

# Funkce s konečnou variací

V této kapitole definujeme variaci funkce a odvodíme základní vlastnosti třídy funkcí, které mají konečnou variaci na daném uzavřeném a konečném intervalu. Funkce s konečnou variací jsou užitečné v celé řadě fyzikálních a technických problémů, v teorii pravděpodobnosti, teorii Fourierových řad, v diferenciálních rovnicích a v dalších oblastech matematiky.

## 2.1 Definice a základní vlastnosti

Nechť  $-\infty < a < b < \infty$ . Připomeňme, děleními intervalu  $[a, b]$  nazýváme konečné množiny bodů  $\sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m\}$  intervalu  $[a, b]$  takové, že

$$a = \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_m = b$$

a symbol  $\mathcal{D}[a, b]$  značí množinu všech dělení intervalu  $[a, b]$ . Dále, elementy dělení  $\sigma \in \mathcal{D}[a, b]$  jsou zpravidla značeny symboly  $\sigma_j$ ,

$$\sigma_{\nu(\sigma)} = b \quad \text{a} \quad |\sigma| = \max_{j=1,2,\dots,\nu(\sigma)} (\sigma_j - \sigma_{j-1}) \quad \text{pro } \sigma \in \mathcal{D}[a, b].$$

Jestliže  $\sigma' \supset \sigma$ , pak říkáme, že  $\sigma'$  je zjemnění  $\sigma$ .

**2.1. Definice.** Pro danou funkci  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  a dělení  $\sigma$  intervalu  $[a, b]$  definujeme

$$V(f, \sigma) = \sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} |f(\sigma_j) - f(\sigma_{j-1})| \tag{2.1}$$

a

$$\text{var}_a^b f = \sup_{\sigma \in \mathcal{D}[a,b]} V(f, \sigma). \tag{2.2}$$

Je-li  $a = b$ , definujeme  $\text{var}_a^b f = \text{var}_a^a f = 0$ . Veličinu  $\text{var}_a^b f$  nazýváme *variace funkce  $f$*  na intervalu  $[a, b]$ . Je-li  $\text{var}_a^b f < \infty$ , říkáme, že funkce  $f$  má *konečnou variaci* na  $[a, b]$ . Množinu funkcí s konečnou variací na  $[a, b]$  značíme  $\mathbb{BV}[a, b]$ .

Geometrický význam pojmu variace nám přiblíží následující tvrzení, zpravidla nazývané DRUHÁ JORDANOVA VĚTA. Dříve než ho budeme formulovat, připomeňme, jak se definuje délka křivky, která je zadána jako graf spojitě funkce  $f$  na intervalu  $[a, b]$  :

Pro každé dělení  $\sigma$  intervalu  $[a, b]$  je součet

$$\lambda(\sigma, f) := \sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} \sqrt{(\sigma_j - \sigma_{j-1})^2 + (f(\sigma_j) - f(\sigma_{j-1}))^2}.$$

roven délce lomené křivky proložené body  $[\sigma_j, f(\sigma_j)]$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , ležícími na grafu funkce  $f$ . Délka grafu  $\Lambda(f; [a, b])$  funkce  $f$  na intervalu  $[a, b]$  se pak definuje jako

$$\Lambda(f; [a, b]) = \sup_{\sigma \in \mathcal{D}[a, b]} \lambda(\sigma, f).$$

**2.2. Věta (DRUHÁ JORDANOVA VĚTA).** *Nechť  $f$  je spojitá na  $[a, b]$ . Potom má její graf na intervalu  $[a, b]$  konečnou délku právě tehdy, když  $f$  má konečnou variaci na intervalu  $[a, b]$ .*

D ů k a z . Použijeme nerovnosti

$$|\beta| \leq \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \leq |\alpha| + |\beta|, \quad (2.3)$$

kteří platí pro libovolná reálná čísla  $\alpha, \beta$ . (Odvodíme je odmocněním triviálních nerovností  $\beta^2 \leq \alpha^2 + \beta^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^2$ .) Pro libovolné dělení  $\sigma \in \mathcal{D}[a, b]$  máme podle (2.3)

$$\begin{aligned} V(f, \sigma) &= \sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} |f(\sigma_j) - f(\sigma_{j-1})| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} \sqrt{(\sigma_j - \sigma_{j-1})^2 + (f(\sigma_j) - f(\sigma_{j-1}))^2} = \lambda(\sigma, f) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} \left[ (\sigma_j - \sigma_{j-1}) + |f(\sigma_j) - f(\sigma_{j-1})| \right] = (b - a) + V(f, \sigma) \end{aligned}$$

neboli

$$V(f, \sigma) \leq \lambda(\sigma, f) \leq V(f, \sigma) + (b - a).$$

Přechodem k supremu dostaneme nerovnosti

$$\operatorname{var}_a^b f \leq \Lambda(f, [a, b]) \leq \operatorname{var}_a^b f + (b - a),$$

ze kterých tvrzení věty okamžitě plyne.  $\square$

**2.3. Příklad.** Buď  $f$  funkce spojitá na intervalu  $[a, b]$  a taková, že pro každé  $x \in (a, b)$  platí  $|f'(x)| \leq M < \infty$ , kde  $M$  nezávisí na  $x$ .

Podle věty o střední hodnotě tedy platí  $|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|$  pro všechna  $x, y \in [a, b]$  takové, že  $x \neq y$ . Pro každé dělení  $\sigma$  intervalu  $[a, b]$  tedy máme

$$V(f, \sigma) \leq M \sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} [\sigma_j - \sigma_{j-1}] = M[b - a].$$

Vidíme, že každá funkce spojitá na intervalu  $[a, b]$ , která má na jeho vnitřku  $(a, b)$  ohraničenou derivaci, má konečnou variaci.

Jestliže navíc  $|f'|$  je riemannovsky integrovatelná na intervalu  $[a, b]$  (např.  $f'$  je spojitá na  $(a, b)$ ), pak můžeme variaci funkce  $f$  na intervalu  $[a, b]$  určit. Platí totiž

$$\operatorname{var}_a^b f = (\mathbb{R}) \int_a^b |f'(x)| \, dx, \quad (2.4)$$

kde na pravé straně je Riemannův integrál. Důkaz tohoto tvrzení pochopitelně předpokládá znalost Riemannova integrálu.

Buď dáno  $\varepsilon > 0$ . Předpoklad o existenci a konečné hodnotě Riemannova integrálu  $(\mathbb{R}) \int_a^b |f'(x)| \, dx$  znamená, že existuje  $\delta > 0$  takové, že

$$\left| \sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} |f'(\xi_j)| (\sigma_j - \sigma_{j-1}) - (\mathbb{R}) \int_a^b |f'(x)| \, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.5)$$

platí pro každé dělení  $\sigma$  intervalu  $[a, b]$  takové, že  $|\sigma| < \varepsilon$  a každý výběr bodů  $\xi_j$  takových, že

$$\xi_j \in [\sigma_{j-1}, \sigma_j] \quad \text{pro } j = 1, 2, \dots, \nu(\sigma). \quad (2.6)$$

Na druhou stranu, podle definice variace existuje  $\sigma \in \mathcal{D}[a, b]$  takové, že  $|\sigma| < \varepsilon$  a

$$\operatorname{var}_a^b f \geq V(f, \sigma) > \operatorname{var}_a^b f - \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.7)$$

Podle věty o střední hodnotě existují body  $\xi_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, \nu(\sigma)$ , splňující (2.6) a takové, že

$$V(f, \sigma) = \sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} |f'(\xi_j)| (\sigma_j - \sigma_{j-1}).$$

Odtud podle (2.5) a (2.7) dostáváme, že platí

$$\begin{aligned} & \left| \text{var}_a^b f - (\mathbb{R}) \int_a^b |f'(x)| dx \right| \\ & \leq \left| \text{var}_a^b f - V(f, \sigma) \right| + \left| \sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} |f'(\xi_j)| (\sigma_j - \sigma_{j-1}) - (\mathbb{R}) \int_a^b |f'(x)| dx \right| \\ & < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Podle definice Riemannova integrálu to znamená, že platí (2.4).

**2.4. Cvičení.** (i) Dokažte, že pro libovolnou spojitou funkci  $f$  platí

$$\left( (\text{var}_a^b f)^2 + (b-a)^2 \right)^{1/2} \leq \Lambda(f, [a, b]) \leq \text{var}_a^b f + (b-a).$$

(ii) Určete  $\text{var}_a^b f$  a odhadněte délku grafu funkce  $f$ , jestliže

- $f(x) = \sin^2 x$  pro  $x \in [0, \pi]$ ,
- $f(x) = x^3 - 3x + 4$  pro  $x \in [0, 2]$ ,
- $f(x) = \cos x + x \sin x$  pro  $x \in [0, 2\pi]$ .

**2.5. Poznámka.** Z definice 2.1 je zřejmé, že pro každou funkci  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  je  $\text{var}_a^b f \geq 0$ . Dále, je-li dáno libovolné dělení  $\rho \in \mathcal{D}[a, b]$ , pak platí

$$\text{var}_a^b f = \sup_{\sigma \supset \rho} V(f, \sigma). \quad (2.8)$$

To plyne z několika elementárních pozorování: Zaprvé, protože

$$\{V(f, \sigma) : \sigma \in \mathcal{D}[a, b] \text{ a } \sigma \supset \rho\} \subset \{V(f, \sigma) : \sigma \in \mathcal{D}[a, b]\},$$

musí být  $\sup_{\sigma \supset \rho} V(f, \sigma) \leq \text{var}_a^b f$ .

