

Absolutně spojité funkce

Speciálním případem funkcí s konečnou variací jsou funkce absolutně spojité, které úzce souvisí s Lebesgueovou teorií integrálu a jsou dobře známy z Carathéodoryovy teorie obyčejných diferenciálních rovnic. Integrály, které se v této kapitole vyskytují, jsou integrály Lebesgueovy,

3.1 Definice a základní vlastnosti

3.1. Definice. Funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je *absolutně spojitá* na intervalu $[a, b]$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každý konečný systém intervalů $\{[a_j, b_j] : j = 1, 2, \dots, m\}$ splňující

$$a \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \dots < b_{m-1} \leq a_m < b_m \leq b \quad \text{a} \quad \sum_{j=1}^m (b_j - a_j) < \delta \quad (3.1)$$

platí

$$\sum_{j=1}^m |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon. \quad (3.2)$$

Množinu funkcí absolutně spojitých na $[a, b]$ značíme $\mathbb{AC}[a, b]$.

3.2. Cvičení. Dokažte tvrzení:

Každá lipschitzovská funkce na intervalu $[a, b]$ (viz cvičení 2.6 (iv)) je na tomto intervalu absolutně spojitá. Speciálně, je-li derivace f' funkce f spojitá na $[a, b]^1$, pak f je absolutně spojitá na $[a, b]$.

3.3. Věta. *Je-li f absolutně spojitá na $[a, b]$ a $[c, d] \subset [a, b]$, pak je f absolutně spojitá i na $[c, d]$.*

Je-li $a < c < b$ a f je absolutně spojitá na $[a, c]$ i $[c, b]$, pak je f absolutně spojitá na $[a, b]$.

¹tj. f' je spojitá na (a, b) , existují konečné limity $f'(a+) = \lim_{t \rightarrow a+} f'(t)$, $f'(b-) = \lim_{t \rightarrow b-} f'(t)$ a $f'(a) = f'(a+)$ a $f'(b) = f'(b-)$

D ů k a z . První tvrzení je evidentní.

Předpokládejme, že $f \in \mathbb{A}\mathbb{C}[a, c]$ a $f \in \mathbb{A}\mathbb{C}[c, b]$ a buď dáno $\varepsilon > 0$. Můžeme zvolit $\delta > 0$ tak, aby platilo

$$\sum_{j=1}^m |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

pro každý systém intervalů $\{[\alpha_j, \beta_j] : j = 1, 2, \dots, m\}$ takový, že

$$a \leq \alpha_1 < \beta_1 \leq \alpha_2 < \beta_2 \dots < \beta_{m-1} \leq \alpha_m < \beta_m \leq c \quad \text{a} \quad \sum_{j=1}^m (\beta_j - \alpha_j) < \delta \quad (3.3)$$

a současně

$$\sum_{j=1}^p |f(\delta_j) - f(\gamma_j)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

pro každý systém intervalů $\{[\gamma_j, \delta_j] : j = 1, 2, \dots, p\}$ takový, že

$$c \leq \gamma_1 < \delta_1 \leq \gamma_2 < \delta_2 \dots < \delta_{p-1} \leq \gamma_p < \delta_p \leq b \quad \text{a} \quad \sum_{j=1}^p (\delta_j - \gamma_j) < \delta. \quad (3.4)$$

Nyní, mějme systém intervalů $\{[a_j, b_j] : j = 1, 2, \dots, n\}$ takový, že

$$a \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \dots < b_{n-1} \leq a_n < b_n \leq b \quad \text{a} \quad \sum_{j=1}^n (b_j - a_j) < \delta. \quad (3.5)$$

Smíme předpokládat, že c neleží v žádném z intervalů (a_j, b_j) , $j = 1, 2, \dots, n$. (Kdyby totiž bylo $c \in (a_k, b_k)$ pro nějaké $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, rozdělili bychom $[a_k, b_k]$ na sjednocení $[a_k, c] \cup [c, b_k]$ a nový systém by opět splňoval (3.5)) Můžeme tedy rozdělit daný systém $\{[a_j, b_j] : j = 1, 2, \dots, n\}$ na systémy

$$\{[\alpha_j, \beta_j] : j = 1, 2, \dots, m\} \quad \text{a} \quad \{[\gamma_j, \delta_j] : j = 1, 2, \dots, p\}$$

splňující (3.3) a (3.4). Součet $\sum_{j=1}^n |f(b_j) - f(a_j)|$ se tedy rozpadá na dva součty,

z nichž každý je menší než $\frac{\varepsilon}{2}$. Tudíž $\sum_{j=1}^n |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon$. \square

