Kapitola 4

Regulované funkce

4.1. Definice. Funkce $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ se nazývá *regulovaná* na $[a,b]$, jestliže pro každé $t\in(a,b]$ a každé $s\in[a,b)$ existují konečné limity

$$f(t-)=\lim_{\tau\to t-}f(\tau)\ \text{ a }\ f(s+)=\lim_{\tau\to s+}f(\tau)\,,$$

tj. má-li funkce f na intervalu $[a,b]$ nespojitosti nejvýše *1. druhu*. Množinu funkcí regulovaných na $[a,b]$ značíme $\mathbb{G}[a,b]$.

4.2. Poznámka. Zřejmě $\mathbb{BV}[a,b]\cup\mathbb{C}[a,b]\subset\mathbb{G}[a,b]$, přičemž

$$\mathbb{G}[a,b]\setminus\mathbb{C}[a,b]\neq\emptyset\ \text{ a }\ \mathbb{G}[a,b]\setminus\mathbb{BV}[a,b]\neq\emptyset\,.$$

Následující tvrzení plyne okamžitě z lemmatu 2.20.

4.3. Věta. *Každá funkce regulovaná na $[a,b]$ má na $[a,b]$ nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti.* □

4.4. Věta. *Jestliže posloupnost $\{f_n\}$ regulovaných funkcí konverguje stejnoměrně na intervalu $[a,b]$ k funkci f, potom $f\in\mathbb{G}[a,b]$.*

D ů k a z . Nechť $x\in[a,b)$, nechť $\{x_k\}\subset(x,b]$ je libovolná posloupnost taková, že $x_k>x$ pro všechna $k\in\mathbb{N}$ a $x_k\to x$ pro $k\to\infty$. Nechť je dáno libovolné $\varepsilon>0$. Zvolme $n_0\in\mathbb{N}$ a $k_0\in\mathbb{N}$ tak, aby platilo

$$\|f-f_{n_0}\|<\frac{\varepsilon}{3}\ \text{ a }\ |f_{n_0}(x_k)-f_{n_0}(x_\ell)|<\frac{\varepsilon}{3}\quad\text{pro všechna } k,\ell\geq k_0\,.$$

Potom budeme mít pro všechna $k,\ell\geq k_0$

$$\begin{aligned}&|f(x_k)-f(x_\ell)|\\ &\quad\leq|f(x_k)-f_{n_0}(x_k)|+|f_{n_0}(x_k)-f_{n_0}(x_\ell)|+|f(x_\ell)-f_{n_0}(x_\ell)|<\varepsilon\,,\end{aligned}$$

tj. existuje konečná limita $f(x+)=\lim_{k\to\infty}f(x_k)$. Podobně bychom ukázali, že pro každé $x\in(a,b]$ existuje konečná limita $f(x-)$. □

Připomeňme si nyní několik pojmů z matematické analýzy.

4.5. Definice. Nechť $\mathbb{K} \subset \mathbb{N}$. Systém $\mathcal{J} = \{J_k : k \in \mathbb{K}\}$ podmnožin J_k intervalu $[a,b]$ se nazývá *pokrytí intervalu* $[a,b]$, jestliže $[a,b] = \cup_{k \in \mathbb{K}} J_k$. Řekneme, že systém $\mathcal{J}$ je *otevřené pokrytí* intervalu $[a,b]$, jestliže jsou všechny jeho prvky otevřené množiny v $[a,b]$. (Intervaly typu $[a,c)$ a $(d,b]$, kde $c \in (a,b]$ a $d \in [a,b)$ jsou otevřené v $[a,b]$.) Jestliže nějaká část $\mathcal{M}$ pokrytí $\mathcal{J}$ intervalu $[a,b]$ je sama také jeho pokrytím, říkáme, že $\mathcal{M}$ je *podpokrytím* pokrytí $\mathcal{J}$.

Fundamentální význam v matematice má následující tvrzení. Jeho důkaz lze nalézti např. v [17, věta 70]. (Připomeňme ovšem, že interval $[a,b]$ předpokládáme stále ohraničený.)

