(t_0+) < \frac{1}{2}\,.$$

Pro každé $t \in [t_0, t_0+\delta]$ odtud pomocí vět 6.17 a 6.39 odvodíme nerovnosti

$$\begin{aligned} |x(t)| &\le \int_{t_0}^t \mathrm{d}\,[\alpha]\,|x| = \Delta^+\alpha(t_0)\,x(t_0) + \lim_{\tau\to t_0+}\int_\tau^t \mathrm{d}\,[\alpha]\,|x| \\ &= \lim_{\tau\to t_0+}\int_\tau^t \mathrm{d}\,[\alpha]\,|x| \le \big[\alpha(t_0+\delta) - \alpha(t_0+)\big]\Big(\sup_{t\in[t_0,t_0+\delta]}|x(t)|\Big) \\ &< \frac{1}{2}\Big(\sup_{t\in[t_0,t_0+\delta]}|x(t)|\Big)\,. \end{aligned}$$

Tudíž $\Big(\sup_{t\in[t_0,t_0+\delta]}|x(t)|\Big) \le \frac{1}{2}\Big(\sup_{t\in[t_0,t_0+\delta]}|x(t)|\Big)$. To je ale možné pouze tehdy, když $x = 0$ na $[t_0, t_0+\delta]$.

Položme $t^* = \sup\{\tau \in (t_0,b] : x = 0 \text{ na } [t_0,\tau]\}$. Zřejmě je $x = 0$ na $[t_0,t^*)$ a tudíž také $x(t^*-) = 0$. Dále, podle (8.21) máme

$$0 = \big[I - \Delta^- A(t*)\big]\,x(t^*)\,.$$

To je ale, vzhledem k předpokladu (8.22), možné pouze tehdy, když $x(t^*) = 0$.

Předpokládejme, že $t^* < b$. Stejnou argumentací, jakou jsme na začátku důkazu dokázali, že existuje $\delta \in (0, b-t_0)$ takové, že x je nulové na $[t_0, t_0+\delta]$, ukázali bychom nyní, že existuje $\eta \in (0, b-t^*)$ takové, že x se anuluje na $[t^*, t^*+\eta]$, což je ovšem, vzhledem k definici t^* nemožné, tudíž musí být $t^* = b$. Dokázali jsme, že každé řešení rovnice (8.16) je nulové na $[t_0,b]$.

Podobně bychom pomocí předpokladu (8.23) dokázali, že je-li $t_0 \in (a,b]$, pak se řešení x rovnice (8.16) anuluje také na $[a,t_0]$.

b) Předpokládejme, že neplatí např. (8.22). Zřejmě je $\det\big[I-\Delta^- A(t)\big]\neq 0,$ jestliže je $|\Delta^- A(t)|\leq 1/2.$ Na druhou stranu, podle důsledku 4.8, obrácená nerovnost $|\Delta^- A(t)|>1/2$ platí pro nejvýše konečně mnoho bodů $t\in(t_0,b].$ To znamená, že matice $I-\Delta^- A(t)$ není regulární pro nejvýše konečně mnoho $t\in(t_0,b].$

Můžeme tedy zvolit $t^*\in(t_0,b]$ takové, že

$$\det\big[I-\Delta^- A(t)\big]\neq 0 \text{ pro } t\in(t_0,t^*) \quad \text{a} \quad \det\big[I-\Delta^- A(t^*)\big]=0\,.$$

Dále, ze základů lineární algebry je známo, že potom existuje $d\in\mathbb{R}^n$ takové, že

$$\big[I-\Delta^- A(t^*)\big]\,c\neq d \quad \text{pro každé } \ c\in\mathbb{R}^n\,. \tag{8.24}$$

Definujme

$$g(t)=\begin{cases}0 & \text{když } \ t\neq t^*\,,\\ d & \text{když } \ t=t^*\,.\end{cases}$$

Máme $\Delta^- g(t^*)=d.$ Předpokládejme, že rovnice (8.15) má na $[a,b]$ řešení $x.$ Potom podle první části důkazu musí být $x=0$ na $[a,t^*)$ a tedy také $x(t^*-)=0.$ Podle lemmatu 8.13 musí platit

$$\big[I-\Delta^- A(t^*)\big]\,x(t^*)=d\,.$$

To je ovšem ve sporu s tvrzením (8.24). Rovnice (8.15) tedy nemůže mít řešení.

Neplatí-li (8.23), pak analogicky najdeme bod $t^*\in[a,b]$ a funkci g takové, že bude

$$\big[I+\Delta^+ A(t^*)\big]\,c\neq \Delta^+ g(t^*) \quad \text{pro každé } \ c\in\mathbb{R}^n,$$

což vede opět ke sporu s lemmatem 8.13. $\square$

8.15. Věta. *Nechť* $A\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *a* $t_0\in[a,b]$. *Potom počáteční úloha* (8.13) *má pro každou funkci* $f\in\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ *a každý vektor* $\widetilde{x}$ *jednoznačně určené řešení tehdy a jen tehdy, když platí* (8.22) *a* (8.23).

D ů k a z . Věta je důsledkem věty 8.12 a lemmatu 8.14, kde položíme

$$g(t)=\widetilde{x}+f(t)-f(t_0) \quad \text{pro } \ t\in[a,b]. \qquad \square$$

8.5 Zobecněná Gronwallova nerovnost a apriorní odhady řešení

Důležitou roli v teorii obyčejných diferenciálních rovnic (např. při důkazu jednoznačnosti řešení počáteční úlohy nebo při důkazech spojité závislosti řešení na některých parametrech) hraje tvrzení, které se nazývá Gronwallovo lemma. Připomeňme si jeho znění. Důkaz lze najít ve většině učebnic obyčejných diferenciálních rovnic (viz např. [25, Pomocná věta 4.3.1]).

8.16. Lemma (GRONWALL). *Nechť funkce u a p jsou spojité a nezáporné na $[a,b]$, $K \geq 0$ a nechť*

$$u(t) \leq K + \int_a^t (p\,u)\,\mathrm{d}\,s \quad \textit{pro} \;\; t \in [a,b].$$

Potom

$$u(t) \leq K \,\exp\Big(\int_a^t p\,\mathrm{d}\,s\Big) \quad \textit{pro} \;\; t \in [a,b].$$

Pro nas bude podobně důležité zobecnění Gronwallova lemmatu na případ, kdy se v příslušných integrálních nerovnostech vyskytuje Stieltjesův integrál.

8.17. Věta (ZOBECNĚNÉ GRONWALLOVO LEMMA). *Předpokládejme, že funkce $u : [a,b] \to [0,\infty)$ je ohraničená na $[a,b]$, funkce $h : [a,b] \to [0,\infty)$ je neklesající a zleva spojitá na $(a,b]$, $K \geq 0$, $L \geq 0$ a nechť*

$$u(t) \leq K + L \int_a^t u\,\mathrm{d}\,h \quad \textit{pro} \;\; t \in [a,b]. \tag{8.25}$$

Potom

$$u(t) \leq K \,\exp\big(L\,[h(t) - h(a)]\big) \quad \textit{pro} \;\; t \in [a,b]. \tag{8.26}$$

D ů k a z . Nechť $\kappa \geq 0$ a $w_\kappa(t) = \kappa \,\exp\big(L\,[h(t)-h(a)]\big)$ pro $t \in [a,b]$. Potom

$$\begin{aligned}\int_a^t w_\kappa\,\mathrm{d}\,h &= \kappa \int_a^t \exp\big(L\,[h(t)-h(a)]\big)\,\mathrm{d}\,h(s)\\ &= \kappa \int_a^t \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^k}{k!}\,\big[h(t)-h(a)\big]^k\Big)\,\mathrm{d}\,h(s) \quad \text{pro} \;\; t \in [a,b].\end{aligned}$$

Protože, jak známo řada $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^k}{k!} \big[h(t)-h(a)\big]^k$ konverguje stejnoměrně na $[a,b]$, můžeme přehodit pořadí operací integrace a sčítání. Použijeme-li nyní navíc tvrzení z příkladu 6.19, dostaneme tedy

$$\begin{aligned}\int_a^t w_\kappa \,\mathrm{d}\, h &= \kappa \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{L^k}{k!} \int_a^t \big[h(s)-h(a)\big]^k\Big) \,\mathrm{d}\, h(s) \\ &\le \kappa \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{L^k\,[h(t)-h(a)]^{k+1}}{(k+1)!}\Big) = \frac{\kappa}{L} \exp\big(L\,[h(t)-h(a)]\big) = \frac{w_\kappa(t)}{L}\end{aligned}$$

pro $t\in[a,b]$. To znamená, že funkce w_κ splňuje pro každé $\kappa\ge 0$ a $t\in[a,b]$ nerovnost

$$w_\kappa(t) \ge \kappa + L\int_a^t w_\kappa \,\mathrm{d}\, h\,. \tag{8.27}$$

Buď dáno $\varepsilon>0$ a položme $\kappa=K+\varepsilon$ a $v_\varepsilon = u - w_\kappa$. Odečtením nerovností (8.25) a (8.27) zjistíme, že platí

$$v_\varepsilon(t) \le -\varepsilon + \int_a^t v_\varepsilon \,\mathrm{d}\, h \quad \text{pro } t\in[a,b]\,. \tag{8.28}$$

Speciálně, $v_\varepsilon(a) = -\varepsilon < 0$. Zbývající část důkazu bude připomínat postup z důkazu lemmatu 8.14. Funkce x i w_κ jsou evidentně ohraničené na $[a,b]$ pro každé $\kappa\ge 0$. Tudíž také funkce v_ε je ohraničená na $[a,b]$. Podle Saksova-Henstockova lemmatu 6.36 máme

$$\begin{aligned}\int_a^t v_\varepsilon \,\mathrm{d}\, h &= v_\varepsilon(a)\,\Delta^+ h(a) + \lim_{\delta\to 0+} \int_{a+\delta}^t v_\varepsilon \,\mathrm{d}\, h \\ &\le -\varepsilon\,\Delta^+ h(a) + \|v_\varepsilon\|\,[h(t)-h(a+)] \le \|v_\varepsilon\|\,[h(t)-h(a+)]\end{aligned}$$

a tedy

$$v_\varepsilon(t) \le -\varepsilon + L\int_a^t v_\varepsilon \,\mathrm{d}\, h \le -\varepsilon + L\,\|v_\varepsilon\|\,[h(t)-h(a+)] \quad \text{pro } t\in[a,b]\,.$$

