

Riemannův-Stieljesův integrál

Odpověď na některé úlohy zmíněné v úvodní kapitole dává integrál Riemannův-Stieljesův, který je přirozeným zobecněním známého integrálu Riemannova.

5.1 Definice a základní vlastnosti

Připomeňme (viz Úmluvy a označení (iii)), že množinu $\sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{\nu(\sigma)}\}$ bodů intervalu $[a, b]$ nazýváme *dělením intervalu* $[a, b]$, jestliže platí

$$a = \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_{\nu(\sigma)} = b.$$

Množinu všech dělení intervalu $[a, b]$ značíme $\mathcal{D}[a, b]$ a

$$|\sigma| = \max_{j=1,2,\dots,\nu(\sigma)} (\sigma_j - \sigma_{j-1})$$

a říkáme, že σ' je *zjemnění* σ jestliže $\sigma' \supset \sigma$.

5.1. Definice. Dvojici $(\sigma, \xi) \in \mathcal{D}[a, b] \times \mathbb{R}^{\nu(\sigma)}$ nazveme *značeným dělením* intervalu $[a, b]$, jestliže platí

$$\sigma_{j-1} \leq \xi_j \leq \sigma_j \quad \text{pro všechna } j = 1, 2, \dots, \nu(\sigma).$$

$\mathcal{T}[a, b]$ je množina všech značených dělení intervalu $[a, b]$. Říkáme také, že ξ_j je *značka* podintervalu $[\sigma_{j-1}, \sigma_j]$ a ξ je *vektor značek*.

Pro dané dělení $\sigma \in \mathcal{D}[a, b]$ značíme symbolem $\tau(\sigma)$ množinu všech $\xi \in \mathbb{R}^{\nu(\sigma)}$ takových, že $(\sigma, \xi) \in \mathcal{T}[a, b]$.

Abychom zabránili záměně s elementy množin ρ, σ, \dots či vektorů ξ, η, \dots , budeme posloupnosti dělení resp. značených dělení zapisovat jako např. $\{\sigma^n\}$ resp. (ρ^n, η^n) . Záměna s mocninami zde nehrozí.

5.2. Definice. Pro dané funkce $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a značené dělení (σ, ξ) intervalu $[a, b]$ definujeme

$$S_{f\Delta g}(\sigma, \xi; [a, b]) := \sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} f(\xi_j) [g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})].$$

Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme psát krátce $S(\sigma, \xi; [a, b])$ resp. $S(\sigma, \xi)$ místo $S_{f\Delta g}(\sigma, \xi; [a, b])$.

5.3. Definice. Nechť $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

(i) Řekneme, že existuje *Riemannův - Stieltjesův* (δ) *integrál* (krátce (δ) RS - integrál) funkce f vzhledem k funkci g

$$(\delta) \int_a^b f(x) d[g(x)] \quad (\text{značíme též } (\delta) \int_a^b f dg)$$

a má hodnotu $I \in \mathbb{R}$, jestliže

$$\left. \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \\ \left((\sigma, \xi) \in \mathcal{T}[a, b] \text{ a } |\sigma| < \delta \right) \implies |S(\sigma, \xi) - I| < \varepsilon. \end{array} \right\} \quad (5.1)$$

(ii) Řekneme, že existuje *Riemannův - Stieltjesův* (σ) *integrál* (krátce (σ) RS - integrál) funkce f vzhledem k funkci g

$$(\sigma) \int_a^b f(x) d[g(x)] \quad (\text{značíme též } (\sigma) \int_a^b f dg)$$

a má hodnotu $I \in \mathbb{R}$, jestliže

$$\left. \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \exists \sigma_\varepsilon \in \mathcal{D}[a, b]: \\ \left((\sigma, \xi) \in \mathcal{T}[a, b] \text{ a } \sigma \supset \sigma_\varepsilon \right) \implies |S(\sigma, \xi) - I| < \varepsilon. \end{array} \right\} \quad (5.2)$$

(iii) Jestliže $c \in [a, b]$ a funkce f, g jsou definovány v bodě c , klademe

$$(\delta) \int_c^c f dg = (\sigma) \int_c^c f dg = 0.$$

Existuje-li integrál $(\delta) \int_a^b f dg$, pak definujeme $(\delta) \int_b^a f dg = -(\delta) \int_a^b f dg$ a existuje-li integrál $(\sigma) \int_a^b f dg$, definujeme $(\sigma) \int_b^a f dg = -(\sigma) \int_a^b f dg$.

5.4. Poznámka. Pojem (δ) RS - integrálu odpovídá původní Stieltjesově definici, zatímco (σ) RS - integrál bývá někdy nazýván též *Mooreův - Pollardův* integrál.

Klasický Riemannův integrál je speciálním případem (δ) RS - integrálu pokud $g(x) \equiv x$ pro $x \in [a, b]$.

Vyskytne-li se v některých tvrzeních pojem RS - integrál, bez rozlišení zda se jedná o (δ) RS - integrál či o (σ) RS - integrál, bude to znamenat, že dané tvrzení platí pro oba pojmy. V takových a dalších případech, kdy nehrozí nedorozumění, také nepřipojujeme symboly (δ) či (σ) k symbolům integrálů. Funkce f v integrálu $\int_a^b f dg$ se nazývá *integrand*, zatímco funkce g se nazývá *integrátor*.

Z definice 5.3 usoudíme, že (δ) RS - integrál je speciálním případem (σ) RS - integrálu.

5.5. Věta. Je-li $(\delta) \int_a^b f \, dg = I \in \mathbb{R}$, pak platí také $(\sigma) \int_a^b f \, dg = I$.

Důkaz. Pro každá dvě dělení $\sigma', \sigma'' \in \mathcal{D}[a, b]$ taková, že σ'' je zjemnění σ' , platí $|\sigma''| \leq |\sigma'|$. Věta je tedy přímým důsledkem definice 5.3. \square

5.6. Poznámka. Budiž dáno libovolné $\delta_0 > 0$. Potom v definici 5.1 (i) můžeme podmínku (5.1) nahradit následující trochu zeslabenou podmínkou

$$\left. \begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in (0, \delta_0): \\ \left((\sigma, \xi) \in \mathcal{S}[a, b] \text{ a } |\sigma| < \delta \right) \implies |S(\sigma, \xi) - I| < \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (5.1')$$

Podobně, je-li dáno $\sigma_0 \in \mathcal{D}[a, b]$, můžeme v definici 5.3 (ii) podmínku (5.2) nahradit podmínkou

$$\left. \begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \sigma_\varepsilon \in \mathcal{D}[a, b]: \\ \sigma_\varepsilon \supset \sigma_0 \text{ a } \left((\sigma, \xi) \in \mathcal{S}[a, b] \text{ a } \sigma \supset \sigma_\varepsilon \right) \implies |S(\sigma, \xi) - I| < \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (5.2')$$

5.7. Cvičení. Rozmyslete si podrobně proč platí tvrzení uvedená v poznámce 5.6.

5.8. Příklad. Nechť $a = -1$, $b = 1$ a

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{když } x \leq 0, \\ 1 & \text{když } x > 0 \end{cases} \quad \text{a} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{když } x < 0, \\ 1 & \text{když } x \geq 0. \end{cases}$$

Položme $\sigma_0 = \{-1, 0, 1\}$. Potom pro každé dělení $\sigma \in \mathcal{D}[-1, 1]$, které je zjemněním σ_0 (a tedy $0 \in \sigma$), a každé $\xi \in \tau(\sigma)$ máme

$$S(\sigma, \xi) = f(\xi_k) [g(0) - g(\sigma_{k-1})] + f(\xi_{k+1}) [g(\sigma_{k+2}) - g(0)] = 0,$$

kde $0 = \sigma_k$, $\xi_k \in [\sigma_{k-1}, 0]$, $\xi_{k+1} \in [0, \sigma_{k+1}]$ a tedy

$$f(\xi_k) = 0 \quad \text{a} \quad g(\sigma_{k+2}) - g(0) = 0.$$

Vzhledem ke druhé části poznámky 5.6, vidíme, že $(\sigma) \int_{-1}^1 f \, dg = 0$.

Na druhou stranu, pro každé značené dělení (σ, ξ) intervalu $[-1, 1]$ takové, že $0 \notin \sigma$, tj. $\sigma_{k-1} < 0 < \sigma_k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$, platí

$$S(\sigma, \xi) = f(\xi_k) [g(\sigma_k) - g(\sigma_{k-1})] = -f(\xi_k) = - \begin{cases} 0 & \text{když } \xi_{k+1} \leq 0, \\ 1 & \text{když } \xi_{k+1} > 0. \end{cases}$$

Odtud je zřejmé, že $(\delta) \int_{-1}^1 f \, dg$ nemůže existovat.

Následující dvě lemmata platí pro oba typy RS - integrálů a jsou přímými důsledky definice 5.3. Jejich důkazy ponecháváme čtenáři jako cvičení.

5.9. Lemma. (i) *Jestliže existuje integrál $\int_a^b f \, dg$, pak platí*

$$\left| \int_a^b f \, dg \right| \leq \|f\| \operatorname{var}_a^b g.$$

(ii) *Jestliže navíc existuje také integrál $\int_a^b f(x) \, d[\operatorname{var}_a^x g]$, pak platí*

$$\left| \int_a^b f(x) \, dg(x) \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, d[\operatorname{var}_a^x g] \leq \|f\| \operatorname{var}_a^b g. \quad \square$$

5.10. Poznámka. Uvidíme později (viz důsledek 5.39), že pro oba typy RS - integrálů platí, že z existence integrálu $\int_a^b f \, dg$ už plyne, že také integrál $\int_a^b f(x) \, d[\operatorname{var}_a^x g]$ existuje.

5.11. Lemma. *Nechť $f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a nechť existují integrály :*

$$\int_a^b f_1 \, dg, \int_a^b f_2 \, dg, \int_a^b f \, dg_1 \quad \text{a} \quad \int_a^b f_2 \, dg_2.$$

Potom pro libovolná $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ platí

$$\int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2) \, dg = c_1 \int_a^b f_1 \, dg + c_2 \int_a^b f_2 \, dg,$$

a

$$\int_a^b f \, d[c_1 g_1 + c_2 g_2] = c_1 \int_a^b f \, dg_1 + c_2 \int_a^b f \, dg_2. \quad \square$$

5.12. Cvičení. (i) *Dokažte lemmata 5.9 a 5.11.*

Dokažte, že následující tvrzení platí pro oba typy RS - integrálů:

(ii) *Jestliže $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je neklesající na $[a, b]$ a $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je taková, že existuje integrál $\int_a^b f \, dg$, pak*

$$\left(\inf_{x \in [a, b]} f(x) \right) [g(b) - g(a)] \leq \left| \int_a^b f \, dg \right| \leq \left(\sup_{x \in [a, b]} f(x) \right) [g(b) - g(a)].$$

(iii) definice 5.2 je korektní v tom smyslu, že určuje hodnotu integrálu jednoznačně. Jinak řečeno, jestliže $I_1 \in \mathbb{R}$ a $I_2 \in \mathbb{R}$ splňují (5.1) (s I_1 resp. I_2 na místě I), pak musí být $I_1 = I_2$ (a podobně pro (5.2)).

Oba pojmy RS - integrálu představují jakési zobecněné limity posloupnosti integrálních součtů $S(\sigma, \xi)$ vzhledem k značeným dělením. Nepřekvapí tedy, že platí následující existenční tvrzení analogická klasické Bolzanově - Cauchyově podmínce.

5.13. Věta (BOLZANOVA - CAUCHYOVA PODMÍNKA).

Pro dané funkce $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ existuje $(\delta) \int_a^b f \, dg$ právě tehdy, když je splněna následující podmínka

$$\left. \begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \\ \left((\sigma, \xi), (\tilde{\sigma}, \tilde{\xi}) \in \mathcal{T}[a, b], |\sigma| < \delta_\varepsilon \text{ a } |\tilde{\sigma}| < \delta_\varepsilon \right) \\ \implies |S(\sigma, \xi) - S(\tilde{\sigma}, \tilde{\xi})| < \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Podobně, $(\sigma) \int_a^b f \, dg \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když

$$\left. \begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \sigma_\varepsilon \in \mathcal{D}[a, b] : \\ \left((\sigma, \xi), (\tilde{\sigma}, \tilde{\xi}) \in \mathcal{T}[a, b], \sigma \supset \sigma_\varepsilon \text{ a } \tilde{\sigma} \supset \sigma_\varepsilon \right) \\ \implies |S(\sigma, \xi) - S(\tilde{\sigma}, \tilde{\xi})| < \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Důkaz. Nutnost splnění uvedených podmínek pro existenci příslušných integrálů je zřejmá z definice 5.3.

Dokážeme, že podmínka (5.4) zaručuje existenci integrálu $(\sigma) \int_a^b f \, dg$. Nechť tedy platí (5.4). Potom existuje posloupnost $\{(\sigma^k, \xi^k)\}$ značených dělení intervalu $[a, b]$ taková, že

$$|S(\sigma, \xi) - S(\sigma^k, \xi^k)| < \frac{1}{k} \quad \text{pro každé } \sigma \supset \sigma^k \text{ a } \xi \in \tau(\sigma) \quad (5.5)$$

a přitom současně

$$\sigma^k \subset \sigma^\ell \text{ a } |S(\sigma^k, \xi^k) - S(\sigma^\ell, \xi^\ell)| < \frac{1}{k} \quad \text{pro každé } k \in \mathbb{N} \text{ a } \ell \geq k. \quad (5.6)$$

Posloupnost $\{S(\sigma^k, \xi^k)\}$ je cauchyovská posloupnost reálných čísel a existuje tedy reálné číslo $I \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S(\sigma^k, \xi^k) = I.$$

Nyní, nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme k_ε tak, aby bylo současně

$$\frac{1}{k_\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad |S(\sigma^{k_\varepsilon}, \xi^{k_\varepsilon}) - I| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5.7)$$

Potom, díky (5.5) a (5.7), odvodíme, že

$$|S(\sigma, \xi) - I| \leq |S(\sigma, \xi) - S(\sigma^{k_\varepsilon}, \xi^{k_\varepsilon})| + |S(\sigma^{k_\varepsilon}, \xi^{k_\varepsilon}) - I| < \varepsilon$$

platí pro každé $\sigma \supset \sigma^{k_\varepsilon}$ a $\xi \in \tau(\sigma)$. To znamená, že

$$I = (\sigma) \int_a^b f \, dg.$$

Implikace (5.3) $\implies (\delta) \int_a^b f \, dg \in \mathbb{R}$ by se dokazovala podobně a ponechává se čtenáři jako cvičení. \square

5.14. Cvičení. (i) Dokažte větu 5.13 pro (δ) RS - integrály.

(ii) Dokažte, že podmínky (5.3) resp. (5.4) jsou ekvivalentní s podmínkami :

$$\left. \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \\ \left((\sigma', \xi'), (\sigma'', \xi'') \in \mathcal{T}[a, b], |\sigma'| < \delta_\varepsilon, \sigma'' \supset \sigma' \right) \\ \implies |S(\sigma', \xi') - S(\sigma'', \xi'')| < \varepsilon \end{array} \right\} (5.3')$$

resp.

$$\left. \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \exists \sigma_\varepsilon \in \mathcal{D}[a, b] : \\ \left((\sigma', \xi'), (\sigma'', \xi'') \in \mathcal{T}[a, b], \sigma'' \supset \sigma' \supset \sigma_\varepsilon \right) \\ \implies |S(\sigma', \xi') - S(\sigma'', \xi'')| < \varepsilon. \end{array} \right\} (5.4')$$

(Návod: nechť $\sigma, \rho \in \mathcal{D}[a, b]$ a $\sigma' = \sigma \cup \rho$, potom $\sigma' \in \mathcal{D}[a, b]$, $\sigma' \supset \sigma$, $\sigma' \supset \rho$ a

$$|S(\sigma, \xi) - S(\rho, \eta)| \leq |S(\sigma, \xi) - S(\sigma', \xi')| + |S(\sigma', \xi') - S(\rho, \eta)|$$

pro libovolná $\xi \in \tau(\sigma)$, $\eta \in \tau(\rho)$ a $\xi' \in \tau(\sigma')$.)