4.6. Věta (HEINOVA-BORELOVA VĚTA)**.** *Z libovolného otevřeného pokrytí intervalu $[a,b]$ lze vybrat jeho konečné podpokrytí.*

4.7. Definice. Pro funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, otevřený interval $(\alpha,\beta) \subset [a,b]$ a dělení $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$ definujeme

$$\omega_{(\alpha,\beta)}(f) = \sup_{x',x'' \in (\alpha,\beta)} |f(x') - f(x'')| \text{ a } \omega_D(f) = \max_{i=1,2,\dots,m} \omega_{(\sigma_{i-1},\sigma_i)}(f).$$

Stěžejním tvrzením této kapitoly je následující věta.

4.8. Věta. *Následující tři tvrzení jsou ekvivalentní*

(i) $f \in \mathbb{G}[a,b]$.

(ii) *Existuje posloupnost $\{f_n\} \subset \mathbb{S}[a,b]$ (jednoduchých skokových funkcí), která konverguje stenoměrně k f na $[a,b]$.*

(iii) *Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$ takové, že $\omega_D(f) < \varepsilon$.*

D ů k a z . a) Implikace (ii) $\Longrightarrow$ (i) je dokázána větou 4.4.

b) Předpokládejme, že platí (i) a nechť je dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Potom pro každé $x \in [a,b]$ existuje $\delta(x) > 0$ takové, že platí

$$x - \delta(x) > a \text{ pro všechna } x \in (a,b], \quad x + \delta(x) < b \text{ pro všechna } x \in [a,b)$$

a

$$\left.\begin{aligned} &\omega_{(a,a+\delta(a))}(f) < \varepsilon, \ \omega_{(b-\delta(b),b)}(f) < \varepsilon, \\ &\omega_{(x-\delta(x),x)}(f) < \varepsilon, \ \omega_{(x,x+\delta(x))}(f) < \varepsilon \text{ pro všechna } x \in (a,b). \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

Intervaly

$$[a, a+\delta(a)), \ (x-\delta(x), x+\delta(x)), \ x \in (a,b), \ (b-\delta(b), b]$$

tvoří otevřené pokrytí intervalu $[a,b]$, ze kterého lze podle Heinovy-Borelovy věty 4.6 vybrat pokrytí konečné, tj. konečný systém intervalů

$$[a,a+\delta(a)),\ (x_i-\delta(x_i),x_i+\delta(x_i))\,,\ i=1,2,\dots,m-1,\ (b-\delta(b),b],$$

takový, že

$$[a,a+\delta(a))\cup\bigcup_{j=1}^{m}(x_i-\delta(x_i),x_i+\delta(x_i))\cup(b-\delta(b),b]\supset[a,b]\,,$$

Současně, vzhledem k (4.1), platí

$$\omega_{(x_i-\delta(x_i),x_i)}(f)<\varepsilon \text{ a } \omega_{(x_i,x_i+\delta(x_i))}(f)<\varepsilon \text{ pro všechna } i=1,2,\dots m-1\,.$$

Označme $x_0=a$ a $x_m=b$ a nechť

$$\boldsymbol{\sigma}=\Big\{x_0,\sigma_1,x_1,\dots\sigma_{m-1},x_{m-1},\sigma_m,x_m\Big\}\,,$$

kde

$$\sigma_i\in(x_i-\delta(x_i),x_{i-1}+\delta(x_{i-1}))\cap(x_{i-1},x_i),\quad i=1,2,\dots,m-1\,.$$

Potom

$$\omega_{(a,\sigma_1)}(f)\le\omega_{(a,a+\delta(a))}(f)<\varepsilon,\qquad \omega_{(\sigma_m,b)}(f)\le\omega_{(b-\delta(b),b)}(f)<\varepsilon$$

a

$$\omega_{(\sigma_i,x_i)}(f)\le\omega_{(x_i-\delta(x_i),x_i)}(f)<\varepsilon,\ \omega_{(x_i,\sigma_{i+1})}(f)\le\omega_{(x_i,x_i+\delta(x_i))}(f)<\varepsilon$$

pro každé $i=1,2,\dots,m-1$, tj.