Zvolme $\eta>0$ tak, aby platilo $L\,\|v_\varepsilon\|\,[h(t)-h(a+)] < \varepsilon/2$ pro $t\in[a,a+\eta]$. Pak bude $v_\varepsilon<0$ na $[a,a+\eta]$. Označme

$$t^* = \inf\{\tau\in[a,b] : v_\varepsilon < 0 \text{ na } [a,\tau]\}.$$

Vidíme. že je $t^* > a$ a $v_\varepsilon < 0$ na $[a, t^*)$. Opětným použitím Saksova-Henstockova lemmatu 6.36 dostaneme z (8.28)

$$\begin{aligned} v_\varepsilon(t) &\le -\varepsilon + L \int_a^t v_\varepsilon \, \mathrm{d}\, h \\ &= -\varepsilon + L \Big(v_\varepsilon(t^*) \Delta^- h(t^*) + \lim_{\delta \to 0+} \int_a^{t^*-\delta} v_\varepsilon \, \mathrm{d}\, h \Big) \le -\varepsilon < 0 \end{aligned}$$

protože $\Delta^- h(t^*) = 0$ a $\displaystyle\int_a^{t^*-\delta} v_\varepsilon \, \mathrm{d}\, h < 0$ pro každé $\delta > 0$.

Kdyby bylo $t^* < b$, zopakovali bychom předcházející postup a ukázali, že existuje $\eta \in (0, b - t^*)$ takové, že $v_\varepsilon < 0$ na intervalu $[a, t^* + \eta]$, což je ve sporu s definicí t^*. Tudíž $t^* = b$, $v_\varepsilon < 0$ na celém $[a, b]$ a

$$u(t) < w_\kappa(t) = K \, \exp\big(L\,(h(t) - h(a))\big) + \varepsilon \, \exp\big(L\,(h(t) - h(a))\big) \text{ pro } t \in [a, b]\,.$$

Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, znamená to, že platí (8.26). □

8.18. Cvičení. Dokažte následující variantu věty (8.26)*:*

Předpokládejme, že funkce $u : [a, b] \to [0, \infty)$ *je ohraničená na* $[a, b]$, *funkce* $h : [a, b] \to [0, \infty)$ *je neklesající a zprava spojitá na* $[a, b)$, $K \ge 0$, $L \ge 0$ *a*

$$u(t) \le K + L \int_t^b u \, \mathrm{d}\, h \quad \textit{pro} \;\; t \in [a, b]. \tag{8.29}$$

Potom

$$u(t) \le K \, \exp\big(L\,[h(b) - h(t)]\big) \quad \textit{pro} \;\; t \in [a, b]. \tag{8.30}$$

8.19. Poznámka. Obecnější verse zobecněného Gronwallova lemmatu jsou obsaženy v monografiích Š. Schwabika [39] (viz Věta 1.40) a J. Kurzweila [26] (viz kapitola 22).

V následující větě využijeme zobecněné Gronwallovo lemma k odvození důležitého odhadu pro řešení počáteční úlohy (8.13).

8.20. Věta. *Nechť* $t_0 \in [a, b]$ *a* $A \in \mathbb{BV}([a, b], \mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *splňují* (8.22) *a* (8.23), $f \in \mathbb{G}([a, b], \mathbb{R}^n)$ *a* $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$ *a nechť* x *je řešení úlohy* (8.13) *na* $[a, b]$. *Potom*

$$\operatorname{var}_a^b (x - f) \le (\operatorname{var}_a^b A)\, \|x\| < \infty\,, \tag{8.31}$$

$$\left.\begin{aligned} 0 < c_A := \max \Big\{ &\sup_{t \in (t_0, b]} \big|[I - \Delta^- A(t)]^{-1}\big|\,, \\ &\qquad \sup_{t \in [a, t_0)} \big|[I + \Delta^+ A(t)]^{-1}\big| \;\Big\} < \infty \end{aligned}\right\} \tag{8.32}$$

a

$$\left.\begin{aligned} |x(t)| &\le c_A\left(|\widetilde{x}|+2\,\|f\|\right)\,\exp\,\left(2\,c_A\,\mathrm{var}_{t_0}^{t}\,A\right) \quad \textit{pro } t\in[t_0,b]\,,\\ |x(t)| &\le c_A\left(|\widetilde{x}|+2\,\|f\|\right)\,\exp\,\left(2\,c_A\,\mathrm{var}_{t}^{t_0}\,A\right) \quad \textit{pro } t\in[a,t_0]\,. \end{aligned}\right\} \tag{8.33}$$

D ů k a z . a) Pro libovolné dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a,b]$ máme

$$\sum_{j=1}^{\nu(D)}\Big|x(\sigma_j)-f(\sigma_j)-x(\sigma_{j-1})+f(\sigma_{j-1})\Big|$$
$$=\sum_{j=1}^{\nu(D)}\Big|\int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j}\mathrm{d}[A]\,x\Big|\le\sum_{j=1}^{\nu(D)}\left[(\mathrm{var}_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j}A)\,\|x\|\right]=(\mathrm{var}_a^b\,A)\,\|x\|<\infty\,.$$

b) Nejprve si všimněme triviálního faktu, že nemůže být $c_A\le 0$. Pro $t\in(a,b]$ takové, že $|\Delta^-A(t)|<\frac{1}{2}$ máme podle lemmatu 8.8

$$\big|[I-\Delta^-A(t)]^{-1}\big|\le\frac{1}{1-|\Delta^-A(t)|}<2\,.$$

Protože množina $\left\{t\in[a,b]\colon|\Delta^-A(t)|>\frac{1}{2}\right\}$ je nejvýše konečná, plyne odtud, že

$$0<\sup_{t\in(a,b]}\big|[I-\Delta^-A(t)]^{-1}\big|<\infty.$$

Podobně bychom dokázali, že je také $0<\sup\limits_{t\in[a,b)}\big|[I+\Delta^+A(t)]^{-1}\big|<\infty.$ Platí tedy (8.31).

c) Nechť x je řešení úlohy (8.13). Položme $B(a)=A(a)$ a $B(t)=A(t-)$ pro $t\in(a,b]$. Zřejmě (viz věta 2.34) $A-B\in\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$, $A(t)-B(t)=\Delta^-A(t)$ pro $t\in(t_0,b]$,

$$\mathrm{var}_{t_0}^{b}\,(B-A)=\sum_{t\,\in\,(t_0,b]}|\Delta^-A(t)|\le\mathrm{var}_{t_0}^{b}\,A$$

a tudíž $\mathrm{var}_{t_0}^{b}\,B\le 2\,\mathrm{var}_{t_0}^{b}\,A.$ Dále, podle lemmatu 6.29 je

$$\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}\,[A-B\,]\,x=\Delta^-A(t)\,x(t)\quad\text{pro }\ t\in(t_0,b].$$

Rovnice (8.13) se tedy redukuje na

$$[I-\Delta^-A(t)]\,x(t)=\widetilde{x}+\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}\,[B\,]\,x+f(t)-f(t_0)\quad\text{pro } t\in(t_0,b]$$

a odtud snadno odvodíme nerovnost

$$|x(t)| \le K + L \int_{t_0}^{t} |x| \,\mathrm{d}\, h \quad \text{pro } \ t \in [a,b]\,,$$

kde

$$K = c_A\,(|\widetilde{x}| + 2\,\|f\|)\,, \quad L = c_A \quad \text{a} \quad h(t) = \operatorname{var}_{t_0}^{t} B\,.$$

Funkce h je neklesající na $[t_0, b]$. Dále, protože B je zleva spojitá na $(t_0, b\,]$, je podle lemmatu 2.23 funkce h také zleva spojitá na $(t_0, b\,]$. Podle zobecněného Gronwallova lemmatu 8.17 dostáváme tedy konečně první nerovnost v (8.33).

Důkaz druhé nerovnosti v (8.33) by se při pomoci varianty Gronwallovy nerovnosti ze cvičení 8.18 provedl podobně. □

8.21. Cvičení. Za předpokladů věty 8.20 dokažte podrobně nerovnosti

$$0 < \sup_{t \in [a,b)} \left|[I + \Delta^+ A(t)]^{-1}\right| < \infty$$

a

$$|x(t)| \le c_A\,\big(|\widetilde{x}| + 2\,\|f\|\big)\, \exp\,\big(2\,c_A \operatorname{var}_{t}^{t_0} A\big) \quad \text{pro } t \in [a, t_0\,]\,.$$

8.6 Spojitá závislost řešení na parametrech

Nechť $t_0 \in [a,b]$ a $A \in \mathbb{BV}([a,b], \mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ splňují (8.22) a (8.23), nechť $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$, $f \in \mathbb{G}([a,b], \mathbb{R}^n)$ a nechť x je řešení úlohy (8.13) na $[a,b]$. Dále, nechť y splňuje na $[a,b]$ rovnici

$$y(t) = \widetilde{y} + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\,[A\,]\,y + g(t) - g(t_0)\,,$$

kde $g \in \mathbb{G}([a,b], \mathbb{R}^n)$ a $\widetilde{y} \in \mathbb{R}^n$. Potom

$$\big(x(t) - y(t)\big) = \big(\widetilde{x} - \widetilde{y}\big) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\,[A\,]\,\big(x - y\big) + \big(f(t) - g(t)\big) - \big(f(t_0) - g(t_0)\big)$$

pro $t \in [a,b]$. Podle věty 8.20 tedy máme

$$\|x - y\| \le c_A\left(\big|\widetilde{x} - \widetilde{y}\big| + 2\,\big\|f - g\big\|\right)\, \exp\big(2\,c_A \operatorname{var}_a^b\, A\big) \quad \text{pro } \ t \in [a,b]\,,$$

kde $c_A \in (0,\infty)$ je definováno v (8.32). Odtud je zřejmé, že platí následující tvrzení.