Následující věta je přímým důsledkem věty 5.13. Platí ve stejném znění pro oba typy RS - integrálů.

5.15. Věta. *Jestliže existuje integrál $\int_a^b f \, dg$ a jestliže $[c, d] \subset [a, b]$, pak existuje také integrál $\int_c^d f \, dg$.*

D ů k a z. Předpokládejme, že $(\sigma) \int_a^b f \, dg \in \mathbb{R}$. Podle věty 5.13 existuje dělení $\sigma_\varepsilon \in \mathcal{D}[a, b]$ takové, že

$$|S(\sigma, \xi) - S(\sigma', \xi')| < \varepsilon \quad (5.8)$$

platí pro všechna značená dělení $(\sigma, \xi), (\sigma', \xi') \in \mathcal{T}[a, b]$ taková, že $\sigma \supset \sigma_\varepsilon$ a $\sigma' \supset \sigma_\varepsilon$. Vzhledem k tvrzení obsaženém ve cvičení 5.12 (iv), můžeme předpokládat, že $\{c, d\} \subset \sigma_\varepsilon$ a můžeme tedy rozložit σ_ε tak, že bude

$$\sigma_\varepsilon = \rho^- \cup \rho_\varepsilon \cup \rho^+, \text{ kde } \rho^- \in \mathcal{D}[a, c], \rho_\varepsilon \in \mathcal{D}[c, d], \rho^+ \in \mathcal{D}[d, b].$$

Nyní, nechť $\rho, \rho' \in \mathcal{D}[c, d]$, $\rho \supset \rho_\varepsilon$, $\rho' \supset \rho_\varepsilon$ a $(\rho, \eta), (\rho', \eta') \in \mathcal{T}[c, d]$. Definujme

$$\sigma = \rho^- \cup \rho \cup \rho^+, \eta = (\eta^-, \eta, \eta^+) \text{ a } \sigma' = \rho^- \cup \rho' \cup \rho^+, (\eta^-, \eta', \eta^+),$$

kde η^-, η^+ jsou takové vektory, že $(\rho^-, \eta^-) \in \mathcal{T}[a, c]$ a $(\rho^+, \eta^+) \in \mathcal{T}[d, b]$. Zřejmě je $(\sigma, \xi), (\sigma', \xi') \in \mathcal{T}[a, b]$,

$$\sigma \supset \sigma_\varepsilon, \sigma' \supset \sigma_\varepsilon, S(\sigma, \xi) = S(\rho, \eta) \text{ a } S(\sigma', \xi') = S(\rho', \eta').$$

Podle (5.8) tedy máme

$$|S(\rho, \eta) - S(\rho', \eta')| = |S(\sigma, \xi) - S(\sigma', \xi')| < \varepsilon$$

a odtud podle věty 5.13 plyne existence integrálu $(\sigma) \int_c^d f \, dg$.

Důkaz tvrzení věty pro (δ) RS - integrál se provede analogicky a je ponechán čtenáři jako cvičení. \square

5.16. Cvičení. Dokažte tvrzení věty 5.15 pro (δ) RS - integrály.

Také následující tvrzení platí ve stejné podobě pro oba typy RS - integrálu.

5.17. Věta. *Jestliže existuje integrál $\int_a^b f \, dg$ a $c \in [a, b]$, pak existují také integrály*

$$\int_a^c f \, dg \text{ a } \int_c^b f \, dg$$

a platí

$$\int_a^b f \, dg = \int_a^c f \, dg + \int_c^b f \, dg.$$

Důk a z. Je-li $c = a$ nebo $c = b$, je tvrzení věty triviální. Nechť je tedy $c \in (a, b)$.

Dále, předpokládejme, že existuje integrál $(\sigma) \int_a^b f \, dg$. Potom existence integrálů

$(\sigma) \int_a^c f \, dg$ a $(\sigma) \int_c^b f \, dg$ je zaručena větou 5.15.

Nechť $\varepsilon > 0$. Zvolme značená dělení $(\sigma', \xi') \in \mathcal{T}[a, c]$ a $(\sigma'', \xi'') \in \mathcal{T}[c, b]$ tak, aby platilo

$$\left. \begin{aligned} & \left| S(\sigma', \xi') - \int_a^c f \, dg \right| + \left| S(\sigma'', \xi'') - \int_c^b f \, dg \right| \\ & \quad + \left| S(\sigma, \xi) - \int_a^b f \, dg \right| < \varepsilon, \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

kde $\sigma = \sigma' \cup \sigma'' \in \mathcal{D}[a, b]$ a $\xi = (\xi', \xi'') \in \tau(\sigma)$.

Zřejmě platí $S(\sigma, \xi) = S(\sigma', \xi') + S(\sigma'', \xi'')$. Tudíž

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f \, dg - \int_a^c f \, dg - \int_c^b f \, dg \right| \\ & \leq \left| \int_a^b f \, dg - S(\sigma, \xi) \right| + \left| S(\sigma, \xi) - S(\sigma', \xi') - S(\sigma'', \xi'') \right| \\ & \quad + \left| S(\sigma', \xi') - \int_a^c f \, dg \right| + \left| S(\sigma'', \xi'') - \int_c^b f \, dg \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, důkaz je dokončen. □

5.18. Cvičení. Rozmyslete si proč z existence integrálů

$$\int_a^b f \, dg, \quad \int_a^c f \, dg, \quad \int_c^b f \, dg$$

plyne existence značených dělení $(\sigma', \xi') \in \mathcal{T}[a, c]$ a $(\sigma'', \xi'') \in \mathcal{T}[c, b]$ takových, že platí (5.9).

Důkaz implikace obrácené ke tvrzení věty 5.17 je pro (σ) RS - integrál poměrně lehký:

5.19. Věta. *Jestliže $c \in [a, b]$ a jestliže existují integrály*

$$I_1 = (\sigma) \int_a^c f \, d g \quad a \quad I_2 = (\sigma) \int_c^b f \, d g,$$

pak existuje také integrál $I = (\sigma) \int_a^b f \, d g$ a platí $I = I_1 + I_2$.

D ů k a z. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme dělení $\sigma'_\varepsilon \in \mathcal{D}[a, c]$ a $\sigma''_\varepsilon \in \mathcal{D}[c, b]$ tak, aby platilo

$$|S(\sigma', \xi') - I_1| < \varepsilon \quad \text{pro } (\sigma', \xi') \in \mathcal{T}[a, c] \text{ takové, že } \sigma' \supset \sigma'_\varepsilon$$

a

$$|S(\sigma'', \xi'') - I_2| < \varepsilon \quad \text{pro } (\sigma'', \xi'') \in \mathcal{T}[c, b] \text{ takové, že } \sigma'' \supset \sigma''_\varepsilon.$$

Nyní, nechť $\sigma_\varepsilon = \sigma'_\varepsilon \cup \sigma''_\varepsilon$. Protože $c \in \sigma_\varepsilon$, každé značené dělení (σ, ξ) intervalu $[a, b]$ splňující $\sigma \supset \sigma_\varepsilon$ můžeme rozdělit

$$\sigma = \sigma' \cup \sigma'' \quad a \quad \xi = (\xi', \xi'')$$

tak, že bude platit

$$(\sigma', \xi') \in \mathcal{T}[a, c], \quad (\sigma'', \xi'') \in \mathcal{T}[c, b], \quad \sigma' \supset \sigma'_\varepsilon \quad a \quad \sigma'' \supset \sigma''_\varepsilon.$$

Navíc, je

$$S(\sigma, \xi) = S(\sigma', \xi') + S(\sigma'', \xi'').$$

Vzhledem k definici σ'_ε a σ''_ε tedy pro každé $(\sigma, \xi) \in \mathcal{T}[a, b]$, kde $\sigma \supset \sigma_\varepsilon$, máme

$$|S(\sigma, \xi) - (I_1 + I_2)| \leq |S(\sigma', \xi') - I_1| + |S(\sigma'', \xi'') - I_2| < 2\varepsilon,$$

tj. dokázali jsme tvrzení věty. □

5.20. Poznámka. Aby mohlo platit analogické tvrzení také pro (δ) RS - integrál je třeba přidat předpoklad o pseudoaditivě funkcí f, g v bodě c , viz cvičení 5.31.

Pro existenci (δ) RS - integrálu máme také následující přirozenou a lépe ověřitelnou nutnou a postačující podmínku.

5.21. Věta. *Pro dané funkce $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrál $(\delta) \int_a^b f \, d g$ existuje právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{(\sigma^n, \xi^n)\} \subset \mathcal{T}[a, b]$ značených dělení intervalu $[a, b]$ takovou, že $\lim_{n \rightarrow \infty} |\sigma^n| = 0$, má posloupnost $\{S(\sigma^n, \xi^n)\}$ konečnou limitu.*

D ů k a z . Nutnost uvedené podmínky je zřejmá. Zbývá dokázat její postačitelnost.

Předpokládejme tedy, že limita $\lim_{n \rightarrow \infty} S(\sigma^n, \xi^n)$ existuje (a je konečná) pro každou posloupnost $\{(\sigma^n, \xi^n)\} \subset \mathcal{T}[a, b]$ takovou, že $\lim_{n \rightarrow \infty} |\sigma^n| = 0$.

Nechť existují dvě posloupnosti značených dělení $\{(\sigma^n, \xi^n)\} \subset \mathcal{T}[a, b]$ a $\{(\tilde{\sigma}^n, \tilde{\xi}^n)\} \subset \mathcal{T}[a, b]$ takové, že $\lim_{n \rightarrow \infty} |\sigma^n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\tilde{\sigma}^n| = 0$ a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(\sigma^n, \xi^n) = I \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S(\tilde{\sigma}^n, \tilde{\xi}^n) = \tilde{I} \in \mathbb{R}.$$

Sestavme nyní novou posloupnost

$$\{S(\rho^n, \eta^n)\} = \left\{ S(\sigma^1, \xi^1), S(\tilde{\sigma}^1, \tilde{\xi}^1), S(\sigma^2, \xi^2), S(\tilde{\sigma}^2, \tilde{\xi}^2), \dots \right\}$$

Podle našeho předpokladu má také posloupnost $\{S(\rho^n, \eta^n)\}$ konečnou limitu $J \in \mathbb{R}$ a, protože obsahuje obě posloupnosti

$$\{S(\sigma^n, \xi^n)\} \quad \text{a} \quad \{S(\tilde{\sigma}^n, \tilde{\xi}^n)\},$$

musí platit $I = \tilde{I} = J$. To znamená, že hodnota limity

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} S(\sigma^n, \xi^n)$$

nezávisí na volbě posloupnosti $\{(\sigma^n, \xi^n)\}$ značených dělení intervalu $[a, b]$ pro kterou platí $\lim_{n \rightarrow \infty} |\sigma^n| = 0$.

Nyní, nechť $\{(\sigma^n, \xi^n)\} \subset \mathcal{T}[a, b]$ je libovolná posloupnost taková, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\sigma^n| = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S(\sigma^n, \xi^n) = I \in \mathbb{R}$$

a nechť

$$(\delta) \int_a^b f \, dg \neq I.$$

Potom existuje $\tilde{\varepsilon} > 0$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ lze najít $(\sigma^{n_k}, \xi^{n_k}) \in \mathcal{T}[a, b]$ pro něž platí

$$|\sigma^{n_k}| < \frac{1}{k} \quad \text{a} \quad |S(\sigma^{n_k}, \xi^{n_k}) - I| > \tilde{\varepsilon}.$$

To znamená, že jsme našli podposloupnost $\{(\sigma^{n_k}, \xi^{n_k}) : k \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{T}[a, b]$ posloupnosti $\{(\sigma^n, \xi^n)\}$ pro kterou neplatí $\lim_{k \rightarrow \infty} S(\sigma^{n_k}, \xi^{n_k}) = I$. To je ale spor s naším předpokladem. Máme tedy

$$(\delta) \int_a^b f \, dg = I.$$

Tím je důkaz věty dokončen. □

5.22. Poznámka. (i) Nechť $f \in \mathbb{G}[a, b]$, $x_0 \in (a, b)$, $c, d \in \mathbb{R}$ a $g(x) = c$ pro $x \in [a, x_0)$, $g(x) = (c + d)/2$, $g(x) = d$ pro $x \in (x_0, d]$. Dále, nechť $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ má jednostranné limity $f(x_0-), f(x_0+) \in \mathbb{R}$.

Pro $n \in \mathbb{N}$ uvažujme posloupnost dělení $\{\sigma^n\}$ intervalu $[a, b]$ takových, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje k_n , pro které platí $\sigma_{k_n-1}^n < x_0 < \sigma_{k_n}^n$. Dále, nechť vektory značek θ^n , η^n a ζ^n jsou takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(\sigma^n, \theta^n), (\sigma^n, \eta^n), (\sigma^n, \zeta^n) \in \mathcal{F}[a, b],$$

$$\theta_{k_n}^n = x_0, \quad \sigma_{k_n-1}^n \leq \eta_{k_n}^n < x_0 \quad \text{a} \quad x_0 < \zeta_{k_n}^n \leq \sigma_k^n.$$

Máme

$$S(\sigma^n, \theta^n) = f(x_0)(d-c), \quad S(\sigma^n, \eta^n) = f(\eta_{k_n}^n)(d-c), \quad S(\sigma^n, \zeta^n) = f(\zeta_{k_n}^n)(d-c)$$

pro $n \in \mathbb{N}$ a tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(\sigma^n, \theta^n) = f(x_0)(d-c), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S(\sigma^n, \eta^n) = f(x_0-)(d-c),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(\sigma^n, \zeta^n) = f(x_0+)(d-c),$$

Odtud plyne, že k tomu, aby každá posloupnost $S(\sigma^n, \xi^n)$ taková, že

$$(\sigma^n, \xi^n) \in \mathcal{F}[a, b] \quad \text{a} \quad |\sigma^n| \rightarrow 0,$$

konvergovala pro $n \rightarrow \infty$ k nějaké konečné (a jednoznačně určené) hodnotě I , je nutné, aby platilo

$$\text{buď} \quad g(x_0-) = c = g(x_0) = d = g(x_0+) \quad \text{nebo} \quad f(x_0-) = f(x_0) = f(x_0+).$$

Vzhledem ke větě 5.21 lze tedy očekávat, že pro existenci integrálu $(\delta) \int_a^b f \, dg$ bude nutné, aby funkce f a g neměly žádný společný bod nespojitosti.