$$\omega_D(f)<\varepsilon\,.$$

c) Předpokládejme, že platí (iii). Nechť je dáno $\varepsilon>0$ a nechť

$$\boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_0,\sigma_1,\dots,\sigma_m\}\in\mathscr{D}[a,b]$$

je dělení $[a,b]$ takové, že $\omega_D(f)<\varepsilon$. Pro každé $i\in\{1,2,\dots,m\}$ zvolme libovolně $\xi_i\in(\sigma_{i-1},\sigma_i)$ a definujme

$$g_\varepsilon(x)=\begin{cases} f(\sigma_i) & \text{pro } x=\sigma_i\,,\\ f(\xi_i) & \text{pro } x\in(\sigma_{i-1},\sigma_i)\,.\end{cases}$$

Pro každé $x\in[a,b]$ máme $|f(x)-g_\varepsilon(x)|<\varepsilon$ a tudíž také $\|f-g_\varepsilon\|<\varepsilon$. Jestliže tedy pro každé $n\in\mathbb{N}$ definujeme $f_n=g_{1/n}$, bude $f_n\in\mathbb{S}[a,b]$ pro každé $n\in\mathbb{N}$ a $f_n\rightrightarrows f$ na $[a,b]$ pro $n\to\infty$. $\square$

4.9. Důsledek. *Každá funkce regulovaná na* $[a,b]$ *je na* $[a,b]$ *ohraničená.*

D ů k a z . Podle tvrzení (iii) z věty 4.8 existuje dělení $\boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_0,\sigma_1,\dots,\sigma_m\}$ intervalu $[a,b]$ takové, že

$$|f(x)|\le|f(\frac{\sigma_{j-1}+\sigma_j}{2})|+1 \quad \text{pro } x\in(\sigma_{j-1},\sigma_j),\ j\in\{1,2,\dots,m\}.$$

Odtud plyne, že $|f(x)|\le M$ pro všechna $x\in[a,b]$, kde

$$M=\max\Big\{|f(a)|,|f(\frac{\sigma_{j-1}+\sigma_j}{2})|+1,|f(\sigma_j)|: j=1,2,\dots,m\Big\}<\infty\,.$$

□

4.10. Důsledek. *Pro každé* $\varepsilon>0$ *existuje nejvýše konečně mnoho* $x\in[a,b]$ *takových, že platí*

$$|\Delta^+f(x)|>\varepsilon \quad \textit{nebo} \quad |\Delta^-f(x)|>\varepsilon\,.$$

D ů k a z . Podle tvrzení (iii) z věty 4.8 ke každému $\varepsilon>0$ můžeme najít dělení $\boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_0,\sigma_1,\dots,\sigma_m\}$ intervalu $[a,b]$ takové, že

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon \quad \text{pro } x,y\in(\sigma_{j-1},\sigma_j),\ j\in\{1,2,\dots,m\}.$$

Speciálně, $|\Delta^+f(x)|=|f(x+)-f(x)|\le\varepsilon$ a $|\Delta^-f(x)|=|f(x)-f(x-)|\le\varepsilon$ pro všechna $x\in[a,b]\setminus\boldsymbol{\sigma}$. Platí tedy tvrzení tohoto důsledku. □

4.11. Věta. $\mathbb{G}[a,b]$ *je Banachův prostor vzhledem k normě*

$$\|f\|_{\mathbb{G}}=\|f\|=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|\,.$$

D ů k a z . Předpokládejme, že posloupnost $\{f_n\}\subset\mathbb{G}[a,b]$ je cauchyovská v prostoru $\mathbb{G}[a,b]$. Jako v částech a) a b) důkazu věty 2.18 můžeme dokázat, že existuje funkce $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ taková, že $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0$. Podle věty 4.4 je $f\in\mathbb{G}[a,b]$ a tím je věta dokázána. □