8.22. Věta. *Nechť* $t_0 \in [a,b]$ *a* $A \in \mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *splňují* (8.22) *a* (8.23). *Dále, nechť* $f, f_k \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ *a* $\widetilde{x}, \widetilde{x}_k \in \mathbb{R}^n$ *pro* $k \in \mathbb{N}$. *Předpokládejme, že*

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\| = 0 \tag{8.34}$$

a

$$\lim_{k\to\infty} \widetilde{x}_k = \widetilde{x}\,. \tag{8.35}$$

Nechť x *je řešení úlohy* (8.13) *a nechť pro* $k \in \mathbb{N}$ *jsou* x_k *řešení rovnic*

$$x_k(t) = \widetilde{x}_k + \int_{t_0}^t \mathrm{d}\,[A]\,x_k + f_k(t) - f_k(t_0)$$

na $[a,b]$. *Potom*

$$\lim_{k\to\infty} \big\|x_k - x\big\| = 0\,. \tag{8.36}$$

Ve zbývající části odstavce se omezme pro jednoduchost na případ $t_0 = a$, tj. vyšetřujeme počáteční úlohu

$$x(t) = \widetilde{x} + \int_a^t \mathrm{d}\,[A]\,x + f(t) - f(a) \tag{8.37}$$

jako limitu počátečních úloh

$$x_k(t) = \widetilde{x}_k + \int_a^t \mathrm{d}\,[A_k]\,x_k + f_k(t) - f_k(a)\,, \tag{8.38}$$

kde také jádra A_k závisí na parametru $k \in \mathbb{N}$. Tento případ je poněkud složitější. Nejprve dokážeme konvergenční větu pro KS – integrály pro situaci, která není pokryta větami z kapitoly 5.

8.23. Věta. *Nechť* $f,\ f_k \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$, $A, A_k \in \mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *pro* $k \in \mathbb{N}$. *Předpokládejme, že platí* (8.34),

$$\lim_{k\to\infty} \|A_k - A\| = 0 \tag{8.39}$$

a

$$\alpha^* := \sup_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{var}_a^b A_k < \infty\,. \tag{8.40}$$

Potom

$$\lim_{k\to\infty} \left(\sup_{t\in[a,b]} \left| \int_a^t \mathrm{d}\,[A_k]\,f_k - \int_a^t \mathrm{d}\,[A]\,f \right| \right) = 0\,.$$

D ů k a z . Buď dáno $\varepsilon > 0$. Podle věty 4.6 můžeme zvolit funkci $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ takovou, že každá její komponenta je jednoduchá skoková funkce na $[a,b]$ a přitom $\|f - \varphi\| < \varepsilon$. Dále, podle (8.34) a (8.39) můžeme zvolit $k_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby současně platilo

$$\|f_k - f\| < \varepsilon \quad \text{a} \quad \|A_k - A\| < \varepsilon \quad \text{pro } k \ge k_0.$$

Pro dané $t \in [a,b]$ a $k \ge k_0$ máme podle vět 6.17 a 6.24

$$\begin{aligned}
&\Big| \int_a^t \mathrm{d}\,[A_k]\, f_k - \int_a^t \mathrm{d}\,[A]\, f \Big| \\
&\quad \le \Big| \int_a^t \mathrm{d}\,[A_k]\, \big(f_k - \varphi\big) \Big| + \Big| \int_a^t \mathrm{d}\,\big[A_k - A\,\big]\, \varphi \Big| + \Big| \int_a^t \mathrm{d}\,[A]\, \big(\varphi - f\big) \Big| \\
&\quad \le (\mathrm{var}_a^b\, A_k)\, \|f_k - \varphi\| + 2\, \|A_k - A\|\, \|\varphi\|_{\mathbb{BV}} + (\mathrm{var}_a^b\, A)\, \|\varphi - x\| \\
&\quad \le \alpha^* \big(\|f_k - f\| + \|f - \varphi\|\big) + 2\, \|A_k - A\|\, \|\varphi\|_{\mathbb{BV}} + (\mathrm{var}_a^b\, A)\, \|\varphi - f\| \\
&\quad \le \big(2\,\alpha^* + 2\, \|\varphi\|_{\mathbb{BV}} + \mathrm{var}_a^b\, A\big)\, \varepsilon = K\, \varepsilon,
\end{aligned}$$

kde $K = \big(2\,\alpha^* + 2\,\|\varphi\|_{\mathbb{BV}} + \mathrm{var}_a^b\, A\big) \in (0,\infty)$ nezávisí ani na k, ani na t. Tím je věta dokázána. $\square$

Dále, je třeba dokázat následující pomocné tvrzení.

8.24. Lemma. *Nechť* $A,\ A_k \in \mathbb{BV}([a,b], \mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *pro* $k \in \mathbb{N}$. *Dále, předpokládejme, že platí* (8.22) *(kde* $t_0 = a$*) a* (8.39).

Potom existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé* $t \in (a,b]$ *a každé* $k \ge k_0$ *platí*

$$\det\big[I - \Delta^- A_k(t)\big] \ne 0 \tag{8.41}$$

a

$$\sup_{t \in (a,b]} \big|[I - \Delta^- A_k(t)]^{-1}\big| < 2\, c_A, \tag{8.42}$$

kde $c_A \in (0,\infty)$ *je konstanta definovaná v* (8.32).

D ů k a z . Díky (8.39) platí podle lemmatu 4.11 $\lim\limits_{k\to\infty} |\Delta^- A_k - \Delta^- A| = 0$. Můžeme tedy zvolit $k_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby bylo

$$|\Delta^- A_k(t) - \Delta^- A(t)| < \frac{1}{4\, c_A} \quad \text{pro } \ t \in [a,b] \ \text{ a } \ k \ge k_0\,. \tag{8.43}$$

Nechť $t \in [a,b]$ a $k \ge k_0$ jsou dány. Snadno ověříme, že platí rovnost

$$I - \Delta^- A_k(t) = \big[I - \Delta^- A(t)\big]\, \big[I - T_k(t)\big],$$

kde

$$T_k(t) = \big[I - \Delta^- A(t)\big]^{-1} \big(\Delta^- A_k(t) - \Delta^- A(t)\big).$$

Vzhledem k předpokladu (8.22) je tudíž matice $I - \Delta^- A_k(t)$ regulární tehdy a jen tehdy, když je regulární matice $I - T_k(t)$.

Podle (8.32) a (8.43) máme

$$|T_k(t)| = \big|\big[I - \Delta^- A(t)\big]^{-1}\big|\,\big|\Delta^- A_k(t) - \Delta^- A(t)\big| < \tfrac{1}{4}.$$

Lemma 8.8 tedy zaručuje, že matice $I - T_k(t)$ a tudíž také $I - \Delta^- A_k(t)$ jsou regulární a, že platí $\big|\big[I - T_k(t)\big]^{-1}\big| < 2.$ Odtud a z (8.40) plyne

$$\big|\big[I - \Delta^- A_k(t)\big]^{-1}\big| \le \big|\big[I - T_k(t)\big]^{-1}\big|\,\big|\big[I - \Delta^- A(t)\big]^{-1}\big| < 2\,c_A.$$

Důkaz je dokončen. □

Konečně můžeme zformulovat a dokázat hlavní větu tohoto odstavce.

8.25. Věta. *Nechť* $t_0 = a,\ A,\ A_k \in \mathbb{BV}([a,b], \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)),\ f,\ f_k \in \mathbb{G}([a,b], \mathbb{R}^n),$ $\widetilde{x},\ \widetilde{x}_k \in \mathbb{R}^n$ *pro* $k \in \mathbb{N}$. *Dále, předpokládejme, že platí* (8.22), (8.34), (8.35), (8.39) *a* (8.40). *Nechť* x *je řešení úlohy* (8.37) *na* $[a,b]$.

Potom existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé* $k \ge k_0$ *má rovnice* (8.38) *jediné řešení* x_k *na* $[a,b]$ *a platí* (8.36).

D ů k a z . Podle (8.22) má rovnice (8.37) jediné řešení x na $[a,b]$. Dále podle lemmatu 8.24, existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že (8.41) platí pro $k \ge k_0$. Tudíž, pro každé $k \ge k_0$ má rovnice (8.38) jediné řešení x_k na $[a,b]$. Položme

$$w_k = (x_k - f_k) - (x - f) \tag{8.44}$$

Potom

$$w_k(t) = \widetilde{w}_k + \int_a^t \mathrm{d}\,[A_k]\, w_k + h_k(t) - h_k(a) \quad \text{pro } k \in \mathbb{N} \quad \text{a} \quad t \in [a,b],$$

kde $\widetilde{w}_k = (\widetilde{x}_k - f_k(a)) - (\widetilde{x} - f(a))$ a

$$h_k(t) = \int_a^t \mathrm{d}\,[A_k - A]\,(x - f) + \Big(\int_a^t \mathrm{d}\,[A_k]\, f_k - \int_a^t \mathrm{d}\,[A]\, f\Big). \tag{8.45}$$

Chceme dokázat, že

$$\lim_{k\to\infty} \|w_k\| = 0. \tag{8.46}$$

Podle věty 8.20, lemmatu 8.24 a (8.40) je

$$|w_k(t)| \leq 2\, c_A \left(|\widetilde{w}_k| + \|h_k\|\right) \exp\big(4\, c_A\, \alpha^*\big) \quad \text{pro } \ t \in [a,b]. \tag{8.47}$$

Stačí tudíž dokázat, že

$$\lim_{k\to\infty} |\widetilde{w}_k| = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{k\to\infty} |h_k| = 0. \tag{8.48}$$

Nejprve si povšimněme, že první vztah z (8.48) plyne okamžitě z předpokladů (8.34) and (8.35). Dále, podle věty 8.23 je

$$\lim_{k\to\infty} \Big| \int_a^t \mathrm{d}\,[A_k]\, f_k - \int_a^t \mathrm{d}\,[A\,]\, f \Big\| = 0. \tag{8.49}$$

Současně, podle věty 6.24 máme

$$\Big| \int_a^t \mathrm{d}\,[A_k - A]\,(x-f) \Big| \leq 2\, \|A_k - A\|_\infty\, \|x-f\|_{\mathbb{BV}} \quad \text{pro } \ t \in [a,b].$$

Protože $(x-f) \in \mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ podle (8.31), plyne odtud díky (8.39), že platí také

$$\lim_{k\to\infty} \Big\| \int_a^t \mathrm{d}[A_k - A]\,(x-f) \Big\| = 0. \tag{8.50}$$

Souhrnem, podle (8.45) a (8.49)–(8.50), dostáváme $\lim\limits_{k\to\infty} \|h_k\|_\infty = 0$. Platí tedy (8.48) a vzhledem k (8.47) tudíž také (8.46).