3.4. Příklad. Podle cvičení 3.2 je každá funkce, která má spojitou derivaci na $[a, b]$, absolutně spojitá na $[a, b]$. Jednoduchým příkladem absolutně spojitě funkce na $[a, b]$, která nemá spojitou derivaci na (a, b) , je např. funkce

$$f(x) = \begin{cases} x - a & \text{pro } x \in [a, \frac{a+b}{2}], \\ b - x & \text{pro } x \in [\frac{a+b}{2}, b], \end{cases}$$

kteřá je zřejmě absolutně spojitá na intervalech $[a, \frac{a+b}{2}]$ a $[\frac{a+b}{2}, b]$ a tedy podle věty 3.3 také na $[a, b]$.

3.5. Poznámka. Jestliže $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{K} \subset \mathbb{N}$ a jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\sum_{j \in \mathbb{K}} |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| < \varepsilon \quad (3.6)$$

platí pro každý (nikoliv nutně konečný) systém intervalů $\{[\alpha_j, \beta_j] \subset [a, b] : j \in \mathbb{K}\}$, splňující

$$(\alpha_j, \beta_j) \cap (\alpha_k, \beta_k) = \emptyset \quad \text{pro } j \neq k \quad \text{a} \quad \sum_{j \in \mathbb{K}} (\beta_j - \alpha_j) < \delta, \quad (3.7)$$

pak je funkce $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ samozřejmě absolutně spojitá na $[a, b]$.

V následujícím lemmatu ukážeme, že platí i obrácená implikace. Poznamenejme ještě, že podle lemmatu 2.20 je každý systém intervalů splňující (3.7) nejvýše spočetný.

3.6. Lemma. *Je-li $f \in \mathbb{A}\mathbb{C}[a, b]$, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že (3.6) platí pro libovolný (případně nekonečný) systém podintervalů intervalu $[a, b]$*

$$\{[\alpha_j, \beta_j] \subset [a, b] : j \in \mathbb{K}\}$$

splňující (3.7).

D ů k a z . Předpokládejme, že $f \in \mathbb{A}\mathbb{C}[a, b]$. Zřejmě stačí dokázat tvrzení lemmatu pro případ, že $\mathbb{K} = \mathbb{N}$. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$ a nechť $\delta > 0$ je určeno definicí 3.1. Nechť $\{[\alpha_j, \beta_j] : j \in \mathbb{N}\}$ je systém podintervalů v $[a, b]$ splňující (3.7). Potom pro každé $m \in \mathbb{N}$ máme

$$\sum_{j=1}^m (\beta_j - \alpha_j) < \delta \quad \text{a tedy} \quad \sum_{j=1}^m |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Odtud

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Tím je důkaz dokončen. □

3.7. Věta. Každá funkce absolutně spojitá na intervalu $[a, b]$ má na tomto intervalu konečnou variaci.

D ů k a z. Nechť $f \in \mathbb{AC}$. Zvolme $\delta > 0$ tak, aby platilo

$$\sum_{j=1}^m |f(b_j) - f(a_j)| < 1$$

pro každý konečný systém intervalů $\{[a_j, b_j] : j = 1, 2, \dots, m\}$ splňující (3.1). Dále, zvolme dělení $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ intervalu $[a, b]$ tak, aby platilo

$$0 < x_i - x_{i-1} < \delta \quad \text{pro každé } i = 1, 2, \dots, k.$$

Potom pro každé $i = 1, 2, \dots, k$ a každé dělení $\sigma^i = \{\alpha_0^i, \alpha_1^i, \dots, \alpha_{m_i}^i\}$ intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ máme

$$\sum_{j=1}^{m_i} (\alpha_j^i - \alpha_{j-1}^i) = x_i - x_{i-1} < \delta$$

a tudíž (podle věty 2.10)

$$\text{var}_a^b f = \sum_{i=1}^k \text{var}_{x_{i-1}}^{x_i} f = \sum_{i=1}^k \sup_{\sigma^i \in \mathcal{D}_{[x_{i-1}, x_i]}} V(f, \sigma^i) \leq k < \infty. \quad \square$$