4.12. Poznámky.

(i) Podle definice 2.31 $f\in\mathbb{S}[a,b]$ právě tehdy, když existuje dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a,b]$ takové, že f je konstantní na každém podintervalu (σ_{j-1},σ_j). Každá funkce z $\mathbb{S}[a,b]$ je konečná lineární kombinace funkcí tvaru $\chi_{(\alpha,\beta)}$ a $\chi_{[\tau]}$, kde (α,β) může být libovolný podinterval v $[a,b]$ a τ může být libovolný bod z $[a,b]$. Platí ovšem $\chi_{(\alpha,\beta)}=\chi_{(\alpha,b]}-\chi_{[\beta,b]}$ pro libovolná $\alpha,\beta\in[a,b]$, $\alpha<\beta$ a $\chi_{[\tau]}=\chi_{[\tau,b]}-\chi_{(\tau,b]}$ pro každé $\tau\in[a,b)$.

Tudíž $f \in \mathbb{S}[a,b]$ tehdy a jen tehdy, když f je konečná lineární kombinace charakteristických funkcí intervalů $[\tau,b]$, $(\tau,b]$, $\tau \in [a,b]$, a charakteristické funkce jednobodového intervalu $[b]$, tj.

$$\mathbb{S}[a,b] = \mathrm{Lin}\Big(\chi_{[\tau,b]},\ \chi_{(\tau,b]},\ \tau \in [a,b),\ \chi_{[b]}\Big)\,,$$

kde (Lin (M) značí lineární obal množiny M. Podobně bychom ukázali, že je také

$$\mathbb{S}[a,b] = \mathrm{Lin}\Big(\chi_{[a,\tau]},\ \chi_{[a,\tau)]},\ \tau \in (a,b],\ \chi_{[a]}\Big)\,,$$

(ii) Množina $\mathbb{S}[a,b]$ je podle tvrzení (ii) věty 4.8 hustá v $\mathbb{G}[a,b]$, tj. $\overline{\mathbb{S}[a,b]} = \mathbb{G}[a,b]$, kde $\overline{\mathbb{S}[a,b]}$ značí uzávěr $\mathbb{S}[a,b]$ v $\mathbb{G}[a,b]$.

4.13. Lemma. *Nechť* $\{f_n\} \subset \mathbb{G}[a,b]$ *a* $f_n \rightrightarrows f$ *na* $[a,b]$. *Potom platí též*

$$f_n(x-) \rightrightarrows f(x-) \ \text{ a } \ f_n(x+) \rightrightarrows f(x+) \ \text{ na } [a,b]\,,$$

kde $f(a-) = f(a)$, $f(b+) = f(b)$ *a* $f_k(a-) = f_k(a)$, $f_k(b+) = f_k(b)$ *pro* $k \in \mathbb{N}$.

D ů k a z . Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$\widetilde{f}_n(x) = \begin{cases} f_n(x+) & \text{když } x \in [a,b)\,, \\ f_n(b) & \text{když } x = b \end{cases}$$

a

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x+) & \text{když } x \in [a,b)\,, \\ f(b) & \text{když } x = b\,. \end{cases}$$

Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Existuje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takové, že je $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$ pro každé $n \ge n_\varepsilon$ a každé $t \in [a,b]$. Odtud ovšem limitním přechodem $t \to x+$ dostaneme, že také pro každé $x \in [a,b)$ a každé $n \ge n_\varepsilon$ platí

$$|\widetilde{f}_n(x) - \widetilde{f}(x)| = \lim_{t \to x+} |f_n(t) - f(t)| \le \varepsilon\,,$$

tj.

$$\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{f}_n - \widetilde{f}\| = 0 \ \text{ neboli } f_n(x+) \rightrightarrows f(x+) \quad \text{na } [a,b]\,.$$

Podobně bychom ukázali, že platí i $f_n(x-) \rightrightarrows f(x-)$ na $[a,b]$. □

Ve zbývající části kapitoly uvedeme několik tvrzení, které budou později (zejména v kapitolách 6 a 7) užitečné. Nejprve shrneme důsledky lemmatu 4.13 pro některé důležité podmnožiny prostoru $\mathbb{G}[a,b]$.