(ii) Nyní, nechť $\sigma_0 \in \mathcal{D}[a, b]$ je libovolné dělení obsahující x_0 . Pro každé jeho zjemnění σ potom existuje $k = k(\sigma)$ takové, že $x_0 = \sigma_k$. Máme

$$S(\sigma, \xi) = \begin{cases} (f(\xi_{k-1}) + f(\xi_k)) \frac{d-c}{2} & \text{jestliže } \xi_{k-1} < x_0 < \xi_k, \\ (f(x_0) + f(\xi_k)) \frac{d-c}{2} & \text{jestliže } \xi_{k-1} = x_0 < \xi_k, \\ (f(\xi_{k-1}) + f(x_0)) \frac{d-c}{2} & \text{jestliže } \xi_{k-1} < x_0 = \xi_k, \\ f(x_0)(d-c) & \text{jestliže } \xi_{k-1} = x_0 = \xi_k, \end{cases}$$

Bude-li tedy funkce f regulovaná na $[a, b]$, bude množina \mathcal{Q} hromadných bodů množiny $\{S(\sigma, \xi) : (\sigma, \xi) \in \mathcal{T}[a, b] \text{ a } \sigma \supset \sigma_0\}$ nejvýše čtyřbodová:

$$\mathcal{Q} = \left\{ (f(x_{0-}) + f(x_{0+})) \frac{d-c}{2}, (f(x_0) + f(x_{0+})) \frac{d-c}{2}, \right. \\ \left. (f(x_{0-}) + f(x_0)) \frac{d-c}{2}, 2f(x_0) \frac{d-c}{2} \right\}.$$

Pro existenci integrálu $(\sigma) \int_a^b f \, d g$ je ovšem přinejmenším nutné, aby se množina \mathcal{Q} redukovala na jednobodovou množinu. Snadno se nahlédne, že toto nastane právě tehdy, když pro funkce f a g bude platit současně

$$\Delta^+ f(x_0) \Delta^+ g(x_0) = 0 \quad \text{a} \quad \Delta^- f(x_0) \Delta^- g(x_0) = 0.$$

5.2 Podmínka pseudoaditivity a její důsledky

Podrobněji vyjasnit vzájemný vztah mezi (δ) RS a (σ) RS - integrálem umožní pojem *pseudoaditivity*.

5.23. Definice. Řekneme, že funkce $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ splňují v bodě $x \in (a, b)$, podmínku pseudoaditivity, jestliže

$$\left. \begin{array}{l} \text{Pro každé } \varepsilon > 0 \text{ existuje } \delta_\varepsilon > 0 \text{ takové, že je-li} \\ \delta', \delta'' \in (0, \delta_\varepsilon), \xi \in [x - \delta', x + \delta''], \xi' \in [x - \delta', x] \text{ a } \xi'' \in [x, x + \delta''] \\ \text{pak platí} \\ |f(\xi) [g(x + \delta'') - g(x - \delta')] - f(\xi') [g(x) - g(x - \delta')] \\ - f(\xi'') [g(x + \delta'') - g(x)]| < \varepsilon. \end{array} \right\} \text{ (PA)}$$

5.24. Poznámka. Použití podmínky (PA) může být někdy pohodlnější, pokud ji přeformulujeme do následující ekvivalentní podoby.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Pro každé } \varepsilon > 0 \text{ existuje } \delta_\varepsilon > 0 \text{ takové, že je-li} \\ x' \in (x - \delta_\varepsilon, x), x'' \in (x, x + \delta_\varepsilon), \xi \in [x', x''], \xi' \in [x', x] \text{ a } \xi'' \in [x, x''] \\ \text{pak platí} \\ |f(\xi) [g(x'') - g(x')] - f(\xi') [g(x) - g(x')] - f(\xi'') [g(x'') - g(x)]| < \varepsilon. \end{array} \right\}$$

5.25. Příklad. Nechť

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{když } x \leq 0, \\ 1 & \text{když } x > 0 \end{cases} \quad \text{a} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{když } x \leq 0, \\ 1 & \text{když } x > 0 \end{cases}$$

a $x' < 0 < x''$, $\xi \in [x', x'']$, $\xi' \in [x', 0]$ a $\xi'' \in [0, x'']$. Potom

$$\begin{aligned} & |f(\xi) [g(x'') - g(x')] - f(\xi') [g(0) - g(x')] - f(\xi'') [g(x'') - g(0)]| \\ &= |f(\xi) - f(\xi'')| = 1 \end{aligned}$$

vždy, když bude $\xi \leq 0$ a $\xi'' > 0$. Vidíme, že funkce f, g nesplňují podmínku (PA) v bodě 0.

5.26. Lemma. *Jestliže funkce $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ splňují v bodě $x \in (a, b)$ podmínku pseudoaditivitu, pak aspoň jedna z funkcí f, g je v bodě x spojitá.*

Na druhou stranu, je-li jedna z funkcí f, g spojitá v bodě x a druhá je ohraničená na jeho okolí, pak funkce f, g splňují podmínku pseudoaditivitu v bodě x .

D ů k a z. a) Nechť f, g splňují podmínku (PA) pseudoaditivitu v bodě x . Dosaďme-li $\xi = \xi'$, dostaneme

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0:$$

$$\begin{aligned} & (x' \in (x - \delta_\varepsilon, x), x'' \in (x, x + \delta_\varepsilon), \xi' \in [x', x], \xi'' \in [x, x'']) \\ & \implies |f(\xi') - f(\xi'')| |g(x'') - g(x)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Odtud je zřejmé, že není-li funkce g v bodě x spojitá zprava, musí být v bodě x spojitá funkce f . Podobně, položíme-li v (PA) $\xi = \xi''$ a $\delta' = \delta''$, dokážeme, že není-li g spojitá zleva v x , musí být f spojitá v x .

b) Nechť

$$\begin{aligned} & x \in (a, b), \delta > 0, x' \in (x - \delta, x), x'' \in (x, x + \delta), \\ & \xi \in [x', x''], \xi' \in [x', x] \quad \text{a} \quad \xi'' \in [x, x'']. \end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned} & |f(\xi) [g(x'') - g(x')] - f(\xi') [g(x) - g(x')] - f(\xi'') [g(x'') - g(x)]| \\ &= |(f(\xi) - f(\xi')) (g(x) - g(x')) + (f(\xi'') - f(\xi)) (g(x'') - g(x))| \\ &\leq |f(\xi) - f(\xi')| |g(x) - g(x')| + |f(\xi'') - f(\xi)| |g(x'') - g(x)| \\ &\leq (|f(\xi) - f(x)| + |f(x) - f(\xi')|) |g(x) - g(x')| \\ &\quad + (|f(\xi'') - f(x)| + |f(x) - f(\xi)|) |g(x'') - g(x)|. \end{aligned}$$

Odtud už plyne, že platí i druhé tvrzení lemmatu. □

Následující tvrzení je důsledkem věty 5.13 a lemmatu 5.26.

5.27. Věta. *Nechť $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a nechť existuje integrál $(\delta) \int_a^b f \, d g$. Potom v každém bodě $x \in (a, b)$ je alespoň jedna z funkcí f, g spojitá.*

D ů k z. Předpokládejme, že $(\delta) \int_a^b f \, d g \in \mathbb{R}$. Vzhledem k lemmatu 5.26 nyní stačí dokázat, že dvojice f, g splňují podmínku pseudoaditivitu v každém bodě $x \in (a, b)$.

Předpokládejme tedy, že neplatí (PA), tj. existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $\delta > 0$ lze najít

$$x' \in (x - \delta, x), \quad x'' \in (x, x + \delta), \quad \eta \in [x', x''], \quad \eta' \in [x', x] \quad \text{a} \quad \eta'' \in [x, x'']$$

takové, že

$$|f(\eta) [g(x'') - g(x')] - f(\eta') [g(x) - g(x')] - f(\eta'') [g(x'') - g(x)]| \geq \varepsilon. \quad (5.10)$$

Bud' dáno libovolné $\delta > 0$. Nechť $(\sigma, \xi) \in \mathcal{D}[a, b]$ je takové, že $|\sigma| < \delta$ a pro nějaké $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ je $\sigma_{k-1} = x' < x < x'' = \sigma_k$ a $\xi_k = \eta$. Definujme

$$\tilde{\sigma} = \sigma \cup \{x\} \quad \text{a} \quad \tilde{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_{k-1}, \eta', \eta'', \xi_{k+1}, \dots, \xi_m).$$

Podle (5.10) tedy máme

$$\begin{aligned} |S(\sigma, \xi) - S(\tilde{\sigma}, \tilde{\xi})| &= |f(\xi_k) [g(\sigma_k) - g(\sigma_{k-1})] \\ &\quad - f(\eta') [g(x) - g(\sigma_{k-1})] - f(\eta'') [g(\sigma_k) - g(x)]| \\ &= |f(\eta) [g(x'') - g(x')] - f(\eta') [g(x) - g(x')] - f(\eta'') [g(x'') - g(x)]| \\ &\geq \varepsilon. \end{aligned}$$

To znamená, že není splněna podmínka (5.3') a tudíž podle věty 5.13 a cvičení 5.14 neexistuje integrál $(\delta) \int_a^b f \, d g$. □

Víme, že (δ) RS-integrál je speciálním případem (σ) RS-integrálu (viz věta 5.5). Na druhou stranu, jak ukáže následující věta, pojem pseudoaditivitu nám poskytuje možnost objasnit i vazbu mezi těmito integrály v opačném směru.

5.28. Věta. *Nechť $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Potom integrál $(\delta) \int_a^b f \, dg$ existuje právě tehdy, když existuje integrál $(\sigma) \int_a^b f \, dg$ a funkce f, g splňují podmínku pseudoaditivivity v každém bodě $x \in (a, b)$.*

D ů k a z. Předpokládejme nejprve, že existuje $(\delta) \int_a^b f \, dg$. Podle věty 5.5 potom existuje i $(\sigma) \int_a^b f \, dg$ a má stejnou hodnotu. Dále, podle věty 5.27 funkce f, g musí splňovat podmínku pseudoaditivivity v každém bodě $x \in (a, b)$. Stačí tedy dokázat, že když existuje integrál $(\sigma) \int_a^b f \, dg$ a funkce f, g splňují podmínku pseudoaditivivity v každém bodě $x \in (a, b)$, pak existuje i integrál $(\delta) \int_a^b f \, dg$.

Předpokládejme tedy, že $(\sigma) \int_a^b f \, dg = I \in \mathbb{R}$ a funkce f, g splňují podmínku pseudoaditivivity v každém bodě $x \in (a, b)$. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$ a nechť dělení $\sigma_\varepsilon = \{s_0, s_1, \dots, s_r\} \in \mathcal{D}[a, b]$ je takové, že platí

$$|S(\rho, \eta) - I| < \varepsilon \quad \text{jakmile} \quad \rho \supset \sigma_\varepsilon \quad \text{a} \quad \eta \in \tau(\rho). \quad (5.11)$$

Označme

$$\delta_* := \min\{s_i - s_{i-1} : i = 1, 2, \dots, r\}. \quad (5.12)$$

Protože funkce f, g splňují podmínku pseudoaditivivity na (a, b) , nutně existuje $\delta_\varepsilon \in (0, \delta_*)$ takové, že pro každé $i = 1, 2, \dots, r$ platí

$$\left. \begin{aligned} &|f(\xi) [g(s_i'') - g(s_i')] \\ &\quad - f(\xi') [g(s_i) - g(s_i')] - f(\xi'') [g(s_i'') - g(s_i)]| < \frac{\varepsilon}{r} \\ &\text{pro všechna } i \in \{1, 2, \dots, r-1\}, \\ &\quad s_i' \in (s_i - \delta_\varepsilon, s_i), \quad s_i'' \in (s_i, s_i + \delta_\varepsilon), \\ &\quad \xi \in [s_i', s_i''], \quad \xi' \in [s_i', s_i], \quad \xi'' \in [s_i, s_i'']. \end{aligned} \right\} (5.13)$$

Nechť $(\sigma, \xi) \in \mathcal{T}[a, b]$, $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\}$ a $|\sigma| < \delta_\varepsilon$.

Podle (5.12) je pro každé $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ množina $(\sigma_{j-1}, \sigma_j) \cap \sigma_\varepsilon$ buď jed-

nobodová nebo prázdná. Nechť

U_1 je množina těch $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ pro která $(\sigma_{j-1}, \sigma_j) \cap \sigma_\varepsilon = \emptyset$,

$$U_2 = \{1, 2, \dots, m\} \setminus U_1.$$

Potom pro každé $j \in U_2$ existuje právě jedno $i(j) \in \{1, 2, \dots, r\}$ takové, že $s_{i(j)} \in (\sigma_{j-1}, \sigma_j)$. Počet prvků množiny U_2 tedy není větší než r .

Položme nyní $\rho = \sigma \cup \sigma_\varepsilon$. Potom

$$|\rho| < \delta_\varepsilon < \delta_*. \quad (5.14)$$

a pro každé $j \in U_1$ existuje právě jedno $k(j) \in \{1, 2, \dots, \nu(\rho)\}$ takové, že

$$[\rho_{k(j)-1}, \rho_{k(j)}] = [\sigma_{j-1}, \sigma_j]. \quad (5.15)$$

Pokud $j \in U_2$, pak existuje právě jedno $\ell(j) \in \{1, 2, \dots, \nu(\rho) - 1\}$ takové, že

$$\rho_{\ell(j)-1} = \sigma_{j-1}, \quad \rho_{\ell(j)} = s_{i(j)}, \quad \rho_{\ell(j)+1} = \sigma_{j+1}. \quad (5.16)$$

Zvolme vektor η tak, aby bylo $(\rho, \eta) \in \mathcal{T}[a, b]$ a

$$\eta_{k(j)} = \xi_j \quad \text{když } j \in U_1 \quad (5.17)$$

a porovnejme integrální součty $S(\sigma, \xi)$ a $S(\rho, \eta)$. Máme

$$S(\sigma, \xi) = \sum_{j \in U_1} f(\xi_j) [g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] + \sum_{j \in U_2} f(\xi_j) [g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})].$$

Nechť $V_1 = \{k(j) : j \in U_1\}$ a $V_2 = \{1, 2, \dots, \nu(\rho)\} \setminus V_1$. Pak podle (5.15)–(5.17)

$$\begin{aligned} S(\rho, \eta) &= \sum_{k \in V_1} f(\eta_k) [g(\rho_k) - g(\rho_{k-1})] + \sum_{k \in V_2} f(\eta_k) [g(\rho_k) - g(\rho_{k-1})] \\ &= \sum_{j \in U_1} f(\eta_{k(j)}) [g(\rho_{k(j)}) - g(\rho_{k(j)-1})] + \sum_{k \in V_2} f(\eta_k) [g(\rho_k) - g(\rho_{k-1})] \\ &= \sum_{j \in U_1} f(\xi_j) [g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] \\ &\quad + \sum_{j \in U_2} [f(\eta_{\ell(j)}) [g(\rho_{\ell(j)}) - g(\rho_{\ell(j)-1})] + f(\eta_{\ell(j)+1}) [g(\rho_{\ell(j)+1}) - g(\rho_{\ell(j)})]] \\ &= \sum_{j \in U_1} f(\xi_j) [g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] \\ &\quad + \sum_{j \in U_2} [f(\eta_{\ell(j)}) [g(s_{i(j)}) - g(s_{j-1})] + f(\eta_{\ell(j)+1}) [g(\sigma_{j+1}) - g(\beta_{i(j)})]]. \end{aligned}$$

Tudíž

$$S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) = \sum_{j \in U_2} f(\xi_j) [g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] \\ - \sum_{j \in U_2} [f(\eta_{\ell(j)}) [g(s_{i(j)}) - g(\sigma_{j-1})] + f(\eta_{\ell(j)+1}) [g(\sigma_{j+1}) - g(s_{i(j)})]] ,$$

tj.

$$|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})| \leq \sum_{j \in U_2} |W_j| ,$$

kde

$$W_j = f(\xi_j) [g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] \\ - f(\eta_{\ell(j)}) [g(s_{i(j)}) - g(\sigma_{j-1})] - f(\eta_{\ell(j)+1}) [g(\sigma_{j+1}) - g(s_{i(j)})] .$$

Připomeňme, že vzhledem k (5.14) a (5.16) máme

$$[\sigma_{j-1}, \sigma_j] \subset (s_{i(j)} - \delta_\varepsilon, s_{i(j)} + \delta_\varepsilon), \quad \xi_j \in [s_{i(j)} - \delta_\varepsilon, s_{i(j)} + \delta_\varepsilon], \\ \eta_{\ell(j)} \in [s_{i(j)} - \delta_\varepsilon, s_{i(j)}], \quad \eta_{\ell(j)+1} \in [s_{i(j)}, s_{i(j)} + \delta_\varepsilon] .$$

Podle (5.13) je tedy $|W_j| < \frac{\varepsilon}{r}$ pro každé $j \in U_2$ a tudíž (také díky tomu, že počet elementů množiny U_2 není větší než r) dostáváme, že

$$|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})| \leq \sum_{j \in U_2} |W_j| < \varepsilon .$$

Konečně, vzhledem k (5.11) a k vzhledem k definici $\boldsymbol{\rho}$, dostáváme

$$|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - I| \leq |S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})| + |S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) - I| < 2\varepsilon .$$

Dokázali jsme tedy, že $(\delta) \int_a^b f \, dg = I$. □

5.29. Důsledek. *Nechť $(\sigma) \int_a^b f \, dg = I \in \mathbb{R}$ a nechť v každém bodě intervalu (a, b) je alespoň jedna z funkcí $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá a druhá je ohraničená na jeho okolí. Potom je také $(\delta) \int_a^b f \, dg = I$.*

D ů k a z. Podle lemmatu 5.26 splňují funkce f, g podmínku pseudoaditivity v každém bodě $x \in (a, b)$ a tudíž podle věty 5.28 existuje také $(\delta) \int_a^b f \, dg$ a platí

$$(\delta) \int_a^b f \, dg = (\sigma) \int_a^b f \, dg. \quad \square$$

5.30. Poznámka. Speciálně, jestliže $g(x) \equiv x$ (tj. pro Riemannův integrál), jsou definice integrálů $(\delta) \int_a^b f(x) \, dx$ a $(\sigma) \int_a^b f(x) \, dx$ ekvivalentní.