3.8. Věta. Jestliže $f, g \in \mathbb{AC}[a, b]$, pak také

$$|f|, f + g, fg, \max\{f, g\}, \min\{f, g\} \in \mathbb{AC}[a, b].$$

Je-li navíc $|f(x)| > 0$ na $[a, b]$, pak také $\frac{1}{f} \in \mathbb{AC}[a, b]$.

D ů k a z. Nechť $f, g \in \mathbb{AC}[a, b]$.

a) Pro libovolná $x, y \in [a, b]$ platí $|f(x)| \leq |f(x) - f(y)| + |f(y)|$. Tudíž

$$|f(x) - f(y)| \geq ||f(x)| - |f(y)||$$

a

$$\sum_{j=1}^m \left| |f(\beta_j)| - |f(\alpha_j)| \right| \leq \sum_{j=1}^m |f(\beta_j) - f(\alpha_j)|.$$

Odtud okamžitě plyne, že také $|f| \in \mathbb{AC}[a, b]$.

b) Druhé a třetí tvrzení, tj. $f + g \in \mathbb{AC}[a, b]$ a $f g \in \mathbb{AC}[a, b]$, plynou z nerovností

$$|(f(x) + g(x)) - (f(y) + g(y))| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)|$$

a

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leq \|f\| |g(x) - g(y)| + \|g\| |f(x) - f(y)|.$$

c) Protože pro libovolné $x \in [a, b]$ máme

$$\max\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|)$$

a

$$\min\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|),$$

platí v důsledku a) a b) také

$$\max\{f, g\} \in \mathbb{AC}[a, b] \quad \text{a} \quad \min\{f, g\} \in \mathbb{AC}[a, b].$$

d) Konečně, je-li navíc $|f(x)| > 0$ pro $x \in [a, b]$, pak existuje $\mu > 0$ takové, že $|f(x)| \geq \mu$ platí pro $x \in [a, b]$ a tudíž také

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)} \right| \leq \frac{|f(x) - f(y)|}{\mu^2}.$$

Nyní už je snadné ukázat, že $\frac{1}{f} \in \mathbb{AC}[a, b]$. □

3.9. Věta. *Funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je absolutně spojitá na intervalu $[a, b]$ právě tehdy, když existují funkce f_1 a f_2 neklesající a absolutně spojitě na $[a, b]$ a takové, že $f = f_1 - f_2$ na intervalu $[a, b]$.*

D ů k a z. a) Nechť $f = f_1 - f_2$ na $[a, b]$, kde f_1, f_2 jsou absolutně spojitě a neklesající na $[a, b]$. Pak podle věty 3.8 je také f absolutně spojitá na $[a, b]$.

b) Nechť $f \in \mathbb{AC}[a, b]$. Podle vět 3.7 a 2.13 existují funkce f_1, f_2 neklesající na $[a, b]$ takové, že $f = f_1 - f_2$. Podle důkazu věty 2.13 můžeme položit

$$f_1(x) = \text{var}_a^x f \quad \text{a} \quad f_2(x) = f_1(x) - f(x) \quad \text{pro } x \in [a, b].$$

Vzhledem k větě 3.8 stačí dokázat, že f_1 je absolutně spojitá na $[a, b]$. Předpokládejme, že je dáno $\varepsilon > 0$ a nechť $\delta > 0$ je takové, že

$$\sum_{j=1}^m |f(b_j) - f(a_j)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

platí pro každý systém intervalů $\{[a_j, b_j] : j = 1, 2, \dots, m\}$ splňující (3.1).