4.14. Důsledky. *Množiny*

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b] &= \{f \in \mathbb{G}[a,b] : f(x-) = f(x) \text{ na } (a,b)\}\,,\\ \widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{L}}[a,b] &= \{f \in \mathbb{G}[a,b] : f(x-) = f(x) \text{ na } (a,b]\},\\ \mathbb{G}_{\mathrm{R}}[a,b] &= \{f \in \mathbb{G}[a,b] : f(x+) = f(x) \text{ na } (a,b)\},\\ \widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{R}}[a,b] &= \{f \in \mathbb{G}[a,b] : f(x-) = f(x) \text{ na } [a,b)\},\\ \mathbb{G}_{reg}[a,b] &= \{f \in \mathbb{G}[a,b] : f(x-) + f(x+) = 2\,f(x) \text{ na } (a,b)\} \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

jsou uzavřené v $\mathbb{G}[a,b]$ a tudíž jsou to také Banachovy prostory vzhledem k operacím a normě indukovaným z $\mathbb{G}[a,b]$. □

4.15. Lemma.

$$\overline{\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b]} = \mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b], \quad \overline{\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{L}}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b]} = \widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{L}}[a,b],$$

$$\overline{\mathbb{G}_{\mathrm{R}}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b]} = \mathbb{G}_{\mathrm{R}}[a,b], \quad \overline{\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{R}}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b]} = \widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{R}}[a,b],$$

$$\overline{\mathbb{G}_{reg}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b]} = \mathbb{G}_{reg}[a,b].$$

D ů k a z . Dokážeme pouze první a poslední tvrzení. Zbývající vztahy se dokážou analogicky.

a) Nechť $f \in \mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$ a $\varepsilon > 0$. Podle věty 4.8 (ii) existuje $\varphi \in \mathbb{S}[a,b]$ takové, že

$$|f(x) - \varphi(x)| \le \|f - \varphi\| < \varepsilon \quad \text{pro } x \in [a,b]\,. \tag{4.3}$$

Dále, pro každé $x \in (a,b)$ existuje $\delta(x) > 0$ takové, že $x - \delta(x) > a$ a

$$|f(x) - f(t)| = |f(x-) - f(t)| < \varepsilon \quad \text{pro } t \in (x - \delta(x), x)\,.$$

Pro každé $x \in (a,b)$ a $t \in (x - \delta(x), x]$ tedy máme

$$|\varphi(x) - \varphi(t)| \le |\varphi(x) - f(x)| + |f(x) - f(t)| + |f(t) - \varphi(t)| < 3\,\varepsilon\,,$$

tj.

$$|\varphi(x) - \varphi(x-)| \le 3\,\varepsilon.$$

Položme

$$\widetilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{pro } x = a \text{ nebo } x = b\,,\\ \varphi(x-) & \text{pro } x \in (a,b)\,. \end{cases}$$

Potom $\widetilde{\varphi} \in \mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b]$,

$$|f(x) - \widetilde{\varphi}(x)| = |f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon \quad \text{když } x = a \text{ nebo } x = b$$

a

$$\begin{aligned} &|f(x) - \widetilde{\varphi}(x)| \\ &\qquad \le |f(x) - \varphi(x)| + |\varphi(x) - \varphi(x-)| < 4\,\varepsilon \quad \text{když } x \in (a,b)\,. \end{aligned}$$

Odtud už plyne, že množina $\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b]$ je hustá v $\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$.

b) Nechť $f \in \mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b]$. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$ a funkce $\varphi \in \mathbb{S}[a,b]$ je taková, že platí ((4.3)). Potom musí být také

$$\left.\begin{aligned} &|f(x-) - \varphi(x-)| \le \varepsilon \quad \text{pro } x \in [a,b)\,, \\ \text{a} \quad & \\ &|f(x+) - \varphi(x+)| \le \varepsilon \quad \text{pro } x \in (a,b]\,. \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