5.31. Cvičení. Dokažte tvrzení:

Nechť $c \in [a, b]$, $(\delta) \int_a^c f \, dg = I_1 \in \mathbb{R}$ a $(\delta) \int_c^b f \, dg = I_2 \in \mathbb{R}$ a nechť f, g splňují podmínku pseudoaditivity v c . Potom integrál $I = (\delta) \int_a^b f \, dg$ existuje a platí $I = I_1 + I_2$.

(Návod: využijte věty 5.19 a 5.28.)

5.3 Další podmínky existence integrálu a absolutní integrovatelnost

Nyní potřebujeme další pomocný pojem.

5.32. Definice. Nechť $-\infty < c < d < \infty$ a $f, g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$. Potom definujeme

$$\mathfrak{S}_{f\Delta g}[c, d] = \{ |S_{f\Delta g}(\rho, \eta) - S_{f\Delta g}(\rho', \eta')| : (\rho, \eta), (\rho', \eta') \in \mathcal{T}[c, d] \}$$

a

$$\omega(S_{f\Delta g}; [c, d]) = \sup \mathfrak{S}_{f\Delta g}[c, d]. \quad (5.18)$$

Platí následující modifikace Bolzanových - Cauchyových podmínek.

5.33. Věta. Nechť $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Potom :

(i) Integrál $(\delta) \int_a^b f \, dg$ existuje tehdy a jen tehdy, když platí

$$\left. \begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \\ &\left(\sigma \in \mathcal{D}[a, b] \text{ a } |\sigma| < \delta_\varepsilon \right) \implies \sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} \omega(S_{f\Delta g}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j]) < \varepsilon. \end{aligned} \right\} (5.19)$$

(ii) Integrál $(\sigma) \int_a^b f \, d g$ existuje tehdy a jen tehdy, když platí

$$\left. \begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \sigma_\varepsilon \in \mathcal{D}[a, b]: \\ (\sigma \in \mathcal{D}[a, b] \text{ a } \sigma \supset \sigma_\varepsilon) \implies \sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} \omega(S_{f\Delta g}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j]) < \varepsilon. \end{aligned} \right\} (5.20)$$

D ů k a z. a) Ukážeme, že podmínka (5.19) je ekvivalentní s Bolzanovou - Cauchyovou podmínkou pro existenci (δ) RS - integrálu.

α) Předpokládejme, že platí (5.3). Nechť $\tilde{\varepsilon} > 0$ je dáno, $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}/2$ a nechť δ_ε je určeno podmínkou (5.3). Mějme dělení σ intervalu $[a, b]$ takové, že $|\sigma| < \delta_\varepsilon$. Označme $m = \nu(\sigma)$ a pro každé $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ vyberme značená dělení (σ^j, ξ^j) , $(\tilde{\sigma}^j, \tilde{\xi}^j) \in \mathcal{T}[\sigma_{j-1}, \sigma_j]$ tak, aby platilo

$$0 \leq \omega(S_{f\Delta g}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j]) < S_{f\Delta g}(\sigma^j, \xi^j) - S_{f\Delta g}(\tilde{\sigma}^j, \tilde{\xi}^j) + \frac{\varepsilon}{m}. \quad (5.21)$$

Definujme

$$\rho = \bigcup_{j=1}^m \sigma^j, \quad \tilde{\rho} = \bigcup_{j=1}^m \tilde{\sigma}^j, \quad \eta = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^m) \text{ a } \tilde{\eta} = (\tilde{\xi}^1, \tilde{\xi}^2, \dots, \tilde{\xi}^m).$$

Potom

$$(\rho, \eta) \in \mathcal{T}[a, b], \quad (\tilde{\rho}, \tilde{\eta}) \in \mathcal{T}[a, b], \quad |\rho| < \delta_\varepsilon \text{ a } |\tilde{\rho}| < \delta_\varepsilon.$$

Tudíž podle (5.3) a (5.21) dostáváme

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{j=1}^m \omega(S_{f\Delta g}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j]) \\ &< \sum_{j=1}^m [S_{f\Delta g}(\sigma^j, \xi^j) - S_{f\Delta g}(\tilde{\sigma}^j, \tilde{\xi}^j) + \frac{\varepsilon}{m}] \\ &= S_{f\Delta g}(\rho, \eta) - S_{f\Delta g}(\tilde{\rho}, \tilde{\eta}) + \varepsilon < 2\varepsilon = \tilde{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Protože $\tilde{\varepsilon} > 0$ mohlo být libovolné, plyne odtud, že podmínka (5.19) je splněna.

β) Pro důkaz obrácené implikace předpokládejme, že platí (5.19). Dokážeme, že potom je splněna podmínka (5.3').

Buď dáno $\varepsilon > 0$. Nechť δ_ε je určeno podmínkou (5.19). Dále, mějme značené dělení (σ, ξ) intervalu $[a, b]$ takové, že $|\sigma| < \delta_\varepsilon$, Označme $m = \nu(\sigma)$. Nechť

$$\tilde{\sigma} = \bigcup_{j=1}^m \sigma^j, \quad \tilde{\xi} = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^m),$$

kde

$$(\sigma^j, \xi^j) \in \mathcal{T}[\sigma_{j-1}, \sigma_j] \text{ pro } j \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Potom $\tilde{\sigma} \supset \sigma$. Díky předpokladu (5.19) a s přihlédnutím k (5.18) dostaneme

$$\begin{aligned} & |S_{f\Delta g}(\sigma, \xi) - S_{f\Delta g}(\tilde{\sigma}, \tilde{\xi})| \\ & \leq \sum_{j=1}^m |f(\xi_j) [g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] - S_{f\Delta g}(\sigma^j, \eta^j)| \\ & \leq \sum_{j=1}^m \omega(S_{f\Delta g}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j]) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Platí tedy (5.3').

b) Analogicky by se dokázala ekvivalence podmínky (5.20) s Bolzanovou - Cauchyovou podmínkou pro existenci (σ) RS - integrálu. Podrobný důkaz je ponechán čtenáři jako cvičení. \square

5.34. Cvičení. Dokažte tvrzení věty 5.33 pro (σ) RS - integrály.

5.35. Lemma. Nechť $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a $[c, d] \subset [a, b]$. Potom

$$\omega_{[c,d]}(f) |g(d) - g(c)| \leq \omega(S_{f\Delta g}; [c, d]) \leq \omega_{[c,d]}(f) \text{var}_c^d g. \quad (5.22)$$

D ů k a z. a) Nechť $\sigma = \rho = \{c, d\}$, $\xi, \eta \in [c, d]$ a $\xi = (\xi), \eta = (\eta)$. Potom $(\sigma, \xi), (\rho, \eta) \in \mathcal{T}[c, d]$ a $|f(\xi) - f(\eta)| |g(d) - g(c)| \in \mathfrak{S}_{f\Delta g}([c, d])$ a tudíž

$$\omega_{[c,d]}(f) |g(d) - g(c)| \leq \sup \mathfrak{S}_{f\Delta g}[c, d] = \omega(S_{f\Delta g}; [c, d]).$$

b) Na druhou stranu, jestliže $(\rho, \eta), (\tau, \theta) \in \mathcal{T}[c, d]$ a položíme-li $\sigma = \rho \cup \tau$, bude $\sigma \in \mathcal{D}[c, d]$ a

$$|S_{f\Delta g}(\rho, \eta) - S_{f\Delta g}(\tau, \theta)| = \left| \sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} (f(\eta'_j) - f(\theta'_j)) [g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] \right|,$$

kde $\eta'_j = \eta_k$ když $[\sigma_{j-1}, \sigma_j] \subset [\rho_{k-1}, \rho_k]$ a $\theta'_j = \theta_k$ když $[\sigma_{j-1}, \sigma_j] \subset [\tau_{k-1}, \tau_k]$. Odtud dostáváme dále

$$\begin{aligned} |S_{f \Delta g}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) - S_{f \Delta g}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\theta})| &\leq \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} |f(\eta'_j) - f(\theta'_j)| |g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})| \\ &\leq \omega_{[c,d]}(f) V(g, \boldsymbol{\sigma}) \end{aligned}$$

neboli

$$\omega(S_{f \Delta g}; [c, d]) = \sup \mathfrak{S}_{f \Delta g}[c, d] \leq \omega_{[c,d]}(f) \text{var}_c^d g.$$

Dokázali jsme platnost nerovností (5.22). \square

5.36. Poznámka. Je-li $\text{var}_c^d g = \infty$, pak je ovšem druhá z nerovností v (5.22) triviální.

Následující tvrzení poskytuje další nutnou a postačující podmínku pro existenci obou typů RS - integrálů.

5.37. Věta. *Nechť $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g \in \mathbb{BV}[a, b]$ a $v(x) = \text{var}_a^x g$ pro $x \in [a, b]$. Potom integrál $\int_a^b f \, dg$ existuje tehdy a jen tehdy, když existuje integrál $\int_a^b f \, dv$.*

D ů k a z. a) Pro každý interval $[c, d] \subset [a, b]$ máme $\text{var}_c^d v = v(d) - v(c)$. Tudíž podle lemmatu 5.35 musí platit

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega_{[\sigma_{j-1}, \sigma_j]}(f) [v(\sigma_j) - v(\sigma_{j-1})] = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega(S_{f \Delta v}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j])$$

pro libovolné dělení $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{D}[a, b]$. Podle lemmatu 5.35 tedy dále dostáváme

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega(S_{f \Delta g}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j]) &\leq \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega_{[\sigma_{j-1}, \sigma_j]}(f) \text{var}_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} g \\ &= \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega_{[\sigma_{j-1}, \sigma_j]}(f) [v(\sigma_j) - v(\sigma_{j-1})] = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega(S_{f \Delta v}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j]), \end{aligned}$$

tj. nerovnost

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega(S_{f \Delta g}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j]) \leq \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega(S_{f \Delta v}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j])$$

platí pro každé dělení $\sigma \in \mathcal{D}[a, b]$. Pomocí věty 5.33 nyní už snadno dokážeme, že z existence integrálu $\int_a^b f \, d\nu$ plyne existence integrálu $\int_a^b f \, dg$ (a to pro oba typy RS - integrálu).

b) Předpokládejme, že existuje integrál $(\sigma) \int_a^b f \, dg$.

Bud' dáno $\varepsilon > 0$. Potom podle věty 5.33 existuje dělení $\sigma_\varepsilon \in \mathcal{D}[a, b]$ takové, že

$$\sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} \omega(S_{f \Delta g}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j]) < \varepsilon \quad (5.23)$$

platí pro každé jeho zjemnění $\sigma \supset \sigma_\varepsilon$. Zřejmě můžeme též předpokládat, že také

$$0 \leq \text{var}_a^b g - V(g, \sigma) < \varepsilon \quad (5.24)$$

platí pro každé dělení σ takové, že $\sigma \supset \sigma_\varepsilon$. (Zdůvodněte!)

Podle lemmatu 5.35 máme

$$\sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} \omega(S_{f \Delta v}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j]) \leq \sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} \omega_{[\sigma_{j-1}, \sigma_j]}(f) \text{var}_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} g$$

a, dále, podle (5.24) a (5.23)

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} \omega(S_{f \Delta v}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j]) &\leq \sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} \omega_{[\sigma_{j-1}, \sigma_j]}(f) [g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] \\ &+ \sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} \omega_{[\sigma_{j-1}, \sigma_j]}(f) (\text{var}_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} g - [g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})]) \\ &< \varepsilon + \omega_{[a, b]}(f) (\text{var}_a^b g - V(g, \sigma)) < \varepsilon (1 + \omega_{[a, b]}(f)). \end{aligned}$$

Podle věty 5.33 můžeme tedy uzavřít, že existuje integrál $(\sigma) \int_a^b f \, d\nu$.

c) Zbývá dokázat implikaci $(\delta) \int_a^b f \, dg \in \mathbb{R} \implies (\delta) \int_a^b f \, d\nu \in \mathbb{R}$.

Nechť tedy existuje integrál $(\delta) \int_a^b f \, dg$. Potom podle vět 5.5 a 5.27 existuje $(\sigma) \int_a^b f \, d\nu$ a funkce f, g nemají společný bod nespojitosti v (a, b) . Dále, podle

lemmatu 2.22 také funkce f, v nemají společný bod nespojitosti v (a, b) . Konečně, protože podle části b) tohoto důkazu existuje integrál $(\sigma) \int_a^b f \, d v$, existence integrálu $(\delta) \int_a^b f \, d v$ plyne z důsledku 5.29. (Protože $g \in \mathbb{B}\mathbb{V}[a, b]$, jsou funkce g i v ohraničené na $[a, b]$.) \square

5.38. Věta. *Nechť $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g \in \mathbb{B}\mathbb{V}[a, b]$ a existuje integrál $\int_a^b f \, d g$. Potom existuje také integrál $\int_a^b |f| \, d g$.*

D ů k a z . Podle věty 2.13 a lemmatu 5.11 se můžeme omezit na případ, že g je neklesající na $[a, b]$. Potom je $\text{var}_c^d g = g(d) - g(c)$ pro libovolná $c, d \in [a, b]$ taková, že $c \leq d$. Podle lemmatu 5.35 tedy pro libovolné dělení $\sigma \in \mathcal{D}[a, b]$ platí

$$\sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} \omega(S_{f\Delta g}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j]) = \sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} \omega_{[\sigma_{j-1}, \sigma_j]}(f) [g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})]$$

a

$$\sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} \omega(S_{|f|\Delta g}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j]) = \sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} \omega_{[\sigma_{j-1}, \sigma_j]}(|f|) [g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})].$$

Na druhou stranu, zřejmě

$$||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)| \quad \text{pro libovolná } x, y \in [a, b].$$

Máme tedy $\omega_{[c,d]}(|f|) \leq \omega_{[c,d]}(f)$ pro libovolný interval $[c, d] \subset [a, b]$. Tudíž

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} \omega(S_{|f|\Delta g}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j]) &= \sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} \omega_{[\sigma_{j-1}, \sigma_j]}(|f|) [g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] \\ &\leq \sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} \omega_{[\sigma_{j-1}, \sigma_j]}(f) [g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] = \sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} \omega(S_{f\Delta g}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j]). \end{aligned}$$

Tvrzení lemmatu nyní plyne okamžitě z věty 5.33. \square

Přímým důsledkem lemmatu 5.9 a vět 5.37 a 5.38 je následující tvrzení.