Nechť $[\alpha_j, \beta_j]$, $j=1, 2, \dots, n$, je libovolný systém intervalů splňující (3.3), kde $m = n$. Pro každé $j = 1, 2, \dots, n$ zvolme dělení $\sigma^j = \{\sigma_0^j, \sigma_1^j, \dots, \sigma_{n_j}^j\}$ intervalu $[\alpha_j, \beta_j]$. Potom

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{n_j} (\sigma_i^j - \sigma_{i-1}^j) = \sum_{j=1}^n [\beta_j - \alpha_j] < \delta$$

a tudíž

$$\sum_{j=1}^n V(f, \sigma^j) < \frac{\varepsilon}{2} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{n_j} |f(\sigma_i^j) - f(\sigma_{i-1}^j)|.$$

Odtud už plyne, že

$$\sum_{j=1}^n (f_1(\beta_j) - f_1(\alpha_j)) = \sum_{j=1}^n \text{var}_{\alpha_j}^{\beta_j} f = \sum_{j=1}^n \left(\sup_{\sigma^j \in \mathcal{D}_{[\alpha_j, \beta_j]}} V(f, \sigma^j) \right) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Tím je důkaz věty dokončen. □

3.2 Absolutně spojité funkce a Lebesgueův integrál

Připomeňme, že podle věty 2.28 každá funkce s konečnou variací na intervalu $[a, b]$ má pro s.v. $x \in [a, b]$ konečnou derivaci $f'(x)$. Podle věty 3.7 má tedy stejnou vlastnost i každá funkce, která je absolutně spojitá na $[a, b]$. Ve zbývajících částech této kapitoly připomeneme některé další základní vlastnosti derivací funkcí absolutně spojitých a souvislost mezi absolutní spojitostí a neurčitým Lebesgueovým integrálem. V případech, kdy se důkazy nebo jejich části opírají o teorii míry v rozsahu přesahujícím rámec tohoto textu, důkazy resp. jejich příslušné části neuvádíme a pouze odkazujeme na dostupnou literaturu. Integrálem se v tomto odstavci rozumí integrál Stieltjesův.

Podle následující věty jsou derivace funkcí s konečnou variací (a tedy tím spíše i funkcí absolutně spojitých) lebesgueovsky integrovatelné. Její důkaz podstatně využívá řady poznatků teorie míry a Lebesgueovy integrace, které se nevejdou do tohoto textu. Pro úplný důkaz tedy odkazujeme na příslušnou literaturu (viz např. [18, věta 91], [19, věta VI.4.1], resp. [33, Theorem 22.7]).

3.10. Věta. *Má-li funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konečnou variaci na $[a, b]$, pak je její derivace f' lebesgueovsky integrovatelná na $[a, b]$.*

Je-li navíc f neklesající na $[a, b]$, pak platí nerovnost

$$0 \leq \int_a^b f'(x) \, dx \leq f(b) - f(a), \quad (3.8)$$

Nyní ukážeme, že neurčitý integrál integrovatelné funkce je absolutně spojitý.

3.11. Věta. Jestliže $g \in \mathbb{L}^1[a, b]$ a $f(x) = \int_a^x g \, dt$ pro $x \in [a, b]$, pak je funkce f absolutně spojitá na intervalu $[a, b]$.

D ů k a z. Nechť $g \in \mathbb{L}^1[a, b]$. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Potom existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\sum_{j=1}^m \int_{a_j}^{b_j} |g(x)| \, dx < \varepsilon$$

platí pro každý systém intervalů $\{[a_j, b_j] \subset [a, b] : j = 1, 2, \dots, m\}$ splňující (3.1) (viz např. [19, věta V.5.5] nebo [18, věta 51] - tato vlastnost se obvykle nazývá absolutní spojitost Lebesgueova integrálu).

Máme tedy

$$\sum_{j=1}^m |f(b_j) - f(a_j)| = \sum_{j=1}^m \left| \int_{a_j}^{b_j} g \, dt \right| \leq \sum_{j=1}^m \int_{a_j}^{b_j} g \, dx < \varepsilon.$$

To znamená, že $f \in \mathbb{AC}[a, b]$. □

3.12. Cvičení. Dokažte, že funkce $f(x) = \sqrt{|x|}$ je absolutně spojitá na intervalu $[-1, 1]$, přičemž f není lipschitzovská na $[-1, 1]$. (Návod: f je na $[-1, 1]$ neurčitým Lebesgueovým integrálem lebesgueovsky integrovatelné funkce a současně $f'(0-) = -\infty$ a $f'(0+) = \infty$.)