Podle (8.44) je $x_k - x = w_k + \big(f_k - f\big)$. Tvrzení věty tudíž plyne z (8.34) a (8.46). □

8.7 Fundamentální matice

Zobecněním homogenních systémů lineárních obyčejných diferenciálních rovnic je rovnice

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t \mathrm{d}\,[A\,]\, x\,. \tag{8.51}$$

Nechť $A \in \mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$, $t_0 \in [a,b]$ a nechť platí (8.22) a (8.23). Potom podle věty 8.15 (kde $f(t) \equiv f(a)$ na $[a,b]$) má rovnice (8.51) pro každé $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$ právě jedno řešení x na $[a,b]$ takové, že $x(t_0) = \widetilde{x}$. Naopak, pro dané $t_0 \in [a,b]$ můžeme každému řešení x přiřadit hodnotu $x(t_0) \in \mathbb{R}^n$. Je zřejmé, že tento vztah mezi řešeními rovnice (8.51) a vektorovým prostorem je vzájemně jednoznačný. Snadno ověříme, že jsou-li x, y řešení rovnice (8.51) na $[a,b]$ a $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^n$, pak $\alpha\,x+\beta\,y$ je také řešení (8.51) na $[a,b]$. Tyto úvahy můžeme shrnout do následujícího tvrzení.

8.26. Věta. *Nechť* $A\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *a nechť platí* (8.22) *a* (8.23). *Potom množina řešení rovnice* (8.51) *je lineární a tvoří* n*– dimensionální podprostor prostoru* $\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$. □

Nyní ukážeme, že i pro zobecněné lineární diferenciální rovnice existuje obdoba fundamentální matice.

8.27. Definice. Maticová funkce $X:[a,b]\to\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ se nazývá *fundamentální matice rovnice* (8.51) na intervalu $[a,b]$ jestliže splňuje rovnost

$$X(t)=X(s)+\int_s^t \mathrm{d}\,[A]\,X \quad \text{pro } t,s\in[a,b] \tag{8.52}$$

a $det\,X(t)\neq 0$ pro alespoň jedno $t\in[a,b]$.

8.28. Lemma. *Nechť* $A\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$, $t_0\in[a,b]$ *a nechť platí* (8.22) *a* (8.23). *Potom pro každou matici* $\widetilde{X}\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ *existuje jednoznačně určená maticová funkce* $X_{t_0}\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *taková, že platí*

$$X_{t_0}(t)=\widetilde{X}+\int_{t_0}^t \mathrm{d}\,[A]\,X_{t_0} \quad \textit{pro } t\in[a,b]\,. \tag{8.53}$$

D ů k a z . Pro $k=1,2,\dots,n$ označme k–tý sloupec matice $\widetilde{X}$ jako $\widetilde{x}_k$. Máme tedy $\widetilde{x}_k\in\mathbb{R}^n$ pro $k=1,2,\dots,n$ a $\widetilde{X}=\big(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,\dots,\widetilde{x}_n\big)$. Podle věty 8.15 pro každé $k\in\{1,2,\dots,n\}$ existuje právě jedna funkce $x_k\in\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ vyhovující rovnici

$$x_k(t)=\widetilde{x}_k+\int_{t_0}^t \mathrm{d}\,[A]\,x_k \quad \text{pro } t\in[a,b]\,.$$

Funkce $X_{t_0}(t)=\big(x_1(t),x_2(t),\dots,x_n(t)\big)$ (tj. maticová funkce se sloupci x_k pro $k=1,2,\dots,n$) vyhovuje tedy rovnici (8.53) a je určena jednoznačně. □

8.29. Poznámka. Speciálně, jestliže je $\det\widetilde{X}\neq 0$, pak je pro každé $s\in[a,b]$ maticová funkce X_s určená lemmatem 8.28 fundamentální maticí rovnice (8.51).

8.30. Lemma. *Nechť* $A\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *a nechť platí* (8.22) *a* (8.23). *Potom pro libovolnou fundamentální matici* X *rovnice* (8.51) *je*

$$\det\,X(t)\neq 0 \quad \textit{pro každé } t\in[a,b]. \tag{8.54}$$

D ů k a z . Nechť X je fundamentální matice rovnice (8.51) na $[a,b]$ a nechť (8.54) neplatí. Potom existují body $t_0, t_1 \in [a,b]$ takové, že

$$\det X(t_0) \neq 0 \quad \text{a} \quad \det X(t_1) = 0\,.$$

Z druhé rovnosti plyne, že sloupce $x_1(t_1), x_2(t_2), \dots, x_n(t_1)$ matice $X(t_1)$ jsou lineárně závislé. Existují tedy koeficienty $c_1, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\sum_{k=1}^{n} |c_k| > 0 \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^{n} c_k\, x_k(t_1) = 0\,.$$

Položme $x(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, x_k(t)$ pro $t \in [a,b]$. Potom x je zřejmě řešením rovnice (8.51) a $x(t_1) = 0$. Dosazením $t = t_1$ do (8.51) a odečtením takto získané rovnosti od (8.51) zjistíme, že x splňuje rovnici

$$x(t) = \int_{t_1}^{t} \mathrm{d}\,[A]\, x \quad \text{pro } t \in [a,b].$$

Protože stejnou rovnici splňuje i identicky nulová funkce, plyne odtud podle věty 8.15, že musí být $x = 0$ na $[a,b]$. Tedy také

$$x(t_0) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, x_k(t_0) = 0 \quad \text{pro } t \in [a,b]\,,$$

což ovšem, vzhledem k předpokladům $\det X(t_0) \neq 0$ a $\sum_{k=1}^{n} |c_k| > 0$, není možné.

□

Budeme potřebovat, aby fundamentální matice X_{t_0} byla definována na $[a,b]$ pro každé $t_0 \in [a,b]$. K tomu je nutno zesílit předpoklady (8.22) a (8.23) na

$$\left.\begin{aligned} &\det\big[I - \Delta^{-} A(t)\big] \neq 0 \quad \text{pro každé } t \in (a,b] \\ \text{a} \quad &\det\big[I + \Delta^{+} A(s)\big] \neq 0 \quad \text{pro každé } s \in [a,b)\,. \end{aligned}\right\} \tag{8.55}$$

Následující věta je důsledkem lemmat 8.28 a 8.30.

8.31. Věta. *Nechť* $A \in \mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *splňuje* (8.55). *Potom existuje právě jedna maticová funkce* $U:[a,b]\times[a,b]\to\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ *taková, že platí*

$$U(t,s) = I + \int_s^t \mathrm{d}\,[A(\tau)]\,U(\tau,s) \quad \textit{pro } \ t,s \in [a,b]\times[a,b]\,. \tag{8.56}$$

Pro každé $t_0 \in [a,b]$ *je funkce* $U(.,t_0): t \in [a,b] \to U(t,t_0) \in \mathbb{R}^n$ *fundamentální matice rovnice* (8.51).

Funkce U *má navíc tyto vlastnosti:*

(i) $U(.,s) \in \mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *pro každé* $s \in [a,b]$,

(ii) $U(t,t) = I$ *pro každé* $t \in [a,b]$,

(iii) $\det U(t,s) \neq 0$ *pro všechna* $t,s \in [a,b]$.

D ů k a z . Pro každé $s \in [a,b]$ existuje podle lemmatu 8.28 právě jedna maticová funkce $X_s \in \mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ taková, že platí

$$X_s(t) = I + \int_s^t \mathrm{d}\,[A]\,X_s \quad \text{pro } \ t \in [a,b].$$

Definujme $U(t,s) = X_s(t)$ pro $t,s \in [a,b]$. Potom U splňuje (8.56) a $U(t,t) = I$ pro $t \in [a,b]$. Odtud plyne, že pro každé $t_0 \in [a,b]$ je $U(.,t_0)$ fundamentální matice rovnice (8.51) na $[a,b]$. Konečně, podle lemmatu 8.30 je $\det U(t,s) \neq 0$ pro všechna $t,s \in [a,b]$. □

8.32. Věta. *Nechť* $A \in \mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$, $t_0 \in [a,b]$, $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$, *nechť platí* (8.55) *a nechť maticová funkce* U *je určena větou* 8.31. *Potom* $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ *je řešení počáteční úlohy*

$$x(t) = \widetilde{x} + \int_s^t \mathrm{d}\,[A]\,x \tag{8.57}$$

na intervalu $[a,b]$ *tehdy a jen tehdy, když*

$$x(t) = U(t,t_0)\,\widetilde{x} \quad \textit{pro } \ t \in [a,b]\,. \tag{8.58}$$

D ů k a z . a) Dosadíme-li (8.58) do $\displaystyle\int_{t_0}^t \mathrm{d}\,[A]\,x$ a využijeme-li (8.56), dostaneme

$$\int_{t_0}^t \mathrm{d}\,[A]\,x = \int_{t_0}^t \mathrm{d}\,[A(\tau)]\,U(\tau,s)\,\widetilde{x} = \big(U(t,t_0) - I\big)\,\widetilde{x} = x(t) - \widetilde{x},$$

tj. funkce x definovaná vztahem (8.58) je řešení rovnice (8.57).

b) Obrácená implikace plyne z jednoznačnosti řešení rovnice (8.57) (viz věta 8.15). □

8.33. Definice. Nechť $A \in \mathbb{BV}([a,b], \mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ a nechť platí (8.55). Potom maticovou funkci U určenou větou 8.31 nazýváme *Cauchyova matice* rovnice (8.51).