5.39. Důsledek. *Nechť $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g \in \mathbb{B}\mathbb{V}[a, b]$, $v(x) = \text{var}_a^x g$ pro $x \in [a, b]$ a nechť existuje integrál $\int_a^b f \, d g$. Potom existuje také integrál $\int_a^b |f| \, d v$ a platí*

$$\left| \int_a^b f \, d g \right| \leq \int_a^b |f| \, d v \leq \|f\| \text{var}_a^b g.$$

□

Na závěr tohoto odstavce ukážeme, jakou roli hrají v teorii Stieltjesova integrálu ohraničené funkce. Následující tvrzení platí pro oba typy RS - integrálů.

5.40. Věta. *Nechť existuje $\int_a^b f \, d g$. Potom je buďto funkce f ohraničená na intervalu $[a, b]$ nebo existuje konečný systém bodů $\alpha_i, \beta_i \in [a, b]$, $i = 1, 2, \dots, k$ takových, že platí*

$$(i) \quad a \leq \alpha_1 < \beta_1 \leq \alpha_2 < \beta_2 \leq \dots \leq \alpha_k < \beta_k \leq b,$$

(ii) *funkce g je na každém intervalu $[\alpha_i, \beta_i]$, $i = 1, 2, \dots, k$, konstantní,*

(iii) *funkce f je ohraničená na množině $[a, b] \setminus \bigcup_{i=1}^k [\alpha_i, \beta_i]$.*

D ů k a z. a) Předpokládejme, že existuje integrál $(\sigma) \int_a^b f \, d g$ a, že funkce f není ohraničená na $[a, b]$. Potom podle věty 5.37 existuje také integrál $(\sigma) \int_a^b f \, d v$, kde $v(x) = \text{var}_{a^x} g$ pro $x \in [a, b]$. Podle věty 5.33 a lemmatu 5.35 tedy existuje dělení $\sigma \in \mathcal{D}[a, b]$ takové, že

$$\sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} \omega_{[\sigma_{j-1}, \sigma_j]}(f) [v(\sigma_j) - v(\sigma_{j-1})] \leq \sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} \omega(S_{f \Delta v}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j]) < 1.$$

Speciálně, pro každé $j = 1, 2, \dots, \nu(\sigma)$ a $x', x'' \in [\sigma_{j-1}, \sigma_j]$ musí platit

$$\omega_{[\sigma_{j-1}, \sigma_j]}(f) [v(\sigma_j) - v(\sigma_{j-1})] < 1. \quad (5.25)$$

Není-li f ohraničená na intervalu $[c, d]$, pak je ovšem

$$\omega_{[\sigma_{j-1}, \sigma_j]}(f) = \sup_{x', x'' \in [\sigma_{j-1}, \sigma_j]} |f(x') - f(x'')| = \infty$$

a (5.25) může platit jenom tehdy, když bude $0 = v(\sigma_j) - v(\sigma_{j-1}) = \text{var}_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} g$. Podle lemmatu 2.12 to znamená, že funkce g musí být konstantní na intervalu $[\sigma_{j-1}, \sigma_j]$. Nyní, nechť \mathfrak{J} je množina všech intervalů $[\sigma_{j-1}, \sigma_j]$, na kterých je funkce f neohraničená (a tedy funkce g konstantní) a nechť k je počet prvků této množiny. Důkaz dokončíme, označíme-li krajní body intervalů z \mathfrak{J} tak, aby platilo $\mathfrak{J} = \{[\alpha_i, \beta_i] : i = 1, 2, \dots, k\}$.

b) Jestliže existuje $(\delta) \int_a^b f \, dg$, pak podle věty 5.5 existuje také $(\sigma) \int_a^b f \, dg$ a tvrzení věty plyne z první části důkazu. \square

5.41. Poznámka. Protože hodnota integrálu $\int_a^b f \, dg$ se nezmění, jestliže libovolně pozměníme hodnotu funkce f na intervalech, na kterých je g konstantní, vidíme z věty 5.40, že jestliže integrál $\int_a^b f \, dg$ existuje, pak vždycky můžeme najít funkci \tilde{f} ohraničenou na $[a, b]$ a takovou, že

$$\int_a^b f \, dg = \int_a^b \tilde{f} \, dg.$$

5.4 Substituce

Všechna tvrzení tohoto odstavce platí ve stejném znění pro oba typy RS - integrálu

Začneme dalším důsledkem definice 5.32.

5.42. Lemma. *Jestliže $\int_a^b f \, dg \in \mathbb{R}$ a (σ, ξ) je libovolné značené dělení intervalu $[a, b]$, pak platí*

$$\left| \int_a^b f \, dg - S(\sigma, \xi) \right| \leq \sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} \omega(S_{f\Delta g}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j]). \quad (5.26)$$

D ů k a z. Označme $m = \nu(\sigma)$. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Nezávisle na tom o jaký typ RS - integrálu se jedná můžeme zvolit značené dělení $(\tilde{\sigma}, \tilde{\xi}) \in \mathcal{T}[a, b]$ tak, aby bylo $\tilde{\sigma} \supset \sigma$ a

$$\left| \int_a^b f \, dg - S(\tilde{\sigma}, \tilde{\xi}) \right| < \varepsilon.$$

Protože $\tilde{\sigma}$ je zjemněním σ , můžeme ho rozdělit tak, že bude

$$\tilde{\sigma} = \bigcup_{j=1}^m \tilde{\sigma}^j, \quad \text{kde } \tilde{\sigma}^j \in \mathcal{D}[\sigma_{j-1}, \sigma_m] \text{ pro } j = 1, 2, \dots, m.$$

Podobně $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}^1, \tilde{\xi}^2, \dots, \tilde{\xi}^j)$, kde $\tilde{\xi}^j$ jsou reálné vektory takové, že

$$(\tilde{\sigma}^j, \tilde{\xi}^j) \in \mathcal{T}[\sigma_{j-1}, \sigma_j] \text{ pro } j = 1, 2, \dots, m.$$

Máme tedy

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_a^b f \, dg - S(\sigma, \xi) \right| \\
 & \leq \left| \int_a^b f \, dg - S(\tilde{\sigma}, \tilde{\xi}) \right| + \left| S(\tilde{\sigma}, \tilde{\xi}) - S(\sigma, \xi) \right| \\
 & < \varepsilon + \sum_{j=1}^m |f(\xi_j) [g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] - S(\tilde{\sigma}^j, \tilde{\xi}^j)| \\
 & < \varepsilon + \sum_{j=1}^m \omega(S_{f\Delta g}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j]).
 \end{aligned}$$

Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, znamená to, že platí (5.26). □

5.43. Důsledek. Jestliže $\int_a^b f \, dg \in \mathbb{R}$ a $[c, d] \subset [a, b]$, pak pro každé $\xi \in [c, d]$ platí

$$\left| \int_c^d f \, dg - f(\xi) [g(d) - g(c)] \right| \leq \omega(S_{f\Delta g}; [c, d]).$$

Následující speciální forma věty o substituci je také důsledkem lemmatu 5.42.

5.44. Věta (SUBSTITUTECE). Necht' $f, g, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, přičemž f je ohraničená na intervalu $[a, b]$ a $\int_a^b g \, dh \in \mathbb{R}$. Potom jeden z integrálů

$$\int_a^b f \, d\left[\int_a^x g \, dh\right] \quad \text{a} \quad \int_a^b f g \, dh$$

existuje (má konečnou hodnotu) právě tehdy, když existuje i ten druhý. V takovém případě pak platí

$$\int_a^b f \, d\left[\int_a^x g \, dh\right] = \int_a^b f g \, dh. \tag{5.27}$$

D ů k a z. Nejprve si povšimněme, že z existence integrálu $\int_a^b g \, dh \in \mathbb{R}$ plyne, že funkce

$$w: x \in [a, b] \rightarrow w(x) = \int_a^x g \, dh$$

je definována na celém intervalu $[a, b]$ a má konečné hodnoty pro každé $x \in [a, b]$ (viz věta 5.15).

Pro libovolné značené dělení (σ, ξ) intervalu $[a, b]$ máme

$$\begin{aligned} & |S_{fg\Delta h}(\sigma, \xi) - S_{f\Delta w}(\sigma, \xi)| \\ &= \left| \sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} f(\xi_j) g(\xi_j) [h(\sigma_j) - h(\sigma_{j-1})] - \sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} f(\xi_j) [w(\sigma_j) - w(\sigma_{j-1})] \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} |f(\xi_j)| \left| g(\xi_j) [h(\sigma_j) - h(\sigma_{j-1})] - \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} g \, dh \right| \\ &\leq \|f\| \left(\sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} \left| g(\xi_j) [h(\sigma_j) - h(\sigma_{j-1})] - \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} g \, dh \right| \right). \end{aligned}$$

Podle důsledku 5.43 dostáváme dále

$$|S_{fg\Delta h}(\sigma, \xi) - S_{f\Delta w}(\sigma, \xi)| \leq \|f\| \sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} \omega(S_{g\Delta h}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j]).$$

Odtud podle věty 5.33 už plyne relace (5.27). (Přesvědčete se, že důkaz opravdu umíte dokončit.) \square

5.45. Důsledek. Je-li f ohraničená na $[a, b]$, $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$ a $g(x) = \int_a^x h(t) \, dt$, pak jeden z integrálů

$$\int_a^b f \, dg \quad \text{a} \quad \int_a^b f(x) h(x) \, dx$$

existuje právě tehdy, když existuje i ten druhý. V takovém případě pak platí

$$\int_a^b f \, dg = \int_a^b f(x) h(x) \, dx. \quad \square$$

5.46. Věta (DRUHÁ O SUBSTITUCI). Předpokládejme, že funkce $\phi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ je ryze monotonní a spojitá na $[\alpha, \beta]$ a zobrazuje $[\alpha, \beta]$ na interval $[a, b]$. Potom pro libovolné funkce $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ platí

$$\text{existuje-li } \int_a^b f(x) \, dg(x), \text{ existuje také } \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(x)) \, dg(\phi(x))$$

a

$$\pm \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(x)) \, d g(\phi(x)) = \int_a^b f(x) \, d g(x), \quad (5.28)$$

kde "+" platí, je-li ϕ rostoucí a "-" platí, je-li ϕ klesající.

D ů k a z . Předpokládejme např., že ϕ je klesající. Potom $\alpha = \phi(b)$ a $\beta = \phi(a)$. Pro dané značené dělení (σ, ξ) , intervalu $[\alpha, \beta]$ položme

$$\rho_{\nu(\sigma)-j} = \phi(\sigma_j) \text{ pro } j = 0, 1, \dots, \nu(\sigma), \quad \eta_{\nu(\sigma)-j} = \phi(\xi_j) \text{ pro } j = 1, 2, \dots, \nu(\sigma).$$

Potom (ρ, η) , $\rho = \{\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{\nu(\sigma)}\}$, $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{\nu(\sigma)})$ je značené dělení intervalu $[a, b]$. Píšeme $\rho = \phi(\sigma)$ a $\eta = \phi(\xi)$. Zřejmě, je-li $\sigma \supset \sigma'$, pak je také $\phi(\sigma) \supset \phi(\sigma')$. Podobně, protože ϕ je stejnoměrně spojitá na $[\alpha, \beta]$, platí $|\phi(\sigma)| \rightarrow 0$ jakmile $|\sigma| \rightarrow 0$. Navíc

$$\sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} f(\phi(\xi_j)) [g(\phi(\sigma_j)) - g(\phi(\sigma_{j-1}))] = - \sum_{i=1}^{\nu(\rho)} f(\eta_j) [g(\phi(\rho_j)) - g(\phi(\rho_{j-1}))]$$

platí pro každé $(\sigma, \xi) \in \mathcal{T}[\alpha, \beta]$. Teď už zajisté každý čtenář, který pozorně prostudoval většinu důkazů této kapitoly, samostatně dokončí důkaz rovnosti (5.28) pro oba integrály (včetně případu, že ϕ je rostoucí). \square

Další variantou věty o substituci je následující věta. Její důkaz můžeme ponechat čtenáři jako cvičení.

5.47. Věta. *Nechť funkce $\phi: [a, b] \rightarrow [\phi(a), \phi(b)]$ je rostoucí a spojitá na $[a, b]$, $\psi: [\phi(a), \phi(b)] \rightarrow [a, b]$ je inverzní k ϕ a nechť $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Pak existuje-li jeden z integrálů*

$$(\sigma) \int_a^b f(x) \, dx, \quad (\sigma) \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(\psi(x)) \, d\psi(x),$$

existuje i ten druhý a platí rovnost

$$(\sigma) \int_a^b f(x) \, dx = (\sigma) \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(\psi(x)) \, d\psi(x),$$

5.48. Cvičení. Dokažte větu 5.47. Zformulujte a dokažte analogické tvrzení pro (δ) RS-integrály.

5.5 Integrace per-partes

Následující tvrzení je zobecněním věty o integraci per-partes pro Riemannův integrál. Platí ve stejném znění pro oba typy RS - integrálu.

5.49. Věta (VĚTA O INTEGRACI PER-PARTES). *Existuje-li jeden z integrálů*

$$\int_a^b f \, dg, \quad \int_a^b g \, df,$$

existuje i druhý a platí

$$\int_a^b f \, dg + \int_a^b g \, df = f(b)g(b) - f(a)g(a). \quad (5.29)$$

D ů k a z. a) Buď dáno libovolné značené dělení (σ, ξ) . Přeorganizováním členů v součtu $S_{f\Delta g}(\sigma, \xi)$ dostaneme

$$\begin{aligned} S_{f\Delta g}(\sigma, \xi) &= f(\xi_1)[g(\sigma_1) - g(a)] + f(\xi_2)[g(\sigma_2) - g(\sigma_1)] \\ &\quad + \cdots + f(\xi_m)[g(b) - g(\sigma_{m-1})] \\ &= -f(a)g(a) - [f(\xi_1) - f(a)]g(a) - [f(\xi_2) - f(\sigma_1)]g(\sigma_1) \\ &\quad - [f(\sigma_1) - f(\xi_1)]g(\sigma_1) - \cdots - [f(\xi_m) - f(\sigma_{m-1})]g(\sigma_{m-1}) \\ &\quad - [f(\sigma_{m-1}) - f(\xi_{m-1})]g(\sigma_{m-1}) \\ &\quad - [f(b) - f(\xi_m)]g(b) + f(b)g(b) \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - S_{g\Delta f}(\sigma', \xi') \end{aligned}$$

neboli

$$S_{f\Delta g}(\sigma, \xi) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - S_{g\Delta f}(\sigma', \xi') \quad (5.30)$$

kde

$$\begin{aligned} \sigma' &= \{a, \xi_1, \sigma_1, \xi_2, \sigma_2, \dots, \sigma_{m-1}, \xi_m, b\}, \\ \xi' &= (a, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_2, \dots, \sigma_{m-1}, \sigma_{m-1}, b), \end{aligned}$$

$(\sigma', \xi') \in \mathcal{T}[a, b]$ a σ' je zjemněním σ . (Stane-li se, že $\xi_j = \sigma_{j-1}$ resp. $\xi_j = \sigma_j$ pro nějaké j , musíme ovšem tyto body ξ_j v σ' a ξ' vynechat.)

b) Předpokládejme, že existuje integrál $(\sigma) \int_a^b g \, df$.