Další tvrzení se týká derivování neurčitých integrálů integrovatelných funkcí.

3.13. Věta. Jestliže $g \in \mathbb{L}^1[a, b]$ a

$$f(x) = \int_a^x g \, dt \quad \text{pro } x \in [a, b],$$

potom $f'(x) = g(x)$ pro s.v. $x \in [a, b]$.

D ů k a z se opírá o řadu výsledků teorie míry, které nejsou do tohoto textu zařazeny. Odkazujeme tedy čtenáře na důkazy např. v [19, věta VI.3.1] nebo [33, Theorem 23.4]. □

Nechť je dána funkce $g \in \mathbb{L}^1[a, b]$. Podle vět 3.11 a 3.13 je její neurčitý Lebesgueův integrál f absolutně spojitý na $[a, b]$ a platí $f' = g$ s.v. na $[a, b]$. Chceme ukázat, že f je absolutně spojitá na $[a, b]$ tehdy a jen tehdy, f je neurčitý integrálem nějaké lebesgueovskoy integrovatelné funkce. Pro důkaz takového tvrzení je klíčové následující tvrzení známé jako Rieszovo lemma.

3.14. Lemma (RIESZ). *Nechť $f \in \mathbb{C}[a, b]$ a*

$$E = \{x \in (a, b) : \exists \xi \in (x, b) \text{ takové, že } f(\xi) > f(x)\}.$$

Potom je množina E otevřená a je sjednocením nejvýše spočetného systému po dvou disjunktních otevřených intervalů (a_k, b_k) , přičemž pro každý z nich platí $f(a_k) \leq f(b_k)$.

Důkaz je založen m.j. na známém faktu, že každá neprázdná otevřená množina je sjednocením nejvýše spočetného systému po dvou disjunktních otevřených intervalů (viz např. [17, věta 69]). Podrobný důkaz Rieszova lemmatu lze nalézt např. v monografii [19] v odstavci VI.1.2 věnovaném důkazu Lebesgueovy věty o derivaci funkce s konečnou variací (naše věta 2.28). \square

3.15. Poznámka. Zobecnění Rieszova lemmatu na případ, kdy funkce f může být jen regulovaná, bylo dokázáno v [44, lemma XIII.3.5].

3.16. Lemma. *Jestliže $f \in \mathbb{A}\mathbb{C}[a, b]$ je neklesající na $[a, b]$ a $f'(x) = 0$ pro s.v. $x \in [a, b]$, pak f je konstantní na $[a, b]$.*

Důkaz. Vzhledem ke své monotónnosti funkce f zobrazuje interval $[a, b]$ na interval $[f(a), f(b)]$. Dokážeme, že $f(a) = f(b)$.

Nechť je dáno $\varepsilon > 0$ a nechť $\delta > 0$ přísluší k tomuto ε podle lemmatu 3.6.

Označme Z množinu všech $x \in [a, b]$ pro které platí $f'(x) = 0$. Podle předpokladu má její doplněk $[a, b] \setminus Z$ nulovou míru ($\mu([a, b] \setminus Z) = 0$). To znamená, že existuje konečný nebo spočetný systém $\{(\sigma_j, \beta_j) : j \in \mathbb{K}\}$ splňující (3.7) a

$$[a, b] \setminus Z \subset \bigcup_{j \in \mathbb{K}} (\sigma_j, \beta_j).$$

Obraz $f([a, b] \setminus Z)$ množiny $[a, b] \setminus Z$ je tedy obsažen ve sjednocení otevřených intervalů $\{(f(\sigma_j), f(\beta_j)) : j \in \mathbb{K}\}$. Protože podle lemmatu 3.6 platí (3.6), plyne oddtud, že množina $f([a, b] \setminus Z)$ má nulovou míru, tj.

$$\mu(f([a, b] \setminus Z)) = 0. \quad (3.9)$$

Nyní, nechť $x \in Z$. Potom je $f'(x) = 0$. Pro dané ε tedy existuje $\Delta > 0$ takové, že

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} < \varepsilon \quad \text{pro každé } t \text{ takové, že } 0 < |t - x| < \Delta.$$