Cauchyova matice U je funkce dvou proměnných. Připomeňme některá označení užívaná pro funkce dvou proměnných.

8.34. Označení. Nechť $F : [a,b] \times [a,b] : \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$. Potom pro dané $\tau \in [a,b]$ symboly $F(\tau,.)$ resp. $F(.,\tau)$ značí funkce jedné proměnné

$$F(\tau,.) : s \in [a,b] \to F(\tau,s) \text{ resp. } F(.,\tau) : t \in [a,b] \to F(t,\tau)\,.$$

Podobně

$$F(\tau,s+) = \lim_{\delta\to 0+} F(\tau, s+\delta) \quad \text{a} \quad F(\tau,s-) = \lim_{\delta\to 0+} F(\tau, s-\delta)\,.$$

8.35. Důsledek. *Nechť* $A \in \mathbb{BV}([a,b], \mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$, $t_0 \in [a,b]$ *a* $\widetilde{X} \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$. *Dále, nechť platí* (8.55) *a nechť* U *je Cauchyova matice rovnice* (8.51). *Potom maticová funkce* $X : [a,b] \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ *splňuje rovnici*

$$X(t) = \widetilde{X} + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\,[A]\,X \tag{8.59}$$

na intervalu $[a,b]$ *tehdy a jen tehdy, když*

$$X(t) = U(t,t_0)\,\widetilde{X} \quad \textit{pro} \;\; t \in [a,b]\,. \tag{8.60}$$

D ů k a z . Pro každý sloupec x_k, $k = 1,2,\ldots,n$, maticové funkce X platí podle věty 8.32

$$x_k(t) = U(t,t_0)\,\widetilde{x}_k \quad \text{pro} \;\; t, t_0 \in [a,b],$$

kde $\widetilde{x}_k$ jsou sloupce matice $\widetilde{X}$. Odtud tvrzení okamžitě plyne. □.

8.36. Věta. *Nechť* $A \in \mathbb{BV}([a,b], \mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$, *nechť platí* (8.55) *a nechť* U *je Cauchyova matice rovnice* (8.51). *Potom vztahy*

$$U(t,r)\,U(r,s) = U(t,s) \tag{8.61}$$

$$(U(t,r))^{-1} = U(r,t) \tag{8.62}$$

platí pro libovolnou trojici bodů t, s, r *z intervalu* $[a,b]$.

D ů k a z . a) Pro libovolná $t, s, r \in [a, b]$ máme podle (8.56)

$$\begin{aligned} U(t,s) &= I + \int_s^t \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]\,U(\tau,s) \\ &= I + \int_s^r \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]\,U(\tau,s) + \int_r^t \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]\,U(\tau,s) \\ &= U(r,s) + \int_r^t \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]\,U(\tau,s)\,. \end{aligned}$$

Označíme-li sloupce matice U symboly u_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, zjistíme, že pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$ a $r, s \in [a, b]$ je funkce $x(t) = u_k(t, s)$ řešením rovnice

$$x(t) = u_k(r,s) + \int_r^t \mathrm{d}\,[A\,]\,x$$

na $[a, b]$. Podle věty 8.32 tudíž platí

$$u_k(t,s) = U(t,r)\,u_k(r,s) \quad \text{pro } k = 1, 2, \ldots, n \quad \text{a} \quad t, s, r \in [a, b]\,.$$

Odtud už vztah (8.61) okamžitě plyne.

b) Speciálně, jestliže $t = s$, pak podle věty 8.31 dostáváme $U(t, r)\,U(r, t) = I$ pro každé $r \in [a, b]$. Platí tedy (8.62). □

8.37. Poznámka. Nechť U je Cauchyova matice rovnice (8.51). Potom podle věty 8.36 je

$$U(t,s) = U(t,a)\,U(a,s) = U(t,a)\,(U(s,a))^{-1} \quad \text{pro } t, s \in [a, b]\,.$$

Označíme-li tedy $X(t) = U(t, a)$, bude platit $U(t, s) = X(t)\,(X(s))^{-1}$ pro $t, s \in [a, b]$. Připomeňme, že X je fundamentální matice rovnice (8.51).

Ve zbývající části tohoto odstavci uvedeme ještě několik dalších vlastností Cauchyovy matice rovnice (8.51).

8.38. Věta. *Nechť* $A \in \mathbb{BV}([a, b], \mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$, *nechť platí* (8.55) *a nechť* U *je Cauchyova matice rovnice* (8.51). *Potom platí*

$$\left.\begin{aligned} U(t+,s) &= \big[I + \Delta^+ A(t)\big]\,U(t,s) && \textit{pro } t \in [a,b),\ s \in [a,b]\,, \\ U(t-,s) &= \big[I - \Delta^- A(t)\big]\,U(t,s) && \textit{pro } t \in (a,b],\ s \in [a,b]\,, \\ U(t,s+) &= U(t,s)\,\big[I + \Delta^+ A(s)\big]^{-1} && \textit{pro } t \in [a,b],\ s \in [a,b)\,, \\ U(t,s-) &= U(t,s)\,\big[I - \Delta^+ A(s)\big]^{-1} && \textit{pro } t \in [a,b],\ s \in (a,b]\,. \end{aligned}\right\} \qquad (8.63)$$

D ů k a z . a) První dva vztahy odvodíme jestliže do vztahů (8.21) z lemmatu 8.13 dosadíme postupně za x sloupce maticové funkce U.

b) Nechť $t \in [a,b]$, $s \in [a,b)$ a $\delta \in (b-s)$. Potom podle (8.56) máme

$$\begin{aligned} U(t,s+\delta) - U(t,s) &= \int_{s+\delta}^{t} \mathrm{d}\,[A(\tau)]\, U(\tau,s+\delta) - \int_{s}^{t} \mathrm{d}\,[A(\tau)]\, U(\tau,s) \\ &= \int_{s+\delta}^{t} \mathrm{d}\,[A(\tau)]\, \big(U(\tau,s+\delta) - U(\tau,s)\big) - \int_{s}^{s+\delta} \mathrm{d}\,[A(\tau)]\, U(\tau,s) \end{aligned}$$

Maticová funkce $Y(t) = U(t,s+\delta) - U(t,s)$ tedy splňuje rovnici

$$Y(t) = \widetilde{Y} + \int_{s+\delta}^{t} \mathrm{d}\,[A(\tau)]\, Y(\tau) \quad \text{pro } t \in [a,b]\,,$$

kde

$$\widetilde{Y} = -\int_{s}^{s+\delta} \mathrm{d}\,[A(\tau)]\, U(\tau,s)\,.$$

Podle důsledku 8.35 tudíž máme

$$\begin{aligned} U(t,s+\delta) - U(t,s) = Y(t) &= U(t,s+\delta)\, \widetilde{Y} \\ &= -U(t,s+\delta) \int_{s}^{s+\delta} \mathrm{d}\,[A(\tau)]\, U(\tau,s)\,. \end{aligned}$$

Limitním přechodem $\delta \to 0+$ při použití Hakeovy věty 6.39 odtud dostaneme

$$U(t,s+) - U(t,s) = -U(t,s+)\, \Delta^{+}A(s)\, U(s,s) = -U(t,s+)\, \Delta^{+}A(s)\,.$$

neboli $U(t,s) = U(t,s+)\, \big[I + \Delta^{+}A(s)\big]$. Odtud okamžitě plyne platnost třetího vztahu z (8.63). Zbývající rovnost bychom dokázali analogicky. □

8.39. Věta. *Nechť* $A \in \mathbb{BV}([a,b], \mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$, *nechť platí* (8.55) *a nechť* U *je Cauchyova matice rovnice* (8.51). *Potom existuje* $M \in (0,\infty)$ *takové, že platí*

$$|U(t,s)| + \operatorname{var}_a^b U(.,s) + \operatorname{var}_a^b U(t,.) \le M \quad \textit{pro } t,s \in [a,b]\,. \tag{8.64}$$

D ů k a z . a) Pro $k = 1,2,\ldots,n$ označme symbolem e_k k – tý sloupec jednotkové matice I. Potom $|e_k| = 1$ pro každé $k = 1,2,\ldots,n$. Podle věty 8.20 máme

$$|u_k(t,s)| \le M_1 := c_A\, \exp\big(2\, c_A \operatorname{var}_a^b A\big) < \infty \text{ pro } t,s \in [a,b] \text{ a } k = 1,2,\ldots,n,$$

kde $c_A \in (0,\infty)$ je definováno v (8.32). Tudíž

$$|U(t,s)| = \max_{k=1,2,\ldots,n} |u_k(t,s)| \le M_1 \quad \text{pro } t,s \in [a,b]. \tag{8.65}$$

b) Nechť $t_1, t_2, s \in [a,b]$ a $t_1 \le t_2$. Potom

$$|u_k(t_2,s) - u_k(t_1,s)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]\, u_k(\tau,s) \right| \le M_1 \operatorname{var}_{t_1}^{t_2} A\,.$$