Dále, díky trojúhelníkové nerovnosti pro libovolná dvě dělení  $\sigma, \sigma'$  intervalu  $[a, b]$  taková, že  $\sigma' \supset \sigma$  a funkci  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  máme  $V(f, \sigma) \leq V(f, \sigma')$ .

Konečně, je-li  $\sigma \in \mathcal{D}[a, b]$  libovolné a  $\sigma' = \sigma \cup \rho$ , pak  $\sigma' \supset \rho$  a tedy  $V(f, \sigma) \leq V(f, \sigma')$ . To znamená, že pro každé  $d \in \{V(f, \sigma) : \sigma \in \mathcal{D}[a, b]\}$  existuje  $d' \in \{V(f, \sigma) : \sigma \in \mathcal{D}[a, b] \text{ a } \sigma \supset \rho\}$  takové, že  $d \leq d'$  a tedy

$$\text{var}_a^b f \leq \sup_{\sigma \supset \rho} V(f, \sigma).$$

Platí tedy (2.8).

**2.6. Cvičení.** Dokažte následující vlastnosti variace a funkcí s konečnou variací.

(i) Je-li  $[c, d] \subset [a, b]$ , pak pro každou funkci  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  platí

$$|f(d) - f(c)| \leq \text{var}_c^d f \leq \text{var}_a^b f.$$

(ii) Funkce  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  má konečnou variaci na  $[a, b]$  právě tehdy, když existuje taková neklesající funkce  $\varphi$  na  $[a, b]$ , že

$$|f(x) - f(y)| \leq \varphi(x) - \varphi(y) \quad \text{pro } x, y \in [a, b], y \leq x.$$

(iii)  $\text{var}_a^b f = d \in \mathbb{R}$

$$\iff \left( \forall \varepsilon > 0 \exists \sigma_\varepsilon \in \mathcal{D}[a, b] : \sigma \supset \sigma_\varepsilon \implies d - \varepsilon \leq V(f, \sigma) \leq d \right).$$

(iv)  $\text{var}_a^b f = \infty \iff (\forall K > 0 \exists \sigma_K \in \mathcal{D}[a, b] : V(f, \sigma_K) \geq K)$ .

(v) Jestliže pro funkci  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  existuje  $L \in \mathbb{R}$  takové, že

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \text{platí pro všechna } x, y \in [a, b],$$

pak  $\text{var}_a^b f \leq L(b - a)$ .

(V takovém případě říkáme, že  $f$  splňuje Lipschitzovu podmínku na  $[a, b]$  nebo též, že je lipschitzovská na  $[a, b]$ .)

**2.7. Příklad.** Nechť

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x = 0, \\ x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{pro } x \in (0, 2]. \end{cases}$$

Všimněme si, že  $f(x) = 0$  právě když  $x = 0$  nebo  $x = \frac{1}{k}$  pro nějaké  $k \in \mathbb{N}$  a pro  $x \in (0, 2]$  platí

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{právě když } x = y_k = \frac{2}{4k+1}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ -x & \text{právě když } x = z_k = \frac{2}{4k-1}, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Pro dané  $n \in \mathbb{N}$  a dělení  $\sigma^n = \{0, y_n, z_n, \dots, y_1, z_1, 2\}$  dostaneme

$$\begin{aligned} V(f, \sigma^n) &= |f(0) - f(y_n)| + \sum_{k=1}^n |f(y_{k-1}) - f(z_k)| + \sum_{k=1}^n |f(y_k) - f(z_k)| \\ &= \sum_{k=1}^n (y_{k-1} + z_k) + y_n + \sum_{k=1}^n (y_k + z_k) \\ &= y_0 + 2 \sum_{k=1}^n (y_k + z_k) = 2 + 4 \sum_{k=1}^n \frac{8k}{16k^2 - 1} \geq 2 \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right). \end{aligned}$$

Je známo, že  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$ . Tudíž  $\lim_{n \rightarrow \infty} V(f, \sigma^n) = \infty$  a  $\text{var}_0^2 f = \infty$ .

Snadno určíme variaci monotonních funkcí.

**2.8. Věta.** Pro každou funkci  $f$  monotonní na  $[a, b]$  platí

$$\text{var}_a^b f = |f(b) - f(a)|.$$

D ů k a z. Je-li  $f$  nerostoucí na  $[a, b]$  a  $\sigma \in \mathcal{D}[a, b]$ , pak

$$\begin{aligned} V(f, \sigma) &= \sum_{j=1}^m [f(\sigma_{j-1}) - f(\sigma_j)] \\ &= [f(a) - f(\sigma_1)] + [f(\sigma_1) - f(\sigma_2)] + \dots \\ &\quad + [f(\sigma_{m-2}) - f(\sigma_{m-1})] + [f(\sigma_{m-2}) - f(b)] \\ &= f(a) - f(b), \end{aligned}$$

tj.  $\text{var}_a^b f = f(a) - f(b) = |f(b) - f(a)|$ .

Podobně bychom ukázali, že je-li  $f$  neklesající na  $[a, b]$ , pak

$$\text{var}_a^b f = f(b) - f(a) = |f(b) - f(a)|. \quad \square$$

**2.9. Příklady.** (i) Příkladem jednoduché funkce, která nemá ohraničenou derivaci na intervalu  $[0, 1]$  (a tudíž tvrzení z příkladu 2.3 (i) nezaručuje, že má konečnou variaci na  $[0, 1]$ ) je  $f(x) = \sqrt{x}$ . Protože je ale  $f$  rostoucí, tak podle věty 2.8, platí  $\text{var}_0^1 f = \sqrt{1}$ .

(ii) Konečnou variaci mohou mít i funkce podstatně nespojitě, jak ukazuje příklad

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{je-li } x = 0, \\ \frac{1}{k} & \text{je-li } x \in (0, 1] \text{ a } x \in (\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}] \text{ pro nějaké } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Tato funkce je zřejmě definovaná a neklesající na intervalu  $[0, 1]$ . Podle věty 2.8 je tedy  $\text{var}_0^1 f = 1$ .

**2.10. Věta.** Pro každé  $c \in [a, b]$  a každou funkci  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  platí

$$\text{var}_a^b f = \text{var}_a^c f + \text{var}_c^b f.$$

Důkaz. Buďte dány funkce  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  a bod  $c \in [a, b]$ . Pokud  $c = a$  nebo  $c = b$ , je tvrzení věty triviální. Nechť tedy  $c \in (a, b)$ .

Nechť  $\tilde{\sigma} = \{a, c, b\}$  a nechť  $\sigma$  je libovolné dělení intervalu  $[a, b]$  takové, že  $\sigma \supset \tilde{\sigma}$ . Pak nutně  $c \in \sigma$ . Dělení  $\sigma$  lze tudíž rozdělit na dělení  $\sigma'$  intervalu  $[a, c]$  a dělení  $\sigma''$  intervalu  $[c, b]$ , tj.  $\sigma = \sigma' \cup \sigma''$ , kde  $\sigma' \in \mathcal{D}[a, c]$  a  $\sigma'' \in \mathcal{D}[c, b]$ . Zřejmě pak také platí

$$V(f, \sigma) = V(f, \sigma') + V(f, \sigma''). \quad (2.9)$$

Podle poznámky 2.5 dostáváme tedy

$$\text{var}_a^b f = \sup_{\sigma \supset \tilde{\sigma}} V(f, \sigma) \leq \text{var}_a^c f + \text{var}_c^b f.$$

Na druhou stranu pro každá dvě dělení  $\sigma' \in \mathcal{D}[a, c]$  a  $\sigma'' \in \mathcal{D}[c, b]$  je jejich sjednocení  $\sigma = \sigma' \cup \sigma''$  dělením intervalu  $[a, b]$  a platí opět (2.9). Odtud plyne, že

$$\text{var}_a^c f + \text{var}_c^b f = \sup_{\sigma' \in \mathcal{D}[a, c]} V(f, \sigma') + \sup_{\sigma'' \in \mathcal{D}[c, b]} V(f, \sigma'') \leq \text{var}_a^b f.$$

Tím je důkaz věty hotov. □

**2.11. Příklad.** Buď dáno  $n \in \mathbb{N}$ . Vyšetřujme funkci

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{pro } \frac{1}{n} \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Její derivace

$$f'_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 \leq x < \frac{1}{n}, \\ \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) - \frac{\pi}{x} \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{pro } \frac{1}{n} < x \leq 2 \end{cases}$$

je ohraničená na  $(0, \frac{1}{n})$  a na  $(\frac{1}{n}, 2)$ . Zřejmě je  $\text{var}_0^{1/n} f_n = 0$ . Podle příkladu 2.3 (i) je dále  $\text{var}_{1/n}^2 f_n < \infty$ . Věta 2.10 tedy implikuje, že je také  $\text{var}_0^1 f_n < \infty$  pro každé  $n \in \mathbb{N}$ .