Položme

$$\widetilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(a) & \text{když } x = a\,, \\ \frac{1}{2}\Big(\varphi(x+) + \varphi(x-)\Big) & \text{když } x \in (a,b)\,, \\ \varphi(b) & \text{když } x = b\,. \end{cases} \tag{4.5}$$

Potom $\widetilde{\varphi} \in \mathbb{S}[a,b] \cap \mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b]$. Dále, vzhledem k ((4.4)) a ((4.5)),

$$\begin{aligned} |f(x) - \widetilde{\varphi}(x)| &= \Big|\tfrac{1}{2}\,[f(x+) + f(x-)] - \tfrac{1}{2}\,[\varphi(x+) + \varphi(x-)]\Big| \\ &\le \tfrac{1}{2}\,\Big(\big|f(x+) - \varphi(x+)\big| + \big|f(x-) - \varphi(x-)\big|\Big) \le \varepsilon \end{aligned}$$

když $x \in (a,b)$. Konečně, podle (4.3) a (4.5) máme

$$|f(x) - \widetilde{\varphi}(x)| = |f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon \text{ když } x = a \text{ nebo } x = b\,.$$

Odtud už plyne, že platí $\overline{\mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b]} = \mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b]$. $\square$

4.16. Lemma.

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b] &= \mathrm{Lin}\Big(1,\ \chi_{(\tau,b]},\tau\in[a,b),\ \chi_{[b]}\Big)\,,\\
\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{L}}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b] &= \mathrm{Lin}\Big(\chi_{[a,\tau]},\tau\in(a,b]\Big)\,,\\
\mathbb{G}_{\mathrm{R}}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b] &= \mathrm{Lin}\Big(1,\ \chi_{[a]},\chi_{[\tau,b]},\tau\in[a,b)\Big)\,,\\
\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{R}}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b] &= \mathrm{Lin}\Big(\chi_{[\tau,b]},\tau\in[a,b)\Big)\,,\\
\mathbb{G}_{reg}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b] &= \mathrm{Lin}\Big(1,\ \chi_{(a,b]},\ \frac{1}{2}\,\chi_{[\tau]}+\chi_{(\tau,b]},\tau\in(a,b),\ \chi_{[b]}\Big)\,,\\
\widetilde{\mathbb{G}}_{reg}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b] &= \mathrm{Lin}\Big(1,\ \frac{1}{2}\,\chi_{[\tau]}+\chi_{(\tau,b]},\ \tau\in(a,b)\Big)\,.
\end{aligned}$$

D ů k a z . První tvrzení je obsaženo v poznámce 4.12 (i). Dokážeme ještě např. předposlední z uvedených relací.

Nechť tedy $f\in\mathbb{S}[a,b]\cap\mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b]$. Potom existují

$$m\in\mathbb{N},\ c_0,c_1,\ldots,c_{m+1}\in\mathbb{R}\ \text{ a }\ \boldsymbol{\sigma}=\big\{\sigma_0,\sigma_1,\ldots,\sigma_m\big\}\in\mathscr{D}[a,b]$$

takové, že

$$f(x)=\begin{cases} c_0 & \text{když } x=a,\\ c_j & \text{když } x\in(\sigma_{j-1},\sigma_j) \text{ pro nějaké } j=1,2,\ldots,m\,,\\ \frac{c_j+c_{j+1}}{2} & \text{když } x=\sigma_j \text{ pro nějaké } j=1,2,\ldots,m-1\,,\\ c_{m+1} & \text{když } x=b, \end{cases}$$

tj.

$$\left.\begin{aligned}
&f(x)=c_0\,\chi_{[a]}(x)+\sum_{j=1}^{m}c_j\,\chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j)}(x)\\
&\quad+\frac{1}{2}\Big(\sum_{j=1}^{m-1}\big(c_j+c_{j+1}\big)\,\chi_{[\sigma_j]}(x)\Big)+c_{m+1}\chi_{[b]}(x) \text{ pro } x\in[a,b]\,.
\end{aligned}\right\}\quad(4.6)$$