Pro libovolné $s \in [a,b]$, $k = 1, 2, \dots, n$ a libovolné dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a,b]$ tedy máme

$$V(u_k(.,s), \boldsymbol{\sigma}) \le M_1 \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \operatorname{var}_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} A = M_1 \operatorname{var}_a^b A =: M_2 < \infty$$

a proto

$$\operatorname{var}_a^b U(.,s) \le \max_{k=1,2,\dots,n} \operatorname{var}_a^b u_k(.,s) \le M_2 \quad \text{pro} \;\; s \in [a,b]\,. \tag{8.66}$$

c) Nechť $t, s_1, s_2 \in [a,b]$ a $s_1 \le s_2$. Potom

$$\begin{aligned} &u_k(t,s_2) - u_k(t,s_1) \\ &= \int_{s_2}^{t} \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]\, u_k(\tau,s_2) - \int_{s_2}^{t} \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]\, u_k(\tau,s_1) - \int_{s_1}^{s_2} \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]\, u_k(\tau,s_1) \\ &= -\int_{s_1}^{s_2} \mathrm{d}\,[A(\tau)\,] u_k(\tau,s_1) + \int_{s_2}^{t} \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]\big(u_k(\tau,s_2) - u_k(\tau,s_1)\big)\,, \end{aligned}$$

Funkce $x(t) = u_k(t,s_2) - u_k(t,s_1)$ splňuje tedy na $[a,b]$ rovnici

$$x(t) = -\int_{s_1}^{s_2} \mathrm{d}\,[A(\tau)\,] u_k(\tau,s_1) + \int_{s_2}^{t} \mathrm{d}\,[A\,]\, x$$

Podle věty 8.32 tedy pro každé $k = 1, 2, \dots, n$ máme

$$u_k(t,s_2) - u_k(t,s_1) = -U(t,s_2)\Big(\int_{s_1}^{s_2} \mathrm{d}\,[A(\tau)\,] u_k(\tau,s_1) \Big) \;\; \text{pro}\; t \in [a,b]$$

a tudíž $|u_k(t,s_2) - u_k(t,s_1)| \le M_1^2 \operatorname{var}_{s_1}^{s_2} A$ pro $k = 1, 2, \dots, n$. Pro libovolné $t \in [a,b]$, $k = 1, 2, \dots, n$ a libovolné dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a,b]$ tedy máme

$$V(u_k(t,.), \boldsymbol{\sigma}) \le M_1^2 \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \operatorname{var}_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} A = M_1^2 \operatorname{var}_a^b A =: M_3 < \infty$$

a proto

$$\operatorname{var}_a^b U(t,.) \le \max_{k=1,2,\dots,n} \operatorname{var}_a^b u_k(t,.)| \le M_2 \quad \text{pro} \;\; t \in [a,b]\,. \tag{8.67}$$

d) Podle (8.64)–(8.66) tvrzení věty platí pro $M = M_1 + M_2 + M_3$. □

Pro funkce dvou proměnných je možno definovat pojem variace několika různými způsoby. Pro nás je zajímavá definice Vitaliova.

8.40. Definice. Nechť $F:[a,b]\times[a,b]\to\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$. Pro daná dělení $\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\rho}$ intervalu $[a,b]$, $j=1,2,\dots,\nu(\boldsymbol{\sigma})$ a $k=1,2,\dots,\nu(\boldsymbol{\rho})$ položme

$$\Delta_{j,k}(F;\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\rho}) = F(\sigma_j,\rho_k)-F(\sigma_{j-1},\rho_k)-F(\sigma_j,\rho_{k-1})+F(\sigma_{j-1},\rho_{k-1}).$$

Potom veličina

$$v(F) = \sup_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\rho}\in\mathscr{D}[a,b]} \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\sum_{k=1}^{\nu(\boldsymbol{\rho})} \left|\Delta_{j,k}(F;\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\rho})\right|$$

se nazývá *Vitaliova variace* funkce F na intervalu $[a,b]\times[a,b]$.

8.41. Věta. *Nechť* $A\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$, *nechť platí* (8.55) *a nechť* U *je Cauchyova matice rovnice* (8.51). *Potom* $v(U)<\infty$.

D ů k a z. Mějme dvě libovolná dělení $\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\rho}$ intervalu $[a,b]$. Podle věty 8.36 (viz též poznámka 8.37 je $U(t,s)=U(t,a)\,U(a,s)$ pro $t,s\in[a,b]$. Pro libovolná $j=1,2,\dots,\nu(\boldsymbol{\sigma})$ a $k=1,2,\dots,\nu(\boldsymbol{\rho})$ tedy máme

$$\begin{aligned}
\left|\Delta_{j,k}(F;\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\rho})\right| &= \Big|\big[U(\sigma_j,a)-U(\sigma_{j-1},a)\big]\,U(a,\rho_k)\\
&\qquad - \big[U(\sigma_j,a)-U(\sigma_{j-1},a)\big]\,U(a,\rho_{k-1})\Big|\\
&\le \Big|\big[U(\sigma_j,a)-U(\sigma_{j-1},a)\big]\,U(a,\rho_k)\Big|\\
&\qquad + \Big|\big[U(\sigma_j,a)-U(\sigma_{j-1},a)\big]\,U(a,\rho_{k-1})\Big|\\
&\le \operatorname{var}_a^b U(.,a)\,\big(|U(a,\rho_k)|+|U(a,\rho_{k-1})|\big) \le 2\,M^2,
\end{aligned}$$

kde $M<\infty$ bylo určeno ve větě 8.39. □

8.8 Nehomogenní rovnice

Vraťme se nyní k nehomogenní počáteční úloze

$$x(t) = \widetilde{x} + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\,[A]\,x + f(t) - f(t_0). \tag{8.13}$$

Budeme předpokládat, že $A \in \mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ splňuje (8.55). Pro libovolná $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$ a $f \in \mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ existuje podle věty 8.15 jediné řešení x úlohy (8.13) a toto řešení má konečnou variaci na $[a,b]$. Všichni však tušíme, že toto tvrzení lze rozšířit i na obecnější případ $f \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$. To je realizováno následující větou, která zahrnuje i vyjádření řešení úlohy (8.13) ve tvaru připomínajícím formuli *variace konstant* známé z teorie obyčejných diferenciálních rovnic.

8.42. Věta. *Nechť* $t_0 \in [a,b]$ *a* $A \in \mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *splňují* (8.55) *a nechť* U *je Cauchyova matice rovnice* (8.51) *určená větou* 8.31.

Potom rovnice (8.57) *má pro každé* $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$ *a každé* $f \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ *jediné řešení* x *na* $[a,b]$. *Toto řešení je dáno formulí*

$$\left.\begin{aligned} & x(t) = U(t,t_0)\,\widetilde{x} + f(t) - f(t_0) - \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}_s[U(t,s)]\,\big(f(s)-f(t_0)\big) \\ & \qquad\qquad \textit{pro}\ \ t \in [a,b]. \end{aligned}\right\} \tag{8.68}$$

Je zřejmé, že pro podrobný důkaz je nutné něco vědět o integrálních operátorech typu

$$\mathscr{U} : x \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n) \to y(t) = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}_s[K(t,s)]\,x(s), \tag{8.69}$$

kde funkce K má stejné vlastnosti jako Cauchyova matice příslušné homogenní rovnice a symbol d_s naznačuje, že integrujeme funkce proměnné s a t je zde parametr. Vzhledem k vlastnostem funkce U popsaným v předešlé kapitole je vidět, že pro každou funkci $x \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ je její obraz $y = \mathscr{U}x$ dobře definován na celém intervalu $[a,b]$. (Jde vždy o integraci funkce regulované vzhledem k funkci s konečnou variací.) Bohužel, vlastnosti operátorů tvaru (8.70) nejsou už tak na první pohled zřejmé. Navíc, abychom dokázali, že funkce x je řešením úlohy (8.13), potřebujeme umět přehodit pořadí integrace ve dvojném integrálu

$$\int_a^t \mathrm{d}\,[A(\tau)]\,\bigg(\int_{t_0}^{\tau} \mathrm{d}_s\,[U(\tau,s)]\,\big(f(s)-f(t_0)\big)\bigg).$$

tak, aby bylo možno využít vztah (8.56) definující funkci U. K tomu je nutné mít k dispozici aparát umožňující zacházení s dvojnými integrály. Ten se opírá též o pojem variace funkcí dvou proměnných zavedený v definici 8.40. Toto vše se v potřebném rozsahu už do tohoto textu nevejde. Nebudu zde tedy provádět podrobné důkazy a jenom se pokusím aspoň přiblížit jejich hlavní myšlenky. Většinou není obtížné doplnit vynechané detaily na základě znalosti postupů z předešlých kapitol. Podrobnosti týkající se variace funkcí dvou proměnných a integrálních operátorů určených takovýmito funkcemi lze najít zejména v kapitole III monografie [13] a v odstavci I.6 a kapitole II monografie [49]. Formule variace konstant pro $f\in\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ je dokázána v [49, III.2] nebo v [39, Theorem 6.17], zatímco v [52, Proposition 4.4.3] je dokázána pro f regulovanou.