Na množině  $\mathbb{BV}[a, b]$  jsou přirozeným způsobem definovány operace sčítání a násobení skalárem (viz Úmluvy a označení (x)). Funkci identicky nulovou na  $[a, b]$  nazveme nulovým prvkem množiny  $\mathbb{BV}[a, b]$ . Následující tvrzení je zřejmé.

**2.12. Lemma.** *Pro libovolné dvě funkce  $f_1, f_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  a reálné číslo  $c$  platí*

$$\text{var}_a^b (f_1 + f_2) \leq \text{var}_a^b f_1 + \text{var}_a^b f_2 \quad \text{a} \quad \text{var}_a^b (c f_1) = |c| \text{var}_a^b f_1. \quad (2.10)$$

Dále,  $\text{var}_a^b f = 0$ , tehdy a jen tehdy, když  $f$  je konstantní na  $[a, b]$ .

(Stačí si totiž uvědomit, že pro každé dělení  $\sigma \in \mathcal{D}[a, b]$  platí

$$V(f_1 + f_2, \sigma) \leq V(f_1, \sigma) + V(f_2, \sigma) \quad \text{a} \quad V(c f, \sigma) = |c| V(f, \sigma)$$

a, dále, že je-li  $\text{var}_a^b f = 0$ , musí pro každé  $x \in (a, b)$  platit  $|f(x) - f(a)| = 0$ .)

**2.13. Věta.**  *$f \in \mathbb{BV}[a, b]$  tehdy a jen tehdy, když existují funkce  $f_1$  a  $f_2$  neklesající na  $[a, b]$  a takové, že platí  $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$  pro každé  $x \in [a, b]$ .*

Důkaz. Jestliže  $f_1$  a  $f_2$  jsou neklesající na  $[a, b]$  a  $f = f_1 - f_2$ , pak podle věty 2.8 mají  $f_1$  i  $f_2$  konečnou variaci na  $[a, b]$  a podle (2.10) je také  $\text{var}_a^b f < \infty$ .

Stačí tedy dokázat, že pro každou funkci  $f \in \mathbb{BV}[a, b]$  existují funkce  $f_1$  a  $f_2$  neklesající na  $[a, b]$  a takové, že  $f = f_1 - f_2$ .

Nechť tedy  $f \in \mathbb{BV}[a, b]$ . Položme

$$f_1(x) = \text{var}_a^x f \quad \text{a} \quad f_2(x) = f_1(x) - f(x) \quad \text{pro } x \in [a, b].$$

Nechť  $x, y \in [a, b]$  a  $y \geq x$ . Potom, podle věty 2.10 je  $f_1(y) = f_1(x) + \text{var}_x^y f$  a protože variace je vždy nezáporná, znamená to, že funkce  $f_1$  je neklesající na  $[a, b]$ . Dále, podle věty 2.10 máme

$$f_2(y) = f_1(x) + \text{var}_x^y f - f(y)$$

a

$$f_2(y) - f_2(x) = \text{var}_x^y f - (f(y) - f(x)) \geq 0$$

(viz cvičení 2.6 (i)). To znamená, že funkce  $f_2$  je také neklesající na  $[a, b]$  a důkaz je hotov.  $\square$

**2.14. Cvičení.** Nechť  $f \in \mathbb{BV}[a, b]$ . Dokažte, že obě funkce

$$\mathbf{p}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x = a, \\ \sup_{\sigma \in \mathcal{D}[a, x]} \sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} (f(\sigma_j) - f(\sigma_{j-1}))^+ & \text{pro } x \in (a, b] \end{cases}$$

a

$$\mathbf{n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x = a, \\ \sup_{\sigma \in \mathcal{D}[a, x]} \sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} (f(\sigma_j) - f(\sigma_{j-1}))^- & \text{pro } x \in (a, b] \end{cases}$$

jsou neklesající a nezáporné na  $[a, b]$  a platí

$$f(x) = f(a) + \mathbf{p}(x) - \mathbf{n}(x) \quad \text{a} \quad \text{var}_a^x f = \mathbf{p}(x) + \mathbf{n}(x) \quad \text{pro } x \in [a, b].$$

**2.15. Důsledek.** Pro každou funkci  $f$  s konečnou variací na  $[a, b]$  a pro všechna  $t \in [a, b]$  a  $s \in (a, b]$  existují konečné limity

$$f(t+) = \lim_{\tau \rightarrow t+} f(\tau) \quad \text{a} \quad f(s-) = \lim_{\tau \rightarrow s-} f(\tau)$$

(tj.  $f$  může mít v  $[a, b]$  pouze nespojitosti prvního druhu).

D ů k a z . Podle věty 2.13 můžeme předpokládat, že  $f$  je neklesající na  $[a, b]$ . Pro každé  $x \in [a, b]$  je  $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$  a tudíž platí také

$$f(a) \leq \sup_{x \in [a, s]} f(x) \leq f(b) \quad \text{pro každé } s \in (a, b]$$

a

$$f(a) \leq \inf_{x \in (t, b]} f(x) \leq f(b) \quad \text{pro každé } t \in [a, b)$$

Ukážeme, že

$$f(t+) = \inf_{x \in (t, b]} f(x) \quad \text{jestliže } t \in [a, b) \quad (2.11)$$

Označme  $d = \inf_{x \in (t, b]} f(x)$  a zvolme libovolné  $\varepsilon > 0$ . Potom podle definice infima existuje  $t' \in (d, b]$  takové, že je  $d \leq f(t') < d + \varepsilon$ . Vzhledem k monotónnosti funkce  $f$  odtud plyne, že nerovnost  $d \leq f(x) < d + \varepsilon$  platí pro každé  $x \in (t, t']$ . Dokázali jsme tedy vztah (2.11).

Podobně bychom ukázali, že platí také

$$f(s-) = \sup_{x \in [a, s]} f(x) \quad \text{jestliže } s \in (a, b]. \quad (2.12) \quad \square$$

## 2.2 Prostor funkcí s konečnou variací

Podle lemmatu 2.12 každá lineární kombinace funkcí s konečnou variací má také konečnou variaci. Z toho plyne, že množina  $BV[a, b]$  je lineární prostor. Ukážeme, že při vhodně zvolené normě se  $\mathbb{BV}[a, b]$  stane lineárním normovaným prostorem.

**2.16. Věta.**  $BV[a, b]$  je lineární normovaný prostor vzhledem k normě definované předpisem

$$\|f\|_{\mathbb{BV}} = |f(a)| + \text{var}_a^b f \quad \text{pro } f \in \mathbb{BV}[a, b]. \quad (2.13)$$

D ů k a z.  $\mathbb{BV}[a, b]$  je lineární prostor podle lemmatu 2.12. Dále, pro každou funkci  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  a každé  $x \in [a, b]$  platí

$$|f(x)| \leq |f(a)| + |f(x) - f(a)| \leq |f(a)| + \text{var}_a^b f \quad \text{pro } x \in [a, b].$$

(Rozmyslete si proč tomu tak je.) Tudiž

$$\|f\| \leq \|f\|_{\mathbb{BV}} < \infty \quad \text{pro } f \in \mathbb{BV}. \quad (2.14)$$

Podle lemmatu 2.12 relace

$$\|f + g\|_{\mathbb{BV}} \leq \|f\|_{\mathbb{BV}} + \|g\|_{\mathbb{BV}} \quad \text{a} \quad \|cf\|_{\mathbb{BV}} = |c| \|f\|_{\mathbb{BV}}$$

platí pro všechny funkce  $f, g \in \mathbb{BV}[a, b]$  a každé reálné číslo  $c \in \mathbb{R}$ .

Konečně, jestliže  $\|f\|_{\mathbb{BV}} = 0$ , musí být  $f(a) = 0$  a  $\text{var}_a^b f = 0$ . Podle lemmatu 2.12 je tedy  $f(x) \equiv f(a) = 0$  na  $[a, b]$ , tj.  $f$  je nulový prvek  $\mathbb{BV}[a, b]$ .

Dokázali jsme tedy, že rovnost (2.13) definuje normu na  $\mathbb{BV}[a, b]$ . □

**2.17. Poznámka.** Nerovnost (2.14) implikuje, že každá funkce, která má ohraničenou variaci na  $[a, b]$  je také ohraničená na  $[a, b]$ .

Následující tvrzení usnadňuje použití metod funkcionální analýzy při práci s funkcemi s konečnou variací.