Buď dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme dělení $\sigma_\varepsilon \in \mathcal{D}[a, b]$ tak, aby pro každé jeho zjemnění σ' a všechna příslušná značená dělení $(\sigma', \xi') \in \mathcal{T}[a, b]$ platilo

$$\left| S_{g\Delta f}(\sigma', \xi') - (\sigma) \int_a^b g \, d f \right| < \varepsilon.$$

Podle (5.30) pro každé $\sigma \supset \sigma_\varepsilon$ a příslušné značené dělení (σ, ξ) platí

$$\begin{aligned} S_{f\Delta g}(\sigma, \xi) - f(b)g(b) + f(a)g(a) + (\sigma) \int_a^b g \, d f \\ = (\sigma) \int_a^b g \, d f - S_{g\Delta f}(\sigma', \xi'), \end{aligned}$$

kde $\sigma' \supset \sigma \supset \sigma_\varepsilon$ a tudíž

$$\begin{aligned} \left| S_{f\Delta g}(\sigma, \xi) - f(b)g(b) + f(a)g(a) + (\sigma) \int_a^b g \, d f \right| \\ = \left| (\sigma) \int_a^b g \, d f - S_{g\Delta f}(\sigma', \xi') \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Odtud plyne existence integrálu $(\sigma) \int_a^b f \, d g$ a relace (5.29). To, že z existence integrálu $(\sigma) \int_a^b f \, d g$ plyne existence integrálu $(\sigma) \int_a^b g \, d f$ a platí rovnost (5.29) by se dokazovalo analogicky.

c) Tvrzení věty pro (δ) RS - integrály plyne ze vztahu (5.30) podobně jako v druhé části důkazu pro (σ) RS - integrály a detailní důkaz můžeme nechat čtenáři jako cvičení. \square

5.50. Cvičení. Dokažte tvrzení věty 5.49 pro (δ) RS - integrály.

5.6 Stejněměrná konvergence a existence integrálu

Až na větu 5.54, všechna tvrzení tohoto odstavce platí ve stejném znění pro oba typy RS - integrálu.

5.51. Věta. *Nechť $g \in \mathbb{B}\mathbb{V}[a, b]$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je ohraničená a nechť posloupnost funkcí $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, je taková, že $\int_a^b f_n \, d g \in \mathbb{R}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0. \quad (5.31)$$

Potom existuje také integrál $\int_a^b f \, dg$ a platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n \, dg = \int_a^b f \, dg. \quad (5.32)$$

D ů k a z. a) Jestliže je $\text{var}_a^b g = 0$, pak podle lemmatu 2.12 musí být g konstantní na $[a, b]$ a tvrzení věty je evidentní. Předpokládejme tedy, že $\text{var}_a^b g > 0$.

Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Vzhledem k předpokladu ((5.31)) můžeme zvolit $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tak, aby platilo

$$n \geq n_\varepsilon \implies \left(\|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{\text{var}_a^b g} \right) \text{ a } \left(\|f_n\| < \|f\| + 1 \right). \quad (5.33)$$

Dále, za našich předpokladů je podle lemmatu 5.9

$$\left| \int_a^b f_n \, dg \right| \leq \|f_n\| \text{var}_a^b g \leq (\|f\| + 1) \text{var}_a^b g$$

pro $n \geq n_\varepsilon$. Můžeme tedy vybrat podposloupnost $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ a $I \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f_{n_k} \, dg = I.$$

Speciálně, existuje $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takové, že

$$n_{k_\varepsilon} \geq n_\varepsilon \text{ a } \left(k \geq k_\varepsilon \implies \left| \int_a^b f_{n_k} \, dg - I \right| < \varepsilon \right). \quad (5.34)$$

Dále, nechť σ_ε je takové dělení intervalu $[a, b]$, že

$$\left((\sigma, \xi) \in \mathcal{T}[a, b] \text{ a } \sigma \supset \sigma_\varepsilon \right) \implies \left| S_{f_{n_{k_\varepsilon}} \Delta g}(\sigma, \xi) - \int_a^b f_{n_{k_\varepsilon}} \, dg \right| < \varepsilon. \quad (5.35)$$

Protože je $n_{k_\varepsilon} \geq n_\varepsilon$ (viz ((5.34))), plyne z (5.33), že pro každé značené dělení (σ, ξ) , kde σ je zjemněním σ_ε , platí

$$\left| S(\sigma, \xi) - S_{f_{n_{k_\varepsilon}} \Delta g}(\sigma, \xi) \right| \leq \|f - f_{n_{k_\varepsilon}}\| \text{var}_a^b g < \varepsilon.$$

Vzhledem k (5.34)–(5.35) tedy dostáváme

$$\begin{aligned} \left| S(\sigma, \xi) - I \right| &\leq \left| S(\sigma, \xi) - S_{f_{n_{k_\varepsilon}} \Delta g}(\sigma, \xi) \right| + \left| S_{f_{n_{k_\varepsilon}} \Delta g}(\sigma, \xi) - \int_a^b f_{n_{k_\varepsilon}} \, dg \right| \\ &\quad + \left| \int_a^b f_{n_{k_\varepsilon}} \, dg - I \right| < 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Odtud okamžitě plyne, že platí

$$\int_a^b f \, dg = I.$$

Konečně, protože podle lemmatu 5.9 máme

$$\left| \int_a^b f_n \, dg - \int_a^b f \, dg \right| \leq \|f_n - f\| (\text{var}_a^b g),$$

rovnost (5.32) nyní plyne z předpokladu (5.31). Důkaz byl proveden pro (σ) RS-integrál.

b) Důkaz pro (δ) RS-integrály je analogický a ponecháváme ho jako cvičení. \square

5.52. Cvičení. Dokažte tvrzení věty 5.51 pro (δ) RS-integrály.

5.53. Věta. *Nechť $f \in \mathbb{C}[a, b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a, b]$. Potom existují oba integrály*

$$\int_a^b f \, dg \quad \text{a} \quad \int_a^b g \, df.$$

Důkaz. Vzhledem ke větám 2.13, 5.5 a 5.49 stačí dokázat existenci integrálu $(\delta) \int_a^b f \, dg$ pro případ, že f je spojitá na $[a, b]$ a g neklesající na $[a, b]$.

Nechť je tedy f spojitá na $[a, b]$, g neklesající na $[a, b]$ a $\varepsilon > 0$ je dáno.

Je-li $g(b) = g(a)$, pak je g je nutně konstantní na $[a, b]$ a tudíž $(\delta) \int_a^b f \, dg = 0$.

Bez újmy na obecnosti můžeme tedy předpokládat, že $g(b) - g(a) > 0$. Dále využijeme toho, že každá funkce spojitá na kompaktním intervalu je na tomto intervalu také stejnoměrně spojitá. Existuje tedy $\delta_\varepsilon > 0$ takové, že

$$\left. \begin{aligned} |f(x) - f(y)| &< \frac{\varepsilon}{g(b) - g(a)} \\ \text{pro všechna } x, y \in [a, b] \text{ taková, že } |x - y| &< \delta_\varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (5.36)$$

Dokážeme, že pro libovolná dvě značená dělení $(\sigma, \xi), (\sigma', \xi')$ intervalu $[a, b]$ taková, že $|\sigma| < \delta_\varepsilon$ a $\sigma' \supset \sigma$ platí $|S(\sigma, \xi) - S(\sigma', \xi')| < \varepsilon$. Podle věty 5.13 to už bude znamenat, že existuje $(\delta) \int_a^b f \, dg$.

Nechť $\nu(\sigma) = m$. Označme prvky dělení σ' a složky vektoru ξ' tak, že bude

$$\begin{aligned} \sigma' &= \{\sigma_0, \sigma_1^1, \dots, \sigma_{n_1-1}^1, \sigma_1, \sigma_1^2, \dots, \sigma_{m-1}, \sigma_1^m, \dots, \sigma_{n_m-1}^m, \sigma_m\} \\ \xi' &= (\xi_1^1, \dots, \xi_{n_1}^1, \xi_1^2, \dots, \xi_1^m, \dots, \xi_{n_m}^m). \end{aligned}$$

Potom

$$S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^m f(\xi_j) [g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] = \sum_{j=1}^m f(\xi_j) \sum_{i=1}^{n_j} [g(\alpha_i^j) - g(\alpha_{i-1}^j)]$$

a

$$|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}')| \leq \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} |f(\xi_j) - f(\xi_i^j)| [g(\alpha_i^j) - g(\alpha_{i-1}^j)].$$

Protože

$$|\xi_j - \xi_i^j| < |\boldsymbol{\sigma}| < \delta_\varepsilon \text{ pro všechna } j \in \{1, 2, \dots, m\} \text{ a } i \in \{1, 2, \dots, n_j\},$$

odvodíme pomocí nerovnosti (5.36) vztah

$$\begin{aligned} |S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}')| &< \frac{\varepsilon}{g(b) - g(a)} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} [g(\alpha_i^j) - g(\alpha_{i-1}^j)] \\ &= \frac{\varepsilon}{g(b) - g(a)} [g(b) - g(a)] = \varepsilon. \end{aligned}$$

Důkaz se dokončí pomocí cvičení 5.18. □

5.54. Věta. (i) *Jestliže $f \in \mathbb{BV}[a, b]$ je zleva spojitá na intervalu $(a, b]$, pak pro každou funkci $g \in \mathbb{G}[a, b]$ zprava spojitou na intervalu $[a, b)$ existují oba integrály*

$$(\sigma) \int_a^b f \, dg \quad \text{a} \quad (\sigma) \int_a^b g \, df.$$

(ii) *Jestliže $f \in \mathbb{BV}[a, b]$ je zprava spojitá na intervalu $[a, b)$, pak pro každou funkci $g \in \mathbb{G}[a, b]$ zleva spojitou na intervalu (a, b) existují oba integrály*

$$(\sigma) \int_a^b f \, dg \quad \text{a} \quad (\sigma) \int_a^b g \, df.$$

D ů k a z. Díky větě o integraci per-partes (věta 5.49) stačí v obou případech dokázat existenci integrálu $(\sigma) \int_a^b g \, df$.

Nechť $g \in \mathbb{G}[a, b]$ je zleva spojitá na intervalu $[a, b)$, tj. $g \in \widetilde{\mathbb{G}}_L[a, b]$ (viz

(4.2)). Podle lemmat 4.15 a 4.16 máme

$$\tilde{\mathbb{G}}_{\mathbb{R}}[a, b] = \overline{\tilde{\mathbb{G}}_{\mathbb{R}}[a, b] \cap \mathbb{S}[a, b]} = \overline{\text{Lin}(\chi_{[\tau, b]}, \tau \in [a, b])}.$$

Podle lemmatu 5.11 a věty 5.51 tedy stačí dokázat, že integrál $(\sigma) \int_a^b g \, d f$ existuje jestliže $g = \chi_{[a, \tau]}$ pro nějaké $\tau \in (a, b]$.

Zřejmě je $(\sigma) \int_a^{\tau} g \, d f = f(\tau) - f(a)$ a pro každé $(\sigma, \xi) \in \mathcal{T}[\tau, b]$ máme

$$S(\sigma, \xi) = \begin{cases} 0 & \text{je-li } \xi_1 > \tau, \\ f(\sigma_1) - f(\tau) & \text{je-li } \xi_1 = \tau. \end{cases}$$

Díky spojitosti funkce f v bodě τ zprava můžeme tedy k danému $\varepsilon > 0$ vždy najít dělení σ_ε takové, že bude

$$|S(\sigma, \xi)| < \varepsilon \text{ pro všechna } (\sigma, \xi) \in \mathcal{T}[\tau, b] \text{ taková, že } \sigma \supset \sigma_\varepsilon, \text{ tj.}$$

$$(\sigma) \int_{\tau}^b g \, d f = 0 \quad \text{a} \quad (\sigma) \int_a^b g \, d f = f(\tau) - f(a).$$

Platí tedy tvrzení (i). Druhé tvrzení by se dokazovalo podobně. □

5.55. Cvičení. (i) Pro oba typy RS - integrálu dokažte:

Jestliže $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ má konečnou variaci na $[a, b]$ a je spojitá na $[a, b]$, pak integrál $\int_a^b f \, d g$ existuje pro každou funkci g regulovanou na $[a, b]$.

(ii) Proveďte podrobný důkaz tvrzení (ii) věty 5.54.

5.56. Poznámka. Připomeňme ještě bez důkazu jeden ze známých zajímavých existenčních výsledků. Důkaz náleží L.C. Youngovi, jednomu z klasiků teorie integrace, a lze ho najít v jeho práci [62] z roku 1936.

Jestliže funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ splňují podmínky

$$|f(x) - f(y)| \leq K |x - y|^\alpha \quad \text{a} \quad |g(x) - g(y)| \leq L |x - y|^\beta \quad \text{pro } x, y \in [a, b],$$

kde $K, L \in [0, \infty)$, $\alpha, \beta \in (0, \infty)$, $\alpha + \beta > 1$, pak existuje integrál $(\delta) \int_a^b f \, d g$.

5.7 Bodová konvergence

Důkaz věty o konvergenci posloupnosti integrálů $\int_a^b f_n \, dg$, ve které by nebyla nutná stejnoměrná konvergence $f_n \Rightarrow f$ nám usnadní zavedení Darbouxových horních a dolních integrálů.

5.57. Definice. Nechť $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je neklesající na $[a, b]$. Pro libovolné dělení σ intervalu $[a, b]$ a funkci $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ položme

$$\overline{S}_{f\Delta g}(\sigma) = \sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} \left(\sup_{x \in [\sigma_{j-1}, \sigma_j]} f(x) \right) [g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})]$$

a

$$\underline{S}_{f\Delta g}(\sigma) = \sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} \left(\inf_{x \in [\sigma_{j-1}, \sigma_j]} f(x) \right) [g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})]$$

a definujeme

$$\overline{\int}_a^b f \, dg = \inf \left\{ \overline{S}_{f\Delta g}(\sigma) : \sigma \in \mathcal{D}[a, b] \right\}$$

a

$$\underline{\int}_a^b f \, dg = \sup \left\{ \underline{S}_{f\Delta g}(\sigma) : \sigma \in \mathcal{D}[a, b] \right\}.$$

Veličiny $\overline{\int}_a^b f \, dg$ resp. $\underline{\int}_a^b f \, dg$ nazýváme *horní resp. dolní integrál* f vzhledem ke g .