Omezíme se nyní na případ $t_0=a,$ tj. hledáme řešení úlohy (8.37). Důkaz je rozdělen na 4 kroky:

Nejprve definujeme

$$K(t,s)=\begin{cases}U(t,s)\text{ když } a\le s\le s\le b,\\ U(t,t)\text{ když } a\le t\le s\le b\,.\end{cases}$$

Zřejmě $\operatorname{var}_a^b K(t,.)\le\operatorname{var}_a^t U(t,.)$ pro každé $t\in[a,b],$ $\operatorname{var}_a^b K(.,s)\le\operatorname{var}_s^b U(.,s)$ pro každé $s\in[a,b]$ a $v(K)\le v(U).$ Existuje tedy konstanta $\varkappa\in(0,\infty)$ taková, že

$$v(K)+\operatorname{var}_a^b K(t,.)+\operatorname{var}_a^b K(.,s)\le\varkappa<\infty\quad\text{pro } t,s\in[a,b].$$

Je zřejmé, že pro každé $x\in\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ je dobře definována na $[a,b]$ funkce

$$y:t\in[a,b]\to\int_a^b \mathrm{d}_s[K(t,s)]\,x(s),\tag{8.70}$$

přičemž

$$\int_a^b \mathrm{d}\,[K(t,s)]\,x(s)=\int_a^t \mathrm{d}_s[U(t,s)]\,x(s)$$

Podle [49, Theorem I.6.18] je $\operatorname{var}_a^b y\le v(K)\,\|x\|<\infty.$

Druhý krok spočívá v důkazu, že platí

$$y(t+)=\int_a^b \mathrm{d}_s\,[K(t+,s)]\,x(s)\quad\text{ když } t\in[a,b),\tag{8.71}$$

$$y(t-)=\int_a^b \mathrm{d}_s\,[K(t-,s)]\,x(s)\quad\text{ když } t\in(a,b].\tag{8.72}$$

Podle [49, Lemma I.6.14]) mají všechny funkce

$$K(t+,.)\ \text{ a }\ K(s-,0), t\in[a,b),\ s\in(a,b]$$

konečnou variaci na $[a,b]$ a tudíž jsou integrály na pravých stranách v (8.71) dobře definovány. Protože že x je na $[a,b]$ stejnoměrná limita jednoduchých skokových funkcí, stačí dokázat, že rovnosti (8.71) platí pro každou funkce typu

$$\chi_{[a,\tau]}, \chi_{[\tau,b]}, \quad \tau\in[a,b]. \tag{8.73}$$

Je=li např. $x=\chi_{[a,\tau]}$, kde $\tau\in[a,b]$, pak pro každé $t\in[a,b]$ máme (viz (6.17)) $y(t)=K(t,\tau+)-K(t,a)$ a tudíž

$$y(t+)=K(t+,\tau+)-K(t+,a) \quad \text{když } t\in[a,b)$$

a

$$y(t-)=K(t-,\tau+)-K(t-,a) \quad \text{když } t\in(a,b].$$

Na druhou stranu, máme

$$\int_a^b \mathrm{d}_s\,[K(t+,s)]\chi_{[a,\tau]}=K(t+,\tau+)-K(t+,a) \quad \text{když } t\in[a,b),$$

a

$$\int_a^b \mathrm{d}_s\,[K(t-,s)]\chi_{[a,\tau]}=K(t-,\tau+)-K(t-,a) \quad \text{když } t\in(a,b]\,,$$

tj. platí (8.73). Podobně bychom ověřili platnost relací (8.71) pro funkce tvaru $x=\chi_{[\tau,b]}$, $\tau\in[a,b]$ a tím tedy i pro každou funkci $x\in\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$.

Vidíme tedy, že funkce $x(t)$ definovaná formulí (8.68) je regulovaná na $[a,b]$ pro každou funkci $f\in\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ a každý vektor $\widetilde{x}\in\mathbb{R}^n$.

Ve třetím kroku se ukáže, že za našich předpokladů je pro každé $t\in[a,b]$ a každou funkci $f\in\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ pravdivá relace Fubiniova typu

$$\int_a^t \mathrm{d}\,[A(\tau)]\,\Big(\int_a^t \mathrm{d}_s\,[K(\tau,s)]\,\big(f(s)-f(a)\big)\Big)$$
$$=\int_a^t \mathrm{d}\left[\int_a^t \mathrm{d}\,[A(\tau)]\,K(\tau,s)\right]\,\big(f(s)-f(a)\big)\,.$$

V důkazu tohoto kroku se opět využije stejnoměrná aproximace regulovaných funkcí jednoduchými skokovými funkcemi, vzorce z příkladů 6.15 a konvergeční vlastnosti KS – integrálu. Navíc je ovšem nutno také použít vlastnosti opeárátorů tvaru $f\in\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)\to\int_a^b K(t,s)\,\mathrm{d}\,[f(s)\,]$.

Na závěr dosadíme (8.68), tj.

$$x(t)=U(t,a)\,\widetilde{x}+f(t)-f(a)-\int_a^t \mathrm{d}_s[K(t,s)\,]\,\big(f(s)-f(t_0)\big),$$

do integrálu $\displaystyle\int_a^t \mathrm{d}\,[A\,]\,x$ a, vzhledem k definici funkce $K,$ dostaneme

$$
\begin{aligned}
\int_a^t \mathrm{d}\,[A\,]\,x &= \int_a^t \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]\,U(\tau,a)\,\widetilde{x} + \int_a^t \mathrm{d}\,[A(s)\,]\,(f(s)-f(a))\\
&\qquad - \int_0^t \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]\left(\int_a^\tau \mathrm{d}_s\,[K(\tau,s)](f(s)-f(a))\right)\\
&= [U(t,a)-I]\,\widetilde{x} + \int_a^t \mathrm{d}[A(s)](f(s)-f(a))\\
&\qquad - \int_a^t \mathrm{d}_s\left[\int_a^t \mathrm{d}\,[A(\tau)]\,K(\tau,s)\right]\,(f(s)-f(a))\\
&= [U(t,a)-I]\,\widetilde{x} + \int_a^t \mathrm{d}[A(s)](f(s)-f(a))\\
&\qquad - \int_a^t \mathrm{d}_s\left[\int_a^s \mathrm{d}\,[A(\tau)]\,U(\tau,\tau)\right]\,(f(s)-f(a))\\
&\qquad - \int_a^t \mathrm{d}_s\left[\int_s^t \mathrm{d}\,[A(\tau)]\,U(\tau,s)\right]\,(f(s)-f(a))\\
&= [U(t,a)-I]\,\widetilde{x} + \int_a^t \mathrm{d}[A(s)](f(s)-f(a))\\
&\qquad -\int_a^t \mathrm{d}\,[A(s)\,]\,(f(s)-f(a)) - \int_a^t \mathrm{d}_s\,[U(t,s)-I]\,\,(f(s)-f(a))\\
&= [U(t,a)-I]\,\widetilde{x} - \int_a^t \mathrm{d}_s[U(t,s)\,]\,(f(s)-f(a))\\
&= x(t)-x(0)-f(t)+f(0)\,.
\end{aligned}
$$

Funkce x je tedy řešení úlohy (8.37) na $[a,b]$. Jeho jednoznačnost plyne z jednoznačnosti nulového řešení příslušné homogenní rovnice. Tímto je důkaz věty 8.42 dokončen.

Jestliže je funkce A zpojitá zleva na intervalu $(a,b\,]$, pak je možno vzorec (8.68) poněkud zjednodušit definujeme-li $X(t)=U(t,a)$ pro $t\in[a,b\,]$ a

$$
Y(s) = \begin{cases} U(a,s+) & \text{když } a\le s<b,\\ U(a,b) & \text{když } s=b. \end{cases} \tag{8.74}
$$

8.43. Důsledek. *Nechť* $t_0=a$ *a* $A\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *je zleva spojitá na* $[a,b\,)$ *a splňuje podmínky* (8.23). *Nechť* U *je Cauchyova matice rovnice* (8.51) *určená větou* 8.31, $X(t)=U(t,a)$ *pro pro* $t\in[a,b]$ *a* Y *je definovaná předpisem* (8.74).

Potom rovnice (8.37) *má pro každé* $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$ *a každou funkci* $f \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ *zleva spojitou na* $(a,b]$ *jediné řešení* x *na* $[a,b]$. *Toto řešení je dáno formulí*

$$x(t) = X(t)\,\widetilde{x} + X(t)\Big(\int_a^t Y\,\mathrm{d}\,f\Big) \quad \textit{pro} \;\; t \in [a,b]. \tag{8.75}$$

D ů k a z. Nechť $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$ a nechť $f \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ je zleva spojitá na $(a,b]$. Podle věty 8.42 má rovnice (8.37) jediné řešení x na $[a,b]$. Formuli (8.68) můžeme přepsat ve tvaru

$$x(t) = X(t)\,\widetilde{x} + \big(f(t)-f(a)\big) + X(t)\Big(\int_a^t \mathrm{d}\,[X^{-1}(s)]\,\big(f(s)-f(a)\big)\Big),$$

kde $X^{-1}(s) = U(a,s)$. Máme $X^{-1}(s) = -Y(s) - \Delta^+ X^{-1}(s)$ pro $s \in [a,b)$. Podle lemmatu 6.33 je pro každé $t \in [a,b]$

$$\int_a^t \mathrm{d}\,[X^{-1}]\,\big(f(s)-f(a)\big) = \int_a^t \mathrm{d}\,[Y]\,\big(f(s)-f(a)\big) - \Delta^+ X^{-1}(t)\,\big(f(t)-f(a)\big).$$

Protože X je zleva spojitá na $(a,b]$ a Y je zprava spojitá na $[a,b)$, integrací per-partes (věta 6.34) dostaneme

$$\begin{aligned} x(t) &= X(t)\,\widetilde{x} + \big(f(t)-f(a)\big) + X(t)\Big(\int_a^t \mathrm{d}\,[X^{-1}(s)]\,\big(f(s)-f(a)\big)\Big) \\ &= X(t)\,\widetilde{x} + \big(f(t)-f(a)\big) + X(t)\int_a^t Y\,\mathrm{d}\,f\,. \\ &\qquad + X(t)\,\Delta^+ X^{-1}(t)\,\big(f(t)-f(a)\big) - X(t)\,Y(t)\,\big(f(t)-f(a)\big) \end{aligned}$$

Konečně, protože

$$\begin{aligned} & X(t)\,\Delta^+ X^{-1}(t)\,\big(f(t)-f(a)\big) - X(t)\,Y(t)\,\big(f(t)-f(a)\big) \\ &\quad = X(t)\,\big(X^{-1}(t+) - X^{-1}(t)\,\big(f(t)-f(a)\big) - X(t)\,X^{-1}(t+)\,\big(f(t)-f(a)\big) \\ &\quad = -\big(f(t)-f(a)\big)\,, \end{aligned}$$

dostáváme (8.75). □

Díky větě 8.42 resp. jejímu důsledku 8.43 je již možné s úspěchem vyšetřovat např. okrajové úlohy, ve kterých se hledá funkce, která splňuje na intervalu $[a,b]$ rovnici (8.57) a navíc i nějaké dodatečné podmínky, např. dvoubodové podmínky $M\,x(a) + N\,x(b) = 0$, kde $M, N \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$. To je ale už jiná historie, která se do tohoto textu, stejně jako řada dalších témat, jako jsou souvislosti s funkcionálně–diferenciálními rovnicemi, dynamickými systémy na t.zv. časových škálách (*time scales*), aplikace na úlohy s impulsy a další, už opravdu nevejde. Jako doplňkovou literaturu k této kapitole lze doporučit např. monografie [14], [26], [39], [52] nebo články [1],[8], [9], [34], [45], [46],

Literatura

[1] S. AFONSO, E.M. BONOTTO, M. FEDERSON AND Š. SCHWABIK. Discontinuous local semiflows for Kurzweil equations leading to LaSalle's invariance principle for non-autonomous systems with impulses. *J. Differential Equations* **250** (2011) 2969–3001.