**2.18. Věta.**  $\mathbb{BV}[a, b]$  je Banachův prostor.

D ů k a z. Podle věty 2.16 je  $\mathbb{BV}[a, b]$  lineární normovaný prostor vzhledem k normě

$$f \in \mathbb{BV}[a, b] \rightarrow \|f\|_{\mathbb{BV}} = |f(a)| + \text{var}_a^b f.$$

Zbývá tedy dokázat, že  $\mathbb{B}\mathbb{V}[a, b]$  je úplný, tj. že každá posloupnost cauchyovská v  $\mathbb{B}\mathbb{V}[a, b]$  má v  $\mathbb{B}\mathbb{V}[a, b]$  limitu. Předpokládejme tedy, že posloupnost  $\{f_n\} \subset \mathbb{B}\mathbb{V}[a, b]$  je cauchyovská v  $\mathbb{B}\mathbb{V}[a, b]$ . Potom platí

$$\left. \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : \\ n, m \geq n_\varepsilon \implies |f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_{\mathbb{B}\mathbb{V}} < \varepsilon \text{ pro } x \in [a, b]. \end{array} \right\} (2.15)$$

a) Podle (2.15) je pro každé  $x \in [a, b]$  posloupnost reálných čísel  $\{f_n(x)\}$  cauchyovská. Pro každé  $x \in [a, b]$  tedy existuje konečná limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

b) Nechť je dáno libovolné  $\varepsilon > 0$  a nechť  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  je určeno podmínkou (2.15). Potom pro každé  $x \in [a, b]$  máme také

$$|f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_{n_\varepsilon}(x)| \leq \varepsilon$$

a tudíž pro každé  $n \geq n_\varepsilon$  a každé  $x \in [a, b]$  platí

$$|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)| + |f_{n_\varepsilon}(x) - f_n(x)| < 2\varepsilon.$$

To ovšem znamená, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| = 0$$

neboli posloupnost  $\{f_n\}$  konverguje k  $f$  stejnoměrně na  $[a, b]$ .

c) Podle (2.15) existuje  $n_1 \in \mathbb{N}$  takové, že

$$\text{var}_a^b f_n \leq \|f_n\|_{\mathbb{B}\mathbb{V}} \leq \|f_{n_1}\|_{\mathbb{B}\mathbb{V}} + 1 \text{ pro } n \geq n_1.$$

Číselná posloupnost  $\{\text{var}_a^b f_n\}$  je tedy ohraničená. Podle Bolzanovy–Weierstraßovy věty z ní lze vybrat podposloupnost  $\{\text{var}_a^b f_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ , pro kterou platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{var}_a^b f_{n_k} = d < \infty,$$

tj.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N} : (k \geq k_\varepsilon \text{ a } \sigma \in \mathcal{D}[a, b]) \implies V(f_{n_k}, \sigma) < d + \varepsilon)$$

a

$$\forall \varepsilon > 0 \forall \sigma \in \mathcal{D}[a, b] : V(f, \sigma) = \lim_{k \rightarrow \infty} V(f_{n_k}, \sigma) \leq d + \varepsilon.$$

Odtud ovšem už plyne, že je

$$\operatorname{var}_a^b f = \sup_{\sigma \in \mathcal{D}[a,b]} V(f, \sigma) \leq d < \infty, \quad \text{tj. } f \in \mathbb{BV}[a, b].$$

d) Podle ((2.15)) tedy pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  takové, že

$$n, m \geq n_\varepsilon \implies V(f_n - f_m, \sigma) \leq \operatorname{var}_a^b (f_n - f_m) < \varepsilon \text{ pro } \sigma \in \mathcal{D}[a, b].$$

Tudíž, je-li  $m \geq n_\varepsilon$ , pak pro každé  $\sigma \in \mathcal{D}[a, b]$  platí

$$V(f - f_m, \sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} V(f_n - f_m, \sigma) \leq \varepsilon \text{ neboli } \operatorname{var}_a^b (f - f_m) \leq \varepsilon.$$

To ovšem znamená, že  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|f - f_m\|_{\mathbb{BV}} = 0$ , což zbývalo ještě dokázat.  $\square$

## 2.3 Konečná variace a spojitost

Podle důsledku 2.15 mohou mít funkce s konečnou variací nespojitosti pouze prvního druhu. Podívejme se nyní trochu podrobněji vlastnosti funkcí s konečnou variací související se spojitostí.

**2.19. Věta.** *Každá funkce  $f \in \mathbb{BV}[a, b]$  má nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti na intervalu  $[a, b]$ .*

Důkaz plyne z důsledku 2.15 a z následujícího lemmatu.  $\square$

**2.20. Lemma.** *Nechť  $J \subset \mathbb{R}$  je otevřený interval,  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$  a  $M$  je množina bodů nespojitosti 1. druhu funkce  $f$  v  $J$ . Potom  $M$  je nejvýše spočetná.*

Důkaz z. Označme

$$M^+ = \{x \in J : f(x+) \neq f(x)\}, \quad M^- = \{x \in J : f(x-) \neq f(x)\}$$

a

$$M_1^+ = \{x \in M^+ : f(x) < f(x+)\}, \quad M_2^+ = \{x \in M^+ : f(x) > f(x+)\}.$$

Potom je  $M = M^+ \cup M^-$  a  $M^+ = M_1^+ \cup M_2^+$ . Uspořádejme množinu  $\mathbb{P}$  racionálních čísel tak, aby platilo  $\mathbb{P} = \{r_k\}$ . (Uvědomte si však, že množinu  $\mathbb{P}$  nelze uspořádat "podle velikosti", tj. tak aby platilo  $r_k < r_{k+1}$  pro každé  $k \in \mathbb{N}$ .)

Nechť  $r$  značí zobrazení, které každému  $x \in M_1^+$  přiřadí první (při daném uspořádání množiny  $\mathbb{P}$ ) racionální číslo, které leží v intervalu  $(f(x), f(x+))$ . Přesněji řečeno,

$$r(x) = r_j \iff r_j \in (f(x), f(x+)) \text{ a } \{r_1, r_2, \dots, r_{j-1}\} \cap (f(x), f(x+)) = \emptyset.$$

Dále, pro každé  $q \in \mathbb{P}$  označme symbolem  $r_{-1}(q)$  jeho vzor při zobrazení  $r$ , tj.

$$r_{-1}(q) = \{x \in M_1^+ : r(x) = q\}.$$

Máme

$$M_1^+ = \bigcup_{q \in \mathbb{P}} r_{-1}(q).$$

Ukážeme-li tedy, že každá množina  $r_{-1}(q)$ ,  $q \in \mathbb{P}$ , je spočetná, budeme mít současně také dokázáno, že i množina  $M_1^+$  je spočetná.

Nechť je tedy dáno libovolné  $q \in \mathbb{P}$ . Vzhledem k definici množiny  $M_1^+$  a zobrazení  $r$ , pro každé  $x \in r_{-1}(q)$  existuje  $\delta(x) > 0$  takové, že

$$x < y < x + \delta(x) \implies f(y) > r(x).$$

Jsou-li  $x_1, x_2 \in r_{-1}(q)$  takové, že  $x_1 < x_2$  a  $r(x_1) = r(x_2) = q$ , pak musí platit

$$(x_1, x_1 + \delta(x_1)) \cap (x_2, x_2 + \delta(x_2)) = \emptyset.$$

Vskutku, kdyby bylo  $x_1 < x_2 < x_1 + \delta(x_1)$ , bylo by též (vzhledem k definici  $\delta$ )

$$q = r(x_1) < f(x_2) < r(x_2) = q,$$

což není možné. Systém intervalů  $\{(x, x + \delta(x)), x \in r_{-1}(q)\}$  je tedy disjunktní. Každému  $x \in r_{-1}(q)$  lze tedy přiřadit jediné racionální číslo  $r \in (x, x + \delta(x))$  a tím definovat prosté zobrazení  $r_{-1}(q)$  do  $\mathbb{P}$ . To znamená, že pro každé  $q \in \mathbb{P}$  je množina  $r_{-1}(q)$  spočetná.

b) Protože  $M_2^+ = \{x \in J : -f(x) < -f(x+)\}$ , můžeme použít část a) tohoto důkazu k důkazu spočetnosti množiny  $M_2^+$ .

c) Konečně,  $M^- = \{x \in J : f(-x) \neq f(-x+)\}$ , takže podle částí a)–b) tohoto důkazu je také  $M^-$  spočetná množina.  $\square$

**2.21. Cvičení.** Přesvědčete se, že důkaz lemmatu 2.20 v sobě obsahuje též důkaz tvrzení: *Každý disjunktní systém intervalů v  $\mathbb{R}$  je spočetný.*

Nechť  $f \in \mathbb{BV}[a, b]$  a

$$v(x) = \text{var}_a^x f \quad \text{pro } x \in [a, b]. \quad (2.16)$$

Podle důkazu věty 2.13 víme, že funkce  $v$  a  $v - f$  jsou definovány a neklesající na  $[a, b]$ . Ukážeme nyní, že funkce  $v$  "kopíruje" spojitost funkce  $f$ .

**2.22. Lemma.** *Nechť  $f \in \mathbb{BV}[a, b]$  a  $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  je definována vztahem (2.16). Potom je  $f$  spojitá v bodě  $x \in [a, b)$  zprava právě tehdy, když je v tomto bodě spojitá zprava i funkce  $v$ . Podobně,  $f$  je spojitá v bodě  $x \in (a, b]$  zleva právě tehdy, když je v tomto bodě spojitá zleva i funkce  $v$ .*

D ů k a z. a) Nechť  $x \in (a, b]$  a  $f(x-) = f(x)$ . Buď dáno  $\varepsilon > 0$ . Zvolme  $\delta > 0$  tak, aby platilo

$$|f(x) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pro každé } t \in (x - \delta, x].$$

Zvolme dělení  $\sigma \in \mathcal{D}[a, x]$  tak, aby platilo

$$v(x) - V(f, \sigma) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad \sigma_{m-1} \in (x - \delta, x).$$

Máme  $|f(x) - f(\sigma_{m-1})| < \frac{\varepsilon}{2}$  a tedy

$$v(x) - \sum_{j=1}^{m-1} |f(\sigma_j) - f(\sigma_{j-1})| < |f(x) - f(\sigma_{m-1})| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Odtud snadno odvodíme, že platí  $v(x) - v(\sigma_{m-1}) < \varepsilon$ . Protože  $v$  je neklesající na  $[a, b]$ , dostáváme dále

$$v(x) - v(t) < \varepsilon \quad \text{pro každé } t \in (\sigma_{m-1}, x].$$

Tím je dokázána spojitost zleva funkce  $v$ .

b) Podobně dokážeme, že funkce  $v$  je spojitá zprava v každém bodě  $x \in [a, b)$ , ve kterém je zprava spojitá funkce  $f$ .

c) Pravdivost zbývajících implikací plyne okamžitě z nerovností

$$|f(x) - f(y)| \leq |v(x) - v(y)|$$

platných pro všechna  $x, y \in [a, b]$  (viz cvičení 2.6 (i)). □

Z následujícího tvrzení vyplyne, že součet absolutních hodnot skoků funkce s konečnou variací je vždy konečný.