Odtud plyne, že

$$\varepsilon x - f(x) < \varepsilon t - f(t) \quad \text{platí pro každé } t \in (x, x + \Delta).$$

Podle Rieszova lemmatu které použijeme na funkci $\varepsilon x - f(x)$ na místě $f(x)$, je tedy množina Z obsažena ve sjednocení konečného nebo spočetného systému disjunktních intervalů $\{(a_k, b_k) \subset [a, b] : k \in \mathbb{K}\}$, přičemž platí

$$\varepsilon a_k - f(a_k) \leq \varepsilon b_k - f(b_k) \quad \text{pro každé } k \in \mathbb{K}$$

neboli

$$f(b_k) - f(a_k) \leq \varepsilon (b_k - a_k) \quad \text{pro každé } k \in \mathbb{K}$$

a tudíž

$$\sum_{k \in M} [f(b_k) - f(a_k)] \leq \varepsilon \sum_{k \in M} [b_k - a_k] \leq \varepsilon (b - a).$$

Odtud už vidíme, že množina $f(Z)$ má také nulovou míru, tj.

$$\mu(f(Z)) = 0. \tag{3.10}$$

Podle (3.9) a (3.10) má interval $[f(a), f(b)] = f(Z) \cup (f([a, b] \setminus f(Z)))$ nulovou délku, tj. (vzhledem k monotónnosti funkce f) máme $f(a) = f(x) = f(b)$ pro každé $x \in (a, b)$. \square

3.17. Věta. *Funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je absolutně spojitá na $[a, b]$ právě tehdy, když*

$$f(x) - f(a) = \int_a^x g(t) dt \quad \text{pro } x \in [a, b] \tag{3.11}$$

pro nějakou funkci $g \in \mathbb{L}^1[a, b]$. Potom je $f' = g$ s.v. na $[a, b]$.

D ů k a z. a) Nechť $g \in \mathbb{L}^1[a, b]$ a

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt \quad \text{pro } x \in [a, b].$$

Potom podle věty 3.11 je f absolutně spojitá na $[a, b]$ a podle věty 3.13 je $f' = g$ s.v. na $[a, b]$.

b) Předpokládejme zprvu, že funkce $f \in \mathbb{AC}[a, b]$ je neklesající na $[a, b]$. Podle vět 3.7 a 3.10 je $f' \in \mathbb{L}^1[a, b]$. Položme

$$h(x) = \int_a^x f' dt, \quad \text{a } g(x) = f(x) - h(x) \quad \text{pro } x \in [a, b].$$

Ukážeme, že také funkce g je neklesající na $[a, b]$. Vskutku, podle věty 3.10 pro libovolné body $x, y \in [a, b]$ takové, že $x \leq y$, máme

$$\begin{aligned} g(y) - g(x) &= (f(y) - h(y)) - (f(x) - h(x)) \\ &= (f(y) - f(x)) - \int_x^y f' \, dt \geq 0 \end{aligned}$$

Dále, podle věty 3.11 je funkce h absolutně spojitá na $[a, b]$ a podle věty 3.13 je $h' = f'$ s.v. na $[a, b]$. To znamená, že $g' = (f - h)' = 0$ s.v. na $[a, b]$. Podle lemmatu 3.16 je proto funkce g konstantní na $[a, b]$. Máme tedy

$$g(x) = f(x) - h(x) = f(a) - h(a) = f(a) \quad \text{pro } x \in [a, b]$$

neboli

$$f(x) = f(a) + h(x) = f(a) + \int_a^x f' \, dt \quad \text{pro } x \in [a, b]$$

a tudíž (3.11) platí pro každou funkci $f \in \mathbb{AC}[a, b]$, která je neklesající na $[a, b]$.