5.58. Lemma. Nechť $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je neklesající na $[a, b]$ a $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Potom platí

$$\overline{\int}_a^b f \, dg = \underline{\int}_a^b f \, dg = I \in \mathbb{R} \tag{5.37}$$

právě tehdy, když

$$(\sigma) \int_a^b f \, dg = I.$$

D ů k a z . a) Protože g je neklesající, plyne přímo z definice 5.57, že

$$\underline{S}_{f\Delta g}(\sigma) \leq S_{f\Delta g}(\sigma, \xi) \leq \overline{S}_{f\Delta g}(\sigma) \quad \text{pro } \sigma \in \mathcal{D}[a, b] \text{ a } \xi \in \tau(\sigma),$$

a

$$\tilde{\sigma} \supset \sigma \implies \left(\underline{S}_{f\Delta g}(\tilde{\sigma}) \geq \underline{S}_{f\Delta g}(\sigma) \text{ a } \overline{S}_{f\Delta g}(\tilde{\sigma}) \leq \overline{S}_{f\Delta g}(\sigma) \right).$$

Pomocí těchto základních faktů není obtížné ověřit (proved' te !), že platí-li (5.37), pak pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje dělení $\sigma^k \in \mathcal{D}[a, b]$ takové, že nerovnosti

$$I - \frac{1}{k} < \underline{S}_{f\Delta g}(\sigma^k) \leq S_{f\Delta g}(\sigma^k, \xi^k) \leq \overline{S}_{f\Delta g}(\sigma^k) < I + \frac{1}{k}.$$

platí pro každé $\xi^k \in \tau(\sigma^k)$. Pro dané $\varepsilon > 0$ zvolme $k_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$ a polořme $\sigma_\varepsilon = \sigma^{k_\varepsilon}$. Potom bude pro každé $\sigma \supset \sigma_\varepsilon$ a $\xi \in \tau(\sigma)$ platit

$$I - \varepsilon < \underline{S}(\sigma^{k_\varepsilon}) \leq \underline{S}(\sigma) \leq S(\sigma, \xi) \leq \overline{S}(\sigma) \leq \overline{S}(\sigma^{k_\varepsilon}) < I + \varepsilon.$$

Odtud plyne rovnost $(\sigma) \int_a^b f \, dg = I$.

b) Předpokládejme nyní, že existuje $(\sigma) \int_a^b f \, dg$.

Buď dáno $\varepsilon > 0$. Podle věty 5.13 existuje dělení σ takové, že nerovnost

$$|S_{f\Delta g}(\sigma, \xi) - S_{f\Delta g}(\sigma, \eta)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

neboli

$$\left| \sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} (f(\xi_j) - f(\eta_j)) [g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

platí pro jakákoliv $\xi, \eta \in \tau(\sigma)$. Přeřchodem k supremům a infimům na každém intervalu $[\sigma_{j-1}, \sigma_j]$ získáme nerovnost

$$\begin{aligned} 0 &\leq \overline{S}_{f\Delta g}(\sigma) - \underline{S}_{f\Delta g}(\sigma) \\ &= \left| \sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} \left(\sup_{x \in [\sigma_{j-1}, \sigma_j]} f(x) - \inf_{x \in [\sigma_{j-1}, \sigma_j]} f(x) \right) [g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Odtud dostáváme, že

$$\int_a^{\bar{b}} f \, dg \leq \bar{S}_{f\Delta g}(\sigma) < \underline{S}_{f\Delta g}(\sigma) + \varepsilon \leq \int_a^b f \, dg + \varepsilon$$

a tudíž

$$0 \leq \int_a^{\bar{b}} f \, dg - \int_a^b f \, dg < \varepsilon.$$

Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, znamená to, že platí (5.37). \square

5.59. Poznámka. Jestliže $\int_a^{\bar{b}} f \, dg = \int_a^b f \, dg = I \in \mathbb{R}$, bývá jejich společná hodnota I nazývána *Darbouxův - Stieltjesův integrál*. Lemma 5.58 říká, že tento integrál je ekvivalentní se (σ) RS - integrálem.

Nyní dokážeme dvě hlavní věty tohoto odstavce: Osgoodovu větu o dominované konvergenci a Hellyovu větu o konvergenci. Obě tyto věty platí ve stejném znění pro oba typy RS - integrálů.

5.60. Věta (OSGOODOVA KONVERGENČNÍ VĚTA). *Předpokládejme, že funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a posloupnost $\{f_n\}$ funkcí definovaných na $[a, b]$ splňují*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad a \quad |f_n(x)| \leq M < \infty \quad \text{pro } x \in [a, b] \quad a \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.38)$$

Dále, nechť funkce $g \in \mathbb{BV}[a, b]$ je taková, že integrály $\int_a^b f \, dg$ a $\int_a^b f_n \, dg$ existují pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. Potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n \, dg = \int_a^b f \, dg. \quad (5.39)$$

D ů k a z. a) Podle důsledku 5.39 integrál $\int_a^b |f_n(x) - f(x)| \, d[\text{var}_a^x g]$ existuje pro každé $n \in \mathbb{N}$ a platí nerovnost

$$\left| \int_a^b f_n(x) \, dg(x) - \int_a^b f(x) \, dg(x) \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| \, d[\text{var}_a^x g]. \quad (5.40)$$

Stačí tedy dokázat, že tvrzení věty je pravdivé, když funkce f_n jsou nezáporné, $f = 0$ a g je neklesající. K tomu budeme potřebovat následující tvrzení z teorie

množin známé jako Arzelàovo lemma. Jeho důkaz lze nalézt např. v [14, lemma II.15.8].

Lemma. (ARZELÀ). *Nechť $\{ \{ J_{k,j} \} : k \in \mathbb{N}, j \in U_k \}$ je posloupnost konečných množin podintervalů $[a, b]$ takových, že*

$$\sum_{j \in U_k} |J_{k,j}| > C > 0 \quad \text{pro každé } k \in \mathbb{N}.$$

Potom existují posloupnosti indexů $\{k_\ell\}$ a $\{j_\ell\}$ takové, že $j_\ell \in U_{k_\ell}$ pro každé $\ell \in \mathbb{N}$ a $\bigcap_{\ell \in \mathbb{N}} J_{k_\ell, j_\ell} \neq \emptyset$.

b) Předpokládejme tedy, že g je neklesající na $[a, b]$ a $\{f_n\}$ je posloupnost funkcí definovaných na $[a, b]$ a takových, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \quad \text{a} \quad 0 \leq f_n(x) \leq M < \infty \quad \text{pro } x \in [a, b] \text{ a } n \in \mathbb{N}.$$

Dokážeme, že musí platit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n \, dg = 0. \quad (5.41)$$

Důkaz provedeme sporem. Nechť tedy neplatí (5.41). Potom existují $\varepsilon > 0$ a posloupnost $\{n_k\}$ takové, že

$$\int_a^b f_{n_k} \, dg > \varepsilon \quad \text{pro všechna } k \in \mathbb{N}.$$

Vzhledem k definici 5.57 to znamená, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $\sigma^k \in \mathcal{D}[a, b]$ takové že $\underline{S}_k(\sigma^k) > \varepsilon$, kde značíme $\underline{S}_k(\sigma^k) = \underline{S}_{f_{n_k} \Delta g}(\sigma^k)$. Položme ještě $m_k = \nu(\sigma^k)$ a $\varphi_{k,j} = \inf_{x \in [\sigma_{j-1}^k, \sigma_j^k]} f_{n_k}(x)$ pro $k \in \mathbb{N}$ a $j \in \{1, 2, \dots, m_k\}$.

Pro dané $\eta > 0$ označme U_k množina indexů j takových, že $\varphi_{k,j} > \eta$, zatímco $V_k = \{1, 2, \dots, m_k\} \setminus U_k$. Zřejmě

$$M \sum_{j \in U_k} [g(\sigma_j^k) - g(\sigma_{j-1}^k)] + \eta \sum_{j \in V_k} [g(\sigma_j^k) - g(\sigma_{j-1}^k)] > \varepsilon$$

neboli

$$M \sum_{j \in U_k} [g(\sigma_j^k) - g(\sigma_{j-1}^k)] > \varepsilon - \eta [g(b) - g(a)].$$

Pro $\eta = \frac{\varepsilon}{2[g(b) - g(a)]}$ dostaneme

$$\sum_{j \in U_k} [g(\sigma_j^k) - g(\sigma^{j-1})] > \frac{\varepsilon}{2M} > 0$$

neboli

$$\sum_{j \in U_k} |J_{k,j}| > \frac{\varepsilon}{2M} > 0, \quad \text{kde } J_{k,j} = [g(\sigma_{j-1}^k), g(\sigma_j^k)] \quad \text{pro } j \in U_k.$$

Podle Arzelàova lemmatu tedy existují bod y_0 a posloupnosti $\{k_\ell\}$ a $\{j_\ell\}$ takové, že $j_\ell \in U_{k_\ell}$ pro každé $\ell \in \mathbb{N}$ a $y_0 \in \bigcap_{\ell \in \mathbb{N}} J_{k_\ell, j_\ell}$ neboli

$$y_0 \in [g(\sigma_{j_\ell-1}^{k_\ell}), g(\sigma_{j_\ell}^{k_\ell})], \quad \text{kde } j_\ell \in U_{k_\ell} \text{ pro každé } \ell \in \mathbb{N}.$$

Protože g je neklesající na $[a, b]$, existuje právě jeden bod $x_0 \in [a, b]$ takový, že

$$y_0 \in [g(x_0-), g(x_0+)], \quad x_0 \in [\sigma_{j_\ell-1}^{k_\ell}, \sigma_{j_\ell}^{k_\ell}] \quad \text{a } j_\ell \in U_{k_\ell} \text{ pro každé } \ell \in \mathbb{N}.$$

Podle definice množin U_k to znamená, že $f_{n_{k_\ell}}(x_0) > \eta$ pro každé $\ell \in \mathbb{N}$. To ale není možné vzhledem k předpokladu $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. Platí tedy (5.41).

c) Podle části b) důkazu a lemmatu 5.58 máme

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)| \, d[\text{var}_a^x g] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) \, d[\text{var}_a^x g] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) \, dg(x) = 0 \end{aligned}$$

a tudíž ze vztahu (5.40) bezprostředně vyplývá, že platí také

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n \, dg = \int_a^b f \, dg.$$

Tím je důkaz dokončen. □

Další věta o konvergenci posloupnosti integrálů $\left\{ \int_a^b f \, dg_n \right\}$ je svým způsobem symetrická ke větě Osgoodově. Z jejího důkazu bude zřejmé, že platí pro oba integrály.

5.61. Věta (HELLYOVA VĚTA O KONVERGENCI). *Nechť funkce $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a posloupnost $\{g_n\} \subset \mathbb{B}\mathbb{V}[a, b]$ jsou takové, že*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x) \text{ pro } x \in [a, b] \quad \text{a} \quad \text{var}_a^b g_n \leq \gamma < \infty.$$

Potom $\text{var}_a^b g \leq \gamma$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f \, d g_n = \int_a^b f \, d g$ platí pro každou funkci f spojitou na $[a, b]$.

D ů k a z. a) Pro každé dělení $\sigma \in \mathcal{D}[a, b]$ a každé $n \in \mathbb{N}$ máme

$$V(g_n, \sigma) \leq \text{var}_a^b g_n \leq \gamma.$$

Proto také

$$V(g, \sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} V(g_n, \sigma) \leq \gamma$$

a tudíž $\text{var}_a^b g \leq \gamma$.

b) Všechny integrály $\int_a^b f \, d g_n$, $n \in \mathbb{N}$, a $\int_a^b f \, d g$ existují podle věty 5.53.

Bud' dáno $\varepsilon > 0$. Ze spojitosti funkce f na $[a, b]$ plyne, že existuje dělení $\sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m\} \in \mathcal{D}$ takové, že pro každé $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ platí

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3\gamma} \quad \text{pro všechny } x, y \in [\sigma_{j-1}, \sigma_j]. \quad (5.42)$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \left(\int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} f(x) \, d g_n(x) - f(\sigma_j) \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} d g_n(x) \right) \\ &= \sum_{j=1}^m \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} (f(x) - f(\sigma_j)) \, d g_n(x), \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x) \, d g_n(x) - \sum_{j=1}^m f(\sigma_j) [g_n(\sigma_j) - g_n(\sigma_{j-1})] \\ &= \sum_{j=1}^m \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} (f(x) - f(\sigma_j)) \, d g_n(x). \end{aligned}$$

Pomocí (5.42) a lemmatu 5.9 tedy dostaneme

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f(x) \, d g_n(x) - S_{f \Delta g_n}(\sigma, \xi) \right| \\ & \leq \frac{\varepsilon}{3\gamma} \sum_{j=1}^m |[g_n(\sigma_j) - g_n(\sigma_{j-1})]| \leq \frac{\varepsilon}{3\gamma} \gamma = \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Podobně odvodíme i analogickou nerovnost s funkcí g na místě g_n , tj.

$$\left| \int_a^b f(x) \, d[g(x)] - S_{f \Delta g}(\sigma, \xi) \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Protože $g_n(x) \rightarrow g(x)$ pro každé $x \in [a, b]$, snadno ověříme také rovnost

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |S_{f \Delta g_n}(\sigma, \xi) - S_{f \Delta g}(\sigma, \xi)| = 0.$$

Existuje tedy $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$|S_{f \Delta g_n}(\sigma, \xi) - S_{f \Delta g}(\sigma, \xi)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pro } n \geq n_0.$$

Pomocí posledních tří nerovností konečně uzavřeme důkaz:

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f \, d g_n - \int_a^b f \, d g \right| \leq \left| \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} f \, d g_n - S_{f \Delta g_n}(\sigma, \xi) \right| \\ & \quad + |S_{f \Delta g_n}(\sigma, \xi) - S_{f \Delta g}(\sigma, \xi)| + |S_{f \Delta g}(\sigma, \xi) - \int_a^b f \, d g| < \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

5.8 Další věty o existenci integrálu

5.62. Věta. *Jestliže integrál $\int_a^b f \, d g$ existuje pro každou funkci f spojitou na $[a, b]$, pak g má konečnou variaci na $[a, b]$.*

Důkaz se opírá o následující dvě pomocná tvrzení.

Tvrzení 1. *Je-li $a_n \geq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, pak existuje posloupnost $\{c_n\}$ taková, že platí*

$$c_n > 0 \text{ pro všechna } n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0 \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n = \infty. \quad (5.43)$$

D ů k a z . Označíme-li $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ pro $n \in \mathbb{N}$, bude posloupnost $\{s_n\}$ neklesající a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty. \quad (5.44)$$

Speciálně, pro dostatečně velká n ($n \geq n_0$) bude $s_n > 0$. Můžeme tudíž definovat

$$c_n = \begin{cases} 1 & \text{pro } n < n_0, \\ \frac{1}{s_n} & \text{pro } n \geq n_0. \end{cases}$$

Zřejmě je $c_n > 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$. Na druhou stranu, pro libovolná $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n \geq n_0$ máme

$$\sum_{k=n}^m c_k a_k = \sum_{k=n}^m \frac{a_k}{s_k} \geq \frac{\sum_{k=n}^m a_k}{s_m} = 1 - \frac{s_{n-1}}{s_m}.$$

Vzhledem k (5.44), pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $m_n > n$ takové, že je $\frac{s_{n-1}}{s_{m_n}} < \frac{1}{2}$, tj.

$$\sum_{k=n}^{m_n} c_k a_k > \frac{1}{2}.$$

To ovšem znamená, že musí platit ((5.43)).