**2.23. Věta.** *Nechť  $f \in \mathbb{BV}[a, b]$  a nechť  $W = \{s_k\}$  je prostá posloupnost bodů z intervalu  $(a, b)$ . Potom*

$$|\Delta^+ f(a)| + \sum_{k=1}^{\infty} \left( |\Delta^+ f(s_k)| + |\Delta^- f(s_k)| \right) + |\Delta^- f(b)| \leq \text{var}_a^b f. \quad (2.17)$$

D ů k a z . a) Předpokládejme nejprve, že  $f$  je neklesající. Potom

$$\begin{aligned} |\Delta^+ f(a)| + \sum_{k=1}^{\infty} \left( |\Delta^+ f(s_k)| + |\Delta^- f(s_k)| \right) + |\Delta^- f(b)| \\ = \Delta^+ f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \Delta f(s_k) + \Delta^- f(b). \end{aligned}$$

Nechť  $n \in \mathbb{N}$  a  $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{n+1}$ , jsou body intervalu  $[a, b]$  takové, že

$$a = \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_n < \sigma_{n+1} = b$$

a

$$\{\sigma_k : k = 0, \dots, n+1\} = \{a\} \cup \{s_k : k = 1, \dots, n\} \cup \{b\}.$$

Zvolme dále  $t_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n+1$ , tak, aby platilo

$$a < t_1 < \sigma_1 < t_2 < \sigma_2 < \dots < \sigma_n < t_{n+1} < b.$$

Potom je

$$0 \leq \Delta^+ f(a) \leq f(t_1) - f(a), \quad 0 \leq \Delta^- f(b) \leq f(b) - f(t_{n+1})$$

a

$$0 \leq \Delta f(\sigma_k) \leq f(t_{k+1}) - f(t_k) \quad \text{pro } k = 1, 2, \dots, n.$$

Tudíž

$$\begin{aligned} \Delta^+ f(a) + \sum_{k=1}^n \Delta f(s_k) + \Delta^- f(b) &= \Delta^+ f(a) + \sum_{k=1}^n \Delta f(\sigma_k) + \Delta^- f(b) \\ &\leq (f(t_1) - f(a)) + \sum_{k=1}^n (f(t_{k+1}) - f(t_k)) + (f(b) - f(t_{n+1})) \\ &= f(b) - f(a). \end{aligned}$$

Pro libovolné  $n \in \mathbb{N}$  tedy máme

$$\Delta^+ f(a) + \sum_{k=0}^n \Delta f(s_k) + \Delta^- f(b) \leq f(b) - f(a) = \text{var}_a^b f.$$

Nerovnost ((2.17)) tedy platí pro každou funkci  $f$  neklesající na  $[a, b]$ .

b) Nyní nechť  $f$  je libovolná funkce s konečnou variací na  $[a, b]$  a nechť funkce  $\mathfrak{p}$  a  $\mathfrak{n}$  jsou definovány jako ve cvičení 2.14. Potom  $f = f(a) + \mathfrak{p} - \mathfrak{n}$ ,

$$\Delta^+ f(t) = \Delta^+ \mathfrak{p}(t) - \Delta^+ \mathfrak{n}(t), \quad \Delta^- f(t) = \Delta^- \mathfrak{p}(s) - \Delta^- \mathfrak{n}(s)$$

$$|\Delta^+ f(t)| = \Delta^+ \mathfrak{p}(t) + \Delta^+ \mathfrak{n}(t) \quad \text{a} \quad |\Delta^- f(t)| = \Delta^- \mathfrak{p}(s) + \Delta^- \mathfrak{n}(s)$$

pro  $t \in (a, b]$ ,  $s \in [a, b)$ . Podle první části důkazu máme

$$\Delta^+ \mathfrak{p}(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \Delta^+ \mathfrak{p}(s_k) + \Delta^- \mathfrak{p}(s_k) \right) + \Delta^- \mathfrak{p}(b) \leq \mathfrak{p}(b)$$

a

$$\Delta^+ \mathfrak{n}(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \Delta^+ \mathfrak{n}(s_k) + \Delta^- \mathfrak{n}(s_k) \right) + \Delta^- \mathfrak{n}(b) \leq \mathfrak{n}(b).$$

Sečteme-li tyto nerovnosti, dostaneme

$$|\Delta^+ f(a)| + \sum_{k=0}^n \left( |\Delta^+ f(s_k)| + |\Delta^- f(s_k)| \right) + |\Delta^- f(b)| \leq \mathfrak{p}(b) + \mathfrak{n}(b) = \text{var}_a^b f. \quad \square$$

**2.24. Poznámka.** Nechť  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  má konečnou variaci a nechť množina  $W$  jejích bodů nespojitosti v  $(a, b)$  je nekonečná. Podle věty 2.19 existuje vzájemně jednoznačné zobrazení  $k \in \mathbb{N} \rightarrow s_k \in W$  takové, že  $W = \{s_k\}$ . Takových zobrazení je ovšem nekonečně mnoho. Podle věty 2.23 je však řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( |\Delta^+ f(s_k)| + |\Delta^- f(s_k)| \right)$$

(absolutně) konvergentní a její součet nezávisí na volbě uspořádání množiny  $W$ . Protože pro  $x \in (a, b)$  je  $\left( |\Delta^+ f(x)| + |\Delta^- f(x)| \right) \neq 0$  pouze tehdy, když  $x \in W$ , má tedy smysl definovat

$$\sum_{x \in (a, b)} \left( |\Delta^+ f(x)| + |\Delta^- f(x)| \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( |\Delta^+ f(s_k)| + |\Delta^- f(s_k)| \right), \quad (2.18)$$

kde  $\{s_k\}$  je libovolná prostá posloupnost bodů z  $(a, b)$  taková, že  $W = \{s_k\}$ . Podobně, budeme též psát

$$\sum_{x \in [a, b)} |\Delta^+ f(x)| = |\Delta^+ f(a)| + \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta^+ f(s_k)|$$

a

$$\sum_{x \in (a,b]} |\Delta^- f(x)| = \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta^+ f(s_k)| + |\Delta^- f(b)|.$$

Větu 2.23 můžeme nyní přeformulovat do následující podoby.

**2.25. Důsledek.** Pro každou funkci  $f \in \mathbb{BV}[a, b]$  platí

$$\sum_{x \in [a,b]} |\Delta^+ f(x)| + \sum_{x \in (a,b]} |\Delta^- f(x)| \leq \text{var}_a^b f. \quad (2.19)$$

## 2.4 Derivace funkcí s konečnou variací

Nyní se budeme věnovat vlastnostem funkcí s konečnou variací vzhledem k derivování. Nejprve připomeňme pojem množin s nulovou mírou.

**2.26. Definice.** Množina  $M \subset \mathbb{R}$  má *nulovou míru* ( $\mu(M) = 0$ ), když ke každému  $\varepsilon > 0$  existuje nejvýše spočetný systém otevřených intervalů  $I_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , takový, že je

$$M \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \text{ a } \sum_{j=1}^{\infty} |I_j| < \varepsilon.$$

Řekneme, že nějaká vlastnost platí *skoro všude* (s.v.) na intervalu  $[a, b]$ , jestliže existuje množina  $M \subset [a, b]$  nulové míry taková, že tato vlastnost platí pro každé  $x \in [a, b] \setminus M$ .

**2.27. Cvičení.** Dokažte, že platí:

- (i) Každá spočetná množina  $S \subset \mathbb{R}$  má nulovou míru.
- (ii) Sjedenocení spočetně mnoha množin nulové míry má nulovou míru.

**2.28. Věta** (LEBESGUEOVA VĚTA O DERIVACI FUNKCE S KONEČNOU VARIACÍ). Každá funkce  $f \in \mathbb{BV}[a, b]$  má vlastní derivaci  $f'(x)$  pro s.v.  $x \in [a, b]$ .

Důkaz věty 2.28 je rozsáhlý, technicky komplikovaný a do značné míry závislý na pojmech, které se do tohoto textu nevejdou. Pro důkaz odkazujeme na učebnice, které obsahují důkladný přehled této tematiky (viz např. [18, věta 84], [19, věta VI.1.2], [33, Theorems 22.5]).