V obecném případě $f \in \mathbb{AC}[a, b]$ existují podle věty 3.9 funkce f_1, f_2 absolutně spojitě na $[a, b]$, neklesající na $[a, b]$ a takové, že $f = f_1 - f_2$ na $[a, b]$. Máme tedy

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x) - f_2(x) = \left(f_1(a) + \int_a^x f_1' \, dt \right) - \left(f_2(a) + \int_a^x f_2' \, dt \right) \\ &= f(a) + \int_a^x f' \, dt \quad \text{pro } x \in [a, b]. \end{aligned}$$

Důkaz je dokončen. □

3.18. Cvičení. (i) Dokažte následující dvě tvrzení:

a) Jestliže $f \in \mathbb{AC}[a, b]$, pak je $f' = 0$ s.v. na $[a, b]$ tehdy a jen tehdy, když f je konstantní na $[a, b]$. (Srovnejte s poznámkou 2.29.)

a

b) Pro každou funkci $f \in \mathbb{BV}[a, b]$ a každé $x \in [a, b]$ platí

$$f^{\text{AC}}(x) - f^{\text{AC}}(a) = \int_a^x f' \, dt.$$

(ii) Je známo, že je-li f absolutně spojitá na $[a, b]$ a $v(x) = \text{var}_a^b f$, pak platí $v' = |f'|$ s.v. na $[a, b]$ (viz [18, Věta 118]). Na základě tohoto faktu dokažte,

že $\text{var}_a^b f = \int_a^b |f'| \, dx$ pro každou funkci f absolutně spojitou na $[a, b]$.

3.3 Lebesgueův rozklad funkcí s konečnou variací

Víme již (viz věta 2.36 a poznámka 2.37), že každou funkci s konečnou variací na $[a, b]$ můžeme rozložit na součet funkce spojitě a funkce skokové resp. na rozdíl dvou funkcí neklesajících na $[a, b]$ (viz věta 2.13). Další možnost rozkladu funkcí s konečnou variací nabízí následující věta.

3.19. Věta (LEBESGUEŮV ROZKLAD FUNKCE S KONEČNOU VARIACÍ). *Pro každou funkci $f \in \mathbb{BV}[a, b]$ existují absolutně spojitá funkce f^{AC} , singulární spojitá funkce f^{SC} a skoková funkce f^{B} takové, že*

$$f = f^{\text{AC}} + f^{\text{SC}} + f^{\text{B}} \text{ na } [a, b].$$

Jestliže $f = f_1 + f_2 + f_3$, kde funkce f_1 je absolutně spojitá na $[a, b]$, funkce f_2 je singulární a spojitá na $[a, b]$ a funkce f_3 je skoková funkce na $[a, b]$, pak jsou funkce $f^{\text{AC}} - f_1$, $f^{\text{SC}} - f_2$ a $f^{\text{B}} - f_3$ konstantní na $[a, b]$.

D ů k a z. a) Podle věty 2.36 existuje skoková funkce f^{B} taková, že funkce $f^{\text{C}} = f - f^{\text{B}}$ je spojitá na $[a, b]$. Položme

$$f^{\text{AC}}(x) = \int_a^x f'(t) dt \quad \text{a} \quad f^{\text{SC}}(x) = f^{\text{C}}(x) - f^{\text{AC}}(x) \quad \text{pro } x \in [a, b].$$

Podle věty 2.34 je $(f^{\text{B}})' = 0$ s.v. na $[a, b]$ a podle věty 3.13 máme $(f^{\text{AC}})' = f'$ s.v. na $[a, b]$. To znamená, že

$$(f^{\text{SC}})' = f' - (f^{\text{AC}})' - (f^{\text{B}})' = 0 \text{ s.v. na } [a, b].$$

b) Nechť $f = f_1 + f_2 + f_3$, kde $f_1 \in \mathbb{AC}[a, b]$, f_2 je singulární a spojitá na $[a, b]$ a $f_3 \in \mathbb{B}[a, b]$. Podle věty 2.36 jsou rozdíly $(f^{\text{AC}} + f^{\text{SC}}) - (f_1 + f_2)$ a $f^{\text{B}} - f_3$ konstantní na $[a, b]$. Musí být tedy konstantní na $[a, b]$ i rozdíl

$$f^{\text{AC}} - f_1 = -((f^{\text{AC}} + f^{\text{SC}}) - (f_1 + f_2)) - (f^{\text{B}} - f_3).$$

Tím jsme dokončili důkaz. □

3.20. Definice. Jestliže $f \in \mathbb{BV}[a, b]$, pak funkce f^{AC} resp. f^{SC} resp. f^{B} z věty 3.19 nazýváme *absolutně spojitá část* resp. *spojitá singulární část* resp. *skoková část* funkce f .