[2] M. BROKATE, P. KREJČÍ. Duality in the space of regulated functions and the play operator. *Mathematische Zeitschrift* **245** (2003) 667–688.

[3] P. DRÁBEK, A. KUFNER. *Úvod do funkcionální analýzy*. (Učební text, ZČU Plzeň, 1993) [http://www.kma.zcu.cz/0000_DATA/eBOOKs/Drabek/UFA.pdf].

[4] M. DIMIAN, P. KREJČÍ, H. LAMBA, S. MELNIK, D. RACHINSKII. Explicit solution of a market model with interacting agents: Drawdowns, drawups, financial bubbles, and stochastic resonance. In preparation.

[5] N. DUNFORD, J.T. SCHWARTZ. *Linear Operators* I, II. Interscience Publishers, New York a London, 1958 a 1963.

[6] D. FRAŇKOVÁ. Regulated functions. *Mathematica Bohemica* **116** (1991) 20–59.

[7] R. A. GORDON. *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock.* Graduate Studies in Math., AMS, Providence, Rhode Island, 1994.

[8] Z. HALAS AND M. TVRDÝ. Continuous dependence of solutions of generalized linear differential equations on a parameter. *Funct. Differ. Equ.* **16** (2009), 299–313.

[9] Z. HALAS, G. MONTEIRO AND M. TVRDÝ. Emphatic convergence and sequential solutions of generalized linear differential equations. *Mem. Differential Equations Math. Phys.* 54 (2011), 27–49.

[10] I. HALPERIN. *Introduction to the Theory of Distributions*. University of Toronto Press, Toronto, 1952.

[11] J. HAMHALTER, J. TIŠER. *Integrální počet funkcí více proměnných*. (2. vydání, učební text, Katedra matematiky, Fakulta elektrotechnická, ČVUT, Praha, 2005) [http://math.feld.cvut.cz/tiser/vyuka.htm].

[12] R. HENSTOCK. *Lectures on the Theory of Integration*. World Scientific, Singapore, 1988.

[13] T.H. HILDEBRANDT. *Theory of Integration*. Academic Press, New York-London, 1963.

[14] CH.S. HÖNIG. *Volterra Stieltjes-Integral Equations*. North Holland and American Elsevier, Mathematics Studies 16, Amsterdam and New York, 1975.

[15] CH.S. HÖNIG. Volterra Stieltjes-Integral Equations. In: *Functional Differential Equations and Bifurcation* (Proceedings of the Sao Carlos Conference 1979. Springer Lecture Notes in Mathematics) **799** (1980) 173-—216.

[16] V. JARNÍK. *Diferenciální počet* II. Academia, Praha, 1976.

[17] V. JARNÍK. *Integrální počet* II. Academia, Praha, 1976.

[18] A.N. KOLMOGOROV, S.V. FOMIN. *Základy teorie funkcí a funkcionální analýzy*. SNTL, Praha, 1975.

[19] J. KRÁL. *Teorie potenciálu*. Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1965.

[20] P. KREJČÍ. The Kurzweil integral with exclusion of negligible sets. Mathematica Bohemica **128** (2003) 277-292.

[21] P. KREJČÍ. The Kurzweil integral and hysteresis. In: *Proceedings of the International Workshop on Multi-Rate Processes and Hysteresis* (Cork, 3.4.2006 - 8.4.2006, eds: M. Mortell, R. O'Malley, A. Pokrovskii, V.Sobolev). *Journal of Physics: Conference Series* **55**, (2006) 144–154.

[22] P. KREJČÍ, J KURZWEIL. A nonexistence result for the Kurzweil integral. Mathematica Bohemica **127** (2002) 571–580.

[23] P. KREJČÍ, PH. LAURENÇOT. Generalized variational inequalities. *Journal of Convex Analysis* **9** (2002), 159-–183.

[24] P. KREJČÍ, M. LIERO. Rate independent Kurzweil processes. *Applications of Mathematics* **54** (2009) 117–145.

[25] J. KURZWEIL. *Obyčejné diferenciální rovnice. (Úvod do teorie obyčejných diferenciálních rovnic v reálném oboru.)* SNTL-Nakladatelství technické literatury, Praha, 1978. *Czechoslovak Mathematical Journal* **8(83)** (1958), 360–387.

[26] J. KURZWEIL. Generalized ordinary differential equations (Not Absolutely Continuous Solutions). Series in Real Analysis - Vol. 11, World Scientific, Singapore, 2012.

[27] J. KURZWEIL. Generalized ordinary differential equation and continuous dependence on a parameter. *Czechoslovak Mathematical Journal* **7(82)** (1957), 418–449.

[28] J. KURZWEIL. Generalized ordinary differential equations. *Czechoslovak Mathematical Journal* **8(83)** (1958), 360–387.

[29] J. LUKEŠ. *Teorie míry a integrálu*. Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1972.

[30] J. LUKEŠ. *Úvod do funkcionální analýzy*. Karolinum, Universita Karlova v Praze, 2011.

[31] J. LUKEŠ, J. MALÝ. *Measure and Integral*. matfyzpress, Praha, 1995 [http://www.mff.cuni.cz/to.en/fakulta/mfp/download/books/lukes-maly_-_measure_and_integral.pdf].

[32] R.M. MC LEOD. *The generalized Riemann integral*. Carus Monograph, No.2, Mathematical Association of America, Washington, 1980.

[33] G. MONTEIRO, M. TVRDÝ. On Kurzweil-Stieltjes integral in Banach space, *Mathematica Bohemica*, v tisku.

[34] G. MONTEIRO, M. TVRDÝ. Generalized linear differential equations in a Banach space: Continuous dependence on a parameter. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, v tisku.

[35] W. RUDIN. *Functional Analysis*. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics, New York, 1973.

[36] S. SAKS. *Theory of the Integral*. Monografie Matematyczne, Warszawa, Lwów, 1937.

[37] E. SCHECHTER. *Handbook of Analysis and its Foundations*. Academic Press, San Diego, 1997.

[38] M. SCHECHTER. *Principles of Functional Analysis*. Academic Press, New York and London, 1973.

[39] Š. SCHWABIK. *Generalized Ordinary Differential Equations*. Series in Real Analysis - Vol. 5, World Scientific, Singapore, 1992.

[40] Š. SCHWABIK. *Integrace v R (Kurzweilova teorie).* Karolinum, Universita Karlova v Praze, 1999.

[41] Š. SCHWABIK. Verallgemeinerte lineare Differentialgleichungssysteme *Časopis pro pěstování matematiky*. **96** (1971) 183–211.

[42] Š. SCHWABIK. On the relation between Young's and Kurzweil's concept of Stieltjes integral. *Časopis pro pěstování matematiky* **98** (1973) 237–251.

[43] Š. SCHWABIK. On a modified sum integral of Stieltjes type. *Časopis pro pěstování matematiky* **98** (1973) 274–277.

[44] Š. SCHWABIK. Abstract Perron-Stieltjes integral. *Mathematica Bohemica* **121** (1996), 425–447.

[45] Š. SCHWABIK. Linear Stieltjes integral equations in Banach spaces. *Mathematica Bohemica* **124** (1999), 433–457.

[46] Š. SCHWABIK. Linear Stieltjes integral equations in Banach spaces II: operator valued solutions. *Mathematica Bohemica* **125** 2000, 431–454.

[47] Š. SCHWABIK. A note on integration by parts for abstract Perron-Stieltjes integrals, *Mathematica Bohemica* **126** 2001, 613–629.

[48] Š. SCHWABIK, P. ŠARMANOVÁ. *Malý průvodce historií integrálu*. Prometheus, Praha, 1996 [http://dml.cz/handle/10338.dmlcz/400862].

[49] Š. SCHWABIK, M. TVRDÝ, O. VEJVODA. *Differential and Integral Equations: Boundary Value Problems and Adjoint.* Academia and Reidel. Praha and Dordrecht, 1979 [http://dml.cz/handle/10338.dmlcz/400391].

[50] A. SLAVÍK. Dynamic equations on time scales and generalized ordinary differential equations. *J. Math. Anal. Appl.* **385** (2011), 534–550.

[51] A.E. TAYLOR. *Úvod do funkcionální analýzy.* Academia, Praha, 1973.

[52] M. TVRDÝ. *Differential and Integral Equations in the Space of Regulated Functions.* Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics vol.25 (2002), pp. 1–104.

[53] A.J. WARD. The Perron-Stieltjes integral. *Mathematische Zeitschrift* **41** (1937), 578–604.

[54] L.C. YOUNG. An inequality of the Hölder type, connected with Stieltjes integration. *Acta Mathematica* **67** (1936), 251–282.