**2.29. Poznámka.** Je dokonce známo (viz věta 3.10), že derivace funkcí s konečnou variací jsou lebesgueovskými integrovatelné. **ALE !!!!** Obecně neplatí pro každou

funkci  $f \in \mathbb{BV}[a, b]$  zdánlivě přirozená rovnost

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt.$$

Existují totiž funkce  $f \in \mathbb{BV}[a, b]$  nekonstantní na  $[a, b]$  a takové, že  $f' = 0$  s.v. na  $[a, b]$ .

**2.30. Definice.** Funkce  $f \in \mathbb{BV}[a, b]$  se nazývá *singulární*, jestliže  $f'(x) = 0$  pro s.v.  $x \in [a, b]$ .

## 2.5 Skokové funkce

Nejjednodušším příkladem nekonstantních singulárních funkcí jsou funkce typu  $f(x) = \chi_{[a,c]}(x)$ , kde  $c \in (a, b)$ . Jejich zobecněním jsou třídy *jednoduchých skokových funkcí* (anglicky *step functions*) resp. *skokových funkcí* (anglicky *break functions*).

**2.31. Definice.** Funkce  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  je *jednoduchá (též konečná) skoková funkce* na  $[a, b]$ , jestliže existuje dělení  $\sigma \in \mathcal{D}[a, b]$  takové, že na každém jeho dílčím otevřeném intervalu  $(\sigma_{j-1}, \sigma_j)$  je  $f$  konstantní. Množinu jednoduchých skokových funkcí na intervalu  $[a, b]$  značíme  $\mathbb{S}[a, b]$ .

Funkce  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  je *skoková funkce* na  $[a, b]$ , jestliže buď to  $f$  je jednoduchá skoková funkce nebo existují  $c, c_0, d \in \mathbb{R}$ , prostá posloupnost  $\{s_k\} \subset (a, b)$  a posloupnosti  $\{c_k\} \subset \mathbb{R}$  a  $\{d_k\} \subset \mathbb{R}$  takové, že platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|c_k| + |d_k|) < \infty \quad (2.20)$$

a

$$f(x) = c + c_0 \chi_{(a,b]}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left( c_k \chi_{(s_k,b]}(x) + d_k \chi_{[s_k,b]}(x) \right) + d \chi_{[b]}(x) \quad (2.21)$$

pro  $x \in [a, b]$ .

Množinu skokových funkcí na intervalu  $[a, b]$  značíme  $\mathbb{B}[a, b]$ .

**2.32. Cvičení.** Dokažte, že platí:

(i)  $f \in \mathbb{S}[a, b]$  právě tehdy, když existují  $m \in \mathbb{N}$ ,  $c, c_0, d \in \mathbb{R}$ , množiny

$$\{c_k : k = 1, 2, \dots, m\} \subset \mathbb{R}, \quad \{d_k : k = 1, 2, \dots, m\} \subset \mathbb{R}$$

$a$  prostá množina  $\{s_k : k = 1, 2, \dots, m\} \subset (a, b)$  takové, že platí

$$f(x) = c + c_0 \chi_{(a,b]}(x) + \sum_{k=1}^m \left( c_k \chi_{(s_k,b]}(x) + d_k \chi_{[s_k,b]}(x) \right) + d \chi_{[b]}$$

pro  $x \in [a, b]$ .

- (ii)  $f \in \mathbb{B}[a, b]$  právě tehdy když buďto  $f \in \mathbb{S}[a, b]$  nebo existují  $c \in \mathbb{R}$ , posloupnosti  $\{c_k\} \subset \mathbb{R}$ ,  $\{d_k\} \subset \mathbb{R}$  a prostá posloupnost  $\{s_k\} \subset [a, b]$  takové, že platí (2.20) a

$$f(x) = c + \sum_{a \leq s_k < x} c_k + \sum_{a < s_k \leq x} d_k \quad \text{pro } x \in [a, b], \quad (2.22)$$

kde součtové symboly mají smysl zavedený v poznámce 2.24 (tj. v první sumě se sčítá přes všechny indexy  $k$  pro které  $s_k \in (a, x)$  a ve druhé se sčítá přes všechny indexy  $k$  pro které  $s_k \in [a, x)$ ). (POZOR na jemné rozdíly mezi posloupnostmi  $\{s_k\}$ ,  $\{c_k\}$ ,  $\{d_k\}$  zde a v definici 2.31.)

- (iii) Pro každou funkci  $f \in \mathbb{B}[a, b]$  tvaru (2.22) platí

$$f(x-) = c + \sum_{a \leq s_k < x} c_k + \sum_{a < s_k < x} d_k \quad \text{jestliže } x \in (a, b)$$

a

$$f(x+) = c + \sum_{a \leq s_k \leq x} c_k + \sum_{a < s_k \leq x} d_k \quad \text{jestliže } x \in [a, b).$$

(Jak bude vypadat vyjádření jednostranných limit funkcí z  $\mathbb{B}[a, b]$  vyjdeme-li z tvaru (2.21)?)

**2.33. Věta.** Pro každou skokovou funkci  $f \in \mathbb{B}[a, b]$  platí

$$\text{var}_a^b f = |\Delta^+ f(a)| + \sum_{x \in (a,b)} \left( |\Delta^+ f(x)| + |\Delta^- f(x)| \right) + |\Delta^- f(b)| < \infty. \quad (2.23)$$

Speciálně,  $\mathbb{S}[a, b] \subset \mathbb{B}[a, b] \subset \mathbb{BV}[a, b]$ .

D ů k a z. Je-li  $f \in \mathbb{S}[a, b]$ , je tvrzení věty zřejmé. Předpokládejme, tedy že  $f \in \mathbb{B}[a, b] \setminus \mathbb{S}[a, b]$  je vyjádřena ve tvaru (2.22) ze cvičení 2.32 (ii).

a) Pro libovolná  $x, y \in [a, b]$ ,  $x < y$ , máme

$$|f(y) - f(x)| \leq \sum_{x \leq s_k < y} |c_k| + \sum_{x < s_k \leq y} |d_k|.$$

Pro každé dělení  $\sigma$  intervalu  $[a, b]$  tedy platí

$$V(f, \sigma) \leq \sum_{j=1}^m \left( \sum_{\sigma_{j-1} < s_k \leq \sigma_j} |c_k| + \sum_{\sigma_{j-1} \leq s_k < \sigma_j} |d_k| \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (|c_k| + |d_k|).$$

Odtud plyne podle (2.20), že

$$\text{var}_a^b f \leq \sum_{k=1}^{\infty} (|c_k| + |d_k|) < \infty, \quad (2.24)$$

tj.  $f \in \mathbb{BV}[a, b]$ .

b) Na druhou stranu, podle cvičení 2.32 (iii) snadno odvodíme, že platí

$$\Delta^+ f(s_k) = c_k \quad \text{a} \quad \Delta^- f(s_k) = d_k \quad \text{pro každé } k \in \mathbb{N}. \quad (2.25)$$

Můžeme tedy použít také důsledek 2.25, podle kterého platí obrácená nerovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|c_k| + |d_k|) \leq \text{var}_a^b f$$

a uzavřít tak důkaz věty. □

**2.34. Věta.** Každá skoková funkce na  $[a, b]$  je singulární na  $[a, b]$ .

D ů k a z. Nechť  $f \in \mathbb{B}[a, b] \setminus \mathbb{S}[a, b]$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , posloupnosti  $\{c_k\} \subset \mathbb{R}$  a  $\{d_k\} \subset \mathbb{R}$  a prostá posloupnost  $W = \{s_k\} \subset [a, b]$ , jsou takové, že platí (2.20) a (2.22). Definujme

$$v(x) = \sum_{a < w_k \leq x} |c_k| + \sum_{a \leq w_k < x} |d_k| \quad \text{pro } x \in [a, b].$$

Potom je

$$v(x) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x) \quad \text{pro } x \in [a, b],$$

kde

$$v_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{když } a \leq x < s_k, \\ |c_k| & \text{když } x = s_k, \\ |c_k| + |d_k| & \text{když } s_k < x \leq b. \end{cases}$$

Každá funkce  $v_k$  je neklesající na  $[a, b]$  a  $v'_k(x) = 0$  pro  $x \neq s_k$ . Máme tedy

$$v'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} v'_k(x) = 0 \quad \text{pro } x \notin W, \quad \text{tj. pro s.v. } x \in [a, b].$$

Protože pro všechna  $x, y \in [a, b]$  taková, že  $x \neq y$ , zřejmě platí

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq \left| \frac{v(x) - v(y)}{x - y} \right|,$$

plyne odsud, že také  $f'(x) = 0$  pro  $x \notin W$ .

V případě, že  $f \in \mathbb{S}[a, b]$ , je tvrzení věty evidentní.  $\square$

**2.35. Poznámka.** Příklad funkce, která je spojitá, neklesající a singulární na daném intervalu, je uveden v [17, V.9, cvičení 4].

## 2.6 Jordanův rozklad funkce s konečnou variací

**2.36. Věta.** Každou funkci  $f \in \mathbb{BV}[a, b]$  lze vyjádřit jako součet  $f = f_1 + f_2$  na  $[a, b]$ , kde  $f_1 \in \mathbb{BV}[a, b] \cap \mathbb{C}[a, b]$  a  $f_2 \in \mathbb{B}[a, b]$ .