Kapitolu uzavřeme ještě jedním doplňkem ke větě 3.19.

3.21. Věta. *Je-li $f \in \mathbb{AC}[a, b]$ neklesající na $[a, b]$, pak jsou neklesající na $[a, b]$ i funkce f^{AC} , f^{SC} , a f^{B} z věty 3.19.*

D ů k a z. Nechť $f \in \mathbb{AC}[a, b]$ je neklesající na $[a, b]$ a funkce f^{AC} , f^{SC} f^{B} jsou přiřazeny funkci f podle věty 3.19. Dále, nechť $\{w_k\}$ je množina bodů nespojitosti funkce f a x, y je libovolná dvojice bodů z $[a, b]$ taková, že $x \leq y$.

Protože f je neklesající na $[a, b]$, máme

$$\Delta^+ f(t) \geq 0 \text{ a } \Delta^- f(s) \geq 0 \text{ pro } t \in [a, b), s \in (a, b]$$

a proto

$$f^{\text{B}}(y) - f^{\text{B}}(x) = \sum_{x < w_k \leq y} \Delta^- f(w_k) + \sum_{x \leq w_k < y} \Delta^+ f(w_k) \geq 0.$$

Skoková část f^{B} funkce f je tedy neklesající na $[a, b]$.

Označme dále symbolem g spojitou část funkce f , tj. $g = f - f^{\text{B}}$. Podle Důsledku 2.25 máme

$$f^{\text{B}}(y) - f^{\text{B}}(x) \leq \text{var}_x^y f = f(y) - f(x)$$

a tudíž

$$g(y) - g(x) = (f(y) - f(x)) - (f^{\text{B}}(y) - f^{\text{B}}(x)) \geq 0.$$

Spojité část funkce f je tedy neklesající na $[a, b]$.

Pro s.v. $x \in [a, b]$ je

$$f'(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{x - y} \in \mathbb{R}.$$

Protože je f neklesající na $[a, b]$, platí $f'(x) \geq 0$ pro s.v. $x \in [a, b]$. Podle Věty 3.17 tedy dostaneme

$$f^{\text{AC}}(y) - f^{\text{AC}}(x) = \int_x^y f'(t) dt \geq 0 \text{ jakmile } x, y \in [a, b] \text{ a } x \leq y.$$

To znamená, že f^{AC} je neklesající na $[a, b]$.

Podle věty 2.34 je $(f^{\text{B}})' = 0$ s.v. na $[a, b]$ a v důkazu věty 3.19 bylo ukázáno, že také $(f^{\text{SC}})' = 0$ s.v. na $[a, b]$. Tudíž

$$g' = f' - (f^{\text{SC}})' - (f^{\text{B}})' = f' \text{ s.v. na } [a, b].$$

Odtud použitím (3.8) a věty 3.17 odvodíme, že platí

$$g(y) - g(x) \geq \int_x^y g'(t) \, dt = \int_x^y f'(t) \, dt = f^{\text{AC}}(y) - f^{\text{AC}}(x)$$

neboli

$$\begin{aligned} f^{\text{SC}}(y) - f^{\text{SC}}(x) &= (g(y) - f^{\text{AC}}(y)) - (g(x) - f^{\text{AC}}(x)) \\ &= (g(y) - g(x)) - (f^{\text{AC}}(y) - f^{\text{AC}}(x)) \geq 0. \end{aligned}$$

Spojité singularní část f^{SC} funkce f je tedy také neklesající na $[a, b]$. Tím je důkaz dokončen. \square

Další podrobnosti o funkcích absolutně spojitých lze nalézt v monografiích V. Jarníka *Diferenciální počet II* [17, v.9], *Integrální počet II* [18, v.5], A.N. Kolmogorova a S.V. Fomina *Základy teorie funkcí a funkcionální analýzy* [19, Sec. 33.2] a Š. Schwabika *Integrace v \mathbb{R} (Kurzweilova teorie)* [44, XIII.4] a ve skriptech [33] J. Lukeše a J. Malého *Measure and Integral*.