Tvrzení 2. *Nechť $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b]$ a*

$$\text{var}_x^{x_0} g = \infty \quad \text{pro každé } x \in [a, x_0). \quad (5.45)$$

Potom existuje rostoucí posloupnost $\{x_k\}$ bodů v $(0, x_0)$ taková, že

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0 \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| = \infty. \quad (5.46)$$

D ů k a z . $\alpha)$ Předpokládejme nejprve, že je

$$\sup\{|g(x)| : x \in [y, x_0]\} = \infty \quad \text{pro všechna } y \in [a, x_0). \quad (5.47)$$

Všimněme si, že pro libovolné $y \in [a, x_0)$ je

$$\sup\{|g(x)| : x \in [y, x_0]\} = \infty \iff \sup\{|g(x)| : x \in (y, x_0)\} = \infty.$$

(Kdyby bylo $\sup\{|g(x)| : x \in [y, x_0]\} = \infty$, musel by existovat bod $x \in (y, x_0)$ takový, že

$$|g(x)| \geq \max\{|g(y)|, |g(x_0)|\}.$$

(Připomeňme si, že hodnoty $g(x)$ jsou konečné pro každé $x \in [a, b]$.) Vzhledem k (5.47) můžeme vybrat body $x_k \in (y, x_0)$, $k \in \mathbb{N}$, tak, aby bylo

$$|g(x_1)| > 1, \quad x_k > \max\{x_{k-1}, x_0 - \frac{1}{k}\}$$

a

$$|g(x_k)| > |g(x_{k-1})| + 1 \quad \text{pro } k = 2, 3, \dots$$

Zřejmě $\{x_k\}$ je rostoucí, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$ a

$$\sum_{k=1}^{\infty} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| \geq \sum_{k=1}^{\infty} (|g(x_{k+1})| - |g(x_k)|) > \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty.$$

Posloupnost $\{x_k\}$ je neklesající a splňuje (5.46).

β) Nechť (5.47) neplatí. Potom existuje $y_1 \in [a, x_0)$ takové, že

$$0 \leq g^* := \sup\{|g(x)| : x \in [y_1, x_0]\} < \infty. \quad (5.48)$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $y_1 > x_0 - 1$. Podle (5.45) máme také

$$\text{var}_{y_1}^{x_0} g = \infty.$$

Existuje tedy dělení $\sigma^1 = \{\sigma_0^1, \sigma_1^1, \dots, \sigma_{m_1}^1\}$ intervalu $[y_1, x_0]$ takové, že

$$V(g, \sigma^1) > 1 + 2g^*.$$

Vzhledem k (5.48) tedy máme

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{m_1-1} |g(\sigma_j^1) - g(\sigma_{j-1}^1)| \\ & > 1 + 2g^* - |g(x_0)| - |g(\sigma_{m_1-1}^1)| \geq 1 + 2g^* - 2g^* = 1. \end{aligned}$$

Položme

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1, \quad x_k = \sigma_{k-1}^1 \quad \text{pro } k = 2, \dots, m_1, \\ y_2 &= \max\{x_{m_1-1}, x_0 - \frac{1}{2}\} \quad \text{a } r_1 = m_1 - 1. \end{aligned}$$

Máme opět

$$\text{var}_{y_2}^{x_0} g = \infty.$$

Existuje tedy $\sigma^2 = \{\sigma_0^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_{m_2}^2\} \in \mathcal{D}[y_2, x_0]$ pro nějž

$$V(g, \sigma^2) > 1 + 2g^*.$$

Tudíž, podle (5.48), dostaneme

$$\sum_{j=1}^{m_2-1} |g(\sigma_j^2) - g(\sigma_{j-1}^2)| \geq 1 + 2g^* - |g(x_0)| - |g(\sigma_{m_2-1}^2)| \geq 1.$$

Položme $r_2 = m_1 + m_2 - 1$, $x_k = \sigma_{k-r_1}^2$ pro $k = r_1 + 1, r_1 + 2, \dots, r_2$, a $y_3 = \max\{x_{r_2}, x_0 - \frac{1}{3}\}$. (Všimněme si, že $x_{r_1+1} = y_2 = \sigma_0^2$.)

Nyní, nechť $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$ a $r_i, y_i, i = 1, 2, \dots, n-1$ a $x_k, k = 1, 2, \dots, r_{n-1}$, jsou takové, že $x_{r_{i-1}+1} = y_{i-1}$, $x_k \in (y_{i-1}, y_i]$ pro $k = r_{i-1} + 2, \dots, r_i$ a

$$y_i = \max\{x_{r_{i-1}}, x_0 - \frac{1}{i}\}, \quad \sum_{k=r_{i-1}}^{r_i-1} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| \geq 1$$

pro $i = 1, 2, \dots, n-1$. Položme $y_n = \max\{x_{r_{n-1}}, x_0 - \frac{1}{n}\}$. Opět $\text{var}_{y_n}^{x_0} g = \infty$ a v důsledku nerovností (5.48) existuje také $\sigma^n \in \mathcal{D}[y_n, x_0]$, takové, že

$$\sum_{j=1}^{m_n-1} |g(\sigma_j^n) - g(\sigma_{j-1}^n)| \geq 1,$$

kde $m_n = \nu(\text{bsigma}^n)$. Položíme-li

$$r_n = r_{n-1} + m_n - 1 \quad \text{a} \quad x_k = \sigma_{k-r_{n-1}}^n \quad \text{pro} \quad k = r_{n-1} + 1, \dots, r_n,$$

bude platit

$$\sum_{k=r_{n-1}}^{r_n-1} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| \geq 1 \quad \text{a} \quad x_k \geq y_n \geq x_0 - \frac{1}{n} \quad \text{pro} \quad k = r_{n-1}, \dots, r_n.$$

Indukcí jsme tedy zkonstruovali rostoucí posloupnosti $\{r_n\}$, $\{y_n\}$ a $\{x_k\}$ takové, že

$$y_n \in (x_0 - \frac{1}{n}, x_0), \quad \sum_{k=r_{n-1}}^{r_n-1} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| \geq 1 \quad \text{pro} \quad n \in \mathbb{N}$$

a $x_k \geq y_n \geq x_0 - \frac{1}{n}$ pro $k \geq r_{n-1}$. Odtud plyne, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=r_{n-1}}^{r_n-1} |g(x_{j+1}) - g(x_j)| \right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$$

a $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0$. Dokázali jsme tedy, že posloupnost $\{x_k\}$ je rostoucí a splňuje (5.46).

D ů k a z věty 5.62.

Vzhledem k větě 5.5 se můžeme omezit na (σ) -integrál.

Předpokládejme, že $\text{var}_a^b g = \infty$. Díky Heinově-Borelově větě o konečném pokrytí (viz věta 4.6) a větě 2.10 víme, že funkce $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ má konečnou variaci na $[a, b]$ právě tehdy, když platí

$$\text{a } \left. \begin{array}{l} \forall x \in (a, b) \exists \delta_1 \in (0, x - a) : \text{var}_{x - \delta_1}^x g < \infty \\ \forall x \in [a, b) \exists \delta_2 \in (0, b - x) : \text{var}_x^{x + \delta_2} g < \infty . \end{array} \right\} \quad (5.49)$$

Předpoklad, že $\text{var}_a^b g = \infty$ znamená, že existuje $x_0 \in [a, b]$ takové, že pro $x = x_0$ není splněna jedna z podmínek (5.49). Nechť tedy např. $x_0 \in (a, b]$ a nechť pro každé $x \in [a, x_0)$ platí (5.45). Podle tvrzení 2 tedy existuje rostoucí posloupnost $\{x_k\}$ bodů v $(0, x_0)$ taková, že

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0 \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| = \infty.$$

Dále, podle tvrzení 1 existuje posloupnost $\{c_k\}$ kladných čísel taková, že platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 0 \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k |g(x_k) - g(x_{k-1})| = \infty.$$

Položme

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq x_1 \text{ resp. } x \geq x_0 \text{ resp. } x \in \{x_k\}_{k=1}^{\infty}, \\ c_k \text{ sign}(g(x_k) - g(x_{k-1})) & \text{pro } x = \xi_k := \frac{x_k + x_{k-1}}{2} \end{cases}$$

a ve zbývajících bodech intervalu $[a, b]$ dodefinujeme funkci f lineárně. Takto definovaná funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je zřejmě spojitá na $[a, b]$ a přitom pro ní platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(\xi_k) [g(x_{k+1}) - g(x_k)] = \infty.$$

Speciálně, pro každé $M > 0$ existuje $N_M \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{k=1}^{N_M} f(\xi_k) [g(x_{k+1}) - g(x_k)] > M.$$

Pro dané $M > 0$, označme

$$\sigma_M = \{a, x_1, x_2, \dots, x_{N_M}, x_0, b\}, \quad \xi_M = (a, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{N_M}, x_0, b).$$

Potom je $(\sigma_M, \xi_M) \in \mathcal{T} [a, b]$ a

$$S(\sigma_M, \xi_M) = \sum_{k=1}^{N_M} f(\xi_k) [g(x_{k+1}) - g(x_k)] > M.$$

(Připomeňme si, že $f(a) = f(x_1) = f(x_0) = f(b) = 0$.)

To ale znamená, že integrál $(\sigma) \int_a^b f \, d g$ nemůže mít konečnou hodnotu.

Není-li splněna druhá z podmínek v (5.49), tj. existuje $x_0 \in [a, b)$ takové, že $\text{var}_{x_0}^x g = \infty$ pro každé $x \in [x_0, b)$, je třeba místo tvrzení 2 použít jeho vhodnou úpravu. \square

5.63. Cvičení. Zformulujte a dokažte analogii tvrzení 2 potřebnou k dokončení důkazu věty 5.62 jestliže existuje $x_0 \in [a, b)$ takové, že $\text{var}_{x_0}^x g = \infty$ pro každé $x \in [x_0, b)$.

5.64. Věta. *Nechť $f \in \mathbb{G} [a, b]$ a nechť integrál $\int_a^b f \, d g$ existuje pro každou konečnou skokovou funkci g . Potom f je spojitá na $[a, b]$.*

D ů k a z. Opět se můžeme omezit na (σ) RS-integrál. Nechť $x_0 \in (a, b)$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c + d \neq 0$ a nechť funkce $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je definována podobně jako v Poznámce 5.22, tj.

$$g(x) = c \chi_{[a, x_0)}(x) + \frac{c+d}{2} \chi_{[x_0]}(x) + d \chi_{(x_0, b]}(x) \quad \text{pro } x \in [a, b].$$

Podle poznámky 5.22 může integrál $(\sigma) \int_a^b f \, d g$ existovat pouze tehdy, když $f(x_0-) = f(x_0) = f(x_0+)$. Podobně bychom dokázali, že f musí být spojitá i v bodě a zprava a v bodě b zleva. \square

5.9 Věty o střední hodnotě

Věty tohoto odstavce platí ve stejném znění pro oba typy RS - integrálu.

5.65. Věta (O STŘEDNÍ HODNOTĚ). *Je-li f spojitá na $[a, b]$ a g neklesající na $[a, b]$, pak existuje $x_0 \in [a, b]$ takové, že*

$$\int_a^b f \, dg = f(x_0) [g(b) - g(a)]. \quad (5.50)$$

Důkaz z. věta 5.53 zaručuje existenci integrálu $\int_a^b f \, dg$ v obou smyslech. Protože je g neklesající na $[a, b]$, pro každé značené dělení $(\sigma, \xi) \in \mathcal{T}[a, b]$ platí

$$m [g(b) - g(a)] \leq S(\sigma, \xi) \leq M [g(b) - g(a)],$$

kde $m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$ a $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$. Podobně jako při důkazu lemmatu 5.9 plyne odtud, že platí také

$$m [g(b) - g(a)] \leq \int_a^b f \, dg \leq M [g(b) - g(a)],$$

Dále, protože f je spojitá, nabývá všech hodnot z intervalu $[m, M]$. Speciálně, existuje $x_0 \in [a, b]$ takové, že platí (5.50). \square

5.66. Věta (DRUHÁ O STŘEDNÍ HODNOTĚ). *Je-li f spojitá na $[a, b]$ a g neklesající na $[a, b]$, pak existuje $x_0 \in [a, b]$ takové, že*

$$\int_a^b f \, dg = g(a) \int_a^{x_0} f(x) \, dx + g(b) \int_{x_0}^b f(x) \, dx. \quad (5.51)$$

Důkaz z. Funkce f je riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$. Označme

$$h(x) = \int_a^x f(t) \, dt \quad \text{pro } x \in [a, b].$$

Potom podle věty o substituci (věta 5.44, viz též důsledek 5.45), věty o integraci per-partes (věta 5.49) a věty o střední hodnotě (věta 5.65) existuje $x_0 \in [a, b]$ takové, že platí

$$\begin{aligned} \int_a^b f \, dg &= \int_a^b g \, dh = h(b) g(b) - \int_a^b h \, dg \\ &= \left(\int_a^b f \, dx \right) g(b) - \left(\int_a^{x_0} f \, dx \right) [g(b) - g(a)] \\ &= g(a) \int_a^{x_0} f(x) \, dx + g(b) \int_{x_0}^b f(x) \, dx, \end{aligned}$$

tj. platí (5.51). □

5.10 Další integrály Stieltjesova typu

Buďte dány funkce $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a dělení σ intervalu $[a, b]$. Položme

$$S_M(\sigma) = \sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} \frac{f(\sigma_j) + f(\sigma_{j-1})}{2} [g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})],$$

$$S_{CL}(\sigma) = \sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} f(\sigma_{j-1}) [g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})],$$

$$S_{CR}(\sigma) = \sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} f(\sigma_j) [g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})].$$

Dosadíme-li do definice 5.3 $S_M(\sigma)$ resp. $S_{CL}(\sigma)$ resp. $S_{CR}(\sigma)$ místo $S(\sigma, \xi)$ dostaneme po řadě integrály *střední* resp. *levý Cauchyův* resp. *pravý Cauchyův*. Podle způsobu limitního procesu se ovšem rozlišují (δ) nebo (σ) varianty. Je zřejmé, že všechny zobecňují příslušné RS - integrály, pokud jde o třídy integrovatelných funkcí. Ne vždy však zůstanou zachovány všechny vlastnosti RS - integrálů. Např. pro střední integrál neplatí obdoba věty 5.44 o substituci.

Více podrobností lze najít v odstavci II.19 monografie [14] T.H. Hildebrandta.

5.11 Cvičení na závěr

Není-li uvedeno jinak, v následujících cvičeních proveďte diskusi o existenci, případně určete hodnotu, pro každý typ Stieltjesova integrálu z této kapitoly, tj pro integrály (δ) RS, (δ) RS, střední, levý Cauchyův a pravý Cauchyův.

- (i) Nechť $g(x) = \sin x$ pro $x \in [0, \pi]$. Určete hodnotu integrálu $\int_0^\pi x dg$.

- (ii) Nechť $g(x) = \exp(|x|)$ pro $x \in [-1, 1]$. Určete hodnotu integrálu

$$(\delta) \int_{-1}^1 x dg.$$

- (iii) Nechť $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in [0, \frac{1}{2}), \\ c & \text{pro } x = \frac{1}{2}, \\ d & \text{pro } x \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$ Zkoumejte existenci a hodnotu in-

tegrálu $\int_0^1 f dg$ pro různé funkce f v závislosti na c, d .

- (iv) Nechť $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0, \\ 1 & \text{pro } x \geq 0, \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0, \\ 1 & \text{pro } x > 0, \end{cases}$

Zkoumejte existenci a hodnotu integrálů

$$\int_{-1}^1 g df, \int_{-1}^0 g df, \int_0^1 g df, \int_{-1}^1 g dg, \int_{-1}^0 g dg, \int_0^1 g dg.$$

- (v) Nechť $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x = -1, \\ 1 & \text{pro } x \in (-1, 2), \\ -1 & \text{pro } x \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$

Určete hodnotu integrálu $\int_1^3 x dg$.

- (vi) Nechť $g(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ \frac{1}{x} & \text{pro } x \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$

Určete hodnotu integrálu $(\delta) \int_0^1 x^2 dg$.

V této kapitole jsme čerpali z kapitoly II Hildebrandtovy monografie [14], ve které je možno najít i další informace.