Je-li  $f = \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2$ , kde  $\tilde{f}_1 \in \mathbb{C}[a, b] \cap \mathbb{BV}[a, b]$  a  $\tilde{f}_2 \in \mathbb{B}[a, b]$ , jiný takový rozklad, potom jsou funkce  $f_1 - \tilde{f}_1$  a  $f_2 - \tilde{f}_2$  konstantní na  $[a, b]$ .

D ů k a z. a) Označme symbolem  $W$  množinu bodů nespojitosti funkce  $f$ , tj.  $W = \{s_k \in [a, b] : k \in \mathbb{K}\}$ , kde  $\mathbb{K} = \{1, 2, \dots, m\}$  nebo  $\mathbb{K} = \mathbb{N}$ . Definujme

$$f_2(x) = \sum_{a < s_k \leq x} \Delta^- f(s_k) + \sum_{a \leq s_k < x} \Delta^+ f(s_k) \quad \text{pro } x \in [a, b]. \quad (2.26)$$

Potom podle důsledku 2.25 platí

$$\sum_{x \in [a, b]} |\Delta^+ f(x)| + \sum_{x \in (a, b]} |\Delta^- f(x)| \leq \text{var}_a^b f$$

a podle definice 2.31 je tedy  $f_2 \in \mathbb{B}[a, b]$ . Analogicky jako ve cvičení 2.32 (iii) (viz též (2.25)) dostaneme

$$f_2(t+) = \sum_{a < s_k \leq t} \Delta^- f(s_k) + \sum_{a \leq s_k \leq t} \Delta^+ f(s_k) \quad \text{pro } t \in [a, b]$$

a

$$f_2(s-) = \sum_{a < s_k < s} \Delta^- f(s_k) + \sum_{a \leq s_k < s} \Delta^+ f(s_k) \quad \text{pro } s \in (a, b]$$

Snadno tedy ověříme, že

$$\left. \begin{aligned} \Delta^+ f_2(t) &= \Delta^+ f(t) \text{ pro } t \in [a, b). \\ \Delta^- f_2(s) &= \Delta^- f(s) \text{ pro } s \in (a, b]. \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

Tudíž

$$((f(t+) - f_2(t+)) - (f(t) - f_2(t))) = \Delta^+ f(t) - \Delta^+ f_2(t) = 0$$

a

$$(f(s) - f_2(s)) - (f(s-) - f_2(s-)) = \Delta^- f(s) - \Delta^- f_2(s) = 0.$$

Funkce  $f_1 = f - f_2$  je tedy spojitá na  $[a, b]$  a  $f = f_1 + f_2$  na  $[a, b]$ .

b) Nechť  $f = \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2$ , kde  $\tilde{f}_1 \in \mathbb{C}[a, b] \cap \mathbb{BV}[a, b]$  a  $\tilde{f}_2 \in \mathbb{B}[a, b]$ . Potom

$$(f(t+) - \tilde{f}_2(t+)) - (f(t) - \tilde{f}_2(t)) = \Delta^+ f(t) - \Delta^+ \tilde{f}_2(t) = 0$$

a

$$(f(s) - \tilde{f}_2(s)) - (f(s-) - \tilde{f}_2(s-)) = \Delta^- f(s) - \Delta^- \tilde{f}_2(s) = 0$$

platí pro všechna  $t \in [a, b)$  a  $s \in [a, b)$ . Vzhledem k (2.27) dostáváme, že platí

$$\Delta^+ \tilde{f}_2(t) = \Delta^+ f_2(t) = \Delta^+ f(t) \text{ a } \Delta^- \tilde{f}_2(s) = \Delta^- f_2(s) = \Delta^- f(s)$$

pro  $t \in [a, b)$ ,  $s \in (a, b]$ . Odtud podle definice 2.31 (viz cvičení 2.32 (ii), (2.22) a (2.25)) plyne, že

$$\tilde{f}_2(x) = c + \sum_{a < s_k \leq x} \Delta^- f(s_k) + \sum_{a \leq s_k < x} \Delta^+ f(s_k) \text{ pro } x \in [a, b],$$

kde  $c \in \mathbb{R}$  může být libovolné. Rozdíl  $f_2 - \tilde{f}_2 = f_2(a) - \tilde{f}_2(a)$  je tedy konstantní na  $[a, b]$ .  $\square$

**2.37. Poznámka.** Podle věty 2.36 lze každou funkci s konečnou variací rozložit na součet funkce spojitě a funkce skokové. Takový rozklad se nazývá *Jordanův rozklad* funkce s konečnou variací.

**2.38. Definice.** Každou funkci  $f_2$  přiřazenou k  $f$  podle věty 2.36 nazýváme *skoková část* funkce  $f$ . Rozdíl  $f - f_2$  nazýváme *spojitá část* funkce  $f$ . Skokovou resp. spojitou část funkce  $f$  značíme obvykle  $f^{\mathbb{B}}$  resp.  $f^{\mathbb{C}}$ .

Následující lemmátka se nám bude hodit v kapitole 5.

**2.39. Lemma.** *Nechť  $f \in \mathbb{B}\mathbb{V}[a, b]$ ,  $W = \{w_k\}$  je její množina bodů nespojitosti v intervalu  $[a, b]$ . Pro  $n \in \mathbb{N}$  a  $x \in [a, b]$  definujme*

$$f^{\mathbb{B}}(x) = \sum_{a < w_k \leq x} \Delta^- f(w_k) + \sum_{a \leq w_k < x} \Delta^+ f(w_k)$$

a

$$f_n^{\mathbb{B}}(x) = \sum_{\substack{a < w_k \leq x \\ k \leq n}} \Delta^- f(w_k) + \sum_{\substack{a \leq w_k < x \\ k \leq n}} \Delta^+ f(w_k).$$

Potom je  $f_n^{\mathbb{B}} \in \mathbb{S}[a, b]$  pro každé  $n \in \mathbb{N}$  a platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{var}_a^b (f^{\mathbb{B}} - f_n^{\mathbb{B}}) = 0. \quad (2.28)$$

D ů k a z. Zřejmě je  $f_n^{\mathbb{B}} \in \mathbb{S}[a, b]$  pro každé  $n \in \mathbb{N}$ . V případě, že množina  $W$  je konečná, je  $f_n^{\mathbb{B}} = f^{\mathbb{B}}$  na  $[a, b]$  pro dostatečně velká  $n$  a tvrzení lemmatu je triviální. Předpokládejme tedy, že  $W$  je nekonečná. Potom

$$f^{\mathbb{B}} - f_n^{\mathbb{B}} = \sum_{\substack{a < w_k \leq x \\ k > n}} \Delta^- f(w_k) + \sum_{\substack{a \leq w_k < x \\ k > n}} \Delta^+ f(w_k)$$

a podle věty 2.33 dostaneme

$$\text{var}_a^b (f^{\mathbb{B}} - f_n^{\mathbb{B}}) \leq \sum_{\substack{a < w_k \leq x \\ k > n}} |\Delta^- f(w_k)| + \sum_{\substack{a \leq w_k < x \\ k > n}} |\Delta^+ f(w_k)|. \quad (2.29)$$

Podle důsledku 2.25 je výraz na pravé straně nerovnosti (2.29) zbytek absolutně konvergentní řady, který ovšem konverguje k 0 při  $n \rightarrow \infty$ . Platí tudíž (2.28).  $\square$

**2.40. Příklad.** Vraťme se ještě k funkcím

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{pro } \frac{1}{n} \leq x \leq 2 \end{cases} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}$$

a

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x = 0, \\ x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{pro } x > 0. \end{cases}$$

Z příkladu 2.11 víme, že  $\text{var}_0^2 f_n < \infty$  pro každé  $n \in \mathbb{N}$ . Snadno ověříme, že  $\{f_n\}$  konverguje k  $f$  stejnoměrně na  $[0, 2]$  a přitom podle příkladu 2.7  $f$  nemá konečnou variaci na  $[0, 2]$ .

## 2.7 Bodová konvergence

Podle příkladu 2.40 stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí s konečnou variací nemusí stačit k tomu, aby její limita měla také konečnou variaci. Z následujících vět však uvidíme, že stejnoměrná ohraničenost variací členů dané posloupnosti už zaručí, že dokonce její bodová limita konečnou variací má. (Pomocí argumentů použitých v příkladu 2.7 ověřte, že pro posloupnost  $\{f_n\}$  z příkladů 2.11 a 2.40 platí, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{var}_0^2 f_n = \infty$ . nemá stejnoměrně ohraničené variace.)

**2.41. Věta.** *Nechť pro funkci  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  existuje posloupnost funkcí  $\{f_n\}$  taková, že*

$$\text{var}_a^b f_n \leq \varkappa < \infty \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}, \quad \text{a} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{pro } x \in [a, b].$$

*Potom je také  $\text{var}_a^b f \leq \varkappa$ .*

D ů k a z . Pro každé dělení  $\sigma \in \mathcal{D}[a, b]$  platí

$$V(f, \sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} V(f_n, \sigma) \leq \varkappa$$

a tudíž je také  $\text{var}_a^b f \leq \varkappa$ . □

**2.42. Cvičení.** *Nechť*

$$g(x) = \begin{cases} 2^{-k} & \text{když } x = \frac{1}{k+1} \text{ pro nějaké } k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{pro ostatní } x \in [0, 1], \end{cases}$$

Dokažte, že  $f \in \mathbb{BV}[0, 1]$ .