Pravou stranu vztahu ((4.6)) můžeme upravit takto

$$\begin{aligned}
f = {} & c_0\,\chi_{[a,b]}-c_0\,\chi_{(a,b]}+\sum_{j=1}^{m}c_j\,\chi_{(\sigma_{j-1},b]}-\sum_{j=1}^{m-1}c_j\,\chi_{[\sigma_j,b]}-c_m\,\chi_{[b]}\\
+ {} & \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1}c_j\,\chi_{[\sigma_j]}+\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1}c_{j+1}\,\chi_{[\sigma_j]}+c_{m+1}\,\chi_{[b]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c_0\,\chi_{[a,b\,]} - c_0\,\chi_{(a,b]} + \sum_{j=1}^{m} c_j\,\chi_{(\sigma_{j-1},b]} - \sum_{j=1}^{m-1} c_j\,\big(\chi_{(\sigma_j,b]} + \chi_{[\sigma_j\,]}\big)\\
&+ \tfrac12 \sum_{j=1}^{m-1} c_j\,\chi_{[\sigma_j\,]} + \tfrac12 \sum_{j=1}^{m-1} c_{j+1}\,\chi_{[\sigma_j\,]} + (c_{m+1}-c_m)\,\chi_{[b]}\\
&= c_0\,\chi_{[a,b\,]} - c_0\,\chi_{(a,b]} + \sum_{j=0}^{m-1} c_{j+1}\,\chi_{(\sigma_j,b]} - \sum_{j=1}^{m-1} c_j\,\chi_{(\sigma_j,b]}\\
&- \tfrac12 \sum_{j=1}^{m-1} c_j\,\chi_{[\sigma_j\,]} + \tfrac12 \sum_{j=1}^{m-1} c_{j+1}\,\chi_{[\sigma_j\,]} + (c_{m+1}-c_m)\,\chi_{[b]}\\
&= c_0\chi_{[a,b\,]} + (c_1-c_0)\,\chi_{(a,b]} + \sum_{j=1}^{m-1} (c_{j+1}-c_j)\,\Big(\chi_{(\sigma_j,b]} + \tfrac12\chi_{[\sigma_j\,]}\Big)\\
&+ (c_{m+1}-c_m)\,\chi_{[b]}\\
&= d_0\chi_{[a,b\,]} + d_1\,\chi_{(a,b]} + \sum_{j=2}^{m} d_j\,\Big(\chi_{(\sigma_j,b]} + \tfrac12\chi_{[\sigma_j\,]}\Big) + d_{m+1}\,\chi_{[b]}\,,
\end{aligned}$$

kde

$$d_0 = c_0,\;\; d_j = c_j - c_{j-1} \text{ pro } \; j = 1,2,\dots,m+1\,. \tag{4.7}$$

Dokázali jsme tedy, že

$$f \in \mathrm{Lin}\Big(1, \chi_{(a,b]}, \frac12\,\chi_{[\tau]} + \chi_{[\tau,b]}, \tau\in(a,b), \chi_{[b]}\Big)\,.$$

Protože vztahy ((4.7)) definují vzájemně jednoznačnou korespondenci mezi vektory

$$(c_0, c_1, \dots, c_m, c_{m+1}) \;\text{ a }\; (d_0, d_1, \dots, d_m, d_{m+1})\,,$$

znamená to, že platí

$$\mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b\,] \cap \mathbb{S}[a,b\,] = \mathrm{Lin}\Big(1, \chi_{(a,b]}, \chi_{[\tau]}, \chi_{[\tau,b]}, \tau\in(a,b), \chi_{[b]}\Big)\,. \qquad \square$$

Další podrobnosti týkající se regulovaných funkcí lze najít zejména v monografii *Volterra Stieltjes-Integral Equations* [15, sec.3] Ch. Höniga. Užitečné speciální dodatky (např. charakterizace prekompaktních množin v prostoru $\mathbb{G}[a,b\,]$, zobecnění Hellyovy věty o výběru) jsou obsaženy také v práci D. Fraňkové [6].