Nyní zformulujeme a dokážeme Hellyovu větu, která bude užitečná např. pro důkaz totální spojitosti některých operátorů definovaných na prostoru  $\mathbb{BV}[a, b]$ . Hellyova věta říká, že z každé posloupnosti funkcí se stejnoměrně ohraničenou variací lze vybrat posloupnost bodově konvergující k funkci s konečnou variací.

**2.43. Věta (HELLYOVA VĚTA O VÝBĚRU).** *Nechť  $\{f_n\} \subset \mathbb{BV}[a, b]$ ,  $\varkappa \in \mathbb{R}$ ,*

$$|f_n(a)| \leq \varkappa \quad \text{a} \quad \text{var}_a^b f_n \leq \varkappa \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

*Potom existují funkce  $f \in \mathbb{BV}[a, b]$  a podposloupnost  $\{f_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$  posloupnosti  $\{f_n\}$  takové, že platí*

$$|f(a)| \leq \varkappa, \quad \text{var}_a^b f \leq \varkappa \quad \text{a} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = f(x) \quad \text{na } [a, b].$$

V důkazu využijeme následující dvě tvrzení.

**Tvrzení 1.** *Nechť*

$$|f_n(x)| \leq M < \infty \quad \text{na } [a, b] \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Potom pro každou spočetnou množinu  $P \subset [a, b]$  posloupnost  $\{f_n\}$  obsahuje podposloupnost  $\{f_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$  takovou, že

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(p) \in \mathbb{R} \quad \text{pro všechna } p \in P.$$

D ů k a z. Nechť  $P = \{p_k\}$ . Máme  $|f_n(p_k)| \leq M < \infty$  pro všechna  $n, k \in \mathbb{N}$ . Podle Bolzanovy – Weierstraßovy věty pak existují posloupnost  $\{n_{k,1} : k \in \mathbb{N}\}$  a  $q_1 \in \mathbb{R}$  tak, že

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_{k,1}}(p_1) = q_1.$$

Podobně existují  $\{f_{n_{k,2}} : k \in \mathbb{N}\} \subset \{f_{n_{k,1}} : k \in \mathbb{N}\}$  a  $q_2 \in \mathbb{R}$  takové, že

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_{k,2}}(p_2) = q_2 \in \mathbb{R}, \quad \text{přičemž také} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_{k,2}}(p_1) = q_1 \in \mathbb{R}.$$

Takto pro každé  $j \in \mathbb{N}$  najdeme posloupnosti

$$\{f_{n_{k,j}} : k \in \mathbb{N}\} \subset \{f_{n_{k,j-1}} : k \in \mathbb{N}\}$$

a čísla  $q_j \in \mathbb{R}$  takové, že platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_{k,\ell}}(p_\ell) = q_\ell : k \in \mathbb{N} \in \mathbb{R} \quad \text{pro každé } \ell \in \{1, 2, \dots, j\}.$$

Položme  $f_{n_k} = f_{n_{k,k}}$  pro  $k \in \mathbb{N}$ . Potom

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(p_j) = q_j \in \mathbb{R} \quad \text{pro } j \in \mathbb{N}. \quad \square$$

**Tvrzení 2.** *Předpokládejme, že všechny funkce  $f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , jsou neklesající na  $[a, b]$  a že existuje  $M \in (0, \infty)$  takové, že  $\|f_n\| \leq M$  pro každé  $n \in \mathbb{N}$ . Potom existují podposloupnost  $\{f_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$  posloupnosti  $\{f_n\}$  a funkce  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  neklesající na  $[a, b]$  takové, že platí*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = f(x) \quad \text{pro } x \in [a, b].$$

D ů k a z . Budiž  $P = (\mathbb{P} \cap (a, b)) \cup [a] \cup [b]$  množina racionálních čísel z intervalu  $(a, b)$  doplněná o body  $a, b$ . Množina  $P$  je spočetná a  $[a, b] \setminus P \subset (a, b)$ . Podle tvrzení 1 existují podposloupnost  $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$  a zobrazení  $\varphi: P \rightarrow \mathbb{R}$  takové, že

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(p) = \varphi(p) \quad \text{pro } p \in P.$$

Zřejmě  $\varphi(p') \leq \varphi(p'')$  pro všechna  $p', p'' \in P$  taková, že  $p' \leq p''$ . Dále, definujme

$$\varphi(x) = \sup_{p \in P \cap [a, x]} \varphi(p) \quad \text{pro } x \in (a, b) \setminus P.$$

Potom  $\varphi$  je definovaná a neklesající na  $[a, b]$  a

$$\varphi(x) = \lim_{\substack{p \rightarrow x^- \\ p \in P}} \varphi(p) \quad \text{pro } x \in (a, b) \setminus P.$$

Ukážeme, že v každém bodě  $x_0 \in (a, b)$ , ve kterém je funkce  $\varphi$  spojitá platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x_0) = \varphi(x_0). \quad (2.30)$$

Vskutku, nechť je dáno  $\varepsilon > 0$ . Potom existuje  $\delta_\varepsilon > 0$  takové, že

$$x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0 + \delta_\varepsilon \implies \varphi(x_0) - \varepsilon < \varphi(x) < \varphi(x_0) + \varepsilon.$$

Zvolíme-li  $r' \in P \cap (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0)$  a  $r'' \in P \cap (x_0, x_0 + \delta_\varepsilon)$ , bude platit

$$\varphi(x_0) - \varepsilon < \varphi(r') \leq \varphi(x_0) \leq \varphi(r'') < \varphi(x_0) + \varepsilon.$$

Dále, zvolme  $k_\varepsilon$  tak, aby bylo

$$\varphi(r') - \varepsilon < f_{n_k}(r') < \varphi(r') + \varepsilon$$

a

$$\varphi(r'') - \varepsilon < f_{n_k}(r'') < \varphi(r'') + \varepsilon$$

pro každé  $k \geq k_\varepsilon$ . Potom, pro každé  $k \geq k_\varepsilon$  dostaneme také

$$\begin{aligned} \varphi(x_0) - 2\varepsilon &< \varphi(r') - \varepsilon < f_{n_k}(r') \leq f_{n_k}(x_0) \\ &\leq f_{n_k}(r'') < \varphi(r'') + \varepsilon < \varphi(x_0) + 2\varepsilon \end{aligned}$$

čili platí ((2.30)).

Dokázali jsme tedy, že značí-li  $Q$  množinu bodů nespojitosti funkce  $\varphi$  v  $(a, b)$ , pak

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = \varphi(x) \quad \text{pro } x \in [a, b] \setminus Q.$$

Podle věty 2.19 je množina  $Q$  spočetná. Můžeme tedy použít ještě jednou tvrzení 1 a dokázat tak existenci vybrané posloupnosti

$$\{f_{n_{k_\ell}} : \ell \in \mathbb{N}\} \subset \{f_{n_k} : k \in \mathbb{N}\},$$

kteřá má limitu  $\psi(x) \in \mathbb{R}$  pro každé  $x \in Q$ . Definujeme-li tedy

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{když } x \in [a, b] \setminus Q, \\ \psi(x) & \text{když } x \in Q, \end{cases}$$

bude

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} f_{n_{k_\ell}}(x) = f(x) \quad \text{pro } x \in [a, b]$$

a protože funkce, která je na intervalu  $[a, b]$  bodovou limitou posloupnosti funkcí neklesajících na  $[a, b]$ , je také neklesající, tvrzení 2 je dokázáno.  $\square$

### Důkaz věty 2.43.

Pro každé  $n \in \mathbb{N}$  a  $x \in [a, b]$  položme

$$g_n(x) = \text{var}_a^x f_n \quad \text{a} \quad h_n(x) = g_n(x) - f_n(x).$$

Máme  $f_n = g_n - h_n$  a všechny funkce  $g_n, h_n$  jsou neklesající na  $[a, b]$  (viz Cvičení 2.14). Dále,

$$\|g_n\| \leq \text{var}_a^b f_n \leq \varkappa \quad \text{a} \quad \|h_n\| \leq \|f_n\| + \|g_n\| \leq 2\varkappa \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

Podle tvrzení 2 existují funkce  $g, h \in \mathbb{BV}[a, b]$  a posloupnost  $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$  takové, že

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_{n_k}(x) = g(x) \quad \text{a} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} h_{n_k}(x) = h(x) \quad \text{pro každé } x \in [a, b].$$

Označme  $f = g - h$ . Potom je

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} (g_{n_k}(x) - h_{n_k}(x)) = g(x) - h(x) = f(x)$$

pro každé  $x \in [a, b]$ . Zřejmě je  $|f(a)| \leq \varkappa$ . Konečně, podle věty 2.41 je také  $\text{var}_a^b f \leq \varkappa$ . Tím je důkaz dokončen.  $\square$

Výklad v této kapitole se opíral o monografie V. Jarníka *Diferenciální počet II* [17, Kapitola V] a *Integrální počet II* [18, Kapitola V] a dále o odstavec II.6 v monografii T.H.Hildebrandta *Theory of Integration* [14] a o kapitolu XIII v monografii Š. Schwabika *Integrace v  $R$  (Kurzweilova teorie)* [44], viz též kapitolu VI.2 v monografii A. N. Kolmogorova a S. V. Fomina *Základy teorie funkcí a funkcionální analýzy*. V těchto monografiích lze též nalézt i některé další podrobnosti.